

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
Олег КЛЕСОВ
«08» червня 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»**

зі спеціальності 111 «Математика»

**на тему: «Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів
багатовимірної тригонометричної моделі регресії»**

Виконав:

студент II курсу, групи ОМ-01мн
Дикий Олександр Віталійович

Керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Іванов Олександр Володимирович

Рецензент:

Професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

д. ф.-м. н., с. н. с.

Мацак Іван Каленикович

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«03» лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію
Дикому Олександр Віталійовичу

1. Тема дисертації «Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів багатовимірної тригонометричної моделі регресії», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «25» травня 2022 р. № НС/372/2022.
2. Термін подання студентом дисертації 07 червня 2022 року.
3. Об'єкт дослідження польова тригонометрична модель регресії.
4. Предмет дослідження Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії у присутності однорідного та ізотропного випадкового шуму.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 - 1) Поставити польову задачу оцінювання параметрів тригонометричної моделі регресії у присутності однорідного та ізотропного випадкового шуму.
 - 2) Довести рівномірний закон великих чисел для вказаного випадкового шуму.

3) Довести теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів польової тригонометричної моделі регресії.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 19 слайдів.

7. Дата видачі завдання 02 лютого 2022 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	03.02.2022 – 22.02.2022	виконано
2.	Доведення рівномірного закону великих чисел для фінітного перетворення Фур'є одно-рідного та випадкового ізотропного поля	23.02.2022 – 18.04.2022	виконано
3.	Доведення теореми про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів польової тригонометричної моделі регресії	19.04.2022 – 12.05.2022	виконано
4.	Оформлення магістерської дисертації	13.05.2022 – 06.06.2022	виконано

Студент

Олександр ДИКИЙ

Науковий керівник дисертації

Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 55 сторінок, 19 слайдів для проектора, 21 першоджерело.

Вивчається властивість сильної консистентності оцінки найменших квадратів невідомих амплітуд та кутових частот польової тригонометричної моделі регресії з неперервним M -вимірним параметром, де випадковий шум є однорідним або однорідним та ізотропним сильно залежним випадковим полем, означеним на \mathbb{R}^M , $M \geq 3$.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до параметричної множини, де шукається оцінка найменших квадратів, та випадкового шуму, за яких оцінка найменших квадратів невідомих параметрів суми M -вимірних гармонічних коливань є сильно консистентною.

Завданням роботи є отримання результату про сильну консистентність оцінки найменших квадратів польової тригонометричної функції регресії. Об'єктом дослідження є частково нелінійна польова модель регресії, тобто модель «сигнал + шум». Предметом дослідження є властивість сильної консистентності оцінки найменших квадратів параметрів польової тригонометричної моделі регресії.

Для оцінювання амплітуд та кутових частот тригонометричної моделі використано оцінку найменших квадратів у сенсі Бріллінжера, тобто розглянуто спеціальну сім'ю параметричних множин, які розрізняють належним чином кутові частоти в сумі багатопараметричних гармонічних коливань.

Доведено теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів польової тригонометричної моделі регресії за вказаними припущеннями щодо випадкового поля, що моделює випадковий шум. Для отримання цього результату було доведено рівномірний посилений закон великих чисел для фінітного перетворення Фур'є однорідного та ізотропного сильно залежного випадкового поля.

Ключові слова: тригонометрична модель регресії, однорідне та ізотропне випадкове поле, оцінка найменших квадратів, амплітуди та кутові частоти гармонічного коливання, сильна консистентність.

Abstract

Master degree thesis contains 55 pages, 19 slides for projector, 21 primary sources.

The least squares estimate property of strong consistency of the unknown amplitudes and angular frequencies of a field trigonometric regression model with continuous M -dimensional parameter, where random noise is homogeneous or homogeneous and isotropic strongly dependent random field defined in Euclidean space of dimension $M \geq 3$.

The goal of the work is obtaining the requirements to parametric set, where the least squares estimate is sought, and to the spectral density of random noise.

The task of the research is receiving result on the least squares estimate strong consistency of the field trigonometric regression function. A partially nonlinear field regression model is the research object, that is the model «signal + noise». Strong consistency of the least squares estimate of a field trigonometric regression model parameters is the subject of the research.

To estimate the amplitudes and angular frequencies of the trigonometric model we use the least squares estimate in the Brillinger sense, that is special family of parametric sets is considered, which distinguish properly angular frequencies in the sum of multiparametric harmonic oscillations.

Theorem on the strong consistency of the least squares estimate of the field trigonometric regression model parameters under indicated assumptions on the random field that modeling random noise is proved. To obtain this result, an uniform strong law of large numbers was proved for the homogeneous and isotropic strongly dependent random field finite Fourier transform.

Key words: trigonometric regression model, homogeneous and isotropic random field, the least squares estimate, amplitudes and angular frequencies of harmonic oscillations, strong consistency.

Зміст

Вступ.....	7
1 Постановка задачі.....	9
2 Рівномірний закон великих чисел для фінітного перетворення Фур'є випадкового шуму.....	13
3 Доведення теореми про сильну консистентність параметрів польової тригонометричної моделі регресії.....	42
Висновки	53
Список використаних джерел	54

Вступ

У роботі розглядається тригонометрична модель регресії на $\mathbb{R}_+^M = [0, \infty)^M$, $M \geq 3$, в якій під знаками косинусів і синусів знаходяться лінійні форми з невідомими коефіцієнтами, що є частотами суми багатовимірних гармонічних коливань. Крім того, шум є однорідним або однорідним та ізотропним (див. М. І. Yadrenko [1]; А. V. Ivanov, N. N. Leonenko [2]) гауссівським випадковим полем, що задовольняє деяким умовам на коваріаційну функцію.

В основному за останні три десятиліття у випадку $M = 2$ дискретні модифікації такої тригонометричної моделі були досліджені у численних публікаціях з обробки сигналів, завдяки їх застосуванню до аналізу текстур (див., наприклад, J. M. Francos, A. Z. Meiri, B. Porat [3]; T. Yuan, T. Subba Rao [4]; H. Zhang, V. Mandrekar [5]; S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava [6]), зокрема, для обробки симетричних текстурованих зображень. Ця проблема становить значний інтерес у спектральному аналізі (див. P. Malliavan [7], [8]). Див. також S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava [6] та цитовані там публікації з цього питання.

У роботах А. V. Ivanov, О. V. Malyar [9]; А. V. Ivanov, О. V. Lyman [10] доведено сильну консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів (ОНК) амплітуд і кутових частот синусоїдної моделі на площині ($M = 2$) з описаним вище гауссівським випадковим полем. З математичної точки зору така постановка задачі оцінювання для $M \geq 2$ є природним узагальненням задачі виявлення прихованих періодичностей ($M = 1$), див., наприклад, А. V. Ivanov [11]; А. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky [12] та посилання в них. У статті А. V. Ivanov, I. M. Savych [13] отримано асимптотичну нормальність ОНК в аналогічній моделі для $M \geq 3$.

У дискретних моделях з двоїндексними незалежними та однаково розподіленими випадковими помилками спостережень асимптотичні

властивості ОНК були проаналізовані в С. R. Rao, L. C. Zhao, B. Zhou [14]; D. Kundu, A. Mitra [15]. Ці результати узагальнено в D. Kundu, S. Nandi [16] для випадкових шумів, що утворюють дискретне лінійне однорідне поле на площині.

Важливо зазначити, що в роботі D. R. Brillinger [17] розглядається багатопараметричне гармонічне коливання, яке спостерігається дискретно на фоні однорідного випадкового поля, котре має спектральні щільності всіх порядків. Для цієї регресійної моделі сформульовано деякі асимптотичні результати щодо поведінки періодограмної оцінки та ОНК невідомих параметрів. Крім того, у книзі П. С. Кнопова [18] досліджується проблема оцінки кутових частот періодичного за багатьма змінними сигналу, що спостерігається на фоні однорідного випадкового шуму, який задовольняє умову сильного перемішування.

1 Постановка задачі

Позначимо $\langle \varphi, t \rangle = \sum_{l=1}^M \varphi_l t_l$ скалярний добуток векторів $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)$ і $t = (t_1, t_2, \dots, t_M)$ в \mathbb{R}^M , $M \geq 1$.

Припустимо, що ми спостерігаємо випадкове поле

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^M, \quad (1.1)$$

де

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^N (A_k^0 \cos \langle \varphi_k^0, t \rangle + B_k^0 \sin \langle \varphi_k^0, t \rangle), \quad (1.2)$$

$$\varphi_k^0 = (\varphi_{1k}^0, \varphi_{2k}^0, \dots, \varphi_{Mk}^0), \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_{M+2}^0, \dots, \theta_{(M+2)(N-1)+1}^0, \dots, \theta_{(M+2)(N-1)+M+1}^0, \theta_{(M+2)N}^0) = \\ &= \left(\underbrace{A_1^0, B_1^0, \varphi_{11}^0, \dots, \varphi_{M1}^0}_{M+2 \text{ параметра}}, \dots, \underbrace{A_N^0, B_N^0, \varphi_{1N}^0, \dots, \varphi_{MN}^0}_{M+2 \text{ параметра}} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 = (C_k^0)^2 > 0$, $k = \overline{1, N}$, – вектор істинних значень невідомих параметрів. Число $N \geq 1$ відоме; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^M\}$ є випадковим шумом, визначеним на повному ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) . Зробимо наступне припущення.

A. ε – неперервне в середньому квадратичному та майже напевно (м.н.) неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім і коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}^M$, що задовольняє одну з умов:

- (i) ε – ізотропне поле і $B(t) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|)/\|t\|^\alpha$, $\alpha \in \left(0, M - \left[\frac{M}{2}\right]\right)$, $\|t\| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$ з неспадною повільно змінною на нескінченності функцією L ;
- (ii) $B \in L_1(\mathbb{R}^M)$.

Зауважимо, що функція регресії (1.2) разом із класичною ($M = 1$) тригонометричною функцією регресії для $N \geq 2$ не задовольняє умови жодної загальної теореми про консистентність ОНК параметрів нелінійної

моделі регресії (див., наприклад, А. V. Ivanov, N. N. Leonenko [2]; А. V. Ivanov [19]). Для доведення консистентності параметрів (1.4) ОНК доцільно змінити стандартне означення ОНК за допомогою параметричних множин, які дозволяють досить добре розрізняти параметри (див. А. V. Ivanov, O. V. Malyar [9]; D. R. Brillinger [17]; А. M. Walker [20]).

Щоб визначити цю параметричну множину, перепишемо (1.2) у вигляді

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^N \left(A_k^0 \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) + B_k^0 \sin \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) \right), \quad (1.5)$$

і введемо наступне припущення.

B1. Усі істинні значення частот φ_{lk}^0 , $l = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, N}$, додатні й різні.

Розглянемо простір $\mathbb{R}^{MN} = \underbrace{\mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N}_{M \text{ разів}}$, і в кожному просторі \mathbb{R}^N для

деяких фіксованих чисел $0 \leq \underline{\varphi}_l < \overline{\varphi}_l < \infty$ введемо множини

$$\Lambda_l = \left\{ \varphi_l = (\varphi_{l1}, \dots, \varphi_{lN}) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\varphi}_l < \varphi_{lk} < \overline{\varphi}_l < \infty, k = \overline{1, N} \right\}, \quad l = \overline{1, M}, \quad (1.6)$$

які містять усі відповідні істинні значення частот з **B1**, $\underline{\varphi}_l$, $\overline{\varphi}_l$ – деякі числа.

Позначимо $[0, T]^M = \underbrace{[0, T] \times \dots \times [0, T]}_{M \text{ разів}}$, $T > 0$, сім'ю кубів у \mathbb{R}^M і

введемо функціонал

$$Q_T(\theta) = T^{-M} \int_{[0, T]^M} [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt, \quad dt = \prod_{l=1}^M dt_l. \quad (1.7)$$

Відповідно до стандартного означення випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{11,T}, \dots, \varphi_{M1,T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{1N,T}, \dots, \varphi_{MN,T}) \quad (1.8)$$

називається ОНК параметра θ^0 , якщо він мінімізує функціонал (1.7) у параметричній множині $\Theta^c \subset \mathbb{R}^{(M+2)N}$. В Θ^c амплітуди A_k, B_k , $k = \overline{1, N}$,

можуть набувати будь-яких значень та частоти φ_l , $l = \overline{1, M}$ набувають значення в замкненій множині

$$\Lambda^c = \times_{l=\overline{1, M}} \Lambda_l^c. \quad (1.9)$$

Щоб довести консистентність ОНК θ_T , необхідно забезпечити збіжність при $T \rightarrow \infty$ до нуля м. н. або за ймовірністю (див. А. V. Ivanov, O. V. Malyar [9]; A. V. Ivanov [11]; A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky [12]) величин

$$\frac{\sin T(\varphi_{lk,T} - \varphi_{lj,T})}{T(\varphi_{lk,T} - \varphi_{lj,T})}, \quad \frac{\sin T(\varphi_{lk,T} - \varphi_{lj}^0)}{T(\varphi_{lk,T} - \varphi_{lj}^0)}, \quad k \neq j; \quad (1.10)$$

$$\frac{\sin T\varphi_{lk,T}}{T\varphi_{lk,T}}, \quad l = \overline{1, M}, \quad k, j = \overline{1, N}. \quad (1.11)$$

Однак, використовуючи наведене вище означення ОНК, неможливо перевірити поведінку дробів (1.10), (1.11) при $T \rightarrow \infty$.

У А. М. Walker [20] означення ОНК частот в класичній постановці задачі виявлення прихованих періодичностей модифіковане так, що дроби (1.10), (1.11) прямують до нуля при $T \rightarrow \infty$. У нашій постановці сенс такої модифікації полягає в тому, що ОНК (1.8) означається як точка мінімуму (1.7) в параметричних множинах, що залежать від T і добре розрізняють частоти при $T \rightarrow \infty$.

Услід за D. R. Brillinger [17] розглянемо монотонно неспадні сім'ї відкритих множин $\Lambda_{lT} \subset \Lambda_l$, $l = \overline{1, M}$, $T > T_0 > 0$, такі, що $\cup_{T>T_0} \Lambda_{lT} = \Lambda_l$ і задовольняють наступну умову.

B2. Для $l = \overline{1, M}$, $k, k' = \overline{1, N}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi_l \in \Lambda_{lT}} T|\varphi_{lk} - \varphi_{lk'}| = \infty, \quad k \neq k'; \quad (1.12)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi_l \in \Lambda_{lT}} T\varphi_{lk} = \infty. \quad (1.13)$$

Сенс співвідношень (1.12) і (1.13) полягає в тому, щоб охопити випадки близьких істинних частот і близьких до нуля істинних частот.

Означення 1.1. Будь-який випадковий вектор (1.8) такий, що він є точкою абсолютного мінімуму (1.7) в параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{(M+2)N}$, де амплітуди $A_k, B_k, k = \overline{1, N}$, можуть набувати будь-яких значень, а кутові частоти набувають значень у множині

$$\Lambda_T^c = \times_{l=1, M} \Lambda_{lT}^c, \quad T > T_0 > 0, \quad (1.14)$$

називається ОНК векторного параметра (1.4), отриманою за спостереженнями $\{X(t), t \in [0, T]^M\}$.

Зрозуміло, що додаткова попередня інформація про частоти в моделі (1.1), (1.2) може спростити опис параметричних множин, що містять істинні частоти. Для ілюстрації цієї думки розглянемо наступний приклад.

Приклад 1.1. Припустимо, що покоординатно (див. (1.3))

$$\varphi_k^0 = (\varphi_{1k}^0, \dots, \varphi_{Mk}^0) < (\varphi_{1, k+1}^0, \dots, \varphi_{M, k+1}^0) = \varphi_{k+1}^0, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (1.15)$$

У цьому випадку у якості множин Λ_l ми можемо взяти множини

$$\tilde{\Lambda}_l = \{\varphi_l = (\varphi_{l1}, \dots, \varphi_{lN}) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\varphi}_l < \varphi_{l1} < \dots < \varphi_{lN} < \overline{\varphi}_l < \infty\}, \quad l = \overline{1, M}. \quad (1.16)$$

Відповідні сім'ї монотонно неспадних відкритих множин $\tilde{\Lambda}_{lT} \subset \tilde{\Lambda}_l, l = \overline{1, M}, T > T_0, \cup_{T>T_0} \tilde{\Lambda}_{lT} = \tilde{\Lambda}_l$, задовольняють умову **B2**: для $l = \overline{1, M}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi_l \in \tilde{\Lambda}_{lT}} T(\varphi_{l, k+1} - \varphi_{lk}) = \infty, \quad k = \overline{1, N-1}; \quad (1.17)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi_l \in \tilde{\Lambda}_{lT}} T\varphi_{l1} = \infty. \quad (1.18)$$

Властивість консистентності ОНК θ_T у сенсі означення 1.1 в моделі (1.1) - (1.3) можна отримати шляхом суттєвого ускладнення доведення консистентності в А. V. Ivanov, О. V. Malyar [9] для $M = 2$.

2 Рівномірний закон великих чисел для фінітного перетворення Фур'є випадкового шуму

У цьому розділі доведено рівномірний посилений ЗВЧ для фінітного перетворення Фур'є випадкового поля ε . Позначимо $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M) \in \mathbb{R}^M$.

Теорема 2.1. Якщо виконано умову **A(i)**, то при $T \rightarrow \infty$

$$\xi_M(T) = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^M} T^{-M} \left| \int_{[0, T]^M} e^{i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м. н.} \quad (2.1)$$

Доведення. Будемо доводити цю теорему для випадку $M = 3$, апелюючи час від часу до більших значень M та пояснюючи, який факт ми отримуємо для довільного значення $M > 2$. Позначимо вираз під знаком супремуму в (2.1) $\eta_M(\varphi; T)$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\begin{aligned} \eta_3^2(\varphi; T) &= T^{-6} \int_{[0, T]^6} \exp\{-i\langle \varphi, t - s \rangle\} \times \\ &\quad \times \varepsilon(t_1, t_2, t_3) \varepsilon(s_1, s_2, s_3) dt_1 dt_2 dt_3 ds_1 ds_2 ds_3 = \\ &= T^{-6} \int_{[0, T]^4} \exp\{-i(\varphi_1(t_1 - s_1) + \varphi_2(t_2 - s_2))\} \times \\ &\quad \times \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_3(t_3 - s_3)} \varepsilon(t_1, t_2, t_3) \varepsilon(s_1, s_2, s_3) dt_3 ds_3 \right) dt_1 dt_2 ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Перетворимо внутрішній інтеграл в (2.2):

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_3(t_3 - s_3)} \varepsilon(t_1, t_2, t_3) \varepsilon(s_1, s_2, s_3) dt_3 ds_3 = \\ &= \int_0^T \int_0^{T-u_3} e^{-i\varphi_3 u_3} \varepsilon(t_1, t_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3) dv_3 du_3 + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{T-u_3} \int_0^{T-u_3} e^{i\varphi_3 u_3} \varepsilon(t_1, t_2, v_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3 + u_3) dv_3 du_3. \quad (2.3)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \eta_3^2(\varphi; T) &= T^{-6} \int_0^{T-u_3} \int_0^{T-u_3} e^{-i\varphi_3 u_3} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \varepsilon(t_1, t_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3) dt_2 ds_2 \right) dt_1 ds_1 \right) dv_3 du_3 + \\ &+ T^{-6} \int_0^{T-u_3} \int_0^{T-u_3} e^{i\varphi_3 u_3} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \left(\int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \varepsilon(t_1, t_2, v_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3 + u_3) dt_2 ds_2 \right) dt_1 ds_1 \right) dv_3 du_3 = \\ &= I_3^1 + I_3^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Запишемо доданки I_3^1 та I_3^2 без множника T^{-6} та без двох початкових подвійних інтервалів:

$$\begin{aligned} I_3^1 &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \varepsilon(t_1, t_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3) dt_2 ds_2 \dots = \\ &= \dots \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_2} e^{-i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_1, v_3) dv_2 du_3 \dots + \\ &+ \dots \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_2} e^{i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3) dv_2 du_3 \dots = \\ &= I_{32}^{11} + I_{32}^{12}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
I_3^2 &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_2(t_2-s_2)} \varepsilon(t_1, t_2, v_3) \varepsilon(s_1, s_2, v_3 + u_3) dt_2 ds_2 \dots = \\
&= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_2} e^{-i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2, v_3 + u_3) dv_2 du_2 \dots + \\
&+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_2} e^{i\varphi_2 u_2} \varepsilon(t_1, v_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv_2 du_2 \dots = \\
&= I_{32}^{21} + I_{32}^{22}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Продовжуючи застосування теореми Фубіні, отримуємо далі з (2.5) та (2.6)

$$\begin{aligned}
I_{32}^{11} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_2, v_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
&= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv_1 du_1 \dots + \\
&+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv_1 du_1 \dots = \\
&= I_{321}^{111} + I_{321}^{112}; \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{32}^{12} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
&= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(u_1 + v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv_1 du_1 \dots + \\
&+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) dv_1 du_1 \dots = \\
&= I_{321}^{121} + I_{321}^{122}; \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{32}^{21} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2, v_3 + u_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
&= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(u_1 + v_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots + \\
&+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots = \\
&= I_{321}^{211} + I_{321}^{212}; \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{32}^{22} &= \dots \int_0^T \int_0^T e^{-i\varphi_1(t_1-s_1)} \varepsilon(t_1, v_2, v_3) \varepsilon(s_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dt_1 ds_1 \dots = \\
&= \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{-i\varphi_1 u_1} \varepsilon(u_1 + v_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots + \\
&+ \dots \int_0^T \int_0^{T-u_1} e^{i\varphi_1 u_1} \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dv_1 du_1 \dots = \\
&= I_{321}^{221} + I_{321}^{222}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

В отриманих доданках (2.7) - (2.10) для зручності змінимо індекси за правилом:

$$I_{321}^{ijk} \rightarrow I_{123}^{kji} \rightarrow I^{kji}, \quad i, j, k = 1, 2, \tag{2.11}$$

причому i , або j , або k дорівнюють "1", коли на 1-му, або 2-му, або 3-му місці під знаком ε 1-го множника стоїть сума $v + u$ з відповідними індексами, i дорівнюють "2", коли стоїть змінна v з відповідними індексами.

Тепер всі заміни змінних, які ми робили вище для значення $M = 3$ можна записати у вигляді наступної схеми.

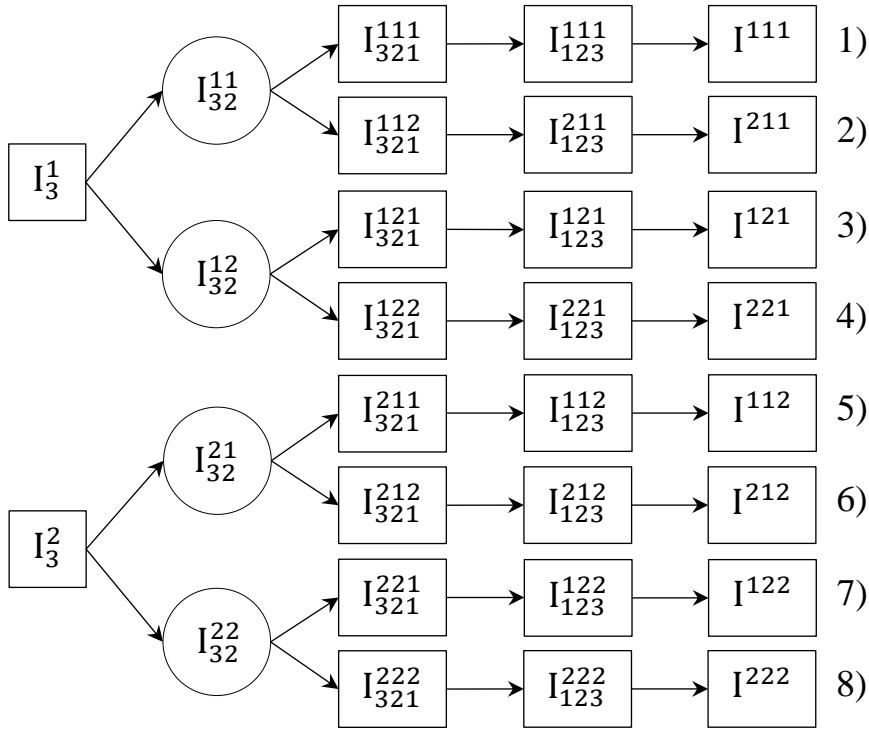


Рис. 2.1. Заміна змінних при $M = 3$.

Ми бачимо, що при $M = 3$ отримаємо $2^3 = 8$ доданків після вказаних заміни змінних. У загальному випадку отримуємо 2^M доданків після аналогічних заміни змінних.

Позначимо $dv = dv_1 dv_2 dv_3$, $du = du_1 du_2 du_3$ та запишемо повністю інтеграли, що перенумеровано на Рис. 2.1.

$$1) I^{111} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(-\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times \\ \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv du ;$$

$$2) I^{211} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times \\ \times \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv du ;$$

$$3) I^{121} = T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(-\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times \\ \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv du ;$$

$$\begin{aligned}
4) I^{221} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3)\} \times \\
&\quad \times \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) dv du; \\
5) I^{112} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(-\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
&\quad \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) dv du; \\
6) I^{212} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
&\quad \times \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) dv du; \\
7) I^{122} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(-\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
&\quad \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dudv; \\
8) I^{222} &= T^{-6} \int_{[0,T]^3} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \exp\{i(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3)\} \times \\
&\quad \times \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) dudv.
\end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що в інтегралах 1) - 8) під знаком експонент стоять «мінуси» перед доданками там, де у 1-му множнику ε записано суми $u + v$ з відповідними індексами, а «плюси» стоять там, де у 1-му множнику ε знаходяться змінні v з відповідними індексами (індекс "2" у позначеннях I там, де стоїть "+" в експоненті; індекс "1" там, де стоїть "-").

Зважаючи на формули 1) - 8), запишемо ці знаки у вигляді наступної таблиці.

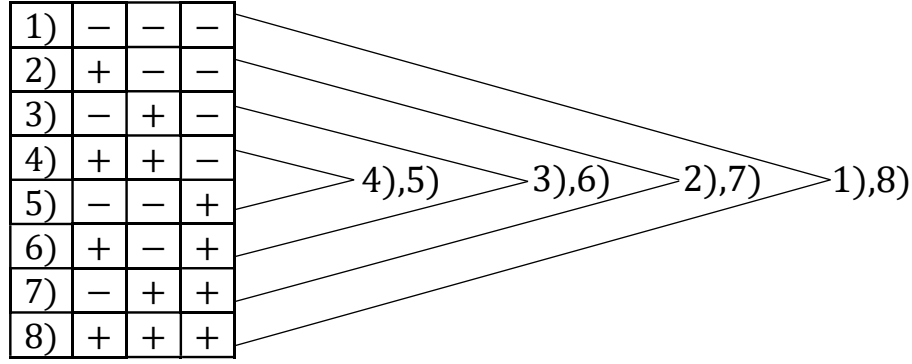


Рис. 2.2. Комплексно спряжені доданки.

Легко побачити, що серед доданків 1) - 8) є 4 пари комплексно спряжених чисел, як це показано на Рис. 2.2. Таким чином,

$$\begin{aligned}
\eta_3^2(\varphi, T) = & 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3) \times \\
& \times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dvdu + \\
& + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(\varphi_1 u_1 - \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3) \times \\
& \times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dvdu + \\
& + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(-\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3) \times \\
& \times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dvdu + \\
& + 2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \cos(\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 - \varphi_3 u_3) \times \\
& \times \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_2, v_2 + u_2, v_3) dvdu. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Далі з (2.12) та теореми Фубіні отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_3^2(T) &= \mathbb{E} \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^3} \eta_3^2(\varphi; T) \leq \\
&\leq 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \times \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(v_1, v_2, v_3) dv \right| du + \\
&+ 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \times \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) dv \right| du + \\
&+ 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \times \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) dv \right| du + \\
&+ 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \mathbb{E} \left| \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} \int_0^{T-u_3} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) \times \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) dv \right| du \leq \\
&\leq 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \sum_{j=1}^4 \Psi_j^{1/2}(u) du. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Користуючись позначеннями

$w = (w_1, w_2, w_3)$, $\Pi_T(u) = [0, T - u_1] \times [0, T - u_2] \times [0, T - u_3]$, запишемо

$$\begin{aligned} \Psi_1(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \times \\ & \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1, w_2, w_3) dv dw; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3) \times \\ & \times \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3) dv dw; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3) \varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3) \times \\ & \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3 + u_3) \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3) dv dw; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_4(u) = & \int_{\Pi_T^2(u)} \mathbb{E} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3) \varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3) \times \\ & \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3) \varepsilon(w_1, w_2, w_3 + u_3) dv dw. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для оцінювання інтегралів (2.14) - (2.17) застосуємо формулу Ісерліса [2].

Якщо $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ – гауссівський вектор з нульовим середнім, то

$$\mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = \mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mathbb{E} \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_3 \mathbb{E} \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \mathbb{E} \varepsilon_1 \varepsilon_4 \mathbb{E} \varepsilon_2 \varepsilon_3. \quad (2.18)$$

За формулою (2.18) отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi_1(u) = & (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, u_3) + \\ & + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\ + & \int_{\Pi_T^2(u)} B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\ & \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) dv dw = \\ & = \Psi_{11}(u) + \Psi_{12}(u) + \Psi_{13}(u); \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(-u_1, u_2, u_3) + \\
&\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
+ \int_{\Pi_T^2(u)} & B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\
&\quad \times B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) dv dw = \\
&= \Psi_{21}(u) + \Psi_{22}(u) + \Psi_{23}(u); \tag{2.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(u_1, -u_2, u_3) + \\
&\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
+ \int_{\Pi_T^2(u)} & B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\
&\quad \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 - u_3) dv dw = \\
&= \Psi_{31}(u) + \Psi_{32}(u) + \Psi_{33}(u); \tag{2.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, -u_3) + \\
&\quad + \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw + \\
+ \int_{\Pi_T^2(u)} & B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 - u_3) \times \\
&\quad \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 + u_3) dv dw = \\
&= \Psi_{41}(u) + \Psi_{42}(u) + \Psi_{43}(u). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Із формул (2.13) та (2.19) - (2.22) випливає, що

$$\mathbb{E}\xi_3^2(T) \leq 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^3 T^{-6} \int_{[0, T]^3} \Psi_{jk}^{1/2}(u) du. \tag{2.23}$$

Оцінімо спочатку величину $\Psi_{13}(u)$. Позначимо

$$\begin{aligned} & B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\ & \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3) = \\ & = b_u^{(1)}(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3). \end{aligned}$$

Застосовуючи відому в теорії стаціонарних процесів заміну змінних, отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi_{13}(u) &= \int_{\Pi_T^2(u)} b_u^{(1)}(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw = \\ &= (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(T-u_1)}^{T-u_1} \int_{-(T-u_2)}^{T-u_2} \int_{-(T-u_3)}^{T-u_3} \left(1 - \frac{|t_1|}{T - u_1}\right) \times \\ & \quad \times \left(1 - \frac{|t_2|}{T - u_2}\right) \left(1 - \frac{|t_3|}{T - u_3}\right) b_u^{(1)}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = \\ & \quad = |t_i \rightarrow Tt_i, \quad i = 1, 2, 3| = \\ & \quad = T^3 (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(1-u_1 T^{-1})}^{1-u_1 T^{-1}} \int_{-(1-u_2 T^{-1})}^{1-u_2 T^{-1}} \int_{-(1-u_3 T^{-1})}^{1-u_3 T^{-1}} \times \\ & \quad \times b_u^{(1)}(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3 \leq \\ & \leq T^3 (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{[-1,1]^3} b_u^{(1)}(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt; \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{13}^{1/2}(u) du = |u_i \rightarrow Tu_i| = 2T^{-3} \int_{[0,1]^3} \psi_{13}^{1/2}(Tu) du \leq \\ & \leq 2 \int_{[0,1]^3} \sqrt{(1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \int_{[-1,1]^3} b_{Tu}^{(1)}(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt} du. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Розглянемо інтеграл під знаком кореня в формулі (2.25):

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]^3} b_{Tu}^{(1)}(Tt)dt &= \int_{[-1,1]^3} \tilde{B}(T\|t+u\|)\tilde{B}(T\|t-u\|)dt = \\
&= \int_{[-1,1]^3} \frac{L(T\|t+u\|)}{T^\alpha\|t+u\|^\alpha} \cdot \frac{L(T\|t-u\|)}{T^\alpha\|t-u\|^\alpha} dt. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Запишемо, у свою чергу, інтеграл (2.26) у вигляді суми $2^3 = 8$ інтегралів, а саме:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 &= \boxed{1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 + \boxed{2} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 + \boxed{3} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 + \boxed{4} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0 + \\
&+ \boxed{5} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1 + \boxed{6} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 + \boxed{7} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 + \boxed{8} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Якщо функція L монотонно не спадає, як це припускається в умові **A(i)**, то чисельники в (2.26) завжди можна оцінити наступним чином:

$$L(T\|t \pm u\|) \leq L(2\sqrt{3}T) < (1 + \varepsilon)L(T) \tag{2.28}$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $T > T(\varepsilon)$.

Знаменники в (2.26) треба оцінювати обережніше. Розглянемо послідовно всі інтеграли правої частини (2.27), у яких завжди $u_1, u_2, u_3 \geq 0$.

1 $t_1, t_2, t_3 \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(T\|t+u\|)\tilde{B}(T\|t-u\|) &\leq \tilde{B}(0)\tilde{B}(T\|t+u\|), \\
&\frac{1}{T^\alpha((t_1+u_1)^2 + (t_2+u_2)^2 + (t_3+u_3)^2)^{\alpha/2}} \leq \frac{1}{T^\alpha\|t\|^\alpha},
\end{aligned}$$

та інтеграл

$$\begin{aligned}
\boxed{1} &\leq \frac{\tilde{B}(0)(1+\varepsilon)L(T)}{T^\alpha} \int_{v(\sqrt{3})} \|t\|^{-\alpha} dt = \\
&= \tilde{B}(0)(1+\varepsilon)J(3)L(T)T^{-\alpha} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^{2-\alpha} d\rho = \\
&= \tilde{B}(0)(1+\varepsilon)J(3) \frac{(\sqrt{3})^{3-\alpha} L(T)}{3-\alpha} \frac{1}{T^\alpha}, \tag{2.29}
\end{aligned}$$

де $J(n) = 2 \frac{\pi^2}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $n \geq 2$ (див. [21], с. 403).

2 $t_1, t_2, t_3 \leq 0$. Тоді

$$\tilde{B}(T\|t + u\|)\tilde{B}(T\|t - u\|) \leq \tilde{B}(0)\tilde{B}(T\|t - u\|),$$

і для інтеграла (2) отримуємо оцінку (2.29).

3 $t_1, \geq 0, t_2 \leq 0, t_3 \leq 0$. Тоді за (2.26)

$$\begin{aligned} \text{3} &\leq \tilde{B}(0)(1 + \varepsilon)L(T)T^{-\alpha} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 ((t_2 - u_2)^2 + (t_3 - u_3)^2)^{-\frac{\alpha}{2}} dt_2 dt_3 \leq \\ &\leq \tilde{B}(0)(1 + \varepsilon)L(T)T^{-\alpha} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 (t_2^2 + t_3^2)^{-\frac{\alpha}{2}} dt_2 dt_3 \leq \\ &= \tilde{B}(0)(1 + \varepsilon)L(T)T^{-\alpha} \int_{v(\sqrt{2})} \|t\|^{-\alpha} dt = \\ &= \tilde{B}(0)(1 + \varepsilon) \frac{2\pi(\sqrt{2})^{2-\alpha}}{2 - \alpha} L(T)T^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

4 $t_1, \leq 0, t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$. Інтеграл оцінюється як **3**.

5 $t_1, \leq 0, t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$. Інтеграл оцінюється як **3**.

6 $t_1, \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \leq 0$. Інтеграл оцінюється аналогічно **3**, але треба скористатися нерівністю

$$\tilde{B}(T\|t + u\|)\tilde{B}(T\|t - u\|) \leq \tilde{B}(0)\tilde{B}(T\|t + u\|).$$

7 $t_1, \geq 0, t_2 \leq 0, t_3 \geq 0$. Інтеграл оцінюється аналогічно **6**.

8 $t_1, \leq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0$. Інтеграл оцінюється аналогічно **6**.

Таким чином, інтеграл під знаком кореня в (2.25) можна оцінити величиною порядку $O(\tilde{B}(T)) = O(L(T)T^{-\alpha})$, що не залежить від змінних $u = (u_1, u_2, u_3)$, як тільки $\alpha < 2 = 3 - \left[\frac{3}{2}\right]$. Це означає, що в правій частині (2.23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{13}^{1/2}(u) du = O\left(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}\right), \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

Розглянемо величину $\Psi_{23}(u)$ аналогічно $\Psi_{13}(u)$. Зараз інтеграл, аналогічний інтегралу (2.26), має вигляд

$$\int_{[-1,1]^3} B(T(t_1 - u_1), T(t_2 + u_2), T(t_3 + u_3)) \times \\ \times B(T(t_1 + u_1), T(t_2 - u_2), T(t_3 - u_3)) dt. \quad (2.32)$$

Маємо послідовно

1) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник у (2.32) оцінюємо $B(0)$, для 1-го отримуємо оцінку (2.30), завдяки тому, що $t_2, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 3 - \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 2$).

2) $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник оцінюємо $B(0)$, для 2-го є вірною оцінка (2.30), так як $t_2, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

3) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (2.29), тому що $t_1 \geq 0$, $t_2 \leq 0$, $t_3 \leq 0$ ($\alpha < 3$).

4) $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (2.30), тому що $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

5) $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (2.30), завдяки тому, що $t_1 \leq 0$, $t_3 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

6) $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (2.30), тому що $t_1 \geq 0$, $t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

7) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (2.30), тому що $t_1 \geq 0$, $t_2 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

8) $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (2.29), тому що $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$ ($\alpha < 3$).

Це означає, що для $\alpha < 3 - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 2$ в (2.23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{23}^{1/2}(u) du = O\left(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}\right) \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Розглянемо величину $\Psi_{33}(u)$ та відповідний аналогічний інтеграл

$$\int_{[-1,1]^3} B(T(t_1 + u_1), T(t_2 - u_2), T(t_3 + u_3)) \times \\ \times B(T(t_1 - u_1), T(t_2 + u_2), T(t_3 - u_3)) dt. \quad (2.34)$$

Отримаємо для нього

1) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник оцінюємо $B(0)$, 1-ий оцінюємо (2.30), так як $t_1, t_3 \geq 0$ ($\alpha < 3 - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 2$).

2) $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, для 2-го множника маємо (2.30), так як $t_1, t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

3) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, для 1-го отримаємо (2.30), завдяки тому, що $t_1 \geq 0$, $t_2 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

4) $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, для 2-го є вірною оцінка (2.29), завдяки нерівностям $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \leq 0$ ($\alpha < 3$).

5) $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий оцінюємо (2.30), тому що $t_2 \leq 0$, $t_3 \geq 0$ ($\alpha < 2$).

6) $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, 2-ий оцінюємо (2.30), тому що $t_2 \geq 0$, $t_3 \leq 0$ ($\alpha < 2$).

7) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 2-й множник $\leq B(0)$, 1-ий множник оцінюємо (2.29), тому що $t_1 \geq 0$, $t_2 \leq 0$, $t_3 \geq 0$ ($\alpha < 3$).

8) $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, а в 2-му $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$, і ми оцінюємо його (2.30) ($\alpha < 2$).

Таким чином, для $\alpha < 3 - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 2$ в (2.23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{33}^{1/2}(u) du = O\left(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}\right), \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Нарешті, розглянемо величину $\Psi_{43}(u)$ та відповідний їй інтеграл

$$\int_{[-1,1]^3} B(T(t_1 + u_1), T(t_2 + u_2), T(t_3 - u_3)) \times \\ \times B(T(t_1 - u_1), T(t_2 - u_2), T(t_3 + u_3)) dt. \quad (2.36)$$

Для цього інтеграла отримуємо

1) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1$. 2-й множник у (2.36) обмежуємо $B(0)$, для 1-го множника маємо оцінку (2.30), тому що $t_1, t_2 \geq 0$ ($\alpha < 3 - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 2$).

2) $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 1-й множник $\leq B(0)$, $t_1, t_2 \leq 0$ у 2-му множнику, і тому він оцінюється (2.30) ($\alpha < 2$).

3) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, а в 1-му $t_1 \geq 0$, $t_3 \leq 0$, тобто є вірною оцінка (2.30) ($\alpha < 2$).

4) $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, в 1-му $t_2 \geq 0$, $t_3 \leq 0$, і ми отримуємо оцінку (2.30) ($\alpha < 2$).

5) $\int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, у 2-му $t_1 \leq 0$, $t_2 \leq 0$, $t_3 \geq 0$, і ми маємо оцінку (2.29) ($\alpha < 3$).

6) $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0$. 2-й множник $\leq B(0)$, та $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \leq 0$ у 1-му множнику. Таким чином, є вірною оцінка (2.29) ($\alpha < 3$).

7) $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, у 2-му $t_2 \leq 0$, $t_3 \geq 0$, і є вірною оцінка (2.30) ($\alpha < 2$).

8) $\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1$. 1-й множник $\leq B(0)$, у 2-му $t_1 \leq 0$, $t_3 \geq 0$, тобто виконується (2.30) ($\alpha < 2$).

Таким чином, для $\alpha < 3 - \left[\frac{3}{2}\right] = 2$ в (2.23)

$$2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{43}^{1/2}(u) du = O\left(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}\right), \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.37)$$

Повертаючись до формул (2.13) - (2.23), з урахуванням співвідношень (2.31), (2.33), (2.35) та (2.37), ми можемо стверджувати, що при $\alpha < 3 - \left[\frac{3}{2}\right] = 2$

$$2 \sum_{j=1}^4 T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{j3}^{1/2}(u) du = O\left(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}\right). \quad (2.38)$$

З іншого боку, з (2.19) - (2.22) випливає, що

$$\begin{aligned} \Psi_{12}(u) &= \Psi_{22}(u) = \Psi_{32}(u) = \Psi_{42}(u) = \\ &= \int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw, \end{aligned} \quad (2.39)$$

тобто в правій частині нерівності (2.23) треба оцінити величину

$$\begin{aligned} &8T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{12}^{1/2}(u) du = \\ &= 8T^{-6} \int_{[0,T]^3} \sqrt{\int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw} du. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Маємо

$$\int_{\Pi_T^2(u)} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) dv dw =$$

$$\begin{aligned}
&= (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-(T-u_1)}^{T-u_1} \int_{-(T-u_2)}^{T-u_2} \int_{-(T-u_3)}^{T-u_3} \left(1 - \frac{|t_1|}{T - u_1}\right) \times \\
&\quad \times \left(1 - \frac{|t_2|}{T - u_2}\right) \left(1 - \frac{|t_3|}{T - u_3}\right) B^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = \\
&= |t_i \rightarrow Tt_i, \quad i = 1, 2, 3| = T^3(T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \times \\
&\times \int_{-(1-u_1T^{-1})}^{1-u_1T^{-1}} \int_{-(1-u_2T^{-1})}^{1-u_2T^{-1}} \int_{-(1-u_3T^{-1})}^{1-u_3T^{-1}} \left(1 - \frac{|t_1|}{1 - u_1T^{-1}}\right) \left(1 - \frac{|t_2|}{1 - u_2T^{-1}}\right) \times \\
&\quad \times \left(1 - \frac{|t_3|}{1 - u_3T^{-1}}\right) B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3 \leq \\
&\leq T^3(T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3.
\end{aligned}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $T > T(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&8T^{-6} \int_{[0, T]^3} \Psi_{12}^{1/2}(u) du = |u_i \rightarrow Tu_i, \quad i = 1, 2, 3| \leq \\
&\leq \left(8T^{-3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{T^3(T - Tu_1)(T - Tu_2)(T - Tu_3)} du \right) \times \\
&\quad \times \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3} = \\
&= \frac{64}{27} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^2(Tt_1, Tt_2, Tt_3) dt_1 dt_2 dt_3 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{64}{27} \tilde{B}(0) \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(T\|t\|) T^{-\alpha} \|t\| dt_1 dt_2 dt_3 \right)^{1/2} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{64}{27} \tilde{B}^{1/2}(0)(1 + \varepsilon)L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2} \left(\int_{V(\sqrt{3})} \|t\|^{-\alpha} dt_1 dt_2 dt_3 \right)^{1/2} = \\
&= \frac{64}{27} \tilde{B}^{1/2}(0)(1 + \varepsilon)J^{1/2}(3) \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^{2-\alpha} d\rho \right)^{1/2} \cdot L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2} = \\
&= O\left(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}\right) \text{ при } T \rightarrow \infty, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

як тільки $\alpha < 3$.

Залишилось розглянути величини

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, u_3), \\
\Psi_{21}(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(-u_1, u_2, u_3), \\
\Psi_{31}(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(u_1, -u_2, u_3), \\
\Psi_{41}(u) &= (T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, -u_3) \tag{2.42}
\end{aligned}$$

та інтеграли від них. Зокрема, маємо для $\alpha < 3$

$$\begin{aligned}
&2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{11}^{1/2}(u) du = \\
&= 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \sqrt{(T - u_1)^2(T - u_2)^2(T - u_3)^2 \tilde{B}^2(\|u\|)} du \leq \\
&\leq 2T^{-3} \int_{[0,T]^3} \tilde{B}(\|u\|) du = |u \rightarrow Tu| = \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{B}(T\|u\|) du = O(L(T)T^{-\alpha}) \text{ при } T \rightarrow \infty, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

як це було доведено вище. Лише треба зауважити, що інтеграли від $\Psi_{21}^{1/2}(u)$, $\Psi_{31}^{1/2}(u)$, $\Psi_{41}^{1/2}(u)$ оцінюються так само, як інтеграл від $\Psi_{11}^{1/2}(u)$ величиною (2.43).

Беручи до уваги нерівність (2.23), ми можемо стверджувати, що для частинного випадку $M = 3$

$$\mathbb{E}\xi_3^2(T) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Як наслідок, за нерівністю Чебишева отримуємо

$$\xi_3(T) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.45)$$

Зосередимось далі на перенесенні доведення збіжності (2.45) на випадок загального M . Заміна змінних аналогічна (2.2) - (2.10) (див. Рис. 2.1) призводить до появи 2^M інтегралів. Ці 2^M інтеграли утворюють 2^{M-1} пар спряжених комплексних чисел.

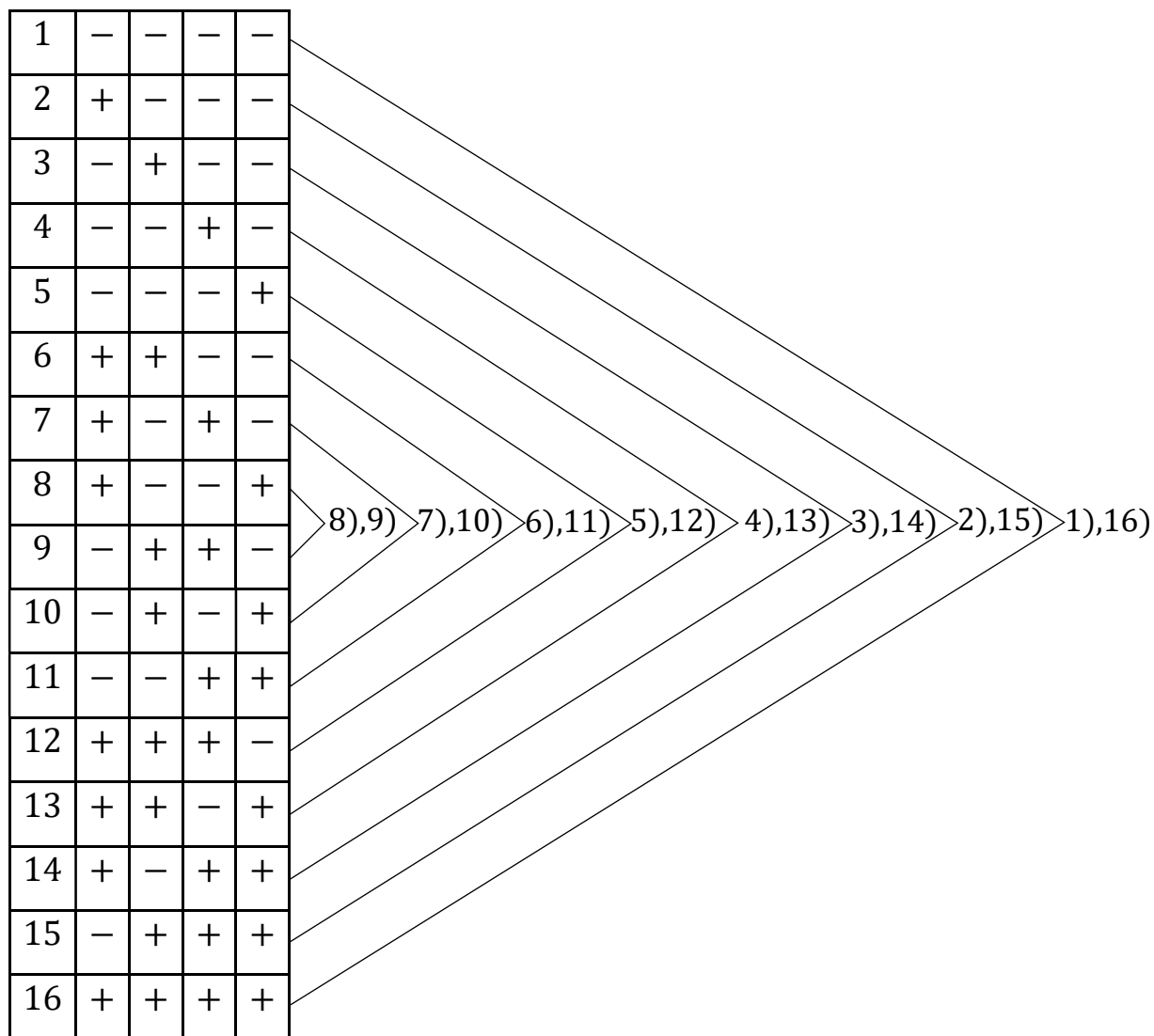


Рис. 2.3. Комплексно спряжені доданки ($M = 4$).

Ці спряжені числа треба скласти та отримати 2^{M-1} доданків, аналогічно (2.12) та (2.13). Для $M = 3$ цю процедуру позбавлення від змінних $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ схематично описано на Рис. 2.2. Зі зростанням M ця схема стає більш громіздкою, але принципово не складнішає. На Рис. 2.3 зображено аналогічну схему у випадку $M = 4$: отримуємо $2^4 = 16$ доданків, з яких одержуємо $2^{4-1} = 8$ дійсних доданків.

Математичні сподівання, що відповідають підінтегральним виразом у (2.14) - (2.17) за Рис. 2.3 мають вигляд (" - " $\leftrightarrow v_i + u_i$, " + " $\leftrightarrow v_i$)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, v_4 + u_4)\varepsilon(v_1, v_2, v_3, v_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3, w_4 + u_4)\varepsilon(w_1, w_2, w_3, w_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, v_4 + u_4)\varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3, v_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3, w_4 + u_4)\varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3, w_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3, v_4 + u_4)\varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3, v_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3 + u_3, w_4 + u_4)\varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3, w_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3, v_4 + u_4)\varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3, v_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3, w_4 + u_4)\varepsilon(w_1, w_2, w_3 + u_3, w_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, v_4)\varepsilon(v_1, v_2, v_3, v_4 + u_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3, w_4)\varepsilon(w_1, w_2, w_3, w_4 + u_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1, v_2, v_3 + u_3, v_4 + u_4)\varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3, v_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1, w_2, w_3 + u_3, w_4 + u_4)\varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2, w_3, w_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3, v_4 + u_4)\varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3 + u_3, v_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3, w_4 + u_4)\varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3 + u_3, w_4), \\
& \mathbb{E}\varepsilon(v_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, v_4)\varepsilon(v_1 + u_1, v_2, v_3, v_4 + u_4) \times \\
& \quad \times \varepsilon(w_1, w_2 + u_2, w_3 + u_3, w_4)\varepsilon(w_1 + u_1, w_2, w_3, w_4 + u_4). \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Таким чином, з $2^4 = 16$ комплексних доданків отримуємо $2^{4-1} = 8$ дійсних доданків та аналогічно випадку $M = 3$ отримуємо $3 \cdot 2^{4-1} = 24$ доданки, застосовуючи формулу Ісерліса. Нагадаємо, що у випадку $M = 3$ ми отримали всього $3 \cdot 2^{3-1} = 12$ доданків, а саме $\Psi_{jk}(u)$, $j = \overline{1,4}$, $k = \overline{1,3}$. Коли $M = 4$, то ми отримуємо величини (див. (2.46)) $\Psi_{jk}(u)$, $j = \overline{1,8}$, $k = \overline{1,3}$. Легко побачити, що для $M = 4$ доданки $\Psi_{jk}(u)$ аналогічні за своєю структурою до доданків, що відповідають $M = 3$, але містять на одну змінну більше під знаками коваріаційних функцій. Відповідно, їх оцінювання для $M = 4$ аналогічне $M = 3$, і ми можемо сказати, що для загального M у нас виникає $3 \cdot 2^{M-1}$ доданків, оцінювання яких принципово не відрізняється від частинних значень $M = 3, 4$.

Зокрема, серед $3 \cdot 2^{M-1}$ доданків 2^{M-1} доданків, а саме: $\Psi_{j_1}(u)$, $j = \overline{1, 2^{M-1}}$, оцінюються однаково. Далі, всі $\Psi_{j_2}(u)$, $j = \overline{1, 2^{M-1}}$, збігаються, і разом з $\Psi_{j_1}(u)$, $j = \overline{1, 2^{M-1}}$, оцінюються з використанням полярної заміни координат в просторі \mathbb{R}^M . З іншого боку, оцінювання величин $\Psi_{j_3}(u)$, $j = \overline{1, 2^{M-1}}$, вимагає застосування полярної заміни змінних у просторах \mathbb{R}^m , де $m \in \left[M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor, M \right)$. Останнє зауваження потребує додаткових пояснень.

Для оцінювання $\Psi_{j_3}(u)$, $j = \overline{1, 2^{M-1}}$, аналогічно (2.27) треба розбити M -кратний інтеграл за кубом $[-1, 1]^M$ на 2^M M -кратних інтегралів за одиничними M -вимірними кубами, які можна описати наборами довжини M з плюсів та мінусів, причому "+" відповідає інтервал інтегрування $[0, 1]$, а "-" відповідає інтервал інтегрування $[-1, 0]$. Так само опишемо сукупність змінних $\pm u_i$, $i = \overline{1, M}$, під знаком 1-го множника - коваріаційної функції в інтегралі аналогічному (2.32), тобто доданок "+" u_i " позначатиме "+", доданок "-" u_i " позначатиме "-". Аналогічний набір змінних $\pm u_i$, $i = \overline{1, M}$, у 2-му множнику - коваріаційній функції буде протилежним набору 1-го множника.

Приклад 2.1. Нехай $M = 9$. Розглянемо набори змінних $\pm u_i$, $i = \overline{1, M}$, під знаками довільно обраного добутку двох значень коваріаційної функції аналогічні (2.24), (2.32), (2.34) та (2.36) при $M = 3$:

$$1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline - & + & + & - & + & - & - & + & - \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}; \quad 2) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & - & - & + & - & + & + & - & + \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Як було зазначено вище, бінарні набори 1) та 2) є протилежними. Розглянемо також обраний довільно одиничний куб у просторі \mathbb{R}^9 , який запишемо у вигляді 3-го бінарного набору

$$3) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & - & - & - & + & - & + & + & + \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}.$$

Тоді ми маємо 4 збіги знаків у наборах 1) та 3) на місцях 4, 5, 6, 8 та $m = 5$ збігів знаків у наборах 2) та 3) на місцях 1, 2, 3, 7, 9. Це означає, що 1-й множник ми повинні оцінити величиною $\tilde{B}(0)$, а 2-й із застосуванням полярної заміни координат де у просторі \mathbb{R}^m , де $m = M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor = 9 - 4 = 5$.

Розглянемо аналогічний приклад парного M .

Приклад 2.2. Нехай $M = 8$ та в довільно обраному добутку двох значень коваріаційної функції маємо протилежні набори знаків

$$1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & - & + & - & + & + & - & - \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}; \quad 2) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline - & + & - & + & - & - & + & + \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Оберемо також довільний одиничний куб в \mathbb{R}^8

$$3) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline + & - & + & + & - & + & + & - \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}.$$

Маємо $m = 5$ збігів знаків у наборах 1) та 3) на місцях 1, 2, 3, 6, 8 та 3 збіги в наборах 2) та 3) на місцях 4, 5, 7. Таким чином, 2-й множник треба оцінити

$\tilde{B}(0)$, а 1-й оцінити із застосуванням полярної заміни у просторі \mathbb{R}^m , $m = 5 > M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor = 8 - 4 = 4$.

Ці приклади допомагають сформулювати очевидне, але корисне для нас зауваження. Розглянемо довільні бінарні набори a та b довжини $M \in \mathbb{N}$. Позначимо \bar{b} бінарний набір, протилежний b . Тоді набір a містить не менше $M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor$ збігів з набором b або \bar{b} .

Дійсно, порівняємо набори a та b . Якщо вони містять $t \geq M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor$ збігів, то твердження виконується. Якщо a та b мають кількість збігів $t < M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor$, то a та \bar{b} містять $t \geq M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor$ збігів.

Таким чином, з технічної точки зору для довільного натурального M та $m \in \left[M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor, M \right]$ задача оцінювання інтегралів, що виникають у процесі доведення теореми 2.1 за умови **A(i)**, зводиться до оцінки інтегралів

$$I(\alpha; m) = \int_{C_m} \|t\|^{-\alpha} dt,$$

де C_m – довільні одиничні куби в \mathbb{R}^m , які ми описували в прикладах 2.1 та 2.2 бінарними наборами (зараз довжини m). Ці куби ми занурюємо в куб $[-1, 1]^m$, а останній – у нулю $V_m^c(\sqrt{m})$. Тоді аналогічно (2.29)

$$I(\alpha; m) \leq \int_{V_m^c(\sqrt{m})} \|t\|^{-\alpha} dt = J(m) \frac{m^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha}, \quad (2.47)$$

якщо $\alpha < m$. Ми довели, що для $M \in \mathbb{N}$ за умови **A(i)** при $T \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \xi_M^2(T) = O\left(L^{1/2}(T) T^{-\alpha/2}\right). \quad (2.48)$$

Нехай тепер виконано умову **A(ii)** та $M = 3$. Враховуючи нерівність (2.23), за формулою (2.19) отримуємо

$$\begin{aligned}
\Psi_{13}(u) &\leq \int_{\Pi_1^2(u)} |B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2, v_3 - w_3 + u_3) \times \\
&\quad \times B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2, v_3 - w_3 - u_3)| dvdu \leq \\
&\quad \leq (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \times \\
&\quad \times \int_{-(T-u_1)}^{T-u_1} \int_{-(T-u_2)}^{T-u_2} \int_{-(T-u_3)}^{T-u_3} |B(t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3)| \times \\
&\quad \times |B(t_1 - u_1, t_2 - u_2, t_3 - u_3)| dt_1 dt_2 dt_3 \leq \\
&\quad \leq (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \|B\|_1 B(0),
\end{aligned}$$

де $\|B\|_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |B(t_1, t_2, t_3)| dt_1 dt_2 dt_3 < \infty$;

$$2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \Psi_{13}^{1/2}(u) du \leq 2B^{1/2}(0) \|B\|_1^{1/2} T^{-6} T^{\frac{3}{2} \cdot 3} = O\left(T^{-\frac{3}{2}}\right)$$

при $T \rightarrow \infty$. (2.49)

Користуючись формулами (2.20) - (2.22), так само отримуємо, що для $j = 2, 3, 4$

$$2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \Psi_{j3}^{1/2}(u) du = O\left(T^{-3/2}\right) \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (2.50)$$

Легко зрозуміти, що для загального M аналогічні інтеграли при $j = \overline{1, 2^{M-1}}$ оцінюються наступним чином:

$$2T^{-2M} \int_{[0, T]^M} \Psi_{j3}^{1/2}(u) du = O\left(T^{-M/2}\right) \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

Зауважимо далі, що при $M = 3$ величини $\Psi_{j2}(u)$, $j = \overline{1, 4}$, – збігаються (див. (2.39)), і для інтегралів від них отримуємо оцінку аналогічну (2.50):

$$2T^{-6} \int_{[0, T]^3} \Psi_{12}^{1/2}(u) du = O\left(T^{-3/2}\right) \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

Для загального M , як було зауважено вище, величини $\Psi_{j_2}(u)$, $j = \overline{1, 2^{M-1}}$, збігаються. Відповідні інтеграли оцінюються так само як Ψ_{j_3} :

$$2T^{-2M} \int_{[0,T]^M} \Psi_{12}^{1/2}(u) du = O(T^{-M/2}) \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (2.53)$$

За формулою (2.19)

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(u) &= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 (T - u_3)^2 B^2(u_1, u_2, u_3), \\ 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} \Psi_{11}^{1/2}(u) du &= 2T^{-6} \int_{[0,T]^3} (T - u_1)(T - u_2)(T - u_3) \times \\ &\times |B(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3 \leq 2\|B\|_1 T^{-3}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Решта величин $\Psi_{21}(u)$, $\Psi_{31}(u)$, $\Psi_{41}(u)$ (див. (2.42)) оцінюються аналогічно.

Переходячи до загального M , бачимо, що для $j = \overline{1, 2^{M-1}}$

$$2T^{-2M} \int_{[0,T]^M} \Psi_{j1}^{1/2}(u) du = O(T^{-M}) \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

Таким чином, для $M \in \mathbb{N}$ за умови $A(ii)$ при $T \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \xi_M^2(T) = O(T^{-M/2}). \quad (2.56)$$

Покажемо, що за умови $A(i)$ зі співвідношення (2.48) випливає твердження (2.1) теореми. Розглянемо послідовність $T_n = n^\beta$, $n \geq 1$, де число $\beta > 0$ таке, що $\frac{1}{2}\alpha\beta > 1$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_M^2(T_n) < \infty, \quad (2.57)$$

і $\xi_M(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ м. н. Розглянемо також послідовність випадкових величин

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_n &= \sup_{T_n \leq T \leq T_{n+1}} |\xi_M(T) - \xi_M(T_n)| \leq \\ &\leq \sup_{T_n \leq T \leq T_{n+1}} \sup_{\varphi \in \mathbb{R}^M} \left| T^{-M} \int_{[0,T]^M} e^{-i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt - T_n^{-M} \int_{[0,T_n]^M} e^{-i\langle \varphi, t \rangle} \varepsilon(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Маємо послідовно

$$\begin{aligned}
& \left| T^{-M} \int_{[0,T]^M} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt - T_n^{-M} \int_{[0,T_n]^M} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt \right| = \\
& = \left| T^{-M} \int_{[0,T]^M \cup ([0,T]^M \setminus [0,T_n]^M)} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt - T_n^{-M} \int_{[0,T_n]^M} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt \right| \leq \\
& \leq |T^{-M} - T_n^{-M}| \left| \int_{[0,T_n]^M} e^{-i\langle\varphi,t\rangle} \varepsilon(t) dt \right| + T^{-M} \int_{[0,T]^M \setminus [0,T_n]^M} |\varepsilon(t)| dt = \\
& = J_1 + J_2; \tag{2.58}
\end{aligned}$$

$$J_1 \leq \left(\frac{T_{n+1}^M}{T_n^M} - 1 \right) \xi_M(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ м. н.}, \tag{2.59}$$

так як при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T_{n+1}^M}{T_n^M} - 1 = \frac{(n+1)^{M\beta}}{n^{M\beta}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{M\beta} - 1 = O(n^{-1}),$$

а $\xi_M(T_n) \rightarrow 0$ м. н.

З іншого боку

$$J_2 \leq T_n^{-M} \int_{[0,T_{n+1}]^M \setminus [0,T_n]^M} |\varepsilon(t)| dt. \tag{2.60}$$

Для зручного запису останнього інтеграла розглянемо спочатку очевидний випадок $M = 2$:

$$\int_0^{T_{n+1}} \int_0^{T_{n+1}} = \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}}. \tag{2.61}$$

Щоб отримати аналогічне представлення для $M = 3$, розглянемо формальне «множення» інтегралів, яке є застосування закону дистрибутивності операцій прямого множення та об'єднання множин:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_{n+1}} \int_0^{T_{n+1}} \int_0^{T_{n+1}} &= \left(\int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \right) \left(\int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \right) = \\
&= \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} + \\
&+ \int_0^{T_n} \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_0^{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} + \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}}. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Зауважимо, що в останній сумі $8 = 2^3$ інтегралів нижні межі інтегрування утворюють повну сукупність бінарних наборів символів 0 та T_n . Методом математичної індукції можна довести (доведення очевидно, воно повторює викладку (2.62)), що для будь-якого $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&T_n^{-M} \int_{[0, T_{n+1}]^M \setminus [0, T_n]^M} |\varepsilon(t)| dt = \\
&= T_n^{-M} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{C_M^k} \int_{\{b_{ik}(n)\}} |\varepsilon(t_1, \dots, t_M)| dt_1 \dots dt_M, \quad (2.63)
\end{aligned}$$

де $\int_{\{b_{ik}(n)\}}$ – M -кратні інтеграли, в яких $k \geq 1$ інтегралів $\int_{T_n}^{T_{n+1}}$ та $M - k$ інтегралів $\int_0^{T_n}$, а $b_{ik}(n)$ позначено відповідні бінарні набори символів 0 та T_n довжини M .

Покажемо, що кожний доданок в (2.63), який ми позначимо $J_{ik}(n)$, збігається до нуля м.н. при $n \rightarrow \infty$. Для цього розглянемо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} J_{ik}^2(n) &= T_n^{-2M} \int_{\{b_{ik}(n)\}} \int_{\{b_{ik}(n)\}} \mathbb{E} \left| \varepsilon(t_1^{(1)}, \dots, t_M^{(1)}) \times \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(t_1^{(2)}, \dots, t_M^{(2)}) \right| dt_1^{(1)} \dots dt_M^{(1)} dt_1^{(2)} \dots dt_M^{(2)} \leq \\
&\leq B(0) T_n^{-2M} (T_{n+1} - T_n)^{2k} T_n^{2M-2k} = B(0) \left(\frac{T_{n+1}}{T_n} - 1 \right)^{2k} = \\
&= B(0) \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\beta - 1 \right)^{2k} = O(n^{-2k}).
\end{aligned}$$

Оскільки $k \geq 1$, то всі наступні ряди збігаються:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} J_{ik}^2(n) < \infty, \quad i = \overline{1, C_M^k}, \quad k = \overline{1, M},$$

тобто

$$J_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ м. н.}, \quad (2.64)$$

і теорему 2.1. доведено, так як доведення частини теореми у випадку виконання умови **A(ii)** не відрізняється від випадку виконання умови **A(i)**. ■

3 Доведення теореми про сильну консистентність параметрів польової тригонометричної моделі регресії

У цьому розділі ми сформулюємо та доведемо теорему про сильну консистентність ОНК θ_T векторного параметра θ^0 тригонометричної моделі (1.1) - (1.4).

Теорема 3.1. Нехай виконано умови **A**, **B1** та **B2**. Тоді ОНК в сенсі Бріллінжера θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 в тому розумінні, що $A_{kT} \rightarrow A_k^0$, $B_{kT} \rightarrow B_k^0$, $T(\varphi_{1k,T} - \varphi_{1k}^0) \rightarrow 0$, ... , $T(\varphi_{Mk,T} - \varphi_{Mk}^0) \rightarrow 0$ м. н. при $T \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, N}$.

Доведення. Розглянемо систему лінійних рівнянь відносно ОНК амплітуд A_{kT}, B_{kT} , $k = \overline{1, N}$, яка є підсистемою системи нормальних рівнянь для знаходження ОНК θ_T :

$$\left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial A_p} \right|_{\theta=\theta_T} = \left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial B_p} \right|_{\theta=\theta_T} = 0, \quad p = \overline{1, N}.$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{kp}^{(1)} A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kp}^{(1)} B_{kT} = c_p^{(1)}, & p = \overline{1, N}; \\ \sum_{k=1}^N a_{kp}^{(2)} A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kp}^{(2)} B_{kT} = c_p^{(2)}, & p = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \cos\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk,T} t_l\right) &= \cos_k(t), & \sin\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk,T} t_l\right) &= \sin_k(t), \\ \cos\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^{(0)} t_l\right) &= \cos_k^0(t), & \sin\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^{(0)} t_l\right) &= \sin_k^0(t), \end{aligned} \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.2)$$

Тоді коефіцієнти системи (3.1) можна записати наступним чином

$$a_{kp}^{(1)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos_k(t) \cos_p(t) dt, \quad (3.3)$$

$$a_{kp}^{(2)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos_k(t) \sin_p(t) dt,$$

$$b_{kp}^{(1)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin_k(t) \cos_p(t) dt, \quad (3.4)$$

$$b_{kp}^{(2)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin_k(t) \sin_p(t) dt,$$

$$c_p^{(1)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} X(t) \cos_p(t) dt, \quad (3.5)$$

$$c_p^{(2)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} X(t) \sin_p(t) dt.$$

Будемо далі також позначати $o_T(1)$, $T > 0$, взагалі кажучи, різні випадкові процеси, що прямують до нуля м.н. при $T \rightarrow \infty$. Використовуючи властивість (1.12) параметричних множин Λ_{lT} , $l = \overline{1, M}$, з умови **B2**, у замиканнях яких набувають значення оцінки $\varphi_{lk,T}$, $k = \overline{1, N}$, стандартними тригонометричними обчисленнями знаходимо

$$a_{kp}^{(1)} = o_T(1), \quad k \neq p; \quad a_{pp}^{(1)} = \frac{1}{2} + o_T(1); \quad a_{kp}^{(2)} = o_T(1), \quad k, p = \overline{1, N}; \quad (3.6)$$

$$b_{kp}^{(1)} = a_{kp}^{(1)} = o_T(1); \quad b_{kp}^{(2)} = o_T(1), \quad k \neq p; \quad b_{pp}^{(1)} = \frac{1}{2} + o_T(1),$$

$$k, p = \overline{1, N}. \quad (3.7)$$

Введемо подальші позначення:

$$x_{lp} = \frac{\sin T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)}{T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)}, \quad l = \overline{1, M}, \quad p = \overline{1, N};$$

$$y_{lp} = \frac{1 - \cos T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)}{T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)}, \quad l = \overline{1, M}, \quad p = \overline{1, N}. \quad (3.8)$$

Маємо далі

$$c_p^{(1)} = T^{-M} \int_{[0,T]^M} \varepsilon(t) \cos_p(t) dt + T^{-M} \int_{[0,T]^M} g(t, \theta^0) \cos_p(t) dt. \quad (3.9)$$

1-ий доданок правої частини (3.9) за теоремою 2.1 дорівнює $o_T(1)$.

Вивчення 2-го доданка (3.9) значно складніше.

Запишемо для фіксованого p

$$\begin{aligned} & T^{-M} \int_{[0,T]^M} g(t, \theta^0) \cos_p(t) dt = \\ & = T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sum_{k=1}^N \left(A_k^0 \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) + B_k^0 \sin \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) \right) \times \\ & \quad \times \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lp,T} t_l \right) dt_1 \dots dt_M = \\ & = \sum_{k=1}^N A_k^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lp,T} t_l \right) dt_1 \dots dt_M + \\ & \quad + \sum_{k=1}^N B_k^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lp,T} t_l \right) dt_1 \dots dt_M = \\ & \quad = \sum_1 (M) + \sum_2 (M). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_1 (M) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos \left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} + \varphi_{ln}^0) t_l \right) dt_1 \dots dt_M + \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos \left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{ln}^0) t_l \right) dt_1 \dots dt_M = \\ & \quad = \sum_{11} (M) + \sum_{12} (M). \end{aligned} \quad (3.11)$$

За умови **B2** $\sum_{11}(M) = o_T(1)$,

$$\sum_{12}(M) = \frac{1}{2} A_p^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos \left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0) t_l \right) dt_1 \dots dt_M + o_T(1). \quad (3.12)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \sum_2(M) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_k^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin \left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} + \varphi_{lk}^0) t_l \right) dt_1 \dots dt_M - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_k^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin \left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{lk}^0) t_l \right) dt_1 \dots dt_M = \\ &= \sum_{21}(M) + \sum_{22}(M). \end{aligned} \quad (3.13)$$

За умови **B2** $\sum_{21}(M) = o_T(1)$,

$$\sum_{22}(M) = -\frac{1}{2} B_p^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin \left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0) t_l \right) dt_1 \dots dt_M + o_T(1). \quad (3.14)$$

Далі нам треба записати інтеграли в (3.12) та (3.14) як вирази від x_{lp} та y_{lp} (3.8). Для того, щоб зрозуміти, які технічні труднощі виникають на цьому шляху, розглянемо, як і у розділі 2, значення $M = 3$.

Позначимо $a_{lp} = \cos \gamma_l$, $b_{lp} = \sin \gamma_l$, $l = 1, 2, 3$. Тоді

$$\begin{aligned} &\cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + i \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) = \\ &= (\cos \gamma_1 + i \sin \gamma_1)(\cos \gamma_2 + i \sin \gamma_2)(\cos \gamma_3 + i \sin \gamma_3) = \\ &= (a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2)(a_3 + i b_3) = a_1 a_2 a_3 + (i b_1) a_2 a_3 + a_1 (i b_2) a_3 + \\ &+ a_1 a_2 (i b_3) + (i b_1)(i b_2) a_3 + (i b_1) a_2 (i b_3) + a_1 (i b_2)(i b_3) + (i b_1)(i b_2)(i b_3) = \\ &= (\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3 - \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_3 - \\ &- \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3) + i (\sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3 + \\ &+ \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_3 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3). \end{aligned} \quad (3.15)$$

з (3.12), (3.14) та (3.15) випливає, що

$$\sum_{12} (3) = \frac{1}{2} A_p^0 (x_{1p} x_{2p} x_{3p} - y_{1p} y_{2p} x_{3p} - y_{1p} x_{2p} y_{3p} - x_{1p} y_{2p} y_{3p}) + o_T(1); \quad (3.16)$$

$$\sum_{22} (3) = -\frac{1}{2} B_p^0 (y_{1p} x_{2p} x_{3p} + x_{1p} y_{2p} x_{3p} + x_{1p} x_{2p} y_{3p} - y_{1p} y_{2p} y_{3p}) + o_T(1). \quad (3.17)$$

Таким чином, повертаючись до (3.9), отримуємо у випадку $M = 3$

$$c_p^{(1)} = \frac{1}{2} A_p^0 (x_{1p} x_{2p} x_{3p} - y_{1p} y_{2p} x_{3p} - y_{1p} x_{2p} y_{3p} - x_{1p} y_{2p} y_{3p}) - \frac{1}{2} B_p^0 (y_{1p} x_{2p} x_{3p} + x_{1p} y_{2p} x_{3p} + x_{1p} x_{2p} y_{3p} - y_{1p} y_{2p} y_{3p}) + o_T(1). \quad (3.18)$$

У свою чергу, з (3.5) для загального M та фіксованого p

$$\begin{aligned} c_p^{(2)} &= T^{-M} \int_{[0,T]^M} X(t) \sin_p(t) dt = \\ &= T^{-M} \int_{[0,T]^M} \varepsilon(t) \sin_p(t) dt + T^{-M} \int_{[0,T]^M} g(t, \theta^0) \sin_p(t) dt = \\ &= T^{-M} \int_{[0,T]^M} g(t, \theta^0) \sin_p(t) dt + o_T(1); \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &T^{-M} \int_{[0,T]^M} g(t, \theta^0) \sin_p(t) dt = \\ &= T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sum_{k=1}^N \left(A_k^0 \cos \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) + B_k^0 \sin \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l \right) \right) \times \\ &\quad \times \sin \left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lp,T} t_l \right) dt_1 \dots dt_M = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^N A_k^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l\right) \sin\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lp,T} t_l\right) dt_1 \dots dt_M + \\
&+ \sum_{k=1}^N B_k^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lk}^0 t_l\right) \sin\left(\sum_{l=1}^M \varphi_{lp,T} t_l\right) dt_1 \dots dt_M = \\
&= \sum_3(M) + \sum_4(M). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_3(M) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin\left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} + \varphi_{ln}^0) t_l\right) dt_1 \dots dt_M + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin\left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{ln}^0) t_l\right) dt_1 \dots dt_M = \\
&= \sum_{31}(M) + \sum_{32}(M). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

За умови **B2** $\sum_{31}(M) = o_T(1)$,

$$\sum_{32}(M) = \frac{1}{2} A_p^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin\left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0) t_l\right) dt_1 \dots dt_M + o_T(1). \tag{3.22}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\sum_4(M) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_n^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin\left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{ln}^0) t_l\right) dt_1 \dots dt_M - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_n^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \sin\left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} + \varphi_{ln}^0) t_l\right) dt_1 \dots dt_M = \\
&= \sum_{41}(M) + \sum_{42}(M). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

За умови **B2** $\sum_{42}(M) = o_T(1)$,

$$\sum_{41}(M) = \frac{1}{2} B_p^0 T^{-M} \int_{[0,T]^M} \cos\left(\sum_{l=1}^M (\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0) t_l\right) dt_1 \dots dt_M + o_T(1). \tag{3.24}$$

У випадку $M = 3$ з (3.22) та (3.24) аналогічно (3.18) отримуємо

$$C_p^{(2)} = \frac{1}{2}A_p^0(y_{1p}x_{2p}x_{3p} + x_{1p}y_{2p}x_{3p} + x_{1p}x_{2p}y_{3p} - y_{1p}y_{2p}y_{3p}) + \\ + \frac{1}{2}B_p^0(x_{1p}x_{2p}x_{3p} - y_{1p}y_{2p}x_{3p} - y_{1p}x_{2p}y_{3p} - x_{1p}y_{2p}y_{3p}) + o_T(1); \quad (3.25)$$

Коли $M > 3$, то вирази для $C_p^{(1)}$ та $C_p^{(2)}$ істотно ускладнюються, але зрозуміло, що вони також є однорідними поліномами степеня M від змінних x_{lp} , y_{lp} , $l = \overline{1, M}$, $p = \overline{1, M}$.

З (3.1), (3.7), (3.7), (3.18) та (3.25) випливає, що для $M = 3$ та $p = \overline{1, N}$

$$A_{pT} = A_p^0(x_{1p}x_{2p}x_{3p} - y_{1p}y_{2p}x_{3p} - y_{1p}x_{2p}y_{3p} - x_{1p}y_{2p}y_{3p}) - \\ - B_p^0(y_{1p}x_{2p}x_{3p} + x_{1p}y_{2p}x_{3p} + x_{1p}x_{2p}y_{3p} - y_{1p}y_{2p}y_{3p}) + o_T(1), \quad (3.26)$$

$$B_{pT} = A_p^0(y_{1p}x_{2p}x_{3p} + x_{1p}y_{2p}x_{3p} + x_{1p}x_{2p}y_{3p} - y_{1p}y_{2p}y_{3p}) + \\ + B_p^0(x_{1p}x_{2p}x_{3p} - y_{1p}y_{2p}x_{3p} - y_{1p}x_{2p}y_{3p} - x_{1p}y_{2p}y_{3p}) + o_T(1), \quad (3.27)$$

Оскільки $|x_{lp}|, |y_{lp}| \leq 1$, $l = \overline{1, M}$, $p = \overline{1, N}$, то з (3.26), (3.27) для $M = 3$ та, взагалі, для будь-якого $M \geq 4$

$$|A_{pT}|, |B_{pT}| \leq 2^{M-1}(|A_p^0| + |B_p^0|) + o_T(1), \quad p = \overline{1, N}. \quad (3.28)$$

Позначимо

$$\Phi_T(\theta_1, \theta_2) = T^{-M} \int_{[0, T]^M} (g(t, \theta_1) - g(t, \theta_2))^2 dt. \quad (3.29)$$

З означення ОНК θ_T отримуємо

$$Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = \Phi_T(\theta_T, \theta^0) + \\ + 2T^{-M} \int_{[0, T]^M} \varepsilon(t)(g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T))dt \leq 0. \quad (3.30)$$

За теоремою 1 та (3.28)

$$T^{-M} \int_{[0,T]^M} \varepsilon(t)(g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ м. н.} \quad (3.31)$$

З (3.30) та (3.31) випливає, що

$$\Phi_T(\theta_T, \theta^0) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ м. н.} \quad (3.32)$$

Розглянемо величину $\Phi_T(\theta_T, \theta^0)$ детальніше:

$$\begin{aligned} \Phi_T(\theta_T, \theta^0) &= T^{-M} \int_{[0,T]^M} g^2(t, \theta_T) dt + T^{-M} \int_{[0,T]^M} g^2(t, \theta^0) dt - \\ &- 2T^{-M} \int_{[0,T]^M} g(t, \theta_T) g(t, \theta^0) dt = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Використовуючи (3.28) та теорему 1, отримуємо

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (A_{pT}^2 + B_{pT}^2) + o_T(1), \quad (3.34)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N ((A_p^0)^2 + (B_p^0)^2) + o_T(1), \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= -2 \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N T^{-M} \int_{[0,T]^M} (A_{pT} A_k^0 \cos_p(t) \cos_k^0(t) + \\ &+ A_{pT} B_k^0 \cos_p(t) \sin_k^0(t)) dt - \\ &- 2 \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N T^{-M} \int_{[0,T]^M} (B_{pT} A_k^0 \sin_p(t) \cos_k^0(t) + B_{pT} B_k^0 \sin_p(t) \sin_k^0(t)) dt = \\ &= -2 \sum_{p=1}^N T^{-M} \int_{[0,T]^M} (A_{pT} A_p^0 \cos_p(t) \cos_p^0(t) + A_{pT} B_p^0 \cos_p(t) \sin_p^0(t)) dt - \end{aligned}$$

$$-2 \sum_{p=1}^N T^{-M} \int_{[0,T]^M} \left(B_{pT} A_p^0 \sin_p(t) \cos_p^0(t) + B_{pT} B_p^0 \sin_p(t) \sin_p^0(t) \right) dt + \\ + o_T(1). \quad (3.36)$$

Нехай $M = 3$. Тоді за формулами (3.10) - (3.12) та (3.16); (3.10), (3.13), (3.14) та (3.17); (3.20) - (3.22) та (3.17); (3.20), (3.23), (3.24) та (3.16) отримуємо

$$\Phi_3 = - \sum_{p=1}^N [A_{pT} A_p^0 (x_{1p} x_{2p} x_{3p} - y_{1p} y_{2p} x_{3p} - y_{1p} x_{2p} y_{3p} - x_{1p} y_{2p} y_{3p}) - \\ - A_{pT} B_p^0 (y_{1p} x_{2p} x_{3p} + x_{1p} y_{2p} x_{3p} + x_{1p} x_{2p} y_{3p} - y_{1p} y_{2p} y_{3p})] - \\ - \sum_{p=1}^N [B_{pT} A_p^0 (y_{1p} x_{2p} x_{3p} + x_{1p} y_{2p} x_{3p} + x_{1p} x_{2p} y_{3p} - y_{1p} y_{2p} y_{3p}) + \\ + B_{pT} B_p^0 (x_{1p} x_{2p} x_{3p} - y_{1p} y_{2p} x_{3p} - y_{1p} x_{2p} y_{3p} - x_{1p} y_{2p} y_{3p})] + o_T(1). \quad (3.37)$$

Підставимо тепер у вирази (3.34) та (3.37) значення A_{pT} та B_{pT} з формул (3.26) та (3.27) використовуючи позначення

$$z_{1p} = x_{1p} x_{2p} x_{3p} - y_{1p} y_{2p} x_{3p} - y_{1p} x_{2p} y_{3p} - x_{1p} y_{2p} y_{3p}, \quad (3.38)$$

$$z_{2p} = y_{1p} x_{2p} x_{3p} + x_{1p} y_{2p} x_{3p} + x_{1p} x_{2p} y_{3p} - y_{1p} y_{2p} y_{3p}. \quad (3.39)$$

Тоді отримуємо

$$\Phi_T(\theta_T, \theta^0) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (A_p^0 z_{1p} - B_p^0 z_{2p})^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (A_p^0 z_{2p} + B_p^0 z_{1p})^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (A_p^0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (B_p^0)^2 - \sum_{p=1}^N (A_p^0 z_{1p} - B_p^0 z_{2p}) A_p^0 z_{1p} + \\ + \sum_{p=1}^N (A_p^0 z_{1p} - B_p^0 z_{2p}) B_p^0 z_{2p} - \sum_{p=1}^N (A_p^0 z_{2p} + B_p^0 z_{1p}) A_p^0 z_{2p} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{p=1}^N (A_p^0 z_{2p} + B_p^0 z_{1p}) B_p^0 z_{1p} + o_T(1) = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \left((A_p^0)^2 z_{1p}^2 - 2A_p^0 B_p^0 z_{1p} z_{2p} + (B_p^0)^2 z_{2p}^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \left((A_p^0)^2 z_{2p}^2 + 2A_p^0 B_p^0 z_{1p} z_{2p} + (B_p^0)^2 z_{1p}^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (A_p^0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (B_p^0)^2 - \sum_{p=1}^N (A_p^0)^2 z_{1p}^2 + \sum_{p=1}^N A_p^0 B_p^0 z_{1p} z_{2p} + \\
& + \sum_{p=1}^N A_p^0 B_p^0 z_{1p} z_{2p} - \sum_{p=1}^N (B_p^0)^2 z_{2p}^2 - \sum_{p=1}^N (A_p^0)^2 z_{2p}^2 - \\
& - \sum_{p=1}^N A_p^0 B_p^0 z_{1p} z_{2p} - \sum_{p=1}^N A_p^0 B_p^0 z_{1p} z_{2p} - \sum_{p=1}^N (B_p^0)^2 z_{1p}^2 + o_T(1) = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \left((A_p^0)^2 + (B_p^0)^2 \right) (1 - z_{1p}^2 - z_{2p}^2) + o_T(1). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Підставимо тепер у (3.40) замість z_{1p} та z_{2p} їх вирази (3.38) та (3.39):

$$\begin{aligned}
z_{1p}^2 + z_{2p}^2 & = (x_{1p} y_{2p} y_{3p} + y_{1p} x_{2p} y_{3p} + y_{1p} y_{2p} x_{3p} - x_{1p} x_{2p} x_{3p})^2 + \\
& + (y_{1p} x_{2p} x_{3p} + x_{1p} y_{2p} x_{3p} + x_{1p} x_{2p} y_{3p} - y_{1p} y_{2p} y_{3p})^2 = \\
& = x_{1p}^2 y_{2p}^2 y_{3p}^2 + y_{1p}^2 x_{2p}^2 y_{3p}^2 + y_{1p}^2 y_{2p}^2 x_{3p}^2 + x_{1p}^2 x_{2p}^2 x_{3p}^2 + \\
& + 2x_{1p} y_{2p} y_{3p} \cdot y_{1p} x_{2p} y_{3p} + 2x_{1p} y_{2p} y_{3p} \cdot y_{1p} y_{2p} x_{3p} - \\
& - 2y_{1p} y_{2p} x_{3p} \cdot x_{1p} x_{2p} x_{3p} + 2y_{1p} x_{2p} y_{3p} \cdot y_{1p} y_{2p} x_{3p} - \\
& - 2y_{1p} x_{2p} y_{3p} \cdot x_{1p} x_{2p} x_{3p} - 2x_{1p} y_{2p} y_{3p} \cdot x_{1p} x_{2p} x_{3p} + \\
& + y_{1p}^2 x_{2p}^2 x_{3p}^2 + x_{1p}^2 y_{2p}^2 x_{3p}^2 + x_{1p}^2 x_{2p}^2 y_{3p}^2 + y_{1p}^2 y_{2p}^2 y_{3p}^2 + \\
& + 2y_{1p} x_{2p} x_{3p} \cdot x_{1p} y_{2p} x_{3p} + 2y_{1p} x_{2p} x_{3p} \cdot x_{1p} x_{2p} y_{3p} - \\
& - 2y_{1p} x_{2p} x_{3p} \cdot y_{1p} y_{2p} y_{3p} + 2x_{1p} y_{2p} x_{3p} \cdot x_{1p} x_{2p} y_{3p} - \\
& - 2x_{1p} y_{2p} x_{3p} \cdot y_{1p} y_{2p} y_{3p} - 2x_{1p} x_{2p} y_{3p} \cdot y_{1p} y_{2p} y_{3p} = \\
& = (x_{1p}^2 + y_{1p}^2)(x_{2p}^2 + y_{2p}^2)(x_{3p}^2 + y_{3p}^2). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що за формулами (3.8)

$$x_{lp}^2 + y_{lp}^2 = \left(\frac{\sin T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)/2}{T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)/2} \right)^2, \quad l = 1, 2, 3, \quad p = \overline{1, N}. \quad (3.42)$$

Ми довели, що для $M = 3$

$$\Phi_T(\theta_T, \theta^0) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N ((A_p^0)^2 + (B_p^0)^2) \left(1 - \prod_{l=1}^M \left(\frac{\sin T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)/2}{T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0)/2} \right)^2 \right) + o_T(1). \quad (3.43)$$

З (3.32) та (3.43) випливає, що для $M = 3$

$$T(\varphi_{lp,T} - \varphi_{lp}^0) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ м. н.}, \quad l = \overline{1, M}, \quad p = \overline{1, N}. \quad (3.44)$$

Аналогічні, але значно громіздкіші обчислення дозволяють довести збіжність (3.44) для довільного $M \in \mathbb{N}$, причому хід міркувань залишається ідентичним випадку $M = 3$.

З (3.44) випливає також, що

$$x_{lp} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1 \text{ м. н.}, \quad y_{lp} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ м. н.}, \quad (3.45)$$

Тоді з (3.26) та (3.27) знаходимо

$$A_{pT} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} A_p^0 \text{ м. н.}, \quad B_{pT} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} B_p^0 \text{ м. н.}, \quad p = \overline{1, N}, \quad (3.46)$$

і теорему 3.1 доведено. ■

Висновки

У магістерській дисертації доведено сильну консистентність ОНК в сенсі Бріллінжера амплітуд та кутових частот синусоїдної моделі багатовимірної текстурованої поверхні за умови, що параметричні множини, в яких шукається оцінка, залежать від параметра T множин спостереження $[0, T]^M$, $M \geq 3$, та при $T \rightarrow \infty$ розрізняють потрібним чином кутові частоти. Припускається також, що випадковий шум є однорідним або однорідним та ізотропним гауссівським випадковим полем на \mathbb{R}^M , коваріаційна функція якого задовольняє простим умовам, котрі, зокрема, охоплюють випадок сильної залежності цього поля.

Доведенню сильної консистентності в роботі передуює доведення рівномірного за частотами посиленого ЗВЧ для фінітного перетворення Фур'є випадкового поля, що розглядається в тексті у якості шуму. Саме цей ЗВЧ є основним математичним фактом, на який спирається отримання консистентності ОНК.

Природним напрямком продовження дослідження є отримання сильної консистентності для періодограмних оцінок параметрів тригонометричних моделей M -вимірних текстурованих поверхонь.

Список використаних джерел

1. M. I. Yadrenko. *Spectral Theory of Random Fields* (Translations Series in Mathematics and Engineering), Springer, 1983.
2. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko. *Statistical Analysis of Random Fields, Mathematics and its Applications* (Soviet Series), Vol. 28. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, With a preface by A. V. Skorohod.
3. J. M. Francos, A. Z. Meiri, B. Porat. *A united texture model based on 2-D Wald type decomposition*, IEEE Transactions on Signal Processing, 17 (1993), No. 41, P. 2665-2678.
4. T. Yuan, T. Subba Rao. *Spectrum estimation for random fields with application to Markov modelling and texture classification*, Markov Random Fields, Theory and Applications (R. Chellappa, A. K. Jain, eds.), Academic Press, New York, 1993.
5. H. Zhang, V. Mandrekar. *Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes*, J. Time Ser. Anal., 22 (2001), No. 5, P. 613-629.
6. S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava. *Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model*, Comput. Statist. Data Anal., 58 (2013), P. 147-161.
7. P. Malliavan. *Estimation d'un signal Lorentzien*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 319 (1994), No. 9, P. 991-997.
8. P. Malliavan. *Sur la norme d'une matrice circulante gaussienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 319 (1994), No. 7, P. 745-749.
9. A. V. Ivanov, O. V. Malyar. *Consistency of the least squares estimator for the parameters of a sinusoidal model of a textured surface*, Theor. Probab. Math. Statist., 97 (2018), P. 73-84.
10. A. V. Ivanov, O. V. Lymar. *The asymptotic normality for the least squares estimator of parameters in a two-dimensional sinusoidal model of observations*, Theor. Probab. Math. Statist., 100 (2020), P. 107-131.

11. A. V. Ivanov. *Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence*, Theor. Probab. Math. Statist., 80 (2010), P. 61-69.
12. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*. Statistics, 49 (2015), No. 1, P. 156-186.
13. A. V. Ivanov, I. M. Savych. *On the least squares estimator asymptotic normality of the multivariate symmetric textured surface parameters*, Theor. Probab. Math. Statist., 105 (2021), 151-169.
14. C. R. Rao, L. C. Zhao, B. Zhou. *Maximum likelihood estimation of 2-D superimposed exponential*, IEEE Transactions on Signal Processing, 42 (1994). P. 795-802.
15. D. Kundu, A. Mitra. *Asymptotic properties of the least squares estimates of 2-D exponential signals*, Multidimens. Systems Signal Process, 7 (1996), No. 2, P. 135-150.
16. D. Kundu, S. Nandi. *Determination of discrete spectrum in a random field*. Statist. Neerlandica, 57 (2003), No. 2, P. 258-283.
17. D. R. Brillinger. *Regression for randomly sampled spatial series: the trigonometric case*, J. Appl. Probab. Special, Vol. 23A (1986), P. 275-289.
18. П. С. Кнопов. *Оптимальні оцінки параметрів стохастичних систем*, Наукова Думка, Київ, 1981.
19. A. V. Ivanov. *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*, Vol. 389, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
20. A. M. Walker. *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals*, Advances in Appl. Probability, 5 (1973), P. 217-241.
21. Г. М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 3*, «Наука», 1966, с. 401-403.