

Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики  
КПШ імені Ігоря Сікорського I тур, 28-30 січня 2023 року  
Задачі для студентів першого курсу, категорія М

1. Знайти суму

$$\sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{2022^n + \sqrt{2022^{2023}}}.$$

2. Знайти всі функції  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , які задовольняють рівняння

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

3. Позначимо через  $\mathbb{R}_+^3$  перший координатний октант у  $\mathbb{R}^3$ . Для кожного фіксованого  $\alpha > 0$  описати геометричне місце точок  $A \in \mathbb{R}_+^3$ , які задовольняють таку умову: найменший об'єм частини октанту, що відтинається довільною площиною, проведеною через  $A$ , дорівнює  $\alpha$ .

4. Нехай  $f$  та  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , — функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Відомо, що для будь-якої числової послідовності  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , з  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Довести, що функція  $f$  є неперервною.

5. Довести, що для будь-якої дійсної квадратної матриці  $A$  виконується нерівність

$$\det(E + A + A^2 + \dots + A^{2022}) \geq 0.$$

Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

6. Означимо операцію  $\circledast$  у такий спосіб:

$$a \circledast b = \frac{a + b}{ab + 1}.$$

Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \circledast 3 \circledast \dots \circledast n$ .