

Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики  
КПШ імені Ігоря Сікорського I тур, 28-30 січня 2023 року  
Задачі для студентів старших курсів, категорія М

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (10n + 1)}.$$

2. Знайти всі розв'язки задачі Коші

$$\begin{cases} y''(x) = y(x) \cdot \cos x, \\ y(2022) = y(2024) = 0. \end{cases}$$

3. Позначимо через  $Q$  внутрішню частину квадрата з вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ . Для фіксованого  $\alpha \geq 0$  розглянемо геометричне місце  $\mathcal{R}_\alpha$  всіх точок  $A \in Q$ , які задовольняють таку умову: площа будь-якого багатокутника, що відтинається від  $Q$  довільною прямою, проведеною через  $A$ , не менше  $\alpha$ . Знайти площу самої множини  $\mathcal{R}_\alpha$ .

4. Нехай  $f$  та  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , — функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Відомо, що для будь-якої числової послідовності  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , з  $x_n \rightarrow x$  випливає  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .

а) Довести, що функція  $f$  є неперервною.

б) Чи обов'язково функції  $f_n$  збігаються до  $f$  рівномірно на  $\mathbb{R}$ ?

5. На першій чверті одиничного кола (тобто, на його дузі від точки  $(1, 0)$  до точки  $(0, 1)$ ) навмання вибрано точку  $A$ , на другій —  $B$ , на третій —  $C$  і на четвертій —  $D$ . Для фіксованої точки  $F$  з координатами  $(x, y)$  позначимо через  $p(x, y)$  імовірність того, що  $F$  лежить всередині чотирикутника  $ABCD$ . Знайти

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy.$$

6. Означимо операцію  $\otimes$  у такий спосіб:

$$a \otimes b = \frac{a + b}{ab + 1}.$$

Довести, що для довільної послідовності чисел  $(a_n, n \geq 1)$  з проміжку  $(0, 1)$  рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n = 1$$

виконується тоді й тільки тоді, коли  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ .