Білий О.Г. Методичні вказівки до виконання ДКР, МКР та залікової роботи з МА-3(екстернат, прискореники), РТФ, I курс, 2 семестр 2022

1. Диференціювання інтегралу по параметру. Формула Лейбніца, приклади застосування

Нехай $I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx,$ де $f(x,\alpha)$- означена та неперервна в області $D=\{a\le x\le b, c\le \alpha\le d\}$ функція. Тоді $I(\alpha)-$ також неперервна на $c\le\alpha\le d$ функція.

Якщо, крім того, $f'_\alpha(x,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\big(f(x,\alpha)\big)-$ неперервна в $D,$ то справедлива формула Лейбніца:

$$I'(\alpha)=\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx. \qquad (1)$$

Якщо ж, в свою чергу, границі інтегрування теж функції параметра α, тобто $a=a(\alpha), b=b(\alpha),$ то для $a<a(\alpha), b(\alpha)<b, c<\alpha<d,$ маємо більш загальну формулу: $I(\alpha)=\phi\big(\alpha,a(\alpha),b(\alpha)\big),$

$$I'_\alpha(\alpha)=\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}=$$

$$\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx+f(b(\alpha),\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a(\alpha),\alpha)\frac{da}{d\alpha}. \qquad (2)$$

Приклад 1. Обчислити $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg\,(a\,tgx)}{tgx}dx, a>0.$

Маємо за формулою Лейбніца

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{arctg\,(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\Big)'_a dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cancel{\operatorname{tg}x}}\cdot\frac{1\cdot\cancel{\operatorname{tg}x}}{1+a^2tg^2x}dx=\left|\begin{matrix}\text{Заміна}\\ \operatorname{tg}x=t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty\frac{(1+a^2t^{2)}-a^2(1+t^2)}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}dt=$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\left(arctg|_0^\infty-\ a^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{a}}arctg(at)|_0^\infty\right)=\frac{1}{1-a^2}\Big(\frac{\pi}{2}-a\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}\ ,$$

тоді $I(a)=\int\frac{\pi}{2}\frac{da}{1+a}=\frac{\pi}{2}\ln|1+a|+C$, але $I(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dx=0,$

тому $0=\ln 1+C\to C=0.$

Відповідь: $I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a).$

Приклад 2. $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$. Знайти $I'(\alpha)$.

За формулою Лейбніца (2), маємо $\begin{cases} a(\alpha) = 0 \\ b(\alpha) = \alpha \end{cases}$

$$I'(\alpha) = \int_0^{\alpha} \left(\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\right)'_{\alpha} dx + \frac{\ln(1+\alpha\cdot\alpha)}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\alpha} + 0 = \int_0^{\alpha} \frac{1}{x}\cdot\frac{1\cdot x}{1+\alpha x} dx +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}\ln|1+\alpha x|\Big|_0^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2) = \frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2) = I'(\alpha)$$

Відповідь: $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2) = I'(\alpha)$.

2. Диференціювання невласних інтегралів по параметру, приклади застосування

Якщо 1) Функції $f(x,\alpha)$ та $f'_{\alpha}(x,\alpha)$ – неперервні в області $D\begin{Bmatrix} a \le x < +\infty \\ c < \alpha < d \end{Bmatrix}$

2) $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ – збіжний;

3) $\int_a^{+\infty} f'_{\alpha}(x,\alpha)dx$ – збігається рівномірно в інтервалі $c < \alpha < d$, то (Лейбніц):

$$\left(\int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx\right)'_{\alpha} = \int_a^{\infty} f'_{\alpha}(x,\alpha)\,dx. \qquad (3)$$

Приклад 1. Обчислити $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} dx$, $\alpha > -1$.

За формулою (3), маємо: $\frac{d\,I(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\right)'_{\alpha} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{xe^x}(0 + xe^{-\alpha x})dx = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+1)x} dx = -\frac{1}{\alpha+1} e^{-(\alpha+1)x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+1}$.

Тоді $I(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{1+\alpha} = \ln|1+\alpha| + C$, але $I(0) = 0, 1+\alpha > 0$,
Тому $I(0) = 0 = \ln(1+0) + C \to C = 0$.

Відповідь: $I(\alpha) = \ln(1+\alpha)$.

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\,dx$, $(\alpha, \beta > 0)$.

$I = I(\alpha, \beta, m)$, нехай α- змінний параметр, тоді:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\right)'_{\alpha} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x}(-xe^{-\alpha x})dx =$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin mx\,dx = \left|\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C\right| =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+m^2}(-\alpha\sin mx - m\cos mx)\Big|_0^{\infty} = -\frac{m}{\alpha^2+m^2}.$$

Далі: $I = \int \left(-\frac{m}{\alpha^2+m^2}\right) d\alpha = -\cancel{m} \cdot \frac{1}{\cancel{m}}\, arctg\,\frac{\alpha}{m} + C$

Але при $\alpha = \beta$, маємо $I = (\alpha = \beta) = 0$, тобто

$0 = -arctg\frac{\alpha}{m} + C \;\; => \text{C} = arctg\frac{\beta}{m},$ тому

відповідь: $I = I(\alpha, \beta, m) = arctg\frac{\beta}{m} - arctg\frac{\alpha}{m}$.

3. Застосування перетворення Лапласа до знаходження сум деяких рядів

I. Знаходження сум числових рядів.

Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$, $S = \sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n F(n)$, тоді

$$S = \sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n \int_0^{\infty} f(t)e^{-nt}dt = \int_0^{\infty} f(t) \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty}(\pm 1)^n\, e^{-nt}}_{\text{н.с.геом.прогресія}} dt =$$

$$= (\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(t)e^{-mt}}{1 \mp e^{-t}} dt = S \text{ – сума нашого ряду} \qquad (4)$$

Приклад 1. Знайти $S = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$, $m = 1$.

Знайдемо $f(t) \doteqdot F(n)$, маємо:

$$F(n) = \frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+2} + \frac{D}{2n+3}$$

Знайдемо A,B,C,D методом зручних значень.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\; n = 0; A \cdot 6 = 1 \\ 2.\; n = -\frac{1}{2}; B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 2 = 1 \\ 3.\; n = -1; C(-1)(-1) \cdot 1 = 1 \\ 4.\; n = -\frac{3}{2}; D\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)(-1) = 1 \end{array}\right\} => A = \frac{1}{6}, B = -1, C = 1, D = -\frac{1}{3}.$$

Тоді $F(n) = \frac{\frac{1}{6}}{n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{\frac{1}{3}}{2n+3};$

За таблицею зображень:

$F(n) \doteqdot f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{3}{2}t}$, далі:

$$S = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1}{6}\int_0^{\infty} \frac{\left(-1 - 3e^{-\frac{t}{2}} + 3e^{-t} - e^{-\frac{3}{2}t}\right)e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt = \left| \begin{array}{c} \text{Заміна:} \\ e^{-\frac{t}{2}} = x \\ dt = -\frac{2dx}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-3x+3x^2-3x^3)x^{\cancel{2}}}{1+x^2}\left(\frac{2dx}{\cancel{x}}\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{-x^4+3x^3-3x^2x}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(-x^2+3x-2-\frac{2x-2}{x^2+1}\right)dx = \left|\begin{matrix}\text{виділимо цілу}\\ \text{частину дробу}\\ \text{діленням кутом}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x-\ln(x^2+1)+2arctg\, x\right)\Big|_0^1 =$$

$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2-\ln 2+\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{18}(3\pi-6\ln 2-5) = S$ і це відповідь.

Приклад 2. Знайти $S = \sum_{n=m=1}^{\infty} arctg\frac{\sqrt{3}}{n^2+n+3}$.

Перший спосіб (операційний).

За відомою формулою $arctg\,\alpha - arctg\,\beta\ = arctg\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\cdot\beta}$, маємо

$$arctg\frac{k}{n+a} - arctg\frac{k}{n+b} = arctg\frac{k(b-a)}{n^2+(a+b)n+ab+k^2}.$$

За цією формулою знаходимо, що $k=\sqrt{3}, b-a=1, a+b=1, ab+k^2=3$ тому $k=\sqrt{3}, a=0, b=1$, тобто:

$arctg\frac{\sqrt{3}}{n^2+n+3} = arctg\frac{\sqrt{3}}{n} - arctg\frac{\sqrt{3}}{n+1}$ – важлива рівність.

За таблицею зображень та використовуючи властивості інтегрального перетворення Лапласа, маємо:

$\sin mt \doteqdot \frac{m}{p^2+m^2} = \frac{m}{n^2+m^2} \quad (p=n)$.

За теоремою інтегрування зображення, маємо:

$$\frac{\sin mt}{t} \doteqdot \int_p^{\infty}\frac{mdp}{p^2+m^2} = \cancel{m}\cdot\frac{1}{\cancel{m}}arctg\frac{p}{m}\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{p}{m} =$$

$$= \left|\frac{\pi}{2} - arctg\,\alpha = arcctg\alpha = arctg\frac{1}{\alpha}\right| = arctg\frac{m}{p}.$$

Тому $e^{-at}\frac{\sin mt}{t} \doteqdot\ arctg\frac{m}{p+a}$; тоді остаточно:

$$\frac{arctg\sqrt{3}}{n^2+n+3} = arctg\frac{\sqrt{3}}{n} - arctg\frac{\sqrt{3}}{n+1} \doteqdot \underbrace{\frac{\sin\sqrt{3}t}{t} - \frac{e^{-t}\sin\sqrt{3}t}{t}}_{f(t)}.$$

Тобто за формулою (4), маємо:

$$S = \int_0^{\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \int_0^{\infty}\frac{\sin\sqrt{3}t\,\cancel{(1-e^{-t})}e^{-t}}{t\cancel{(1-e^{-t})}}dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{3}t\, e^{-t}}{t}dt = \left| \begin{matrix} \text{із попередньої теми:} \\ \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin mx}{x}dx = arctg\frac{m}{a} \end{matrix} \right| = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} = S\,.$$

Відповідь: $S = \frac{\pi}{3}$.

Другий спосіб (телескопічний).

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Оскільки $a_k = arctg\frac{\sqrt{3}}{k} - arctg\frac{\sqrt{3}}{k+1}$, то

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(arctg\frac{\sqrt{3}}{1} - arctg\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(arctg\frac{\sqrt{3}}{2} - arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \cdots$$

$$\ldots + \left(arctg\frac{\sqrt{3}}{n} - arctg\frac{\sqrt{3}}{n+1}\right) = |\text{телескопічний ряд}| = arctg\sqrt{3} - arctg\frac{\sqrt{3}}{n+1}.$$

Тоді $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(arctg\sqrt{3} - arctg\frac{\sqrt{3}}{n+1}\right) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} = S -$ відповідь.

II. Знаходження сум тригонометричних функціональних рядів.

Нехай: 1)$f(t) \doteqdot F(p)$; 2) $\phi(t,x)$ – твірна нескінченної функціональної послідовності $\{\varphi_n(x)\}$, тобто $\phi(t,x)$=$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\cdot t^n$; 3) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}F(n)\varphi_n(x) = S(x)$ – збігається на x $\in (a;b)$.

Тоді $S(x) = \int_0^\infty f(t)\cdot\phi(e^{-t},x)dt$, причому:

а) Якщо $\varphi_n(x) = (\pm 1)^{n+1}\sin(nk+m)x$, то $\phi_{(k,m)}(x,t)|_{sin} = \frac{t\sin(k+m)x \mp t^2\sin mx}{1\mp 2t\cos kx + t^2}$; $(m,k \in Z), n = 1,2 \ldots., \sin 0 = 0$.

б) Якщо $\varphi_n(x) = (\pm 1)^{n}\cos(nk+m)x$, то $\phi_{(k,m)}(x,t)|_{cos} = \frac{t\cos(k+m)x \mp t^2\cos mx}{1\mp 2t\cos kx + t^2}$; $(m,k \in Z), n = 0,3 \ldots, \cos 0 = 1$.

Дійсно: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}F(n)\varphi_n(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\int_0^\infty e^{-nt}f(t)\,fdt = \int_0^\infty(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nt}\varphi_n(x))f(t)dt = \int_0^\infty f(t)\phi(e^{-t},x)dt\,.$$

Приклад. Знайти S(x) = $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2-1}$.

У нас: $F(n) = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-1)}{(n-1)(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \doteqdot$

$\doteqdot \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = sht = f(t)$. Тоді $\phi(t,x) = \phi_{(1,0)}(t,x) - t\sin x$, бо

$k = 1, m = 0, n = 2,3 \ldots$ (тому треба відняти $t\sin x$ при $n = 1$).

Тобто $\phi(t,x)=\dfrac{t\sin x}{1-2t\cos x+t^2}-t\sin x=\dfrac{2t^2\sin x\cos x-t^3\sin x}{1-2t\cos x+t^2}$.

Далі маємо:

$$S(x)=\int_0^\infty sht\,\frac{2e^{-2t}\sin x\cos x-e^{-3t}\sin x}{1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}}dt=\left|\text{заміна } e^{-t}=y, dy=-\frac{dy}{y}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-y^2)(\sin 2x-y\sin x)}{y^2-2y\cos x+1}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(y\sin x-\underbrace{\frac{2\sin x(y-\cos x)}{y^2-2y\cos x+1}}_{z})dy=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\frac{y^2}{2}|_0^1-\frac{1}{2}\sin x\int_0^1\frac{2y-2\cos x}{y^2-2y\cos x+1}dy=\frac{1}{2}\sin x\left(\frac{1}{2}-0\right)-$$

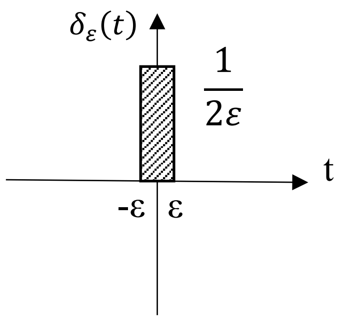
$$-\tfrac{1}{2}\sin x\cdot\ln|y^2-2y\cos x+1||_0^1=\tfrac{1}{4}\sin x-\tfrac{1}{2}\sin x\ \ (\ln\ |2(1-\cos x)|-ln1)=\tfrac{1}{4}\sin x-$$

$$-\frac{1}{2}\sin x\,ln\ \left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\sin x-\sin x\ln\ |2\sin\frac{x}{2}|=S(x)-\text{відповідь.}$$

4. δ − функція Дірака, основні властивості.
Застосування, приклади

Знаний англійський фізик-теоретик Поль Дірак запропонував у 1929 році застосувати в теоретичних дослідженнях незвичайну, але дуже підходящу функцію для не менш дивної на той час квантової фізики.

Формально ця функція виглядає так: $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$, де



$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, t\neq 0; & (1)\\ \infty, t=0; & (2)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1; & (3)\end{cases}$$

З рисунка видно, що вона визначається як прямокутник симетричний відносно осі ординат з основою 2ε і висотою $\dfrac{1}{2\varepsilon}$ при цьому, якщо $\varepsilon\to 0$, то основа стягується в точку 0, а висота прямує до нескінченності так, що площа цього прямокутника залишається незмінною і дорівнює одиниці.

Хоча ця функція визначена незвично і зовсім не строго з точки зору класичної математики, але її обережне (з пересторогами) застосування давало деякі переваги і чіткі пояснення природи тих явищ та процесів, які за допомогою класичної математики приводили до непорозуміння. Пізніше математики строго визначили цю функцію як представника цілого класу так званих узагальнених функцій-розподілів. Основні властивості $\delta -$ функції були строго доведені і вона посіла чільне, хоча і особливе, місце в арсеналі методів дослідження природи. Зручність її полягає в тому, що вона сама, будучи «дуже розривною», допомагає навести лад в дослідженнях саме розривних функцій.

Розглянемо деякі її властивості:

1. Наступні рівності:

   $\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}; \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} - \text{інтеграл Пуасона}\right)$

   $$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)\pi}; \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = arctg\, x|_{-\infty}^{\infty} = \pi\right),$$

   можуть бути визначенням (нестрогим) $\delta(x)$.

2. $\delta(x) = \delta(-x) -$ парна функція .

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1;\ \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0,\ x \neq x_0 \\ \infty,\ x = x_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = 1. \end{cases}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0),$ якщо $f(x) -$ неперервна функція .

5. $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x);\ \delta\big(\varphi(x)\big) = \frac{1}{|\varphi'(0)|}\ \delta(x),$ якщо $\varphi(0) = 0.$

6. $\eta(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x > 0 \end{cases}$ одинична функція Хевісайда ; $\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx.$

7. $\underbrace{\gamma(x) = \eta(x) - \frac{1}{2}}_{\text{функція стрибка}} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ \frac{1}{2}, x > 0 \end{cases}; \quad \frac{d\gamma(x)}{dx} = \delta(x) = \frac{d\eta(x)}{dx},\ \ sgnx = 2\eta\,(x) - 1.$

8. $F_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}dx = e^{i\omega x}|_{x=0} = e^0 = 1\ \ (F_\delta(\omega) - \text{спектр. функція.})$

9. $F_\delta(\omega) = 1,$ тому $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{\infty}(\cos\omega x + \underbrace{i\sin\omega x)}_{0}\, d\omega) =$

   $= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\omega x d\omega.$

10. $\gamma(x) = \int_0^x \delta(x)dx = \int_0^x (\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x d\omega)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega.$

   при $x = 1,$ маємо: $\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega \to \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2}\ \ -$ інтеграл Дирихле.

11. Якщо $x \in (0;\ \pi),$ то справедливі рівності:

   1) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2}\delta(x)$

   2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n - 1)x = \frac{\pi}{2}\big(\delta(x) - \delta(2x)\big).$

   3) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos nx = \frac{\pi}{2}\big(2\delta(2x) - \delta(x)\big).$

Приклад 1.

Розглянемо зображення (Лаплас) $\delta(t) \doteqdot \int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}\,dt = e^{-pt}|_{t=0} = 1.$

$\delta'(t) \doteqdot \int_{+0}^\infty \delta'(t)\,e^{-pt}dt = \left|{}^{\delta'(t)dt=dv}_{e^{-pt}=u} \;\vdots^{v=\delta(t)}_{du=-pdt}\right| = \underbrace{\delta(t)e^{-pt}}_{0}|_{+0}^\infty + \int_{+0}^\infty pe^{-pt}\delta(t)dt = p;$

Тепер, нехай $f(t)$- кусково-неперервно-диференційована функція, що має скінченні розриви першого роду в точках t_k, $k=\overline{1,n}$ із стрибками $h_k = f(t_k+0) — f(t_k-0)$, тоді

$f'(t) = f_1'(t) + \sum_{k=1}^n h_k\,\delta(t-t_k)$, де $f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^\infty h_k\,\eta(t-t_k)$

($f_1(t)$- «зімкнута» функція). Тобто похідна розривної функції $f(t)$ складається із її звичайної похідної $f_1'(t)$(там де вона неперервно диференційована) і суми δ-функцій в точках розриву з коефіцієнтами h_k, це дуже важливо для правильного застосування теорем операційного числення до розривних функцій. Розглянемо, для прикладу, таку $f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$.

Тоді, $f'(t) = 0 + \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$ (згадаємо, що $\eta'(t) = \delta(t)$). Тобто $f'(t) \doteqdot 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}$, тому $f(t) \doteqdot \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p}$, звідки знову $f(t) =$
$= \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$ - вірно.

Без врахування δ-функції $f(t)$–як const на кожному інтерваліΔt_k мала б $f'(t) = 0$ а в точках t_k похідна не існує. Але тоді перетворення Лапласа від $f'(t)$ буде 0, звідки і $f(t)$ повинно бути 0, що невірно.

Приклад 2.

Знайти $S(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^3}$, а також $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ суму числового ряду.

Розв'яжемо задачу операційним методом, використавши відповідне представлення δ-функції у вигляді $\frac{\pi}{2}\delta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$.

Маємо: $S'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n\,x}{n^2}$, $S''(x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n\,x}{n}$,

$$S'''(x) = -\sum_{n=1}^\infty \cos n\,x = -\left(\frac{\pi}{2}\delta(x) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\delta(x)\,.$$

Маємо диференціальне рівняння $S'''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\delta(x)$, $S(0) = S''(0) = 0$.

Розв'яжемо це рівняння операційним методом, знаючи, що $\delta(x) \doteqdot 1$,

$$S'''(x) \doteqdot p^3S(p) - \underbrace{p^2S(0)}_{0} - pS'(0) - \underbrace{S''(0)}_{0}\,,$$

Тобто $p^3S(p) - pS'(0) = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}$, де $S'(0)$- поки невідомо.

Звідси $p^3S(p) = pS'(0) + \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}$; $S(p) = \frac{1}{2p^4} - \frac{\pi}{2p^3} + \frac{S'(0)}{p^2}$.

Або $S(p) \doteqdot \frac{1}{2\cdot 3!}x^3 - \frac{\pi}{2\cdot 2!}x^2 + S'(0)x = S(x)$. Знайдемо $S'(0)$.

Підставимо в цю рівність $x = \pi$, маємо $S(\pi) = 0 = \frac{1}{12}\pi^3 - \frac{\pi}{4}\pi^2 + S'(0)\pi$ => $S'(0) = \frac{\pi^2}{6}$, тому $S(x) = \frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\, x}{n^3}$ => $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} =$

$$= S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\pi^2\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi^3}{4} + \pi^3\right) = \frac{\pi^3}{32}$$

Відповідь: $S(x) = \frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

5. *Обчислення інтегралів а) Френеля; б)Лапласа*

а) $\underbrace{\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx}_{I_1}$; $\underbrace{\int_0^{\infty} \sin x^2\, dx}_{I_2}$. Впевнитись, що $I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ – інтеграли Френеля.

Перший спосіб.

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2\, dx = \left|\begin{matrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = |\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\, du| =$$

$$= |\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx}_{I_3\ (\text{інт. Пуасона})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = I^2 = 4 \iint\limits_{\mathcal{D}_0: x\geq 0, y\geq 0} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \left|\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |\vartheta| = \rho \end{matrix}\right| =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}|_0^{\infty}\right) = \pi| = \frac{1}{\cancel{\pi}}\frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\infty} \cos t\, dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du =$$

=|Змінимо порядок інтегрування, законність цієї операції потрібно обгрунтувати|=

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \cos t\ \ dt = \left|\int e^{at} \cos bt\, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos bt + b\sin bt) + C\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} du \left(\frac{e^{-tu^2}}{1+u^4}(-u^2\cos t + \sin t)|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du =$$

$$= \left|\int_0^{\infty} \frac{u^2\, du}{1+u^4} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^4} du \text{ , перевірити заміною } u = \frac{1}{v}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4} du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{u^2+\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}+u^2} du = \left|\begin{matrix} \text{заміна} \\ u - \frac{1}{u} = v \\ \left(1+\frac{1}{u}\right) du = dv \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(arctg\ \frac{v}{\sqrt{2}}|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = I_1 = I_2$$

Відповідь: $I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

Другий спосіб.

Обґрунтування правильності застосування зміни порядку інтегрування викликає певні труднощі, яких можна уникнути, використовуючи метод множника збіжності при обчисленні $I_4 = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$, а саме:

Обчислимо $M = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-at}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-at} \cos t\, dt \int_0^\infty e^{-u^2} du =$
$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(a-u^2)t} \cos t\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{(a-u^2)du}{1+(a-u^2)^2}$

Тоді $I_4 = \lim_{a\to 0} M = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, тобто $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_4 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

б) Інтеграли Лапласа: $A = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2} dx$; $B = \int_0^\infty \frac{\mathrm{x} \sin \beta x}{\alpha^2+x^2} dx$, $\alpha, \beta > 0$.

Перший спосіб.

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2} dx = \left|\frac{1}{\alpha^2+x^2} = \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2+x^2)} dt\right| = \int_0^\infty \cos \beta\, x\, dx \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2+x^2)} dt =$$
$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t} dt \underbrace{\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta\, x\, dx}_{\text{C } (COS-\text{ в ряд Маклорена})} = \Bigg|\mathrm{C} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \beta^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n}\, dx =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\Bigg| = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \begin{vmatrix} t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{vmatrix} = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2 - \frac{\beta^2}{4z^2}} dz =$$
$$\left|\int_0^\infty f\left[\underbrace{\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2}_{y}\right] dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(y^2) dy\right| = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\beta} \underbrace{e^{-y^2} dy}_{I_3 \text{ (Пуасон)}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\pi} e^{-\alpha\beta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$
$$= \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} = A. \text{ Далі } B = -\frac{dA}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} .$$

Відповідь: $\mathrm{A} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}$, $B = -\frac{dA}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$.

Другий спосіб.

Обчислимо інтеграли Лапласа, розв'язуючи відповідні диференціальні рівняння. Маємо:

До рівності $\frac{dA}{d\beta} = -B$, додаємо рівність $\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx$ (Дирихле).

Тоді $\frac{dA}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin \beta x}{x} - \frac{\mathrm{x} \sin \beta x}{\alpha^2+x^2}\right) dx = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2+x^2)} dx$.

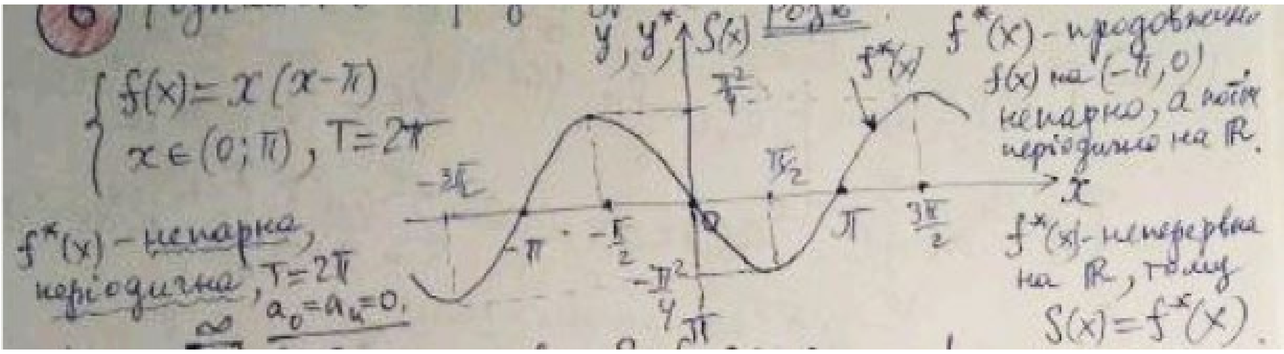
Тепер можна диференціювати під знаком інтеграла, тому $\frac{d^2A}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2}$, або

$\frac{d^2A}{d\beta^2} = \alpha^2 \mathrm{A}$, його розв'язок за методом Ейлера: $A = e^{\lambda\beta}$, $A' = \lambda e^{\lambda\beta}$, $A'' = \lambda^2 e^{\lambda\beta}$, характеристичне рівняння $\lambda^2 - \alpha^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$, тобто $A = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta}$, $\alpha, \beta > 0$. Ясно, що $C_1 = 0$, бо інакше інтеграл буде розбіжним (а він збігається). Для знаходження C_2, покладемо $\beta = +0$, тоді $A(\alpha, +0) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2+x^2} dx =$
$\frac{1}{\alpha} arctg \frac{x}{\alpha}\Big|_O^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\alpha} = 0 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Остаточно, відповідь: $A = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$, $B = -\frac{dA}{d\beta} = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$.

6. Розклад функцій в ряд Фур'є

Приклад. Розкласти в ряд фур'є (за сінусами) функцію $\begin{cases} f(x) = x(x-\pi) \\ x \in (0;\pi), T = 2\pi \end{cases}$



$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n} \sin nx$; $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{(x^2-\pi x)\sin nx\,dx}_{\text{інтегруємо частинами}} =$

$\left| \begin{matrix} x^2-\pi x = u \\ \sin nx\,dx = dv \end{matrix} \ \vdots\ \begin{matrix} du = (2x-\pi)\,dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\left(-\underbrace{\frac{x^2-\pi x}{n}\cos nx}_{0}\Big|_0^{\pi} + \right.$

$\left. \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2x-\pi)\cos nx\,dx \right) = \left| \begin{matrix} 2x-\pi = u \\ \cos nx\,dx = dv \end{matrix} \ \vdots\ \begin{matrix} du = 2dx \\ v = \frac{\sin x}{n} \end{matrix} \right| =$

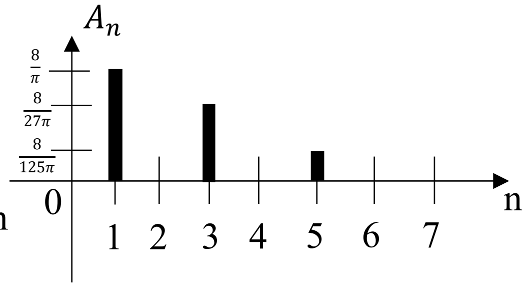
$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n}\left(\underbrace{-\frac{2x-\pi}{n}\sin nx}_{0}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \right)\right) = \frac{4}{n^3\pi}\cos x|_0^{\pi} = \frac{4}{n^3\pi}((-1)^n - 1) = b_n$,

тоді $S(x) = f(x) = f^*(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n-1)}{n^3}\sin nx$ - відповідь.

Інакше: $S(x) = f^*(x) = \frac{-8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$, бо $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, n = 2k \\ -2, n = 2k-1 \end{cases}$

Далі: **1)** $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + b_n^2} = |b_n| = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \frac{8}{\pi(2k-1)^3}, n = 2k-1 \end{cases}$

$A_1 = \frac{8}{\pi}; A_2 = 0; A_3 = \frac{8}{27\pi}; A_4 = 0; A_5 = \frac{8}{125\pi} \ldots$



2) $\varphi_n = -arctg\frac{a_n}{b_n} = 0$

3) Користуючись цим розвиненням в ряд Фур’є, знайдемо суму ряду (числового) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$; при $x = \frac{\pi}{2}$ буде $sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$

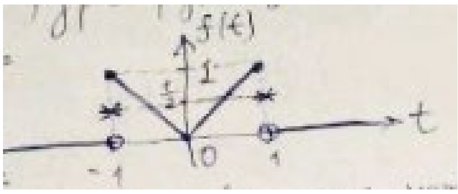
Тому $-\frac{\pi^2}{4} = -\frac{8}{\pi}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}}_{S} \Rightarrow S = +\frac{\pi^2 \cdot \pi}{4 \cdot 8} = \frac{\pi^3}{32} = S$ – відповідь.

7. Інтеграл Фур’є

Приклад.

Зобразити інтегралом Фур’є функцію

$$f(t) = \begin{cases} |t|, |t| \le 1 \\ 0, |t| > 1 \end{cases}$$



Перший спосіб. Дійсна форма.

Функція парна, задовольняє всім умовам теореми Фур’є, дійсно, вона кусково-неперервна та абсолютно інтегрована

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = 2\int_0^1 t\, dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1 (\neq \infty)$$

Тому $f(t) \cong I(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t) d\omega$, де

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt,\ b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t) dt\,,$$

$f(t)$-парна, тому $b(\omega) = 0$. Знайдемо $a(\omega)$, маємо

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 t\cos\omega t\, dt = \left| \begin{matrix} t = u \\ \cos\omega t\, dt = dv \end{matrix} \ \vdots\ \begin{matrix} du = dt \\ v = \frac{1}{\omega}\sin\omega t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{t}{\omega}\sin\omega t|_0^1 - \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega t\, dt\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega t}{\omega^2}|_0^1\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega - 1}{\omega^2}\right) = \frac{2}{\pi\omega^2}(\omega\sin\omega - (1-\cos\omega)) = \frac{2}{\pi\omega^2}\left(\omega \cdot 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} - \right.$$

$$\left. -2\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2\pi}\left(\omega\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\right)$$. Тобто

$$f(t) \cong \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}\left(\omega\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\right)\cos\omega t\, d\omega\ . \qquad (5)$$

Далі

1) $A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} = |a(\omega)| = \frac{4}{\pi\omega^2}|\sin\frac{\omega}{2}(\omega\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2})|$, $\omega > 0$.

$$A(0)=\lim_{\omega\to 0}|a(\omega)|=\frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to 0}\frac{(\omega^2-\frac{\omega^2}{2})}{\omega^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}$$

Графік $A(\omega), \omega>0$ можна побудувати, використовуючи, наприклад, маткад.

2) $\varphi(\omega)=-arctg\frac{a(\omega)}{b(\omega)}=0\,, a(\omega)\geq 0 \quad ; \quad \varphi(\omega)=-\pi\,, a(\omega)<0$.

Другий спосіб. Комплексна форма.

$$f(t)\cong I(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \text{ , де}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{0}(-t)\,e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1}te^{-i\omega t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=u \\ e^{-i\omega t}dt=dv \end{matrix}\ \vdots\ \begin{matrix} du=dt \\ v=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\end{matrix}\right|=-\left(\frac{i}{\omega}te^{-i\omega t}|_{-1}^{0}-\frac{i}{\omega}\int_{-1}^{0}e^{-i\omega t}dt\right)+$$

$$+\left(\frac{i}{\omega}te^{-i\omega t}|_{0}^{1}-\frac{i}{\omega}\int_{0}^{1}e^{-i\omega t}dt\right)=-\left(\frac{i}{\omega}\left(0+e^{i\omega}\right)+\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega t}|_{-1}^{\,0}\right)+$$

$$+\left(\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega}-0\right)+\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega t}|_{0}^{1}\right)=-\frac{i}{\omega}e^{i\omega}-\frac{1}{\omega^2}\left(1-e^{i\omega}\right)+\frac{i}{\omega}e^{-i\omega}+$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega}-1\right)=\frac{-i}{\omega}\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)+\frac{1}{\omega^2}\left(-1+e^{i\omega}+e^{-i\omega}-1\right)=$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega+\frac{2}{\omega^2}(\cos\omega-1)=\frac{2}{\omega^2}\left(\omega\sin\omega+(\cos\omega-1)\right)=$$

$$=\frac{2}{\omega^2}\left(2\omega\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}-2\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}\left(\omega\cos\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\omega}{2}\right),$$

що співпадає з $a(\omega)$ (з точністю до коефіцієнту $\frac{1}{\pi}$, згідно відповідних формул).

Тобто:

$$f(t)\cong I(t)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}\left(\omega\cos\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\omega}{2}\right)e^{i\omega t}d\omega=\begin{cases}|t|, |t|\leq 1\\ 0, |t|>1\\ \frac{1}{2}, |t|=1\end{cases}. \qquad (6)$$

Ясно, що $A(\omega)=|a(\omega)|=\pi|F(\omega)|\,,\ \ \varphi(\omega)=-\arg F(\omega)=\begin{cases}0, & F(\omega)\geq 0\\ -\pi, & F(\omega)<0\end{cases}$.

Третій спосіб.

Оскільки $f(t)$ – парна, то крім зображення її інтегралом Фур'є можна знайти ще її ***cos***-перетворення, маємо: $f(t)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega$, де

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \underbrace{t}_{u}\underbrace{\cos\omega t\,dt}_{dv} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega - 1}{\omega^2}\right) =$$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2}\big(\omega\sin\omega - (1-\cos\omega)\big)$. Тоді

$$f(t) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\big(\omega\sin\omega - (1-\cos\omega)\big)\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2} - -\sin\frac{\omega}{2}\right)\cos\omega t\,d\omega\,. \qquad (7)$$

Всі представлення (5), (6), (7) співпадають. Спектральні характеристики можна теж визначити по кожному з цих представлень і вони теж (в основному) однакові.

8. Застосування теорії лишків

Приклад. Обчислити $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}$.

За основною теоремою про лишки маємо:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10} = Im\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}dx}{x^2-2x+10} = Im\ (2\pi i\sum_{k=1}^{n} \begin{matrix} res\ (f(z), z_k) \\ y_k > 0 \end{matrix}\ ),\text{ де}$$

$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$; $z^2 - 2z + 10 = 0$; $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i$ — *прості полюси.*

В верхній півплощині лежить $z_1 = 1 + 3i$ ($y_k > 0$), тому

$$I{=}Im\big(2\pi i \cdot res\ f(1+3i)\big) = Im\ \left(2\pi i\lim_{z\to 1+3i}\frac{ze^{iz}\cancel{(z-1-3i)}}{\cancel{(z-1-3i)}(z-1+3i)} = Im(2\pi i\,\frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{\cancel{1}+3i-\cancel{1}+3i}\right) =$$

$$Im\left(2\pi\cancel{i}\,\frac{(1+3i)e^{-3}\cdot(\cos 1 + i\sin 1)}{6\cancel{i}}\right) = \frac{\pi}{3e^3}Im(1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) =$$

$\frac{\pi}{3e^3}Im(\underbrace{(\cos 1 - 3\sin 1)}_{a} + i\,\underbrace{(\sin 1 + 3\cos 1)}_{b}) = \frac{\pi(\sin 1 + 3\cos 1)}{3e^3} = I$ – відповідь.

Зауваження.

Одночасно ми знайшли також $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3e^3}Re(a+ib) = \frac{\pi(\cos 1 - 3\sin 1)}{3e^3}$.

9. Застосування операційного числення для розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем

Приклад. Операційним методом розв’язати задачу Коші.

$$y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2+e^t};\; y(0) = y'(0) = 0, \qquad \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ p = s + i\delta \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Нехай $y = y(t)$ – функція-оригінал, тоді $y(t) \doteqdot \Upsilon(\mathrm{p})$.
За теоремою диференціювання оригіналу, маємо :

$$y'(t) \doteqdot p\Upsilon(p) - y(0) = p\Upsilon(p);\; y''(t) \doteqdot p^2\Upsilon(p) - py(0) - y'(0) = p^2\Upsilon(p).$$

Нехай тепер $f(t) = \frac{e^{2t}}{2+e^t} \doteqdot F(p)$, тоді в просторі зображень маємо:

$$p^2\Upsilon - p\Upsilon = F, \text{або } \Upsilon(p^2 - p) = F, \text{тобто } \Upsilon = \underbrace{\frac{1}{p^2 - p} \cdot F}_{\text{добуток}}$$

Так як $\frac{1}{p^2-p} = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{p-(p-1)}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \doteqdot e^t - 1$,

То за теоремою про згортку $\Upsilon(p) \doteqdot y(t) = (e^t - 1) \cdot f(t) = \int_0^t (e^{t-\tau} - -1) f(\tau) d\tau =$
$\int_0^t (e^t \cdot e^{-\tau} - 1) \frac{e^{2\tau}}{2+e^\tau} d\tau = e^t \int_0^t \frac{e^\tau}{2+e^\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^\tau \cdot e^\tau \cdot d\tau}{2+e^\tau} = e^t \int_0^t \frac{d(2+e^\tau)}{2+e^\tau} - \int_0^t \frac{e^\tau d(e^\tau)}{e^\tau+2} =$
$e^t \ln(2+e^t)\,|_0^t - \left(\int_0^t d\,(e^\tau) - 2\int_0^t \frac{d(e^\tau+2)}{e^\tau+2} = e^t(\ln(2+e^t - ln3) - e^\tau|_0^t +\right.$
$\left.2\ln(2+e^\tau))\right)|_0^t = e^t\,(\ln(2+e^t) - \,ln3) - (e^t - 1) + 2(\ln(2+e^t) - ln3) =$

$$= e^t\,(\ln(2+e^t) - \ln(3e)) + 2\ln(2+e^t) + \,ln\frac{e}{9} = y(t).$$

Відповідь: $y(t) = e^t\,(\ln(2+e^t) - \ln(3e)) + 2\ln(2+e^t) + \,ln\frac{e}{9}$.

10. Застосування перетворення Лапласа до розв'язання рівнянь типу згортки

Приклад. Розв'язати операційним методом: $y(t) = 1 + t + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau)\, d\tau$.

Нехай y(t) – функція-оригінал (шукана функція). Тоді вона має зображення по Лапласу: $y(t) \doteqdot \Upsilon(p)$, крім того $1 = \eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}, t \doteqdot \frac{1}{p^2}$, а за теоремою про згортку
$\int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau \doteqdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \Upsilon(p)$. Таким чином, в просторі зображень маємо:

$\Upsilon = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+1} \cdot \Upsilon$, або $\Upsilon\left(1 - \frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$, *або*

$$\Upsilon \cdot \frac{p^2}{1+p^2} = \frac{p+1}{p^2}, \text{тобто } \Upsilon = \frac{(p+1)(p^2+1)}{p^4} = \frac{p^3+p^2+p+1}{p^4} =$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p} \doteqdot 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3, \text{за формулою } t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$\frac{1}{p} \doteqdot 1 = \eta(t) -$ *одинична функція Хевісайда*

Таким чином шукана функція y(t), що задовольняє це інтегральне рівняння, буде
$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$ – це і є відповідь.