НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.24.

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ О.І. Клесов
« 08 » червня 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Оцінка найменших квадратів для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека»

Виконав:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-01мн
Ноговський Єгор Ігорович ___________

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Боднарчук Семен Володимирович ___________

Рецензент:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики та теоретичної радіофізики Київського національного університету ім. Тараса Шевченко
Іваненко Дмитро Олександрович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ______________

Київ – 2022 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 Математика

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О.І. Клесов

« 03 » лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Ноговського Єгора Ігоровича

1.Тема дисертації «Оцінка найменших квадратів для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека», науковий керівник дисертації: Боднарчук Семен Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, затверджені наказом по університету від « 25 » травня 2022 р. № НС/372/2022.

2. Термін подання студентом дисертації 07 червня 2022 р.

3. Об'єкт дослідження: оцінювання параметрів в моделях з процесом Орнштейна-Уленбека.

4. Предмет дослідження: асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметра зсуву в одній моделі з процесом Орнштейна-Уленбека.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Ознайомитися з літературою, в якій міститься інформація про процес Орнштейна-Уленбека та його властивості, оцінку найменших

квадратів; схему Ойлера чисельного розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь.

2) Довести теорему про консистентність оцінки найменших квадратів параметра зсуву для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека.

3) Навести приклад симуляції результатів дослідження, використовуючи програмне середовище Python.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 15 слайдів.

7. Дата видачі завдання 02 лютого 2022 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Огляд літератури	02.02.22-20.02.22	Виконано
2	Ознайомлення з основними означеннями та допоміжними твердженнями	20.02.22-28.02.22	Виконано
3	Опанування відомих результатів щодо асимптотичних властивостей оцінки найменших квадратів параметра зсуву для процесу Орнштейна-Уленбека	01.03.22-13.03.22	Виконано

4	Доведення консистентності оцінки найменших квадратів параметра зсуву для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека	14.03.22-27.03.22	Виконано
5	Проведення симуляції результатів дослідження	28.03.22-13.04.22	Виконано
6	Аналіз проведеної роботи, оформлення висновків	14.04.22-14.05.22	Виконано
7	Оформлення магістерської дисертації	15.05.22-01.06.22	Виконано

Студент Є. І. Ноговський

Науковий керівник С. В. Боднарчук

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 29 сторінок, 16 слайдів презентації, 11 першоджерел.

Дослідження, представлені в даній магістерській дисертації, присвячені знаходженню умов консистентності оцінки найменших квадратів невідомого значення параметра зсуву для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека.

Актуальність дослідження магістерської дисертації зумовлена тим, що процес Орнштейна-Уленбека є основою для побудови математичних моделей в багатьох прикладних науках: фізиці (модель руху броунівської частинки під дією сили опору середовища), біології (нейронні моделі), фінансовій математиці (моделі відсоткових ставок) тощо.

Метою роботи є встановлення достатніх умов консистентності оцінки найменших квадратів параметра зсуву для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека.

Об’єктом дослідження є оцінювання параметрів в моделях з процесом Орнштейна-Уленбека.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметра зсуву в одній моделі з процесом Орнштейна-Уленбека.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, процес Орнштейна-Уленбека, оцінка найменших квадратів, теорема про нормальну кореляцію, нерівність Чебишова, нерівність Маркова, інтеграл Іто, схема Ойлера.

ABSRACT

Master's thesis: 29 pages, 16 slides of presentation, 11 primary sources.

The research presented in this master's dissertation is devoted to finding the conditions for the consistency of the least squares estimator of the unknown value of the drift parameter for one model with the Ornstein-Uhlenbeck process.

The relevance of the master's thesis research is due to the fact that the Ornstein-Uhlenbeck process is the basis for building mathematical models in many applied sciences: physics (model of Brownian particle motion under the action of environmental resistance), biology (neural models), financial mathematics (interest rate models), etc.

The aim of this work is to establish sufficient conditions for the consistency of the least squares estimator of the drift parameter for one model with the Ornstein-Uhlenbeck process.

The object of the study is an estimation of the parameters in models with the Ornstein-Uhlenbeck process.

The subject of the study is the asymptotic properties of the least squares estimator of the drift parameter in the some model with the Ornstein-Uhlenbeck process.

Keywords: stochastic differential equation, Ornstein-Uhlenbeck process, least squares estimator, normal correlation theorem, Chebyshev inequality, Markov inequality, Ito integral, Euler's scheme.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

СДР – стохастичне диференціальне рівняння;

ОНК – оцінка найменших квадратів;

W – вінерівський процес;

$\mathbb{E}$ – математичне сподівання;

$\mathbb{D}$ – дисперсія;

$\exists$ – квантор існування, «існує»;

$\forall$ – квантор загальності, «для будь-якого».

Вступ

Процес Орнштейна-Уленбека слугує основою для побудови математичних моделей в багатьох прикладних науках: фізиці (модель руху броунівської частинки під дією сили опору середовища, див. [11]), біології (нейронні моделі, див. [7]), фінансовій математиці (моделі відсоткових ставок, див. [1]) тощо. Важливою задачею є побудова та дослідження асимптотичних властивостей оцінок параметрів в моделях, де такий процес спостерігається в неперервному або дискретному часі. Дослідженню цієї проблеми присвячені, наприклад, роботи науковців Auguste Le Breton [5], M. L. Kleptsyna [9], Hongwei Long [3], Анатолія Дороговцева [10] та інших.

В магістерській дисертації досліджуються асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметра зсуву процесу Орнштейна-Уленбека, який спостерігається в дискретні моменти часу і в цих спостереженнях присутній додатковий шум.

Перший розділ цієї роботи містить відомості, що будуть в подальшому використані в процесі дослідження. Зокрема, в ньому наведено означення та основні властивості процесу Орнштейна-Уленбека, сформульовано деякі допоміжні твердження, а також розглянута схема Ойлера чисельного розв’язання стохастичних диференціальних рівнянь.

В другому розділі сформульовано задачу магістерської дисертації, доведено теорему про консистентність оцінки найменших квадратів параметра зсуву в розглянутій моделі, а також показано симуляцію результатів дослідження.

РОЗДІЛ 1: Попередні відомості

1.1 Процес Орнштейна-Уленбека та його властивості.

Означення 1.1. [6] Процесом Орнштейна-Уленбека $X = (X_t, t \geq 0)$ будемо називати гауссівський процес, який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t,\ t > 0, \tag{1.1}$$

де $a > 0$ та $\sigma > 0$ – дійсні числа, $W = (W_t, t \geq 0)$ – вінерівський процес. Початкове значення X_0 є випадковою величиною (можливо константою), що не залежить від W.

Рівняння (1.1) можна переписати в інтегральній формі

$$X_t = X_0 - a\int_0^t X_s ds + \sigma W_t, \qquad t \geq 0,$$

яке ми переважно і будемо розглядати. В подальшому вважаємо, що початкове значення $X_0 = x$ є дійсним числом, а $\sigma = 1$. В такому випадку розв'язок рівняння (1.1) має вигляд

$$X_t = xe^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s, \qquad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Звідси, використовуючи властивості інтеграла Іто, можна отримати вигляд математичного сподівання та коваріації процесу X_t

$$\mathbb{E}X_t = xe^{-at}, \qquad cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2a}\left(e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)}\right), \tag{1.3}$$

в тому числі $\mathbb{D}X_t = \frac{1}{2a}(1 - e^{-2at})$.

1.2 Основні нерівності.

При доведені тверджень нам будуть потрібні наступні нерівності [8].

Нерівність Чебишова

Нехай ξ є випадковою величиною для якої існує $\mathbb{D}\xi$. Тоді $\forall\, x > 0$ виконується нерівність:

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq x) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}. \quad (1.4)$$

Нерівність Маркова

Нехай ξ є випадковою величиною. Тоді $\forall\, r > 0$ та $x > 0$ виконується нерівність:

$$\mathbb{P}(|\xi| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|^r}{x^r}. \quad (1.5)$$

1.3 Теорема про нормальну кореляцію.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір. Позначимо

$\mathcal{L}_0^2(\Omega) = \{\xi: \Omega \to \mathbb{R} | \mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\}$ – простір центрованих та квадратично інтегрованих випадкових величин. Разом зі введеним скалярним добутком

$$(\xi, \eta) \coloneqq cov(\xi, \eta)$$

простір $\mathcal{L}_0^2(\Omega)$ буде гільбертовим.

Розглянемо нормальний вектор $(\xi, \eta)^T$ з $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$. Зауважимо, що ортогональність нормальних випадкових величин з простору $\mathcal{L}_0^2(\Omega)$ еквівалентна їх незалежності. Звідси випливає, що існує випадкова величина $\gamma \simeq N(0,1)$, незалежна від η, така що

$$\xi = \alpha\eta + \beta\gamma, \quad (1.6)$$

де

$$\alpha = \frac{cov(\xi, \eta)}{\mathbb{E}\eta^2}, \qquad \beta = \sqrt{\mathbb{E}\xi^2 - \frac{cov^2(\xi, \eta)}{\mathbb{E}\eta^2}}. \quad (1.7)$$

Зауваження. Для отримання вигляду (1.7) коефіцієнтів α та β потрібно помоножити рівність (1.6) послідовно на ξ, η та γ і розглянути математичні сподівання від отриманих рівностей.

1.4 Схема Ойлера чисельного розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь.

Нехай випадковий процес $X_t, t \in [0, T]$ є розв'язком СДР

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \qquad X_0 = x, \quad (1.8)$$

де $a(x), \sigma(x)$ – деякі вимірні функції, які задовольняють умовам існування та єдиності сильного розв'язку рівняння (1.8). Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ точками виду

$$t_k = kh, \qquad k = 0,1, \dots, n,$$

де $h = \frac{T}{n}$ – крок розбиття. Нехай $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \le t\}$.

Означення 1.2. [4] Будемо називати процес $X^h = \{X_t^h, 0 \le t \le T\}$ дискретною апроксимацією, якщо випадкові величини $X_{t_k}^h$ є $\mathcal{F}_{t_k}$ - вимірними і $Y_{t_{k+1}}^h$ може бути представлена як функція від $X_0^h, \dots, X_{t_k}^h, t_0, \dots, t_k, t_{k+1}$ та скінченного числа $\mathcal{F}_{t_{k+1}}$- вимірних випадкових величин.

Найпростішою дискретною апроксимацією розв'язку рівняння (1.8) є схема Ойлера (її ще називають схемою Ойлера-Маруями, див. [2]) виду

$$\begin{cases} X_0^h = x, \\ X_{t_{k+1}}^h = X_{t_k}^h + a\left(X_{t_k}^h\right)h + \sigma\left(X_{t_k}^h\right)\Delta W_k^h, \qquad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{1.9}$$

де $\Delta W_k^h = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$.

Означення 1.3. Будемо казати, що дискретна апроксимація X^h збігається сильно з порядком $k > 0$ до X в момент часу T при $h \to 0$, якщо для всіх 'достатньо гладких' функцій f існує додатня стала С, яка не залежить від h, що

$$\mathbb{E}\left|f(X_T) - f\left(X_T^h\right)\right| \le Ch^k. \tag{1.10}$$

Відомо, що схема Ойлера (1.9) збігається сильно до розв'язку рівняння (1.8) з порядком $k = 0.5$.

РОЗДІЛ 2: Консистентність оцінки найменших квадратів параметра зсуву для однієї моделі з процесом Орнштейна-Уленбека

2.1 Постановка задачі.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння (СДР) вигляду

$$X_t = x - a\int_0^t X_s ds + W_t, \qquad t \in [0, T], \tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}$ є фіксованою точкою, $W \in \mathbb{R}$ є вінерівським процесом, $a > 0$ невідомий параметр. Ми спостерігаємо

$$Y_{t_k} = X_{t_k} + \varepsilon_{t_k}, \qquad k = 0, \dots, n, \tag{2.2}$$

де $t_k = \frac{kT}{n}, k = 0,1, \dots, n$ та $\varepsilon_t, t \in [0, T]$ процес, незалежний від X_t. Позначимо $h = \frac{T}{n}$.

Наша мета – оцінити значення невідомого параметра a_0 на основі спостережені $Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}$. Для цього ми використовуємо оцінку найменших квадратів (ОНК), яка мінімізує

$$\rho_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} + aY_{t_{k-1}} \cdot h\right)^2.$$

ОНК має вигляд

$$\hat{a}_n = -\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}\right)Y_{t_{k-1}}}{h\sum_{k=1}^{n} {Y_{t_{k-1}}}^2}. \tag{2.3}$$

Далі будемо вважати, що існує $\beta \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ таке, що $T = \Delta n^{\beta}$ для деякої константи $\Delta > 0$ (з міркувань простоти ми продовжимо використовувати T). Тоді очевидно, що $h \to 0$ при $n \to +\infty$.

2.2 Основна теорема про консистентність.

Припустимо, що процес $\varepsilon_t, t \in [0, T]$ задовольняє наступним умовам:

$(\mathbf{C1})$ $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0, \forall t \geq 0.$

$(\mathbf{C2})$ $\dfrac{n^2}{T^3}\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 dt \to 0, n, T \to +\infty.$

Теорема 1. За умов **(C1) - (C2)**

$$\hat{a}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a_0, \qquad n, T \to +\infty.$$

Доведення. Ідея доведення наслідує аналогічну в роботі [3].Розглянемо

$$\hat{a}_n - a_0 = -\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}\right)Y_{t_{k-1}}}{h\sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}^2} - a_0 = -\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{t_k}Y_{t_{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}^2}{h\sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}^2} - a_0.$$

Розв'язок (2.1) має вигляд (1.2), тому

$$Y_{t_k} = xe^{-a_0 t_k} + \int_0^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s + \varepsilon_{t_k} =$$

$$= xe^{-a_0(t_{k-1}+h)} + \int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}+h-s)} dW_s + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s + \varepsilon_{t_k} =$$

$$= e^{-a_0 h} \cdot \left(xe^{-a_0 t_{k-1}} + \int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)} dW_s \right) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s + \varepsilon_{t_k} =$$

$$= e^{-a_0 h} \cdot X_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s + \varepsilon_{t_k} =$$

$$= e^{-a_0 h} \cdot Y_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s + \varepsilon_{t_k} - e^{-a_0 h}\varepsilon_{t_{k-1}}.$$

Тоді

$$\hat{a}_n - a_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-a_0 h} \cdot Y_{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s + \varepsilon_{t_k} - e^{-a_0 h}\varepsilon_{t_{k-1}}\right)Y_{t_{k-1}}}{-h\sum_{k=1}^{n} {Y_{t_{k-1}}}^2} +$$

$$+\frac{\sum_{k=1}^{n} {Y_{t_{k-1}}}^2}{h\sum_{k=1}^{n} {Y_{t_{k-1}}}^2} - a_0 = \left(\frac{1-e^{-a_0 h}}{h} - a_0\right) -$$

$$-\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s + Y_{t_{k-1}}\cdot\left(\varepsilon_{t_k} - e^{-a_0 h}\varepsilon_{t_{k-1}}\right)\right)}{h\sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}^2} \coloneqq$$

$$\coloneqq \Lambda_1(n,T) - \Lambda_2(n,T).$$

Очевидно, що

$$\Lambda_1(n,T) \to 0, \qquad h \to 0. \tag{2.4}$$

Розглянемо ближче Λ_2

$$\Lambda_2(n,T) = \frac{\Lambda_{2,up}(n,T)}{\Lambda_{2,down}(n,T)}, \tag{2.5}$$

де

$$\Lambda_{2,up}(n,T) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{t_{k-1}}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s + Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_k} - e^{-a_0 h}Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_{k-1}}\right),$$

$$\Lambda_{2,down}(n,T) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}^2.$$

З тверджень 1 та 2 випливає, що $\Lambda_{2,up}(n,T) \to 0$ та $\Lambda_{2,down}(n,T) \to \frac{1}{2a_0}$ при $n,T \to +\infty$, відповідно. Разом з (2.4), (2.5) це доводить твердження теореми.

2.3 Допоміжні твердження.

Твердження 1. $\varLambda_{2,up}(n,T) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T \to +\infty.$

Доведення. Ми маємо

$$\varLambda_{2,up}(n,T) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s + Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_k} - e^{-a_0 h}Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}Y_{t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_k} - \frac{e^{-a_0 h}}{T}\sum_{k=1}^{n}Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_{k-1}} \coloneqq$$

$$\coloneqq \varLambda_{2,up,1}(n,T) + \varLambda_{2,up,2}(n,T) - \varLambda_{2,up,3}(n,T).$$

Розглянемо кожен вираз окремо. З (2.2) маємо

$$\varLambda_{2,up,1}(n,T) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}Y_{t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{t_{k-1}} + \varepsilon_{t_{k-1}}\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\left(xe^{-a_0 t_{k-1}} + \int_{0}^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}dW_s + \varepsilon_{t_{k-1}}\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s =$$

$$= \frac{x}{T}\sum_{k=1}^{n}e^{-a_0 t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}dW_s\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{t_{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)}dW_s \coloneqq$$

$$\coloneqq \varLambda_{2,up,1,1}(n,T) + \varLambda_{2,up,1,2}(n,T) + \varLambda_{2,up,1,3}(n,T).$$

За нерівністю Чебишова та властивістю ізометрії Іто ми маємо, що для будь-якого $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,1,1}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,1}(n,T)}{\delta^2} =$$

$$= \frac{x^2}{\delta^2 T^2} \sum_{k=1}^{n} e^{-2a_0 t_{k-1}} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-2a_0(t_k - s)}\, ds =$$

$$= \frac{x^2}{\delta^2 T^2} \frac{1 - e^{-2a_0 h}}{2a_0} \sum_{k=1}^{n} e^{-2a_0 t_{k-1}} = \frac{x^2}{\delta^2 T^2} \frac{1 - e^{-2a_0 T}}{2a_0} \to 0, \qquad T \to +\infty. \quad (2.6)$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,1,2}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,2}(n,T)}{\delta^2} =$$

$$= \frac{1}{\delta^2 T^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{t_{k-1}} e^{-2a_0(t_{k-1} - s)}\, ds \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-2a_0(t_k - s)}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\delta^2 T^2} \frac{1 - e^{-2a_0 h}}{2a_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0} \le \frac{1}{\delta^2 T^2} \frac{1 - e^{-2a_0 h}}{2a_0} \frac{n}{2a_0} =$$

$$= \frac{nh}{2a_0 \delta^2 T^2} \frac{1 - e^{-2a_0 h}}{2a_0 h} = \frac{1}{2a_0 \delta^2 T} \frac{1 - e^{-2a_0 h}}{2a_0 h} \to 0, \qquad T \to +\infty. \qquad (2.7)$$

Залишилось розглянути $\Lambda_{2,up,1,3}(n,T)$. Для початку знайдемо

$$\mathbb{E}\Lambda_{2,up,1,3}(n,T) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\varepsilon_{t_{k-1}} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s\right) =$$

$=$ |ми припустили, що процеси ε_t та W_t – незалежні, тому математичне сподівання добутку дорівнює добутку математичних сподівань| $=$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_{k-1}} \cdot \mathbb{E} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k - s)} dW_s = 0,$$

так як за властивістю перший момент інтеграла Іто дорівнює нулю.

Тому, за нерівністю Чебишова для $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,1,3}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,3}(n,T)}{\delta^2}$$

Розпишемо $\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,3}(n,T)$.

$$\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,3}(n,T) =$$

$$= cov\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)} dW_s\, , \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-a_0(t_k-s)} dW_s\right) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{i,j=1}^{n} cov\left(\varepsilon_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s\, , \varepsilon_{t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-a_0(t_j-s)} dW_s\right).$$

Розглянемо окремо

$$cov\left(\varepsilon_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s\, , \varepsilon_{t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-a_0(t_j-s)} dW_s\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\varepsilon_{t_{i-1}}\varepsilon_{t_{j-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-a_0(t_j-s)} dW_s\right) -$$

$$-\mathbb{E}\left(\varepsilon_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s\right) \cdot \mathbb{E}\left(\varepsilon_{t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-a_0(t_j-s)} dW_s\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\varepsilon_{t_{i-1}}\varepsilon_{t_{j-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-a_0(t_j-s)} dW_s\right) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2 \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s\right)^2, \text{якщо } i = j \\ 0, \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

Тому

$$\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,3}(n,T) = \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2 \cdot \mathbb{E}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-a_0(t_i-s)} dW_s\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-2a_0(t_i-s)} ds = \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2 \frac{1}{2a_0} e^{-2a_0(t_i-s)}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} =$$

$$= \frac{1}{2a_0T^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2(1-e^{-2a_0h}) = \frac{1-e^{-2a_0h}}{2a_0T^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2 =$$

$$= \frac{1}{T^2}\frac{1-e^{-2a_0h}}{2a_0h}h\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2 = \frac{1}{T^2}\frac{1-e^{-2a_0h}}{2a_0h}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2.$$

В результаті отримуємо, що

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,1,3}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{D}\Lambda_{2,up,1,3}(n,T)}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2T^2}\frac{1-e^{-2a_0h}}{2a_0h}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2. \quad (2.8)$$

Вираз $\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_{i-1}}^2$ – сума Рімана для $\int_0^T\mathbb{E}\varepsilon_t^2dt$. З умови (С2) права частина останньої рівності прямує до 0, коли T прямує до $+\infty$.

Розглянемо $\Lambda_{2,up,2}(n,T)$:

$$\Lambda_{2,up,2}(n,T) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_k} =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\left(xe^{-a_0t_{k-1}} + \int_0^{t_{k-1}}e^{-a_0(t_{k-1}-s)}dW_s + \varepsilon_{t_{k-1}}\right)\varepsilon_{t_k} =$$

$$= \frac{x}{T}\sum_{k=1}^{n}e^{-a_0t_{k-1}}\varepsilon_{t_k} + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{t_{k-1}}e^{-a_0(t_{k-1}-s)}dW_s\,\varepsilon_{t_k} + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_k} :=$$

$$:= \Lambda_{2,up,2,1}(n,T) + \Lambda_{2,up,2,2}(n,T) + \Lambda_{2,up,2,3}(n,T).$$

За нерівністю Маркова маємо, що для будь-якого заданого $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,2,1}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{E}\left|\Lambda_{2,up,2,1}(n,T)\right|}{\delta} \le \frac{x}{\delta T}\sum_{k=1}^{n}e^{-a_0t_{k-1}}\mathbb{E}\left|\varepsilon_{t_k}\right| \le$$

$$\le \frac{x}{\delta T}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{-2a_0t_{k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left|\varepsilon_{t_k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{x}{\delta T}\left(\frac{1-e^{-2a_0T}}{1-e^{-2a_0h}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_k}^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x(1-e^{-2a_0T})^{\frac{1}{2}}}{\delta}\left(\frac{h}{1-e^{-2a_0h}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{n}{T^2}\left(\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\varepsilon_{t_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

За умови (С2) права частина останньої рівності прямує до 0, коли n, T прямує до $+\infty$. Далі

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,2,2}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{E}\left|\Lambda_{2,up,2,2}(n,T)\right|}{\delta} \le$$

$$\le \frac{1}{\delta T}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\varepsilon_{t_k}\right| \cdot \mathbb{E}\left|\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)} dW_s\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\delta T}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \int_0^{t_{k-1}} e^{-2a_0(t_{k-1}-s)} ds\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\delta T}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1-e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\delta\sqrt{2a_0}} \cdot \frac{n}{T^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_{t_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

За умови (C2) права частина останньої рівності прямує до 0, коли n, T прямує до $+\infty$. Далі

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,up,2,3}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{E}\left|\Lambda_{2,up,2,3}(n,T)\right|}{\delta} \le \frac{1}{\delta T}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\varepsilon_{t_k}\varepsilon_{t_{k-1}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\delta}\frac{n}{T^2} \cdot \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\varepsilon_{t_k}\varepsilon_{t_{k-1}}\right| . \quad (2.11)$$

За умови (C2) права частина останньої рівності прямує до 0, коли n, T прямує до $+\infty$.

$$\Lambda_{2,up,3}(n,T) = \frac{e^{-a_0 h}}{T}\sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}\varepsilon_{t_{k-1}} =$$

$$= \frac{e^{-a_0 h}}{T}\sum_{k=1}^{n}\left(x e^{-a_0 t_{k-1}} + \int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)} dW_s + \varepsilon_{t_{k-1}}\right)\varepsilon_{t_{k-1}} =$$

$$= \frac{x e^{-a_0 h}}{T}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}}\varepsilon_{t_{k-1}} + \frac{e^{-a_0 h}}{T}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{t_{k-1}} \int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)} dW_s +$$

$$+ \frac{e^{-a_0 h}}{T}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{t_{k-1}}^2 \coloneqq \Lambda_{2,up,3,1}(n,T) + \Lambda_{2,up,3,2}(n,T) + \Lambda_{2,up,3,3}(n,T).$$

Подібні міркування які використовувались для $\Lambda_{2,up,2,i}(n,T), i = 1,2,3$ показують, що члени $\Lambda_{2,up,3,i}(n,T), i = 1, 2, 3$ прямують до 0 при $n, T \to +\infty$. Об'єднавши попередні результати, ми робимо висновок, що твердження 1 справедливе. ■

Твердження 2. $\Lambda_{2,down}(n,T) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2a_0}, \; T \to +\infty$.

Доводення. З (2.2) ми маємо

$$\Lambda_{2,down}(n,T) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_{t_{k-1}}^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(xe^{-a_0 t_{k-1}} + \int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}\,dW_s + \varepsilon_{t_{k-1}}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-2a_0 t_{k-1}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}\,dW_s\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{t_{k-1}}^2 +$$

$$+\frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}}\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}\,dW_s + \frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}}\varepsilon_{t_{k-1}} +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{t_{k-1}}\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}\,dW_s := \sum_{i=1}^{6}\Lambda_{2,down,i}(n,T).$$

Розглянемо кожен вираз окремо.

$$\Lambda_{2,down,1}(n,T) = \frac{x^2}{n}\frac{1-e^{-2a_0 T}}{1-e^{-2a_0 h}} =$$

$$= \frac{x^2(1-e^{-2a_0 T})}{T}\frac{h}{1-e^{-2a_0 h}} \to 0, \qquad T \to +\infty. \qquad (2.12)$$

Головна ціль показати, що

$$\Lambda_{2,down,2}(n,T) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2a_0}, \qquad T \to +\infty. \qquad (2.13)$$

Ми маємо

$$\mathbb{E}\Lambda_{2,down,2}(n,T) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)}\,dW_s\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{t_{k-1}} e^{-2a_0(t_{k-1}-s)}\,ds = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0},$$

тоді

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,down,2}(n,T) - \frac{1}{2a_0}\right| > 2\delta\right) \le$$

$$\le \mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,down,2}(n,T) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0}\right| > \delta\right) +$$

$$+\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0} - \frac{1}{2a_0}\right| > \delta\right).$$

Спочатку розглянемо

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0} - \frac{1}{2a_0}\right| > \delta\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0}\right| > \delta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2a_0 n}\frac{1-e^{-2a_0 T}}{1-e^{-2a_0 h}}\right| > \delta\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1-e^{-2a_0 T}}{2a_0 T}\frac{h}{1-e^{-2a_0 h}}\right| > \delta\right) \to 0, \qquad T \to +\infty. \tag{2.14}$$

За нерівністю Чебишова

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,down,2}(n,T) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0}\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{D}\Lambda_{2,down,2}(n,T)}{\delta^2}.$$

Розглянемо окремо $\mathbb{D}\Lambda_{2,down,2}(n,T)$. Нехай $\xi_k = \int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0 t_{k-1}} dW_s$. За теоремою про нормальну кореляцію для всіх $i \ge j$ існує випадкова величина $\gamma_{i,j} \simeq N(0,1)$, незалежна від ξ_j, така, що

$$\xi_i = \alpha_{i,j}\xi_j + \beta_{i,j}\gamma_{i,j},$$

де

$$\alpha_{i,j} = \frac{cov(\xi_i, \xi_j)}{\mathbb{E}\xi_j^2}, \qquad \beta_{i,j} = \sqrt{\mathbb{E}\xi_i^2 - \frac{cov^2(\xi_i, \xi_j)}{\mathbb{E}\xi_j^2}}.$$

Ми маємо

$$\mathbb{E}\xi_k = 0, \qquad \mathbb{E}\xi_k^2 = \frac{1 - e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0},$$

$$cov(\xi_i, \xi_j) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t_{i-1}} e^{-a_0(t_{i-1}-s)}\, dW_s \cdot \int_0^{t_{j-1}} e^{-a_0(t_{j-1}-s)}\, dW_s\right) =$$

$$= \int_0^{t_{i-1}\wedge t_{j-1}} e^{-a_0(t_{i-1}+t_{j-1}-2s)}\, dW_s = \frac{1}{2a_0}\left(e^{-a_0|t_{i-1}-t_{j-1}|} - e^{-a_0(t_{i-1}+t_{j-1})}\right).$$

Тобто для $i \geq j$

$$\alpha_{i,j} = e^{-a_0(t_{i-1}-t_{j-1})}, \qquad \beta_{i,j} = \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_0(t_{i-1}-t_{j-1})}}{2a_0}}.$$

Нехай $\zeta_k = \xi_k^2$. Тоді для $i \geq j$

$$cov(\zeta_i, \zeta_j) = cov(\xi_i^2, \xi_j^2) = cov\left(\left(\alpha_{i,j}\xi_j + \beta_{i,j}\gamma_{i,j}\right)^2, \xi_j^2\right) = \alpha_{i,j}^2 \mathbb{D}\xi_j^2 =$$

$$= \frac{1}{2a_0^2} e^{-2a_0(t_{i-1}-t_{j-1})}(1 - e^{-2a_0 t_{j-1}})^2.$$

Нарешті,

$$\mathbb{D}\Lambda_{2,down,2}(n,T) = \mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \zeta_k\right) = cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \zeta_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \zeta_j\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} cov(\zeta_i, \zeta_j) \leq \frac{2}{n^2}\sum_{i\geq j} cov(\zeta_i, \zeta_j) \leq \frac{1}{a_0^2 n^2}\sum_{i\geq j} e^{-2a_0(t_{i-1}-t_{j-1})} =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 T^2}\sum_{i\geq j} e^{-2a_0(t_{i-1}-t_{j-1})}\frac{T^2}{n^2} \approx \frac{1}{a_0^2 T^2}\int_0^T ds \int_s^T e^{-2a_0(t-s)} dt =$$

$$= \frac{1}{2a_0^3 T^2}\int_0^T \left(1 - e^{-2a_0(T-s)}\right) ds \leq \frac{1}{2a_0^3 T} \to 0, \qquad T \to +\infty,$$

що разом з (2.14) підтверджує (2.13).

$\Lambda_{2,down,3}(n,T) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, n, T \to +\infty$ за такими ж аргументами, як у (2.11).

За нерівністю Маркова і властивістю ізометрії Іто маємо, що для будь-якого заданого $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\Lambda_{2,down,4}(n,T)\right| > \delta\right) \le \frac{\mathbb{E}\left|\Lambda_{2,down,4}(n,T)\right|}{\delta} \le$$

$$\le \frac{2x}{\delta n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}} \cdot \mathbb{E}\left|\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)} dW_s\right| \le$$

$$\le \frac{2x}{\delta n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}} \cdot \left(\mathbb{E}\left(\int_0^{t_{k-1}} e^{-a_0(t_{k-1}-s)} dW_s\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2x}{\delta n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}} \cdot \left(\int_0^{t_{k-1}} e^{-2a_0(t_{k-1}-s)} ds\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2x}{\delta n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-2a_0 t_{k-1}}}{2a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{2x}{\sqrt{2a_0}\delta n}\sum_{k=1}^{n} e^{-a_0 t_{k-1}} = \frac{2x}{\sqrt{2a_0}\delta n}\frac{1 - e^{-a_0 T}}{1 - e^{-a_0 h}} =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2a_0}\delta}\frac{1 - e^{-a_0 T}}{T}\frac{h}{1 - e^{-a_0 h}} \to 0, T \to +\infty.$$

$\Lambda_{2,down,5}(n,T) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, n, T \to +\infty$ за такими ж аргументами, як у (2.9).
$\Lambda_{2,down,6}(n,T) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, n, T \to +\infty$ за такими ж аргументами, як у (2.10). Що підтверджує твердження 2.■

2.4 Симуляція результату дослідження.

Розглянемо модель (2.2) з $a_0 = 1, x = 1, T = n^{\frac{3}{4}}$ та

$$\varepsilon_t = \frac{B_t}{1+t},$$

де B_t – вінерівський процес, незалежний від W_t. Перевіримо, чи задовольняє процес ε_t умовами **(C1) - (C2)**

$$\mathbb{E}\varepsilon_t = \frac{\mathbb{E}B_t}{1+t} = 0,$$

$$\frac{n^2}{T^3}\int_0^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 dt = \frac{n^2}{n^{\frac{9}{4}}}\int_0^{n^{\frac{3}{4}}} \frac{t}{(1+t)^2} dt = \frac{\ln\left(1+n^{\frac{3}{4}}\right)}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n+n^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0, n \to +\infty.$$

Для симуляції траєкторії процесу X_t будемо використовувати схему Ойлера, яка в такому випадку має вигляд

$$\begin{cases} X_0^h = x, \\ X_{t_{k+1}}^h = (1 - a_0 h) X_{t_k}^h + \Delta W_k^h, \qquad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{2.15}$$

де $\Delta W_k^h = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$. Спробуємо емпірично підтвердити, що ОНК $\hat{a}_n$ дійсно консистентна, використовуючи спостереження тільки однієї траєкторії процесу Y_t. Для цього реалізуємо схему Ойлера з $n = 2^{20}$ і за отриманою траєкторією побудуємо оцінки

$$\hat{a}_{2^{20}}, \qquad \hat{a}_{2^{16}}, \qquad \hat{a}_{2^{12}}, \qquad \hat{a}_{2^{8}}.$$

Отримаємо наступні результати

n	T	h	$\hat{a}_n$
2^8	2^6	2^{-2}	0.83128
2^{12}	2^9	2^{-3}	0.86855
2^{16}	2^{12}	2^{-4}	0.96248
2^{20}	2^{15}	2^{-5}	1.00688

Як бачимо, результати оцінювання покращуються з ростом числа n.

Реалізація даного алгоритму в програмному середовищі Python виглядає наступним чином:

```
import numpy as np


def dW(end_point, num):
```

```
    h = end_point / num
    return h ** 0.5 * np.random.normal(size=num)
def OU_ES(x0_ES, a_ES, h_ES, dw):
    return (1 - a_ES * h_ES) * x0_ES + dw

x0 = 1
a0 = 1
k = 5
n = 2 ** (4 * k)
T = 2 ** (3 * k)
h = T / n

W0 = np.zeros(shape=1)
W = np.concatenate((W0, np.cumsum(dW(T, n))))

X = np.array([x0])
for i in range(n):
    X = np.concatenate((X, np.array([OU_ES(x0, a0, h, W[i+1]-W[i])])))
    x0 = OU_ES(x0, a0, h, W[i+1]-W[i])

B0 = np.zeros(shape=1)
B = np.concatenate((B0, np.cumsum(dW(T, n))))
times = np.linspace(0, T, n + 1)

Y = X + B / (1 + times)

LSE = - np.sum((Y[1:] - Y[:n]) * Y[:n])/np.sum(h * Y[:n] ** 2)
```

```
LSE_list = [LSE]
Y_temp = Y
while k > 1:
    k = k - 1
    n = 2 ** (4 * k)
    T = 2 ** (3 * k)
    h = T / n
    Y_temp = Y[:2 * n + 1:2]
    LSE_temp = - np.sum((Y_temp[1:] - Y_temp[:n]) * Y_temp[:n])/np.sum(h * Y_temp[:n]** 2)
    LSE_list.append(LSE_temp)


for el in LSE_list:
    print(el)
```

Висновок

В магістерській дисертації було досліджено асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметра зсуву процесу Орнштейна-Уленбека, який спостерігається в дискретні моменти часу і в цих спостереженнях присутній додатковий шум.

Було доведено теорему, яка встановлює достатні умови консистентності оцінки найменших квадратів у запропонованій моделі.

Результати дослідження були продемонстровані на конкретному прикладі.

Список використаної літератури

[1] An equilibrium characterization of the term structure/ Oldrich Vasicek. // Journal of Financial Economics. – 1977. – (Volume 5, Issue 2). – C. 177–188.

[2] Continuous Markov processes and stochastic equations / Gisiro Maruyama. // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2. – (Volume 4, Issue 1). – 1955. – Ст. 48.

[3] Least squares estimator for discretely observed Ornstein–Uhlenbeck processes with small Lévy noises / Hongwei Long. // Statistics & Probability Letters. – 2009. – (Volume 79, Issue 19). – C. 2076–2085.

[4] Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. E. Kloeden, E. Platen., 1995. – (2). – 668 с. – (Springer-Verlag Berlin Heidelberg).

[5] On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes / Auguste Le Breton // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization I / Roger J.- B. Wets– Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 1976. – (1). – C. 124–144.

[6] Ornstein–Uhlenbeck Processes and Extensions / M. Ross, M. Gernot, S. Alexander // Handbook of financial time series. / Thomas Mikosch, Jens-Peter Kreiß, Richard A. Davis, Torben Gustav Andersen – Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2009. – (1). – C. 421–437.

[7] Ornstein–Uhlenbeck Process: Overview [Електронний ресурс] / Paul Blackwell // Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/0470011815.b2a07038.

[8] Probability Inequalities / Z. Lin, Z. Bai. – Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2010. – 194 с.

[9] Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type process / M. L. Kleptsyna, A. Le Breton // Statistical Inference for Stochastic Processes – Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2002. – (Volume 5, issue 3). – C. 229–248.

[10] The consistency of an estimate of a parameter of a stochastic differential equation/ A.Ja. Dorogovcev – 1976 – 73–82 с. – Theory Probab. – Math. – (Statist. 10).

[11] The Langevin equation: with applications to stochastic problems in physics, chemistry, and electrical engineering / W. T. Coffey, Y. P. Kalmykov, J. T. Waldron. – Singapore: Second Edition, 2004. – 675 с. – (World Scientific). – (World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics – Vol.14).