

Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики
КПШ імені Ігоря Сікорського I тур, 28-30 січня 2023 року
Задачі для студентів старших курсів, категорія С

1. Послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ задано рекурентно: $x_1 = 1, x_2 = 1,$

$$x_{n+2} = 20x_n + 23x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дослідіть на збіжність та у разі збіжності знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2023)^n}.$$

2. Знайти таку неперервну функцію $(f(x), x \geq 1)$, що

$$\int_1^x \frac{dt}{f^{2023}(t)} = f(x) - 1, \quad x \geq 1.$$

3. Для деяких дійсних чисел a, b, c, d та різних $\theta_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, 3$, розглянемо визначник

$$L_i(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + c \cos \theta_i & b + c \sin \theta_i & 1 \\ a + d \cos \theta_i & b + d \sin \theta_i & 1 \end{vmatrix}.$$

Доведіть, що прями $L_i(x, y) = 0, i = 1, 2, 3$, перетинаються в одній точці та знайдіть координати цієї точки.

4. Нехай $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ та $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ — такі диференційовні на $(0, \infty)$ функції, що $f'(x) \neq 0, x > 0$, та для всіх $x > 0$ виконується рівність

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = 2023 \cdot \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Знайдіть $g(2)$, якщо $f(1) = 1, f(2) = 2, g(1) = 2023$.

5. Обчисліть

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}.$$

6. Елементи матриці $a_{i-1j}, a_{i+1j}, a_{ij-1}, a_{ij+1}$ (якщо вони існують) будемо називати сусідніми до елементу a_{ij} , тобто сусідніми до елементу a_{ij} є елементи матриці, які стоять на одну позицію вище, нижче, праворуч, ліворуч від нього. Чи існує така матриця A , розміру 10×10 , з усіма різними елементами, у якої кожен елемент серед своїх сусідніх є або найбільшим або найменшим? Якщо така матриця існує, то наведіть її приклад, якщо такої матриці не існує, то доведіть це.