НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК 519.21

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

________ Олег Клесов

«08» червня 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Оцінка функціонала від рухомого середнього»

Виконав:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-01мн
Сіцінський Богдан Сергійович ___________

Науковий керівник:
доцент, кандидат фізико-математичних наук,
Голіченко Ірина Ігорівна ___________

Рецензент:
доцент кафедри теорії ймовірностей та
математичного аналізу
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Синявська Ольга Олександрівна ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент ______________

Київ – 2022

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математичка»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ Олег КЛЕСОВ

«03» лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Сіцінському Богдану Сергійовичу

1. Тема дисертації «Оцінка функціонала від рухомого середнього», науковий керівник дисертації Голіченко Ірина Ігорівна, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «25» травня 2022 р. №НС/372/2022.

2. Термін подання студентом дисертації «07» червня 2022 року.

3. Об’єкт дослідження — послідовність рухомого середнього.

4. Предмет дослідження — оцінка функціонала від рухомого середнього.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись із необхідними відомостями теорії випадкових послідовностей;

2) Сформулювати задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу від рухомого середнього;

3) Адаптувати формули від загального випадку для сформульованої задачі;

4) Оцінити функціонал від невідомих значень послідовності рухомого середнього.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу 15 слайдів

7. Дата видачі завдання «02» лютого 2022 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	04.05.22 – 06.05.22	виконано
2.	Огляд та написання необхідних відомостей із теорії випадкових послідовностей	07.05.22 – 10.05.22	виконано
3.	Адаптація загальних формул до задачі, що розглядається в магістерській дисертації	11.05.22 – 13.05.22	виконано
4.	Формулювання та розв’язання задачі	14.05.22 – 17.05.22	виконано
5.	Аналіз проведеної роботи, оформлення висновків	18.05.22 – 20.05.22	виконано
6.	Оформлення дисертації	21.05.22 – 23.05.22	виконано

Студент Богдан СІЦІНСЬКИЙ

Науковий керівник Ірина ГОЛІЧЕНКО

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 27 сторінок, 8 першоджерел.

В роботі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціоналу від послідовності рухомого середнього.

Мета дослідження полягає в розвитку теорії розв'язування задач лінійної екстраполяції, а саме пошук оцінки функціоналу від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності рухомого середнього.

Актуальність теми: необхідність розв'язування задач екстраполяції виникає у багатьох прикладних сферах.

Об'єкт дослідження: послідовність рухомого середнього

Предмет дослідження: оцінка функціоналу від рухомого середнього

Задачі дослідження:

- Адаптувати формули загального випадку для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала від рухомого середнього;
- Сформулювати та розв'язати задачу оцінювання невідомого значення стаціонарної стохастичної послідовності рухомого середнього.

Для розв'язання сформульованої задачі в магістерській дисертації було використано основні відомості теорії випадкових послідовностей, означення та властивості стаціонарної послідовності, розглянуто та адаптовано теорію розв'язання задачі екстраполяції стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом.

Ключові слова: випадкові процеси, стаціонарні стохастичні послідовності, оцінка функціонала, задача екстраполяції, послідовність рухомого середнього, середньоквадратична похибка, спектральна характеристика.

ABSTRACT

Master's thesis: 27 pages, 8 primary sources.

The problem of optimal linear estimation of the functional from the sequence of the moving average is investigated in the work.

The aim of the research is to develop the theory of solving problems of linear extrapolation, namely to find estimates of functionals from unknown values of stationary stochastic sequences of the moving average.

Relevance of the topic: the need to solve extrapolation problems arises in many applied areas.

Object of research: the sequence of the moving average

Subject of research: Estimation of the functional of the moving average

Research objectives:

- Adapt the formulas of the general case to calculate the mean square error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functional from the moving average;
- Formulate and solve the problem of estimation the unknown value of a stationary stochastic sequence of a moving average.

To solve the problem in the master's dissertation used basics of the theory of random sequences, definitions and properties of a stationary sequence, considered and adapted the theory of solution of the problem of extrapolation of stationary sequences observed with noise.

Keywords: random processes, stationary stochastic sequences, functional estimation, extrapolation problem, moving average sequence, mean square error, spectral characteristic.

ВСТУП

В історії розвитку науки особливу зацікавленість математиків привертали задачі оцінювання невідомих значень випадкових процесів. Вони ж є узагальненням задач екстраполяції стохастичних процесів та мають велику вагу в теорії випадкових процесів. Також, такі задачі мають неабияке практичне застосування. В нинішніх реаліях розвитку науки та технологій, такі задачі можуть формуватися при дослідженні та розв'язанні важливих економічно-математичних питань, а також в прикладних науках, таких як: метеорології, астрономії, радіофізиці та інших.

Одним із перших задачу екстраполяції стаціонарних послідовностей було сформульовано Колмогоровим А.М. у роботі 1941 року «Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей» [2]. У працях Колмогорова А.М. (1941 р.) [2], Яглома А.М. (1955 р.) [6], Г. Крамера (1940 р.) [7] розроблено класичні методи дослідження задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями. Ці вчені внесли вагомий вклад у розвиток цього напрямку. Аналіз останніх досліджень і публікацій свідчить, що питаннями, пов'язаними із оцінкою функціоналів від одновимірних та векторних стаціонарних послідовностей зараз займаються багато науковців, зокрема: Моклячук М.П., Масютка О.Ю.

Із статті [4] ми дізнаємося, що класична теорія екстраполяції стохастичних процесів базується на припущенні, що спектральні щільності процесів відомі. У статті Моклячука М.П. [3] розглянуто задачу екстраполяції стаціонарних послідовностей у випадках спектральної визначеності та спектральної невизначеності. У магістерській роботі було сформульовано та розв'язано задачу оцінювання послідовності рухомого середнього.

Магістерська дисертація складається із двох розділів.

У першому розділі наведено необхідні відомості із теорії випадкових процесів. Сформульовано означення стаціонарної послідовності, наведено спектральний розклад та розклад Вольда стаціонарної послідовності. Наведено основні означення та теореми теорії лінійного прогнозу методом найменших квадратів.

У другому розділі на основі розв’язаної задачі екстраполяції лінійного функціоналу від невідомих значень стаціонарної послідовності, сформульовано та розв’язано задачу оцінки лінійного функціоналу від послідовності рухомого середнього.

Розділ 1

1. НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. Означення стаціонарної послідовності

Будемо розглядати випадкові послідовності другого порядку, такі що (Див. [8])

$$E\{|X_t|^2\} = \int_\Omega |X_t(\omega)|^2 \, P(d\omega) < \infty, \qquad \text{для } \forall\, t \in \mathbb{Z}.$$

Іноді будемо писати, що $X_t \in L^2$. Середнє для послідовностей другого порядку

$$m(t) = \int_\Omega X_t(\omega) P(d\omega), \quad \text{для } \forall\, t \in \mathbb{Z}$$

існує. Визначимо коваріацію пари (X_s, X_t) як

$$R(s,t) \coloneqq Cov\,(X_s, X_t) = E\{[X_s - m_s]\overline{[X_t - m_t]}\}.$$

Поняття стаціонарності для послідовностей другого порядку виражається через перші два моменти.

Означення 1.1 Випадковий процес другого порядку $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ при $t \in \mathbb{Z}$ називається стаціонарним, якщо для кожних $s, t \in \mathbb{Z}$

$$m(t) \equiv m \text{ та } R(s,t) \equiv R(s-t).$$

Розглянемо 2 приклади стаціонарної послідовності [5].

Приклад 1.1 Нехай $\Phi_p, p = \overline{1,m}$ — набір випадкових величин, що володіє тою властивістю, що

$$\mathrm{M}\Phi_p = 0, \qquad \mathrm{M}\left|\Phi_p\right|^2 = F_p < \infty$$

при $\forall\, p = \overline{1, m}$ та

$$\mathrm{M}\Phi_p \overline{\Phi}_q = 0$$

при $p \neq q$.

Розглянемо випадковий процес $\xi(t)$ вигляду

$$\xi(t) = \sum_{p=1}^{m} e^{i\lambda_p t} \Phi_p,$$

Де λ_p — деякі дійсні числа. Його математичне сподівання рівне 0, а кореляційна функція $B(t, s)$ має вигляд

$$B(t, s) = \sum_{p=1}^{m} e^{i\lambda_{p(t-s)}} F_p$$

Згідно означення випадковий процес є стаціонарним.

Приклад 1.2. Нехай $\zeta(t)$ є нескінченна в обидві сторони послідовність некорельованих випадкових величин, тобто таких що

$$\mathrm{M}\zeta(t_1)\overline{\zeta(t_2)} = 0$$

при $t_1 \neq t_2$ причому

$$M\zeta(t) = 0, \quad M|\zeta(t)|^2 = 1$$

для всіх t. Нехай послідовність комплексних чисел має властивість:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^2 < \infty.$$

Очевидно, ряд

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(t-s)\zeta(s)$$

збігається в середньоквадратичному, і його сума $\xi(t)$ представляє собою стаціонарний випадковий процес, оскільки

$$M\xi(t) = 0,$$

$$M\xi(t)\overline{\xi(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} c(t-s+u)\overline{c(u)}.$$

Означення 1.2. Комплекснозначна функція $K(\tau)$, визначена для цілих чисел, називається невід'ємно визначеною, якщо $K(-\tau) = \overline{K(\tau)}$ для всіх $\tau \in \mathbb{Z}$ і

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{a}_j \, K(t_i - t_j) \geq 0$$

для будь-якого натурального числа n, скалярів $a_1, a_2, \dots, a_n$ і цілих чисел $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Її важливість випливає з теореми Герглоца, яка говорить, що будь-яка невід'ємно визначена функція має спектральне представлення.

Теорема 1.1 (Герглоца) Функція з комплексним значенням $K(\cdot)$, визначена для цілих чисел, є невід'ємно визначеною тоді й тільки тоді, коли існує обмежена, неспадна та неперервна зліва функція F_λ на $[-\pi, \pi)$, яка рівна нулю при 0 і для якої

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF_\lambda, \qquad \text{для } \forall\, \tau \in \mathbb{Z}.$$

Функція F_λ називається функцією спектрального розподілу X_t.

1.1.1. Унітарний зсув

Хоча велика частина спектральної теорії стаціонарних послідовностей може бути побудована і історично була побудована без явного використання унітарного зсуву, вважається, що це найфундаментальніша ідея. Тому вона використана тут як основа спектральної теорії стаціонарних послідовностей.

Для будь-яких випадкових послідовностей другого порядку X_t, існує природно визначений найменший підпростір, на якому можна зосередити увагу. Цей підпростір називається часовою областю X_t.

Означення 1.3 Часова область $\mathcal{H}_X$ процесу X_t другого порядку - це замкнений підпростір, породжений усіма векторами X_t, з $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{H}_X = \overline{sp}\{X_t : t \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

де замикання в середньоквадратичному сенсі.

Далі покладемо $m = E\{X_t\}$ рівним нулю. Сформулюємо наступне твердження щодо еквівалентності умови стаціонарності існуванню оператора унітарного зсуву.

Твердження 1.1 Стохастична послідовність другого порядку X_t є стаціонарною тоді і тільки тоді, коли існує унітарний оператор U, визначений на $\mathcal{H}_X$, для якого

$$X_{t+1} = UX_t \tag{2}$$

для кожного $t \in \mathbb{Z}$.

1.1.2. Спектральне представлення

Нехай X_t— стаціонарна послідовність з унітарним зсувом U. Відповідно до спектральної теореми для унітарних операторів існує спектральна міра E на борелевих підмножинах $[-\pi, \pi)$, для яких

$$U^t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} E(d\lambda). \tag{3}$$

Тоді

$$X_t = U^t X_0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} E(d\lambda) X_0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \xi(d\lambda)$$

де функція множини $\xi(E) = E(A)X_0$, для А будь-якої борелевої підмножини $[-\pi, \pi)$, виявляється зліченно адитивною векторною мірою, яка називається випадковою спектральною мірою або випадковою мірою X_t. Крім того, $\xi(\cdot)$ ортогонально розсіяна в тому сенсі, що $\langle \xi(A), \xi(B) \rangle = 0$, коли $A \cap B = \emptyset$.

Сформулюємо теорему про спектральне представлення стаціонарних випадкових процесів.

Теорема 1.2 Щоб послідовність другого порядку X_t була стаціонарною, необхідно і достатньо, щоб існувала зліченно адитивна ортогонально розсіяна міра $\xi(\cdot)$ на борелевих підмножинах $[-\pi, \pi)$ така, що

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \xi(d\lambda) \tag{4}$$

1.2. Теорія уніваріантного прогнозування

Прогноз $\widetilde{X_t}$ для X_t, заснований на деякій підмножині $S = \{X_{j_1}, X_{j_2}, \dots\}$, є випадковою величиною, яка близька до X_t у певному прийнятному сенсі. Зазвичай намагаються зробити похибку $X_t - \tilde{X}_t$ якомога меншою в обраному сенсі. Наприклад, можна обрати $\tilde{X}_t$, щоб або $P(|X_t - \tilde{X}_t| \geq \varepsilon)$, або $E|X_t - \tilde{X}_t|^2$ були найменшими. Будемо розглядати лише лінійний прогноз методом найменших квадратів, так що $\tilde{X}_t$ є лінійною функцією елементів S, яка мінімізує $E|X_t - \tilde{X}_t|^2$. Задача розв'язування полягає у проектуванні X_t на $\mathcal{M}(S)$, підпростір Гільберта, породжений елементами S. Розглянемо випадок, коли S є нескінченною множиною $\{X_s: s \leq t\}$ і потрібно передбачити елемент X_{t+1}. Існують інші випадки, що представляють теоретичний і практичний інтерес.

1.2.1. Нескінченне минуле, регулярність і сингулярність

Почнемо з деяких підпросторів часової області $\mathcal{H}_X$, які важливі для прогнозу за нескінченним минулим.

Означення 1.4 Нехай X_t — будь-яка випадкова послідовність другого порядку. Її (лінійне) минуле до часу t включно визначається як підпростір

$$\mathcal{H}(t) = \overline{sp}\{X_s : s \leq t\} \tag{5}$$

породжений усіма величинами X_s де $s \leq t$ і його віддалене минуле визначається як підпростір

$$\mathcal{H}(-\infty) = \bigcap_{t\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}(t) \tag{6}$$

Зауважимо, що $\mathcal{H}(t)$ не спадає відносно t, тобто $\mathcal{H}(t) \supseteq \mathcal{H}(s)$ для $t \geq s$, і тому можна записати

$$\mathcal{H}(-\infty) = \bigcap_{t<0} \mathcal{H}(t) = \bigcap_{t_k<0} \mathcal{H}(t_k),$$

де $\{t_k\}$ — будь-яка послідовність цілих чисел, яка збігається до $-\infty$.

Означення 1.5. Стаціонарна випадкова послідовність називається чисто недетермінованою або регулярною, якщо

$$\mathcal{H}(-\infty) = \{0\}$$

і називається детермінованою або сингулярною якщо

$$\mathcal{H}(-\infty) = \mathcal{H},$$

або еквівалентно,

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(t); \text{ для } \forall\, s,t \in \mathbb{Z}.$$

Коли ми працюємо з випадковою послідовністю другого порядку X_t, природно прийняти прогноз $\tilde{X}_{t+1}$ значення X_{t+1} на основі минулого процесу до часу t включно як випадкову величину в $\mathcal{H}(t)$, який генерує найменшу помилку.

Природно працювати з лінійним минулим як набором прийнятних прогнозів і середньоквадратичною похибкою, тому що розв'язок задачі прогнозу тоді задається теоремою проекції у гільбертовому просторі: тобто $\tilde{X}_{t+1}$ є просто проекцією $(X_{t+1} \mid \mathcal{H}(t))$ значення X_{t+1} на $\mathcal{H}(t)$. Теорема проекції також гарантує, що прогноз $\tilde{X}_{t+1}$, (як вектор) є єдиним, хоча його реалізація може бути не унікальною.

1.2.2. Розклад Вольда

Деякі важливі результати у прогнозі за нескінченим минулим випливають із зв'язку між унітарним оператором U, і підпросторами, які ми щойно визначили. Наведемо наступні співвідношення.

Лема 1.1 Якщо послідовність X_t є стаціонарною другого порядку з унітарним зсувом U, то

$$(a)\ \mathcal{H}(t+1) = U\mathcal{H}(t);$$

$$(b)\ \mathcal{H} = U\mathcal{H};$$

$$(c)\ \mathcal{H}(-\infty) = U\mathcal{H}(-\infty).$$

Теорема 1.3 (розклад Вольда) Будь-яка стаціонарна послідовність другого порядку X_t має єдиний розклад

$$X_t = Y_t + Z_t \tag{7}$$

в термінах двох ортогональних стаціонарних послідовностей Y_t і Z_t таких, що

$$(a)\mathcal{H}_X(t) = \mathcal{H}_Y(t) \oplus \mathcal{H}_Z(t);$$

$$(b)\mathcal{H}_X(t) = \mathcal{H}_Y(-\infty) \oplus \mathcal{H}z(t);$$

$$(c)Y_t \text{ є детермінованим, а } Z_t \text{ є чисто недетермінованим;}$$

$$(d)U_Y = U_{X|\mathcal{H}(-\infty)};\ \text{і}\ U_Z = U_{X|\mathcal{H}(-\infty)^{\perp}}.$$

1.2.3. Інноваційні підпростори

Оскільки інновація відноситься до чогось абсолютно нового, природно розглядати інноваційний підпростір $\mathcal{L}_X(t)$ у кожен момент часу t.

Означення 1.6 (Інновації та їх підпростори)

(a) Некорельована послідовність $\mathcal{E}_t$ випадкових величин із середнім m і дисперсією σ^2 називається білим шумом і позначається $WN(m, \sigma^2)$. Якщо $m = 0$ і $\sigma^2 = 1$, то послідовність називається нормованим білим шумом.

(b) Послідовність e_t векторів у Гільбертовому просторі називається ортогональною, якщо $\langle e_t, e_s \rangle = 0$, коли $s \neq t$, і називається ортонормованим процесом, якщо $\langle e_t, e_s \rangle = \delta_{s-t}$.

(c) Інновація процесу другого порядку X_t в момент часу t визначається як

$$\zeta_t(t) = X_t - P_{\mathcal{H}(t-1)} X_t$$

(d) Інноваційний простір послідовності другого порядку X_t в момент часу t визначається як

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{H}_X(t) \ominus \mathcal{H}_X(t-1) = \{x \in \mathcal{H}_X(t): x \perp \mathcal{H}_X(t-1)\} \qquad (8)$$

Попередній вираз можна записати так

$$\mathcal{H}_X(t) = \mathcal{L}_X(t) \oplus \mathcal{H}_X(t-1)$$

який при повторенні, свідчить про те, що ми можемо виразити всю історію X_t як

$$\mathcal{H}_X(t) = \oplus \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}_X(t-j)$$

Лема 1.2 Якщо X_t є стаціонарною послідовністю другого порядку з унітарним зсувом U, то для кожного цілого числа t

(a) $\mathcal{L}_X(t+1) = U\mathcal{L}_X(t)$;

(b) $\mathcal{L}_X(t) \perp \mathcal{H}_X(-\infty), \mathcal{L}_X(t) = \mathcal{L}_Z(t)$

(c) $\mathcal{H}_X(t) = \mathcal{H}_X(-\infty) \oplus \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}_X(t-j)$

(d) $\qquad \dim \mathcal{L}_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } X_t \text{ сингулярна}, \\ 1, & \text{інше} \end{cases}.$

З попереднього зрозуміло, що $\mathcal{L}_X(t) = sp\{\zeta_t\}$, позначимо дисперсію помилки прогнозу як $\sigma_X^2(t) = Var\,(\zeta_t)$. Зауважимо, що $\sigma_X(t) > 0$ тоді і тільки тоді, коли X_t має нетривіальну регулярну частину. Оскільки прогноз найменших квадратів $\widetilde{X_t}$ величини X_t на основі його минулого $\mathcal{H}_X(t-1)$ визначається як ортогональна проекція X_t на $\mathcal{H}_X(t-1)$. Наступні додаткові факти про інновації правдиві тривіальним чином, якщо X_t є детермінованим або сингулярним. Однак більш цікава ситуація для цілей прогнозування, коли послідовність недетермінована, що еквівалентно $\sigma_\zeta(t) \neq 0$.

Лема 1.3 Нехай ζ_t — інноваційна послідовність стаціонарної послідовності X_t.

Тоді

(a) ζ_t є стаціонарною і має той же зсув, що і X_t, і, отже, X_t і ζ_t є взамностаціонарними і $\sigma_X(t) \equiv \sigma$;

(b) ζ_t — ортогональна послідовність із сталою дисперсією, тобто

$$\langle \zeta_s, \zeta_t \rangle = \sigma^2 \delta_{s-t}, \text{для } \forall\, s, t \in \mathbb{Z};$$

(c) для будь-якого цілого числа t і будь-якого натурального числа k,

$$\langle \zeta_t, X_{t-k} \rangle = 0 \text{ та } \langle \zeta_t, X_t \rangle = \sigma^2$$

що, зокрема, показує, що будь-яка майбутня інновація ортогональна до минулого послідовності до цього моменту.

Далі розглянемо зв’язок між регулярними стаціонарними послідовностями, білим шумом, ортонормованими послідовностями та інноваційними послідовностями. Дуже елементарний, але важливий результат полягає в тому, що будь-яка послідовність білого шуму є регулярною.

Лема 1.4 (a) Будь-яка ортогональна послідовність e_t є регулярною.

(b) Будь-який білий шум ε_t є регулярним.

(c) Інновація ζ_t будь-якої стаціонарної послідовності X_t є регулярною.

Використовуючи цю лему, можна охарактеризувати регулярні послідовності.

Твердження 1.2 (зображення через рухоме середнє) Випадкова послідовність другого порядку X_t є стаціонарною і регулярною тоді і тільки тоді, коли вона має зображення одностороннього рухомого середнього

$$X_t = \sum_{j \geq 0} a_j e_{t-j}\,, j \in \mathbb{Z}, \qquad \text{з} \ \sum_{j \geq 0} \left| a_j \right|^2 < \infty \tag{9}$$

відносно ортонормованої послідовності e_t.

Оскільки ми зазвичай спостерігаємо сам процес X_t, а не його інновації ζ_t, з практичної точки зору здається безглуздим виражати прогноз X_δ в термінах інновацій. Однак, вираз для прогнозу дозволяє нам оцінити дисперсію помилки $\left\| X_\delta - \widetilde{X_\delta} \right\|^2$ як функцію δ.

Твердження 1.3 Якщо X_t є регулярною стаціонарною послідовністю з одностороннім представленням рухомого середнього $X_t = \sum_{j \geq 0} a_j \zeta_{t-j}$, з $\sum_{j \geq 0} \left| a_j \right|^2 < \infty$ із інновацією ζ_t, то прогноз на δ кроків вперед для X_δ за його минулим, а саме $\widetilde{X_\delta} = (X_\delta | \mathcal{H}_X(0))$, задається через

$$\widetilde{X_\delta} = \sum_{j=\delta}^{\infty} a_j \zeta_{\delta-j}\,, \quad \delta \geq 1, \tag{10}$$

і результуюча помилка прогнозу, задана за допомогою

$$X_\delta - \widetilde{X_\delta} = \sum_{j=0}^{\delta-1} a_j \zeta_{\delta-j}, \tag{11}$$

має дисперсію

$$\left\|X_\delta - \widetilde{X_\delta}\right\|^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\delta-1} \left|a_j\right|^2. \qquad (12)$$

Теорема 1.4 (a) Стаціонарний процес X_t має представлення рухомого середнього

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \varepsilon_{t-k}, \qquad \text{де} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 < \infty \text{ та } \langle \varepsilon_t, \varepsilon_s \rangle = \delta_{s-t}\sigma^2$$

тоді і тільки тоді, коли його спектральна міра є абсолютно неперервною. Якщо це так, то

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\varphi\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2, \text{ де } \varphi\left(e^{-i\lambda}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ik\lambda}.$$

(b) Якщо рухоме середнє є одностороннім, тобто $b_k = 0$ для кожного $k < 0$, то

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-ik\lambda}$$

і або $\varphi_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ однаково дорівнює нулю, або $\ln f \in L^1[0,2\pi)$ і

$$\ln \frac{\sigma^2 |b_0|^2}{2\pi} \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda.$$

Розділ 2

2. ОЦІНКА ФУНКЦІОНАЛА ВІД РУХОМОГО СЕРЕДНЬОГО

2.1. Формулювання задачі

Нехай задано функціонал $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} \xi(j)$ від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності рухомого середнього $\xi(j)$ порядку 1, зі спектральною щільністю:

$$f(\lambda) = \left|1 - \rho e^{-i\lambda}\right|^2, |\rho| < 1.$$

Оцінити невідоме значення $\xi(0)$ за відомими значеннями $\xi(-1), \xi(-2), \xi(-3), \ldots.$

Знайти середньоквадратичну похибку та спектральну характеристику оцінки функціонала.

2.2. Попередні відомості щодо розв'язання задачі оцінки функціонала від стаціонарної послідовності

У роботі [3] М.П. Моклячука досліджується задача оцінювання функціонала $A\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\xi(k)$ від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(k)$ за відомими спостереженнями $\xi(j) + \eta(j), j = -1, -2, \cdots$. $\eta(j) -$ некорельована із $\xi(j)$ стаціонарна послідовність.

Функціонал $A\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\xi(k)$ має скінченний другий момент, якщо коефіцієнти α_k , що його визначають, задовольняють наступні умови:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < 0 ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|a_k|^2 < \infty \tag{13}$$

Припустимо, що $\xi(j), \eta(j)$ – некорельовані між собою стаціонарні стохастичні послідовності з відповідними спектральними щільностями $f(\lambda), g(\lambda)$, які задовольняють умову мінімальності:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1} d\lambda < \infty. \tag{14}$$

Умова (14) є необхідною та достатньою для неможливості безпомилкової екстраполяції невідомих значень послідовностей $\xi(j) + \eta(j), j \in \mathbb{Z}$.

Лінійна оцінка функціонала $A\xi$ визначається спектральною характеристикою $h(e^{i\lambda})$. Функція $h(e^{i\lambda})$ належить підпростору $L_2^-(f+g)$ у просторі $L_2(f+g)$, що породжений функціями $e^{ij\lambda}$ при $j = -1, -2, \cdots$.

Спектральна характеристика $h(f,g)$ оцінки $\hat{A}\xi$ за відомих щільностей $f(\lambda), g(\lambda)$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки [1]:

$$\min_{h \in L_2^-(f+g)} \Delta(h; f, g) = \min_{\hat{A}\xi} M \left|A\xi - \hat{A}\xi\right|^2 = \Delta(h(f,g); f, g) = \Delta(f,g).$$

Використовуючи метод А.М. Колмогорова [2], знайдено загальні формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}\xi$:

$$h(f,g) = \frac{A\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda) - C\left(e^{i\lambda}\right)}{f(\lambda) + g(\lambda)} = A\left(e^{i\lambda}\right) - \frac{A\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda) + C\left(e^{i\lambda}\right)}{f(\lambda) + g(\lambda)} \tag{15}$$

$$\Delta(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda) + C\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^2} f(\lambda)d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda) - C\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^2} g(\lambda)d\lambda =$$

$$= \langle Bc, c\rangle + \langle Ra, a\rangle \tag{16}$$

де

$$c = B^{-1}Da, \quad C(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\lambda}, \quad A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\lambda},$$

$\langle a, c\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{c}_k$ — скалярний добуток у просторі l_2, $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{R}$ — оператори у просторі l_2, що визначаються матрицями, елементи яких дорівнюють коефіцієнтам Фур'є функцій $\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1}$, $f(\lambda)\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1}$, $f(\lambda)g(\lambda)\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1}$ відповідно:

$$B_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} \left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1} d\lambda,$$

$$D_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} f(\lambda)\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1} d\lambda,$$

$$R_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} f(\lambda)g(\lambda)\left(f(\lambda) + g(\lambda)\right)^{-1} d\lambda, \;\; k, j = 0, 1, \ldots.$$

Отже, має місце лема:

Лема 2.1 (М.П. Моклячук [3]): Нехай $\xi(j), \eta(\xi)$ — некорельовані стаціонарні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda), g(\lambda)$, що задовольняють умову (2) та виконується умова (1). Спектральну характеристику $h(f, g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ при $j = -1, -2, \ldots$ можна обчислити за формулами (15), (16).

2.3. Необхідні відомості для розв'язання задачі роботи

Нехай $\xi(j)$ — стаціонарна послідовність зі спектральною щільністю $f(\lambda)$, що допускає канонічну факторизацію

$$f(\lambda) = \left|d\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-ik\lambda}\right|^2.$$

У роботі [3] М.П. Моклячука знайдено загальні формули для обчислення спектральної характеристики $h(f)$ та середньоквадратичної похибки $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j \xi(j)$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$

$$\Delta_N(h(f), f) = \|A_N d\|^2, \tag{19}$$

$$h(f) = A_N\left(e^{i\lambda}\right) - r_N\left(e^{i\lambda}\right) d^{-1}\left(e^{-i\lambda}\right); \tag{20}$$

де

$$r_N\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{N} (A_N d)_k e^{ik\lambda},$$

$$A_N\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\lambda};$$

вектор $\vec{d} = \{d_0, d_1, \dots\}$ побудовано за коефіцієнтами канонічної факторизації щільності $f(\lambda)$; A_N — оператор, який задається матрицею з елементами $\begin{cases} A_{k,j} = a(k+j), & 0 \le k+j \le N \\ A_{k,j} = 0, & k+j > N \end{cases}.$

2.4. Розв'язання задачі

Розв'яжемо задачу сформульовану в підрозділі 2.1.

Оскільки спектральна щільність послідовності рухомого середнього допускає канонічну факторизацію

$$f(\lambda) = \left|1 - pe^{-i\lambda}\right|^2 = \left|d\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2,$$

то:

$$1 - pe^{-i\lambda} = d\left(e^{-i\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-ik\lambda} = d_0 + d_1 e^{-i\lambda} + d_2 e^{-2i\lambda} + \cdots$$

Звідси отримуємо коефіцієнти $d_0, d_1, \dots$, що визначають вектор $\vec{d}$:

$$d_0 = 1, d_1 = -p,$$
$$d_k = 0, k \geq 2,$$

$$\vec{d} = (1, -p, 0, 0, \dots)$$

Функціонал $A_0\xi = \xi(0)$, тому $a(0) = 1, a(k) = 0, k \geq 1$.

A_N — оператор, що задано матрицею з елементами $A_{kj} = a(k+j), 0 \leq \mathrm{k} + j \leq N$, інакше $A_{kj} = 0$.

У задачі $N = 0$, тому:

$$A_{00} = a(0) = 1; \text{інші } A_{kj} = 0, k + j > 0.$$

Оператор A_0 задається матрицею

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$A_0 d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Елементи вектора $A_0 d$:

$$(A_0 d)_0 = 1; (A_0 d)_k = 0, k \geq 1.$$

Тоді

$$r_0(e^{i\lambda}) = (A_0 d)_0 e^{i0\lambda} = 1,$$

$$A_0(e^{i\lambda}) = a(0) \cdot e^{i0\lambda} = 1 \cdot 1 = 1$$

Спектральна характеристика обчислена за формулою (20) оптимальної оцінки функціонала $A_0\xi$, має вигляд :

$$h(f) = A_0\left(e^{i\lambda}\right) - r_0\left(e^{i\lambda}\right)d^{-1}\left(e^{i\lambda}\right) = 1 - 1 \cdot \frac{1}{1 - pe^{-i\lambda}} = 1 - \frac{1}{1 - pe^{-i\lambda}}$$

$$= \left| \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1 \right| = 1 - (1 + pe^{-i\lambda} + p^2e^{-2i\lambda} + p^3e^{-3i\lambda} + \cdots$$

$$= -pe^{-i\lambda} - p^2e^{-2i\lambda} - p^3e^{-3i\lambda} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} p^n e^{-i\lambda n}$$

Оцінка $\widehat{A_0}\xi$ функціонала $A_0\xi$ за $\xi(j), j = -1, -2, \ldots$ обчислюється за формулою:

$$\widehat{A_0}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(f)Z(d\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p^n e^{-i\lambda n} Z(d\lambda) =$$

$$= \left| \xi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Z(d\lambda) \text{— спектральне зображення} \right| =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} p^n \xi(-n) = -\left(p\xi(-1) + p^2\xi(-2) + p^3\xi(-3) + \cdots\right).$$

Середньоквадратична похибка такої оцінки $\widehat{A_0}\xi$ обчислена за формулою (19) дорівнює

$$\Delta(f) = \|A_0 d\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(A_0 d)_k|^2 = 1$$

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації досліджено метод розв’язання задач оптимального лінійного оцінювання функціоналу, який залежить від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності рухомого середнього.

Розглянуто необхідні відомості теорії випадкових послідовностей. Викладено означення стаціонарної послідовності та теорію універіантного прогнозування. Наведено необхідні відомості щодо розв’язання задачі оцінки функціонала від стаціонарної послідовності.

Використовувався класичний метод лінійної екстраполяції з адаптацією формул загального випадку, який дає змогу обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки у випадку, коли спектральна щільність відома.

Таким чином, поставлені завдання магістерської дисертації виконано, мета досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Голіченко І.І., Моклячук М.П. Оцінки функціоналів від періодично корельованих процесів: монографія – К.:НВП «Інтерсервіс», 2014.-208 с.

[2] Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стацинарных случайных последовательнотей / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. метем. – 1941. – Т. 5. – С. 3-14.

[3] Моклячук М. П. Екстраполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом / М. П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1997. – Вип. 57. – С. 125-133.

[4] Моклячук М. П. Екстраполяція векторних стаціонарних послідовностей / М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2005. – Вип. 73. – С. 112-119.

[5] Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы / Ю. А. Розанов. – 2-е изд., доп.. – М.: “Наука”, 1990. – 272 с.

[6] Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью / А. М. Яглом // Труды Московского математического общества. – 1955. – № 4. – С. 333-374.

[7] Cramer H. On the theory of stationary random processes / H. Cramer // Ann. Math. – 1940. – Vol. 41 – P. 215-230.

[8] Hurd H. L. Periodically correlated random sequences: spectral theory and practice / H. L. Hurd, A. Miamee. – John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007. – 353 p.