

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« » червня 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: « Застосування вейвлетів в аналізі часових рядів (в рамках понять
фінансової математики)

Виконала:

студентка II курсу магістратури, групи ОМ-01мн
Машевська Ірина Олександрівна

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Рушицький Ярема Ярославович

Рецензент:

Завідувач кафедри комп'ютерних наук та математики
Київський університет імені Бориса Грінченка
кандидат фізико-математичних наук
Литвин Оксана Степанівна

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.

Студентка _____

Київ-2022 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« » лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Машевській Ірині Олександрівні

1. Тема дисертації «Застосування вейвлетів в аналізі часових рядів (в рамках понять фінансової математики)», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Рушицький Ярема Ярославович, затверджені наказом по університету від «25» травня 2022 р. № НС/372/2022.
2. Термін подання студентом дисертації 7 червня 2022 р.
3. Об'єктом дослідження є вейвлети та вейвлет перетворення.
4. Предметом дослідження є властивості вейвлетів, доходи Apple, фондові ринки Китаю та АСЕАН.
5. Перелік завдань, які потрібно виконати:
 - 1) Ознайомитися з літературою та навести основні означення;
 - 2) Проаналізувати роботи попередників, які працювали в даному напрямку та підвести підсумки;

3) Навести деякі приклади практичного застосування вейвлетів та прогнозування фінансових часових рядів.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного матеріалу): 16 слайдів.

7. Дата видачі завдання 2 лютого 2022 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання та обговорення головної задачі магістерської дисертації	02.02.22-06.02.22	Виконано
2	Огляд літератури та вивчення основних означень та тверджень	07.02.22-13.02.22	Виконано
3	Розгляд MRA, а також лем про батьківський і материнський вейвлети	14.02.22-13.03.22	Виконано
4	Ознайомлення з деякими видами вейвлет-перетворень, їх особливості та порівняльна характеристика	14.03.22-27.03.22	Виконано

5	Знайомство з методом правильного вибору вейвлету	28.03.22-10.04.22	Виконано
6	Статичний і динамічний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними	11.04.22-24.04.22	Виконано
7	Висновки	25.04.22-08.05.22	Виконано
8	Оформлення магістерської дисертації	09.05.22-05.06.22	Виконано

Студент

І. О. Машевська

Науковий керівник

Я. Я. Руцицький

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 52 сторінка, 16 слайдів презентації, 21 першоджерел.

Актуальність роботи.

Метою даної роботи є дослідити застосування вейвлет-аналізу до економіки та фінансів – і отримані результати критичного осмислення переваг вейвлет-перетворення у порівнянні з традиційними інструментами аналізу даних.

Об’єктом дослідження є вейвлети та вейвлет перетворення.

Предметом дослідження є властивості вейвлетів, доходи Apple, фондові ринки Китаю та АСЕАН.

Дисертація носить теоретичне значення. В ній демонструються результати досліджень, які можуть використовуватися і для майбутніх робіт.

Ключові слова: вейвлети, шум, неперервне вейвлет-перетворення (CWT), дискретне вейвлет-перетворення (DWT), максимальне перекриття дискретного вейвлета (MODWT), фінансовий часовий ряд.

.

ABSTRACT

Master's thesis: 52 pages, 16 slides of presentation, 21 primary sources.

Relevance of the work.

The aim of this work is to study the application of wavelet analysis to economics and finance - and the results of a critical understanding of the benefits of wavelet transformation compared to traditional data analysis tools.

The object of the study are wavelets and wavelet transform.

The subject of the study are properties of wavelets, Apple returns, Stock market indexes of China and the ASEAN countries.

The thesis is of theoretical significance, it's results can be used for obtaining other results. It shows the results of research that can be used for future work.

Keywords: wavelets, noise, continuous Wavelet Transform (CWT), Discrete Wavelet Transform (DWT), Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT), financial time series.

ЗМІСТ

Вступ.....	9
Розділ 1. Знайомство з вейвлет-аналізом.....	11
1.1 Історичні відомості з теорії вейвлетів.....	11
1.2 Вейвлет аналіз в економіці та фінансах.....	14
Розділ 2. Аналіз багаторазової роздільної здатності, функції	
масштабування та вейвлет.....	17
2.1 Визначення аналізу з багатьма роздільною здатністю (MRA).....	17
2.2 Введення понять про батьківський та материнський вейвлети.....	20
2.3 Загальний алгоритм видалення шумів.....	22
Розділ 3. Деякі види вейвлет перетворень	28
3.1 Неперервне вейвлет-перетворення (CWT).....	28
3.2 Дискретне вейвлет-перетворення (DWT).....	29
3.3 Максимальне перекриття дискретного вейвлета (MODWT)	31
Розділ 4. Реалізація та практичні питання	33
4.1 Вибір вейвлета. Застосування в економіці та фінансах.....	33
4.2 Статичний і динамічний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними.....	37
4.3 Прогнозування фінансових або економічних часових рядів	43

Висновки.....	48
Список використаних джерел.....	49

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена застосуванню вейвлетів в аналізі часових рядів (в рамках понять фінансової математики).

Розвиток теорії вейвлетів в останні роки спонукав до появи таких застосувань, як обробка сигналів, представлення зображень і функцій, фінанси, економіка, чисельні методи тощо. Одним із переваг вейвлетів у порівнянні з Фур'є є швидкий алгоритм оцінки, розширення серії. У цьому дослідженні ми обговоримо застосування швидкого вейвлет-алгоритму, а саме дискретного вейвлет-перетворення (DWT) у фінансах, наприклад, зменшення шуму часових рядів за допомогою вейвлет-порогового значення, а також проведемо аналіз прибутків компанії Apple. Будуть представлені деякі числові результати з використанням реальних даних.

Дана магістерська дисертація складається із 4-х розділів.

У першому розділі дисертаційної роботи, а саме в пункті 1.1. наведено історичні відомості з теорії вейвлетів та представлено зображення першої і найпростішої материнської вейвлет-функції. [2], [3]. Також тут, в пункті 1.2, наведено основні переваги вейвлет-аналізу в порівнянні з традиційними інструментами аналізу даних.

У другому розділі, в пункті 2.1, розглядаємо означення MRA (аналіз багаторазової роздільної здатності) з їх властивостями, також знайомимось з функціями масштабування. В пункті 2.2, вводимо поняття про батьківський та материнський вейвлети, додатково розглядаємо леми про відповідні вейвлети. В пункті 2.3, описано загальний алгоритм видалення шумів, а також представлено деякі результати з робіт [1], [8], [10], [11], [12].

Третій розділ містить інформацію про деякі види вейвлет-перетворень (Неперервне вейвлет-перетворення [16], Дискретне вейвлет-перетворення [15], [16] та Максимальне перекриття дискретного вейвлета [17]) та описує їх особливості.

Четвертий розділ описує практичні питання та реалізацію вейвлет перетворень. В пункті 4.1 розглядається питання про правильний вибір, властивості вейвлетів, які слід враховувати при виборі відповідних вейвлетів (на основі роботи Массета [16]). Разом з тим розглядається питання, про застосування в економіці та фінансах. Пункт 4.2 містить інформацію про статичний та динамічний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними з певним практичним застосуванням. У наступному пункті, а саме, 4.3. описано Прогнозування фінансових або економічних часових рядів через потужність прогнозу підходу DWT, коли він поєднується з методами прогнозування часових рядів.

РОЗДІЛ 1

ЗНАЙОМСТВО З ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗОМ

1.1. Історичні відомості з теорії вейвлетів

Вейвлети є відносно новими в області чистої та прикладної математики. Вони мають, щодо теорії та застосувань, міцний зв'язок з перетвореннями Фур'є. Вейвлети з'явилися за останні двадцять років як синтез ідей з таких галузей, як електротехніка, статистика, фізика, інформатика, економіка, фінанси та математика.

Вейвлет-перетворення мають чудові та глибокі математичні властивості, що робить їх добре адаптованим інструментом для широкого діапазону функціональних просторів або, що еквівалентно, для дуже різних типів даних. З іншого боку, вони можуть бути реалізовані за допомогою швидких алгоритмів, необхідних для перетворення їх математичної ефективності на справді практичний інструмент. [2]

Температура, рівень води або закриті ринкові ціни за певний період часу є прикладом даних часових рядів. У своїй описовій формі, дані часових рядів можна визначити як набір даних, зібраних або упорядкованих у послідовності протягом послідовного рівного приросту часу. Прикладом фінансового часового ряду, який буде використовуватися в цьому дослідженні, є Куала-Лумпурський композитний індекс (KLCI). Ми використовуємо щоденні дані закриття, що охоплюють період з 1 січня 1995 року по 31 грудня 2008 року (загальна кількість наборів даних становить 3706). Індекс номіновано в одиницях місцевої валюти, отриманих з бази даних Bloomberg.

Безперечно, щоденні дані містять занадто багато шуму і піддаються проблемі несинхронної нечастої торгівлі. Часовий ряд KLCI рухається на основі попиту та пропозиції на акції.

Шум - це небажана модуляція, наявність якої перешкоджає виявленню потрібного сигналу. [3] Шум – це стороння інформація в сигналі, яку можна відфільтрувати за допомогою обчислення коефіцієнтів усереднення та деталізації у вейвлет-перетворенні. Насправді багато статистичних явищ мають вейвлет-структуру. Часто невеликі спалахи високочастотних вейвлетів супроводжуються хвилями низької частоти або навпаки. Теорія реконструкції вейвлетів допомагає локалізувати та ідентифікувати такі скупчення малих хвиль і, таким чином, допомагає краще зрозуміти причину цих явищ. Крім того, теорія вейвлетів відрізняється від аналізу Фур'є та спектральної теорії, оскільки вона заснована на локальному частотному представленні. [4]

Вейвлет аналіз — це потужний інструмент для стиснення, обробки та аналізу даних. Його можна застосовувати для вилучення корисної інформації з численних типів даних, включаючи зображення та аудіосигнали з фізики, хімії та біології, а також високочастотні часові ряди в економіці та фінансах.

Історію вейвлет-аналізу можна простежити до кількох шкіл думок, які спочатку були ізольованими, але потім об'єдналися в повну галузь. Найдавніша робота, пов'язана з вейвлет-аналізом, написана Альфредом Хааром на початку століття. Він знайшов ортогональну систему функцій, яка сьогодні відома як найпростіша основа сімейства вейвлетів і названа на його честь вейвлетом Хаара.

З моменту появи роботи Хаара багато інших важливих внесків було зроблено в області вейвлет-аналізу. Деякі з них - це відкриття неперервного вейвлет-перетворення (CWT) у 1975 році Цвейгом з подальшим більш детальним формулюванням Гупійо, Гроссмана та Морле в 1982 році; конструкція ортогональних вейвлетів з компактною підтримкою Добеші в 1988 році; запровадження системи з багатьма роздільною здатністю Маллатом у 1989 році; частотно-часова інтерпретація CWT Делпратом у 1991 році та багато інших. Розглянемо мал. 1, для ознайомлення з першою та найпростішою вейвлет-функцією.

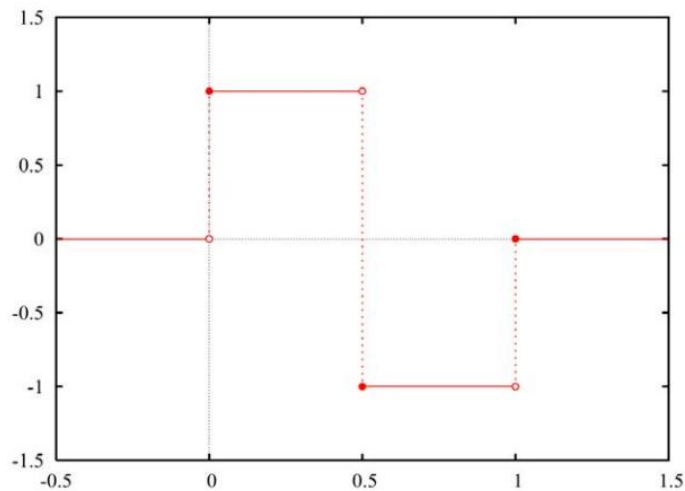


Рисунок 1: Перша і найпростіша материнська вейвлет-функція.

1.2. Вейвлет аналіз в економіці та фінансах

З інтенсивним розвитком і розширенням теорій останнім часом застосування вейвлет-аналізу охопило широкий спектр областей, зокрема економіки та фінансів. Останні кілька десятиліть були епоєю великих даних, особливо у сфері фінансів, оскільки багато фінансових змінних, таких як ціни на акції, зараз можна виміряти з дуже високою частотою - на хвилинній або навіть на секундній основі. Набори фінансових даних стають величезними, мають великий обсяг, а також високу варіабельність і складність. Більш ніж будь-коли, ця зростаюча складність потребує інструментів обробки даних. Науковці та експерти в цій галузі прагнуть математичних теорій і додатків, які можуть допомогти їм зрозуміти всю інформацію, представлену в даних, і використовувати її для покращення розуміння фінансових систем або ж для прийняття вірних рішень, після аналізу ситуацій.

З розвитком інструментів аналізу даних деякі традиційні, такі як аналіз часових рядів, який зосереджується на часовій області, і спектральний аналіз, який фокусується на частотній області, переоцінюються через їх обмеження. Перше обмеження полягає в тому, що ці традиційні методи зазвичай вимагають дуже сильного припущення, що дані базуються на певному базовому процесі; зокрема дані повинні бути стаціонарними (тобто їх середнє значення та дисперсія не змінюються з часом і не слідує жодним тенденціям). Однак це навряд чи справедливо для багатьох економічних і фінансових тимчасових рядів. Зазвичай дисперсія або нестабільність цих рядів слідує складним тенденціям і закономірностям, таким як структурні розриви, кластеризація та довга пам'ять. Іншим обмеженням спектрального аналізу є те, що частотна декомпозиція має сенс лише тоді, коли ринкова активність стабільна протягом

усього періоду. Це може бути не так, наприклад, ринкова активність може бути особливо високою протягом кількох місяців року та відносно спокійною протягом деяких інших.

На відміну від традиційних методів, вейвлет-аналіз, який нещодавно був адаптований до економіки та фінансів, має ряд переваг, які допомагають подолати обмеження, про які йшлося вище, і надає корисну інформацію, яку традиційні методи не надають (Рисунок 2).



Рисунок 2: Приклад фінансових даних – доходи фондового ринку Apple.

Перш за все зосередимося на трьох основних перевагах вейвлет-аналізу в порівнянні з традиційними інструментами аналізу даних.

Вейвлет-аналіз є гнучким і не вимагає «сильних» припущень щодо процесу генерування даних: за своєю суттю вейвлет-аналіз має здатність представляти дуже складні дані без необхідності знати їхню функціональну

форму. Це дуже корисно для економіки та фінансів, оскільки основний процес набору даних не завжди відомий точно.

Як обговорювалося вище, багато економічних та фінансових часових рядів не є стаціонарними (**стаціонарність** — властивість процесу не змінювати свої характеристики з часом), що робить традиційні методи неефективними для роботи з цими рядами. Однак вейвлет-аналіз долає цю проблему, оскільки не вимагає припущення про стаціонарність даних.

Вейвлет-аналіз надає інформацію як у часовій, так і в частотній області: на відміну від аналізу часових рядів і спектрального аналізу, які надають інформацію лише про часову область та частотну область відповідно, вейвлет-аналіз має можливість розкласти вихідний часовий ряд як часовий, так і в частотній областях одночасно. Це має вирішальне значення для економіки та фінансів, оскільки багато з цих змінних можуть працювати та взаємодіяти по-різному відповідно до різних часових масштабів. Наприклад, ціни двох акцій можуть діяти дуже подібним чином у довгостроковій перспективі, але значно розходитися в короткостроковій перспективі. Таким чином, вейвлет-аналіз може бути чудовим активом, оскільки він може розкласти економічні та фінансові тимчасові ряди на кілька часових масштабів, а дослідники можуть вивчати взаємозв'язки цих рядів у кожному масштабі.

Вейвлет-аналіз має можливість знаходити розриви в даних: Вейвлет-аналіз також володіє можливістю точного знаходження розривів у системі. Це потенційно може допомогти експертам та науковцям у галузі економіки та фінансів визначити точні моменти зміни часових режимів, відображених у фактичних ринкових даних. Вони також можуть знайти ізольовані поштовхи в динамічній системі.

РОЗДІЛ 2

АНАЛІЗ БАГАТОРАЗОВОЇ РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ, ФУНКЦІЇ МАСШТАБУВАННЯ ТА ВЕЙВЛЕТ

2.1. Визначення аналізу з багатьма роздільною здатністю (MRA)

На цьому етапі роботи розглянемо основне визначення теорії вейвлетів за допомогою підходу аналізу з багатьма роздільною здатністю (MRA). Для більш детальної інформації можна звернутися до книг про вейвлет [2], [5], [6], [7], [8].

Донедавна вейвлет-аналіз за допомогою підходу MRA був визнаний надійним методом у фінансовому та економічному аналізі, зокрема для фондового ринку та іноземної валюти. Застосування вейвлетів у фінансах можна побачити у вивченні властивостей нестационарності та нелінійності фінансових часових рядів через зміну структури, волатильність та процес довгої пам'яті. Крім того, вейвлет-методи також використовуються як інструмент для прогнозування. Крім того, вейвлет-декомпозиція сигналу або даних може бути використана для покращення перевірки гіпотез на основі існуючих теорій, а також може надати уявлення про фінансові явища та покращити розвиток теорій.

Спираючись на [6], [7], [9] припустимо, що існує функція $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, така, що сімейство функцій:

$$\varphi(t) = 2^{\frac{j}{2}}(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

є ортонормованим базисом V_j .

Ми починаємо з аналізу багаторазової роздільної здатності (MRA), платформи проектування для функцій масштабування та вейвлет-функцій. Зазначимо, що функції масштабування діють як фільтр для низькочастотного сигналу (який іноді називають коефіцієнтами апроксимації), а функції вейвлету діють як фільтр для високочастотного сигналу (який називають детальними коефіцієнтами).

Визначення (представлення з багатьма роздільною здатністю): Ми визначаємо MRA в $L^2(R)$ як послідовність закритих підпросторів V_j , $j \in \mathbb{Z}$, $L^2(R)$, що задовольняють наступним властивостям:

$$(M1) V_j \subset V_{j+1}$$

$$(M2) f \in V_j \text{ тоді і тільки тоді, коли } f(2t) \in V_{j+1}$$

$$(M3) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$(M4) \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(R). \quad [\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ щільний у } L^2(R)]$$

(M5) Існує функція $\varphi \in V_0$ така, що множина $\{\varphi(tk); k \in \mathbb{Z}\}$ - ортонормований базис або бази Рісса V_0 .

Крім того, $\varphi \in V_0$ входить в V_1 , звідки отримуємо

$$\{\phi_{1,k} := 2^{j/2} \phi(2x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

яка є базисом Рісса V_1 . Також існує унікальна послідовність $\{p_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2(\mathbb{Z})$, яка описує двомасштабне відношення функції масштабування

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - k),$$

тобто ϕ має двомасштабну властивість, яка може бути уточнена.

З функції масштабування ми також маємо відповідні вейвлети

$$\psi(x) = \sum_{\forall k} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k)$$

Тут функції масштабування діють як фільтр для низькочастотного сигналу (який іноді називають коефіцієнтами апроксимації), а функції вейвлету діють як фільтр для високочастотного сигналу (який називають детальними коефіцієнтами).

Кожне з підпросторів V_j називається простором масштабу. Крім того, ми назвали 2^{-j} як роздільну здатність. Відомо, що для двох послідовних масштабних просторів $V_j \subset V_{j+1}$ ортогональне доповнення W_j до V_j у V_{j+1} можна отримати за допомогою смугового фільтра, визначеного на $L^2(\mathbb{R})$. Для кожного $j \in \mathbb{Z}$ ми визначаємо W_j як ортогональне доповнення до V_j у V_{j+1} .

$$\text{Маємо } V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Крім того, (M4) також показує, що:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus W_j, \text{ де } j \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Тобто ми отримали розклад $L^2(\mathbb{R})$ як суму ортогональних підпросторів.

2.2 Введення понять про батьківський та материнський вейвлети

Розглянемо детальніше рівняння (2).

Рівняння (2) означає, що будь-яку $f \in L^2(R)$ можна представити у вигляді ряду (збіжного в $L^2(R)$):

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (3)$$

де α_k і β_{jk} – коефіцієнти, визначені рівнянням (4) і $\{\psi_{jk}\}$, $k \in Z$ є основою для W_j . Співвідношення (3) називається багатороздільним розкладом f . Щоб перетворити (3) у вейвлетне розширення, необхідно обґрунтувати використання

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad k, j \in Z$$

В основному, функції $\phi_{jk}(x)$ і $\psi_{jk}(x)$ називаються функцією масштабування (батьківським вейвлетом) і материнським вейвлетом відповідно. Простір і називається простором деталізації та простором наближення відповідно. В аналізі Фур'є ми маємо лише один рівень роздільної здатності, тоді як у MRA є багато рівнів роздільної здатності.

$$\alpha_k = \int f(x) \phi_{0k}(x) dx, \quad \beta_k = \int f(x) \psi_{jk}(x) dx. \quad (4)$$

Часто у вейвлет-літературі α_k називають апроксимаційними/більш грубими коефіцієнтами, а β_{jk} називають коефіцієнтами деталізації.

Лема 1: Нехай ϕ — батьківський вейвлет, який генерує MRA $L^2(\mathbb{R})$. Обернене перетворення Фур'є $\psi \circ f$

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (5)$$

де, $m_1(\xi) = m_0(\xi + \pi)e^{-i\xi}$ - материнський вейвлет

Лема 2: Материнський вейвлет задовольняє:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2xk) \quad (6)$$

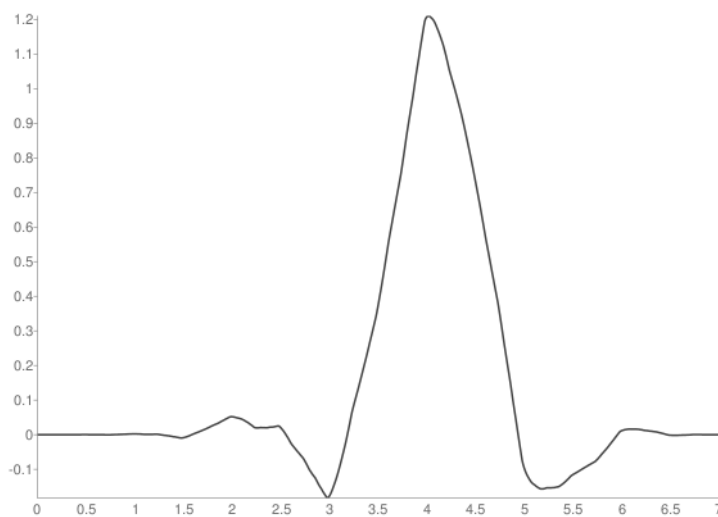
де, $g_k = (-1)^{k+1} \overline{h_{N-k}}$ для батьківського вейвлету маємо співвідношення:

$$\sum_k \overline{h_k} h_{k+21} = \delta_{01} \quad i \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k = 1 \quad (7)$$

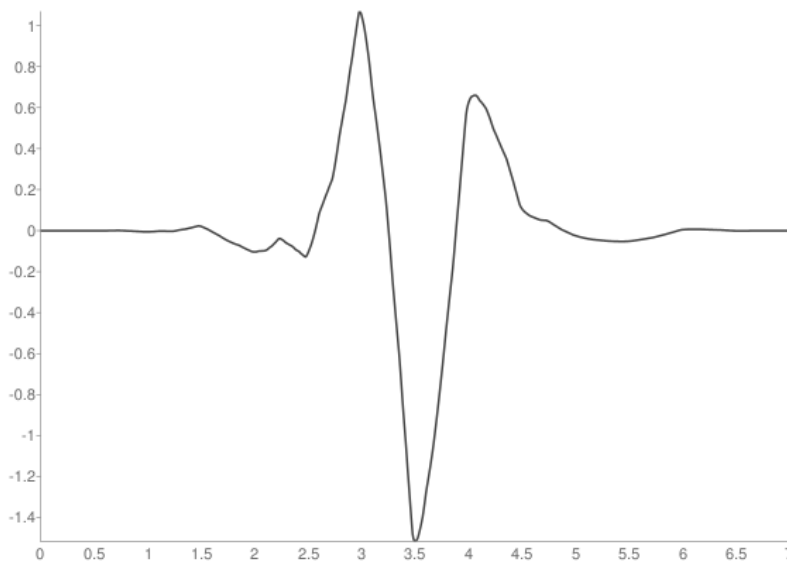
2.3. Загальний алгоритм видалення шумів

У цьому дослідженні ми використовуємо симлет 4 вейвлета (коефіцієнт фільтра 8). Щоб показати потужність DWT, ми застосовуємо симлет 4 для зменшення шуму даних часових рядів до семи рівнів апроксимації.

На малюнку 1 показано приклад функції масштабування симлета 4 та відповідної їй вейвлет-функції.



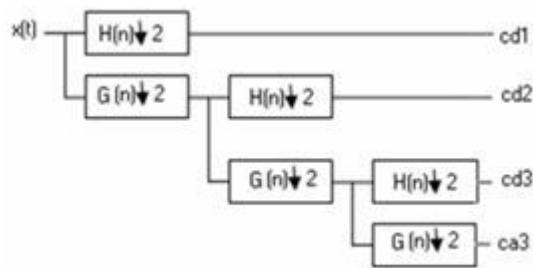
Функція масштабування ϕ



Вейвлет-функція ψ

о вейвлет-декомпозицію для

Процес вейвлет-декомпозиції може бути ітерований з отриманням зручних наближень, так що вихідний сигнал розбивається на безліч компонентів низької роздільної здатності, що утворюють дерево вейвлет-декомпозиції (ниже проілюстровано дерево вейвлет-декомпозиції).



Для цього набору даних найкращим рівнем розкладання є 7-ий, серед наведених. Проаналізувавши графіки з малюнку 2, навіть на 7-му рівні вейвлет-декомпозиція, містить основну закономірність вихідного часового ряду, який виглядає дуже нестабільним і має різні точки сплеску.

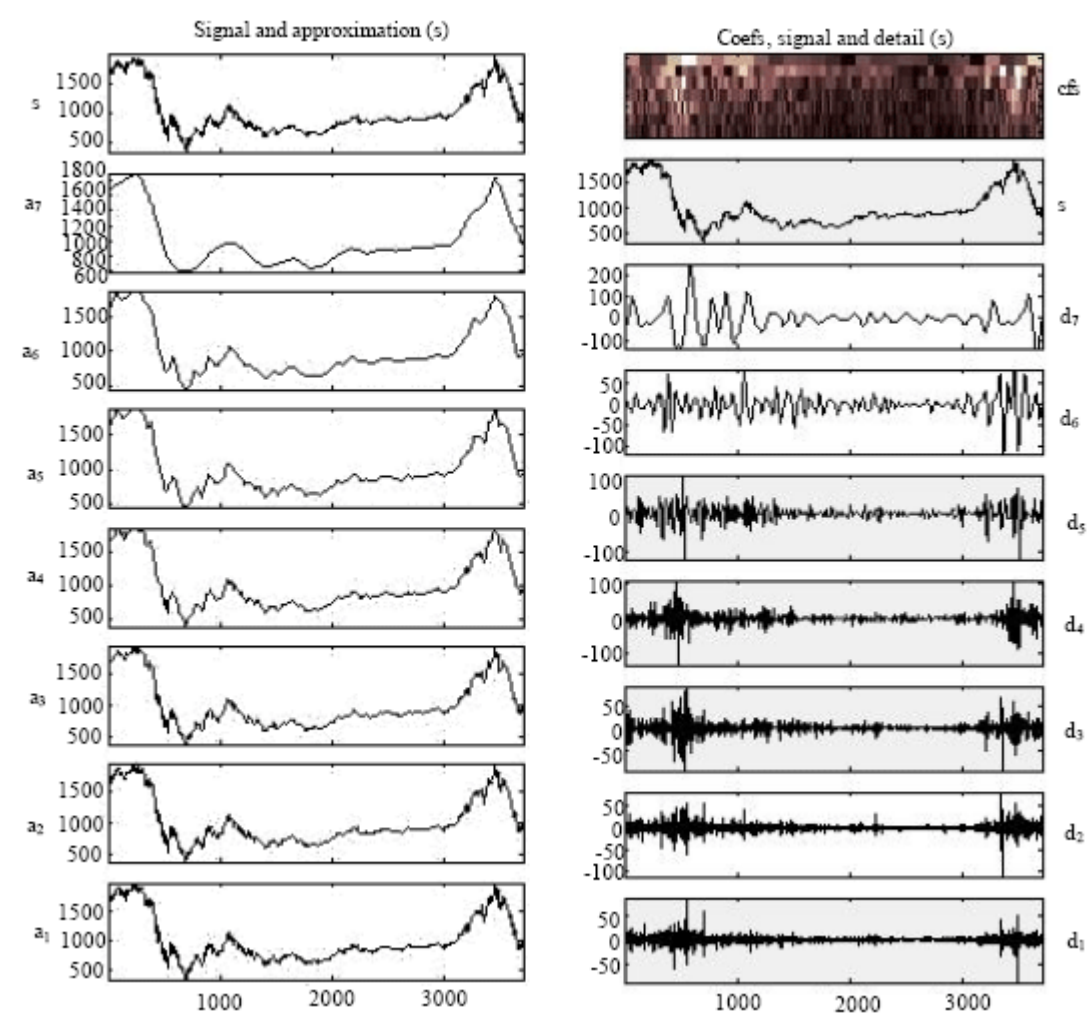


Рисунок 2: Розкладання вейвлета на вихідний годинний ряд до рівня 7 (a) наближення та (b) деталізації

Загальний алгоритм видалення шумів, який можна використовувати для видалення шуму будь-якого сигналу (часового ряду), що містить небажаний шум, перераховано в Алгоритмі 1.

Проте, перед представлення алгоритму, введемо деяку інформацію про порогове значення. Існує два основних правила встановлення порогу: м'який або жорсткий поріг.

Враховуючи вейвлет-коефіцієнт і порогове значення, жорстке порогове значення коефіцієнта можна записати так:

$$\eta_{hard}(w, \lambda) = w I(|w| > \lambda).$$

У той час як м'яке порогове значення можна знайти за наступною формулою:

$$\eta_{soft}(w, \lambda) = \operatorname{sgn}(w)(|w| - \lambda) I(|w| > \lambda).$$

Де, I — звичайна індикаторна функція або ж, індикатор. Іншими словами, жорсткий означає зберегти або «вбити», а м'який означає зменшити або «вбити» [4], [8].

В розрахунках, зазвичай використовується м'який поріг. Хоча жорстке порогове значення здатне зберегти пік, воно також викликає більші помилкові коливання та розриви. Існує кілька методів, які можна використовувати, щоб знайти порогове значення. Деякі з цих методів: Universal Threshold Method (універсальний пороговий метод), Sure Threshold (впевнений поріг), Two fold Cross validation Method (двократний метод перехресної перевірки), Level dependent (залежний від рівня), Cross validation Method (метод перехресної перевірки) та Ebays Threshold Method (пороговий метод Ebays).

Алгоритм 1: Загальний алгоритм видалення шумів:

- Крок_1:** Застосувати DWT до вихідного сигналу (часовий ряд)
- Крок_2:** Видаліть малі (детальні/вейвлети) коефіцієнти за допомогою методу порогового значення (жорстке або м'яке визначення порогу).
- Крок_3:** Відновити вихідний сигнал (отримуємо реконструйований сигнал)

Тепер розглянемо сам процес зменшення шуму сигналу будь-якого типу: Розпочнемо з сигналу, для початку розкладаємо його за ортогональним вейвлет-базисом (в даній роботі використовуємо симлет 4 за допомогою дискретного вейвлет-перетворення (DWT)). Потім вибираємо частину коефіцієнтів через порогове значення, і ми зберігаємо коефіцієнти апроксимації вище порогового значення. Для зменшення шуму сигналу за допомогою DWT існують різні методи зменшення шумів, які можна використовувати, щоб видалити шум з вихідного сигналу, зберігаючи при цьому будь-який стрибок або аномалію, який існує в вихідному сигналі (в нашому випадку це дані часового ряду). Зазвичай для зняття шумів даних потрібно жорстке або м'яке порогове значення [8], а потім можемо використовувати різні методи зменшення шуму, такі як евристичний метод SURE, SURE , мінімакс і метод фіксованої форми [10], [11], [1], [12], [13], [8], [14].

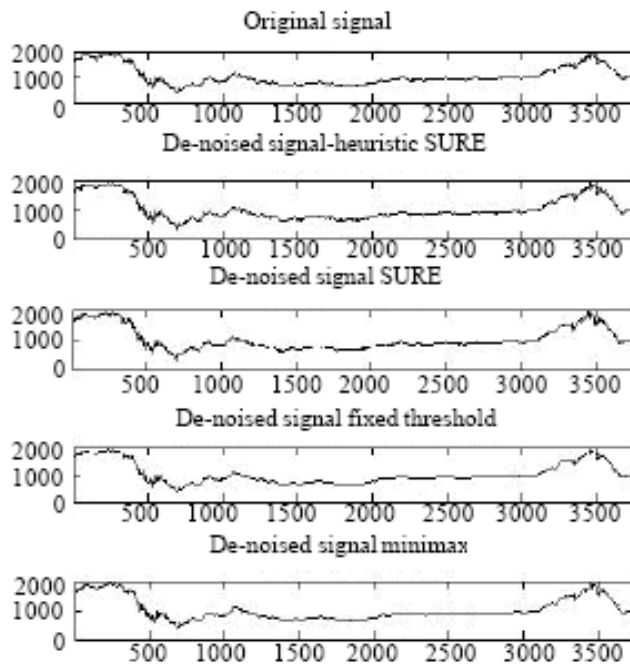


Рисунок 3: Погашений (заглушений) вихідний сигнал за допомогою DWT (різний підхід порогового значення)

На малюнку 3 показано шумовий сигнал (часовий ряд) за допомогою різного типу правила вибору порогового значення. У цьому прикладі ми застосовуємо методи м'якого та жорсткого порогів. Ми бачимо, що для цього набору даних мінімакс і поріг фіксованої форми дають нам кращий результат у порівнянні з евристичними параметрами SURE та SURE. Зрозуміло, що зашумлені часові ряди є чистими і найменш спотвореними.

РОЗДІЛ 3

ДЕЯКІ ВИДИ ВЕЙВЛЕТ ПЕРЕТВОРЕНЬ

3.1. Неперервне вейвлет-перетворення (CWT)

Нехай $x(t)$ є функцією в $\mathbb{R}$, тоді CWT $x(t)$ у масштабі $u \in \mathbb{R}$ та поступальному $s \in \mathbb{R}$ значенні дорівнює

$$W(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

Більше інформації щодо CWT можна знайти [15].

В даній роботі звернемо увагу на застосування CWT, а саме, наскільки він підходить для обробки та аналізу даних фінансових часових рядів.

Перевага CWT полягає в тому, що він може вилучати компоненти з більш простою структурою з дуже складної функції. Тоді замість вивчення вихідної функції в цілому, ми можемо вивчати кожен малу складову. Звичайно, що на рахунок з перевагами, є й певні недоліки. Перш за все, оскільки фінансові тимчасові ряди є дискретними даними з величезною кількістю точок даних, розрахувати всі вейвлет-коефіцієнти практично неможливо. По-друге, оскільки CWT вводить два параметри, він, ймовірно, додасть зайву інформацію в дані, що в свою чергу збільшить об'єм роботи.

Додатковий та більш детальний огляд даного вейвлет-перетворення можна знайти в статті [16]. Враховуючи всі переваги та недоліки цього перетворення, розглянемо, ще один вид вейвлет-перетворення, більш простого типу.

3.2. Дискретне вейвлет-перетворення (DWT)

Припустимо, що ми маємо функції масштабування та вейвлет, які задовольняють наступному співвідношенню

$$\phi(2^{j-1}x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk}\phi(2^jx - k) \quad i \quad \psi(2^{j-1}x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}\phi(2^jx - k)$$

Нехай v_n вихідні дані. У випадку, коли функції масштабування та вейвлет-функції ортогональні, то низькочастотні або апроксимаційні коефіцієнти можна знайти за допомогою нище наведеної формули

$$u_{jn} = 2^{j-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k < \phi(2^jx - k), \quad \phi(2^{j-1}x - n) \geq 2^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k c_{jk}$$

а високочастотні або детальні коефіцієнти можна знайти за допомогою

$$w_{jn} = 2^{j-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k < \psi(2^jx - k), \quad \psi(2^{j-1}x - n) \geq 2^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k d_{jk}$$

Детальну інформацію про DWT можна знайти в [15].

Аналогічно до CWT, розглянемо переваги та недоліки даного перетворення.

Основна перевага DWT полягає в тому, що він успадковує ті ж переваги, що й CWT, але використовує обмежену кількість перекладених і розширених версій оригінального вейвлета [16]. Тому набагато простіше обчислити всі коефіцієнти, особливо коли функції масштабування та вейвлет ортогональні.

Однак можна виокремити 3 основні недоліки

- Перш за все, DWT вимагає, щоб кількість точок даних була 2^n
- По-друге, він не є інваріантним до зсуву
- І, нарешті, він може зрушити максимум або мінімум вихідного ряду, що робить коефіцієнти наближення не узгодженими з вихідними даними

Отже, враховуючи всі переваги й недоліки розглянемо одну конкретну модифікацію DWT, яка діє максимально подібно до DWT, але не вразлива до вищезазначених недоліків.

3.3. Максимальне перекриття дискретного вейвлета (MODWT)

Щоб реалізувати MODWT, фільтри d_{jk} і c_{jk} повинні бути перемасштабовані наступним чином

$$\tilde{c}_{jk} = \frac{c_{jk}}{\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad \tilde{d}_{jk} = \frac{d_{jk}}{\sqrt{2}}$$

Тоді наблизення та детальні коефіцієнти можуть бути розраховані за

$$u_{jn} = 2^{-1} \sum_{l=0}^{L_j-1} v_{n-l} \tilde{c}_{jk} \mod N$$

$$w_{jn} = 2^{-1} \sum_{l=0}^{L_j-1} v_{n-l} \tilde{d}_{jk} \mod N$$

де N – довжина часового ряду, а L_j – ширина фільтрів: $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$, де L – ширина $j=1$ базовий фільтр.

Більш детальну інформацію про теоретичні основи MODWT можна отримати в [17].

За винятком того факту, що MODWT не є ортонормованим, як DWT, і тому є дуже надлишковим, він має кілька бажаних характеристик, які підходять для вивчення фінансових даних часових рядів [16].

- По-перше, на відміну від DWT, його можна застосувати до часового ряду з довільною довжиною n (тобто n не повинно бути 2^j)

- По-друге, на відміну від DWT, він інваріантний до зсуву.
- По-третє, його апроксимація та детальні коефіцієнти зміщуються разом із вихідними даними (тобто вони мають ті самі граничні значення, що й вихідні дані).

РОЗДІЛ 4

РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ПРАКТИЧНІ ПИТАННЯ

4.1. Вибір вейвлета. Застосування в економіці та фінансах

Окрім типів вейвлет-перетворення, які підходять для фінансових часових рядів, наступне питання, яке ми хотіли б розглянути тут, — це вибір масштабування та вейвлет-функцій. Звичайно, вибір масштабування та вейвлет-функцій не є унікальним; існує безліч вейвлетів, таких як вейвлет Хаара, вейвлет Добеші, вейвлет Шерлет, вейвлет Шеннона, вейвлет Мейера, сплайн вейвлет Батл-Лемарі, сплайн вейвлет Стрьомберга, вейвлет мексиканського капелюха з різними характеристиками тощо. Деякі дослідники в галузі припускають, що вейвлет Добеші може бути одним із найпопулярніших вейвлетів для аналізу фінансових даних [16]. Проте, оскільки потенційно можуть бути різні типи даних і різні контексти, вибір вейвлета не є визначеним.

Замість того, щоб визначати один або кілька відповідних вейвлетів для фінансування, корисніше обговорити властивості вейвлетів, які слід враховувати при виборі відповідних вейвлетів. На основі роботи Массета [16], перерахуємо деякі з найважливіших властивостей і критеріїв.

Симетрія: Властивість симетрії важлива в тому сенсі, що функція симетричного масштабування та вейвлет забезпечують наближення та детальні коефіцієнти для узгодження з вихідними даними (тобто немає фазового зсуву). Однак, крім вейвлета Хаара, майже всі інші не симетричні. Щоб мати справу з асиметричними характеристиками, замість цього можна використовувати MODWT, щоб узгодити коефіцієнти з даними.

Ортогональність: властивість ортогональності також дуже важлива, оскільки ортогональність надає вейвлетам і функціям масштабування певні переваги. Серед них найбажанішою перевагою ортогональності є те, що вона дозволяє швидко та ефективно розкласти сигнали на коефіцієнти, а також відновити сигнал з його коефіцієнтів. В результаті ця властивість може допомогти прискорити та знизити вартість обробки даних. Крім того, вейвлет-декомпозиція з використанням ортогональної системи збереже дисперсію вихідного ряду.

Безсумнівно, не всі вейвлети ортогональні. Стратегію побудови класу ортогонального масштабування та вейвлет-функцій із кардинальних В-сплайн-функцій можна знайти в [18]. Приклад таких функцій масштабування можна знайти на **малюнку 4**.

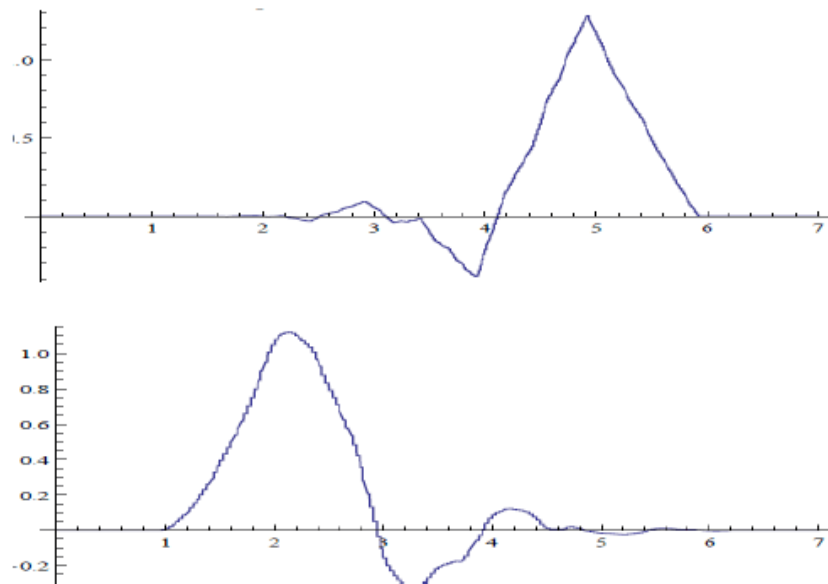


Рисунок 4: Приклади функцій ортогонального масштабування на основі В-сплайнів третього та четвертого порядку.

Гладкість: гладкість вейвлета визначається як кількість його неперервних похідних. Залежно від характеру даних, з якими ми працюємо, ми можемо вибрати відповідний вейвлет з певним ступенем плавності. Наприклад, з гладкими даними, такими як річна ціна акцій, ми можемо використовувати більш плавні вейвлет-функції, а з розрізненими даними, такими як прибуток акцій, ми можемо використовувати менш гладкі вейвлет-функції, такі як вейвлет Хаара і Добеші.

Довжина вейвлет-фільтрів: дуже важливо визначити відповідну довжину для фільтрів. Кілька стратегій для вибору оптимальної довжини наведено в [16].

Застосування в економіці та фінансах

В цій частині роботи розглянемо кілька застосувань вейвлет-аналізу в економіці та фінансах. Кожне з наведених нижче додатків враховується завдяки перевагам вейвлет-аналізу, які обговорювались раніше. Отже в ході роботи повторимо деякі переваги вейвлет-аналізу, що в свою чергу, допоможе пов'язати їх із конкретним фінансовим використанням. Також, розглянемо реалізацію та наведемо деякі приклади для ілюстрації процесів.

Більшість застосувань в економіці та фінансах вейвлет-аналізу походить від його здатності надавати інформацію як у часовій, так і в частотній областях. Це має вирішальне значення для економіки та фінансів, оскільки багато з цих змінних можуть діяти та взаємодіяти по-різному відповідно до різних масштабів часу. Тому вейвлет-аналіз може діяти як інструмент для розкладання даних на сигнали різного масштабу часу, перш ніж ми зможемо застосувати економетричні методи для їх аналізу.

Справді, у цьому розділі представлено кілька випадків, коли вейвлет-перетворення можна застосувати до фінансових часових рядів як попереднє перетворення.

4.2. Статичний і динамічний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними

Статичний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними

У фінансах існує безліч обставин, коли нам потрібно оцінити кореляцію між ще двома змінними. Наприклад, дуже корисно знати співвідношення між окремими акціями, щоб створити стратегію інвестування диверсифікації. Відповідно до теорії фінансів, інвестори можуть підвищити свою прибутковість і зменшити ризик, диверсифікуючи різні акції з низькою кореляцією. З іншого боку, акції з високою кореляцією не додають великої вартості портфелю. В результаті інвестори часто хочуть знати співвідношення між акціями, які їх цікавлять, щоб створити оптимальний портфель.

Стосовно цієї проблеми статистика надає інвесторам простий спосіб знайти кореляцію між двома змінними, яка називається коефіцієнтом продукту-моменту Пірсона.

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Хоча цей коефіцієнт дуже легко зрозуміти та розрахувати, залишається одна проблема, оскільки кореляція враховує всю інформацію, представлену в цінах акцій, включаючи основні сигнали та шуми. Це може бути недоліком, оскільки інвестори можуть захотіти більше зосередитися на довгостроковій кореляції та ігнорувати короткострокові шуми. На щастя, вейвлет-перетворення дозволяє витягувати основні сигнали або коефіцієнти апроксимації з вихідних даних. Тому використання вейвлет-перетворення як попереднього перетворення

перед фактичним виконанням кореляційного аналізу гарантує, що розрахована кореляція не враховує всі шуми, які можуть відображати небажану інформацію.

Для прикладу проілюструємо процес, досліджуючи кореляцію між двома прибутками акцій: Apple Inc. і Microsoft Corp

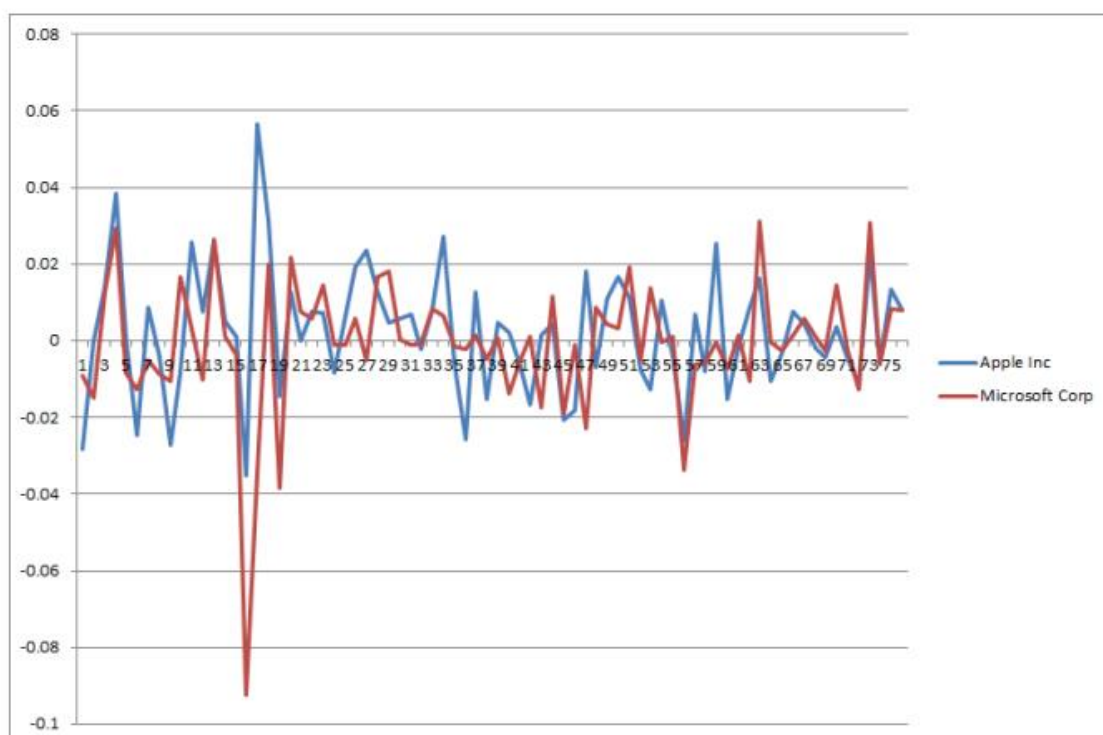


Рисунок 4: доходи від акцій Apple Inc та Microsoft Corp

В першу чергу обчислюємо коефіцієнт кореляції двох вихідних часових рядів. Потім спробуємо вейвлет-підхід: використовуємо DWT з вейвлетом Добеші, щоб отримати коефіцієнти наближення серії 2 перед фактичним обчисленням кореляції. Результат можна знайти в **таблиці 1**.

Серії	Коефіцієнт кореляції
Вихідні дані	0.438944
Коефіцієнти апроксимації	0.492594

Таблиця 1: доходи від акцій Apple Inc та Microsoft Corp з 2.01.2015 року по 20.04.2015 року

Завдяки підрахункам та даним авторів ми можемо зробити вже перші висновки, що, використовуючи підхід вейвлет-перетворення, дійсно знаходимо більш високу кореляцію між двома прибутками акцій порівняно зі звичайним підходом. Це можна пояснити тим фактом, що шуми в початкових часових рядах можуть знизити фактичну довгострокову кореляцію між двома прибутками акцій.

Динамічний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними

Хоча в деяких випадках статичний кореляційний аналіз є достатнім, через деякий час фінансове дослідження вимагає вимірювання кореляції, що змінюється в часі. Наприклад, може бути поставлено завдання, визначити, як змінилися співвідношення фондових ринків з часом, щоб дослідити еволюцію фінансової інтеграції між фондовими ринками. Знову ж таки, у такому випадку застосування вейвлет-перетворення, перед фактичною обробкою, за допомогою економетричних методів, корисно для видалення шуму та зосередження лише на основних сигналах.

Як і в попередньому розділі, першим кроком є використання DWT для розкладання часових рядів на апроксимаційні коефіцієнти (основні сигнали) і детальні коефіцієнти (шум).

Тоді на другому кроці ми можемо застосувати модель DCC-MGARCH, детальніше, про яку можна дізнатися з джерела [19].

Спочатку розглянемо оригінальну модель Боллерслева [20]:

$$y_t = E(y_t | F_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$Var(\varepsilon_t | F_{t-1}) = H_t$$

$$H_t = D_t R D_t$$

де $(y_{1t} \dots y_{mt})^T$ – послідовність векторів повернення, F_t – інформація, доступна до часу t $D_t = diag(\sqrt{h_{i,t}})$, а R – кореляційна матриця, що містить умовні кореляції.

[19] модифікує модель, дозволяючи кореляційній матриці R змінюватися з часом

$$H_t = D_t R_t D_t$$

Одну специфікацію для кореляційної матриці пропонує модель GARCH (1,1)

$$q_{i,j,t} = \bar{p}_{i,j} + \alpha(\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1} - \bar{p}_{i,j}) + \beta(q_{i,j,t-1} - \bar{p}_{i,j})$$

де $\bar{p}_{i,j}$ – безумовна кореляція між $\varepsilon_{i,t}$ і $\varepsilon_{j,t}$ (Engle [19]). Наведене вище рівняння можна записати так

$$q_{i,j,t-1} = \bar{p}_{i,j} \left(\frac{1 - \alpha - \beta}{1 - \beta} \right) + \alpha \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \varepsilon_{i,t-s} \varepsilon_{j,t-s}$$

Тоді оцінка відношення кореляції буде розраховуватись як

$$p_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t} q_{j,j,t}}},$$

який завжди позитивний і представляє рівень кореляції в часі.

Щоб проілюструвати процес, наведемо приклад одного з авторів незалежного дослідження в галузі фінансів. У своєму проекті Т. Нгуєн [18] досліджує фінансову інтеграцію між фондовими ринками Китаю та АСЕАН за десятиліття (з 2004 по 2014 рр.), використовуючи динамічну умовну кореляційну міру з підходом DWT. Індeksi фондового ринку та графік змінної в часі кореляції між фондовими ринками Китаю та АСЕАН наведені нижче в **таблиці 2**.

	Country	Stock market index	Number of constituents	Market Capitalization (national currency)
ASEAN group	China	Shanghai SE A Share	943	14,974,400
	Malaysia	FTSE Bursa Malaysia	30	512,000
	Phillipines	PSE PSEI Phillipines	30	2,558,038
	Indonesia	JSX Composite	489	4,430,000,000
	Thailand	SET 50	50	8,375,962

Таблиця 2 Індeksi фондового ринку Китаю та країн АСЕАН.

На перший погляд, кореляції коливаються від менше ніж 0,1 і максимум до 0,5 і коливаються близько 0,3 протягом більшої частини часу. Відповідно до категоризації Денсі і Рейді, кореляції між Китаєм і чотирма країнами АСЕАН знаходяться на слабкому або помірному рівні. Це означає, що фондовий ринок Китаю не дуже інтегрований з чотирма країнами АСЕАН, що вказує на потенційні переваги диверсифікації, коли інвестори включають акції з чотирьох країн АСЕАН до своїх портфелів. Співвідношення між Китаєм та чотирма країнами АСЕАН також мають схожу схему. Вони різко зросли в період з 2006 по 2009 рік, що є безпосередньо напередодні та під час фінансової кризи, і

досягли піку в 2009 році. Після 2009 року кореляції вирівнялися і мали два менші піки в 2012 і 2013-2014 роках. Це означає, що переваги від диверсифікації будуть особливо низькими в ці три моменти часу. Загалом, вейвлет-підхід як попередній аналіз покращує результат, гарантуючи, що всі наведені вище інтерпретації не піддаються впливу короткочасних шумів у вихідних даних (мал. 5 і 6).

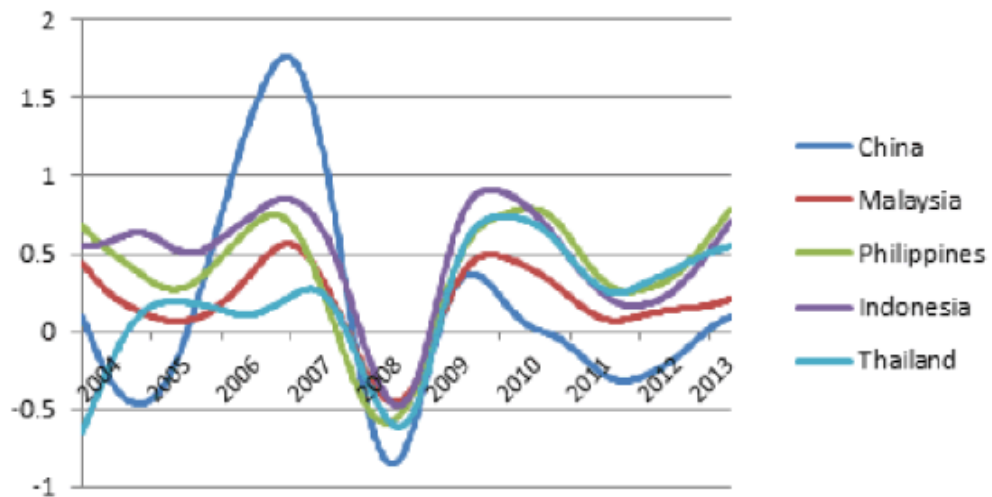


Рисунок 5: Індекс національного фондового ринку Китаю та країн АСЕАН.

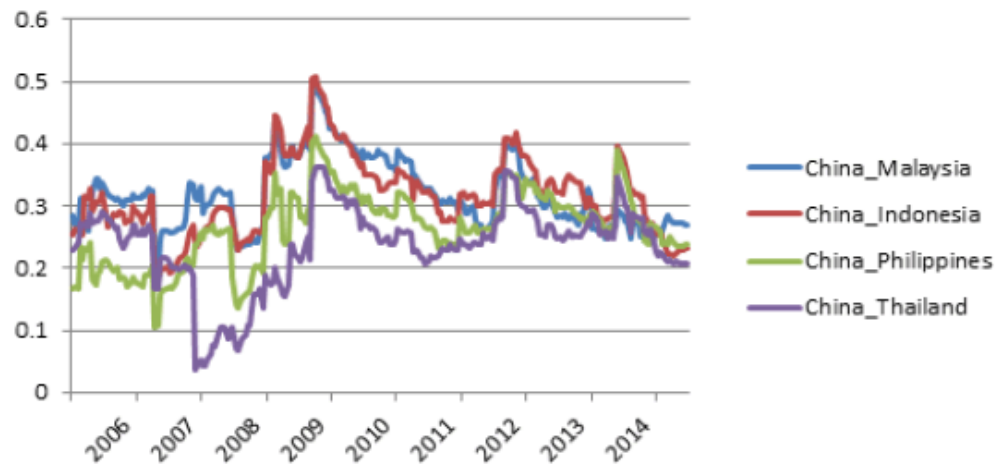


Рисунок 6: Динамічна умовна кореляція між Китаєм та країнами АСЕАН.

4.3. Прогнозування фінансових або економічних часових рядів

Інше застосування, яке розглянемо в цій статті, - це потужність прогнозу підходу DWT, коли він поєднується з методами прогнозування часових рядів.

У фінансах та економіці прогнозування також є одним із важливих застосувань із широким спектром використання. Інвестори можуть використовувати прогнозовані ціни на акції, щоб прийняти рішення щодо покупки, продажу чи утримання акцій або відповідно змінити свій портфель. Економісти та політики також мають значну користь від прогнозу економічних змінних, таких як ВВП, інфляція, ціна житла тощо. Прогноз може служити кількісним доказом для прийняття рішень щодо формування політики.

Зважаючи на важливість прогнозування, економісти розробили кілька методів, таких як прогнозування за моделлю ARMA. В цій роботі ми змінили традиційний прогноз ARMA, використовуючи додатковий DWT перед фактичним процесом прогнозу. Ми будемо використовувати декларацію Apple Inc. В даній роботі описно модель DWT і ARMA для прогнозування повернення на майбутнє за 4 спостереженнями. Схема підходу наведена на **малюнку 7** нижче.

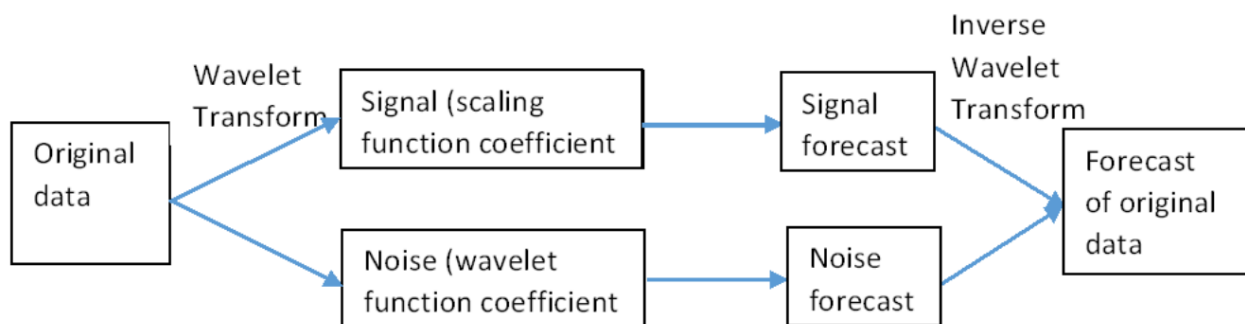


Рисунок 7: Схема включення DWT в економетричний прогноз.

Щоб реалізувати цю схему, виконаємо кілька кроків. Перш за все ми використовуємо DWT з вейвлетом Добеші, щоб розкласти прибуток акцій Apple на апроксимацію та детальні коефіцієнти.

Тоді ми підбираємо модель ARMA як для сигналу, так і для шуму. Знову ж таки, використовуючи інформаційні критерії, ми можемо знайти оптимальну модель ARMA для обох серій. Результати представлені в **таблицях 3 і 4**. Оптимальною моделлю ARMA для коефіцієнта апроксимації є ARMA(2,2), тоді як оптимальною моделлю для коефіцієнта деталізації є ARMA(0,1).

Dependent Variable: CA Method: Least Squares Date: 04/24/15 Time: 16.01 Sample (adjusted): 3 39 Included observations: 37 after adjustments Convergence achieved after 39 iterations MA Backcast: 1 2				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.004812	0.002478	1.942342	0.0609
AR(1)	-1.457566	0.060805	-23.97101	0.0000
AR(2)	-0.880983	0.057260	-15.38558	0.0000
MA(1)	1.492457	0.049539	30.12716	0.0000
MA(2)	0.974399	0.032665	29.82975	0.0000
R-squared	0.328545	Mean dependent var		0.003941
Adjusted R-squared	0.244613	S.D. dependent var		0.016771
S.E. of regression	0.014576	Akaike info criterion		-5.493735
Sum squared resid	0.006799	Schwarz criterion		-5.276043
Log likelihood	106.6341	Hannan-Quinn criter.		-5.416988
F-statistic	3.914416	Durbin-Watson stat		1.875248
Prob(F-statistic)	0.010681			
Inverted AR Roots	-.73-.59i	-.73+.59i		
Inverted MA Roots	-.75-.65i	-.75+.65i		

Таблиця 3. Модель ARMA для прибутковості акцій Apple – коефіцієнти апроксимації

Dependent Variable: CD				
Method: Least Squares				
Date: 04/24/15 Time: 16.01				
Sample (adjusted): 3 39				
Included observations: 37 after adjustments				
Convergence achieved after 8 iterations				
MA Backcast: 2				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001479	0.003376	0.438045	0.6640
MA(1)	0.353351	0.157298	2.246383	0.0311
R-squared	0.074617	Mean dependent var		0.001555
Adjusted R-squared	0.048178	S.D. dependent var		0.015634
S.E. of regression	0.015253	Akaike info criterion		-5.475520
Sum squared resid	0.008143	Schwarz criterion		-5.388443
Log likelihood	103.2971	Hannan-Quinn criter.		-5.444821
F-statistic	2.822179	Durbin-Watson stat		2.126488
Prob(F-statistic)	0.101876			
Inverted MA Roots	-.35			

Таблиця 4. Модель ARMA для прибутковості акцій Apple – детальні коефіцієнти

Далі ми використовуємо модель ARMA, щоб прогнозувати 4 точки даних вперед у майбутнє. Прогнози наведені на **рисунках 8 і 9**.

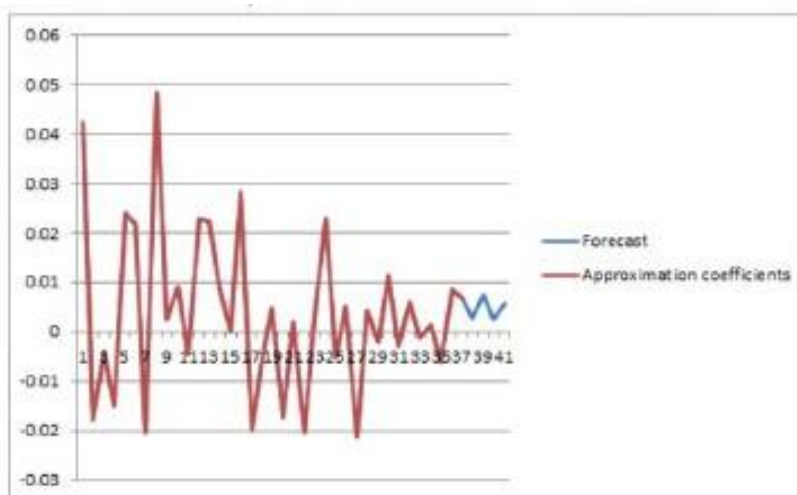


Рисунок 8: Прогноз коефіцієнтів апроксимації.

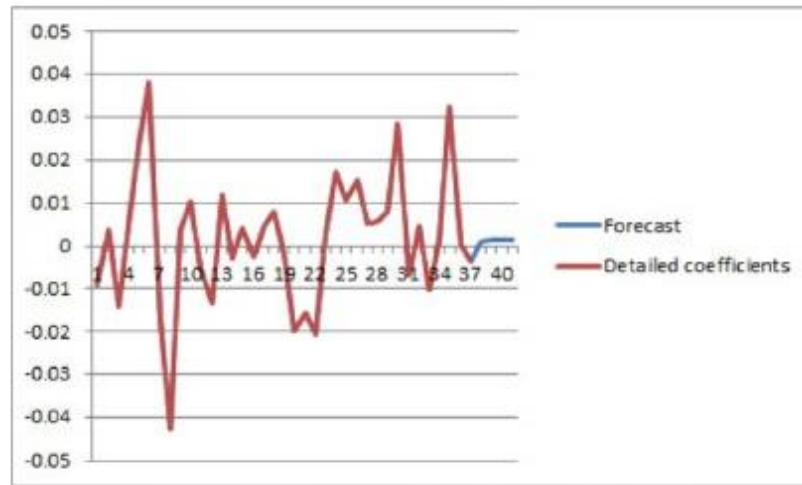


Рисунок 9: Прогноз детальних коефіцієнтів.

Нарешті, з прогнозованих значень апроксимацій та детальних коефіцієнтів ми застосовуємо обернений DWT для отримання прогнозу вихідного ряду. Прогноз представлений на **малюнку 10** нижче.

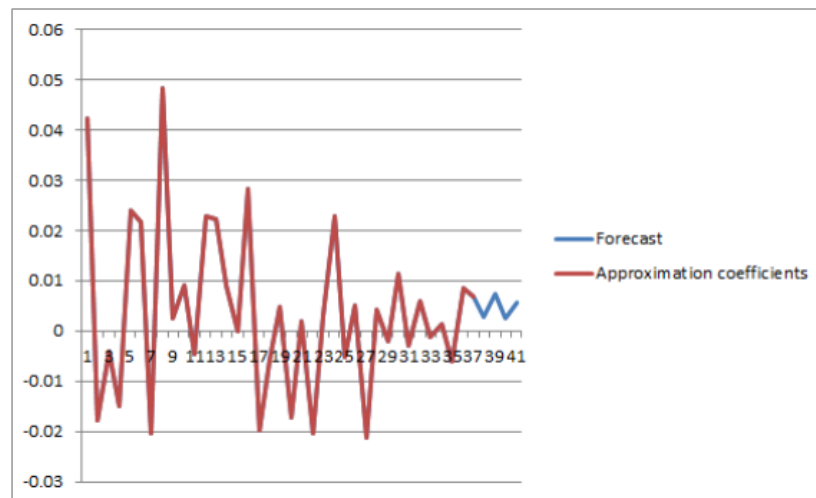


Рисунок 10: Прогноз прибутку акцій Apple Inc.

Отже, згідно з прогнозом, ми спостерігаємо позитивну прибутковість протягом наступних чотирьох днів, але прибуток, здається, знижується. Ця інформація може визначати рішення інвесторів. Знову ж таки, DWT покращує прогноз, оскільки розкладає вихідну серію на сигнали та шуми та прогнозує кожну серію незалежно.

ВИСНОВКИ

В даній роботі було представлено численні застосування вейвлет-аналізу в сферах фінансів та економіки.

Вейвлет-перетворення справді виявляється ефективним інструментом для розкладання часових рядів на різний рівень частоти. Завдяки цьому можна вивчати взаємодію фінансових та економічних змінних на різному рівні: від короткострокового або високочастотного рівня до довгострокового або низькочастотного рівня. Ці переваги можуть призвести до багатьох різних застосувань. Аналіз вейвлетів може використовуватися для виявлення розривів або змін режиму у фінансових та економічних часових рядах. Його також можна використовувати в моделі, яка не вимагає чіткого припущення щодо основного процесу часового ряду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Antoniadis, A., 1997. Wavelets in statistics: A review. J. Italian Statist. Soc., 6: 97-130.
2. Chui, C.K., 1992. An Introduction to Wavelets. Academic Press, San Diego, New York, ISBN 0121745848.
3. Resnikoff, H.L. and R.O. Wells, 1998. Wavelets Analysis: A Scalable Structure of Information. Springer-Verlag, New York
4. Hardle, W., G. Kerkycharian, D. Picard and A. Tsybakov, 1998. Wavelets, Approximation and Statistical Applications, (Lecture Notes in Statistics). Vol. 129, Springer, New York
5. Daubechies, I., 1992. Ten Lectures on Wavelets. Vol. 61, Society for Industrial Applied Maths, Philadelphia, pp: 357
6. Mallat, S.A., 1998. Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, San Diego
7. Meyer, Y., 1992. Wavelet and Operators. Cambridge University Press, Cambridge
8. Van Fleet, P.J., 2008. Discrete Wavelet Transformation: An Elementary Approach with Application. John Wiley and Sons, New Jersey
9. Mallat, S.G., 1989. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 11: 674-693.
10. Donoho, D.L. and I.M. Johnstone, 1994. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. Biometrika, 81: 425-455.
11. Donoho, D.L. and I.M. Johnstone, 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. J. Am. Statist. Soc., 90: 1200-1224.

12. Karim, S.A. and M.T. Ismail, 2008. Wavelet method in statistics. Proceedings of the 16th National Symposium on Mathematical Sciences, June 3-5, Kota Baharu, pp: 95-103
13. Karim, S.A.A., M.T. Ismail and B.A. Karim, 2008. Denoising non-stationary time series using daubechies wavelets. Proceedings of Seminar Kebangsaan Matematik and Masyarakat, Feb. 13-14, Kuala Terengganu, pp: 50-59
14. Rizzi, M., D. Matteo and C. Beniamino, 2009. High sensitivity and noise immune method to detect impedance cardiography characteristic points using wavelet transform. J. Applied Sci., 9: 1412-1421.
15. He TX. Introduction to Wavelet Analysis. Teaching Notes. Illinois Wesleyan University. 2015.
16. Masset p. Analysis of Financial Time-Series Using Fourier and Wavelet Methods. 2008.
17. Cornish CR, et al. The WMTSA wavelet toolkit for data analysis in the geosciences. Eos Trans. 2003.
18. Nguyen T and He T.-X. Construction of spline type orthogonal scaling functions and wavelets. J. Appl. Funct. 2015; 10: 189–203.
19. Engle R. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. J. Business and Economic Statistics. 2002; 20: 339–350.
20. Bollerslev T. Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. The Review of Economics and Statistics. 1990; 72: 398–505.
21. Granger CWJ. Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. Econometrica. 1969; 37: 424–438

