

Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики
КПШ імені Ігоря Сікорського I тур, 28-30 січня 2023 року
Задачі для студентів першого курсу, категорія Т

1. Знайти суму

$$\sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{2022^n + \sqrt{2022^{2023}}}.$$

2. Послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ задано рекурентно:

$$x_1 = a, x_2 = b, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

$$x_{2n+1} = x_{2n}x_{2n-1},$$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} + 4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Яка найбільша кількість квадратів є серед чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$? Тут квадратом називається таке число, яке дорівнює квадрату деякого натурального числа.

3. Для деяких дійсних чисел a, b, c, d та різних $\theta_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, 3$, розглянемо визначник

$$L_i(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + c \cos \theta_i & b + c \sin \theta_i & 1 \\ a + d \cos \theta_i & b + d \sin \theta_i & 1 \end{vmatrix}.$$

Доведіть, що прямі $L_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, 3$, перетинаються в одній точці та знайдіть координати цієї точки.

4. Нехай $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ та $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ — такі диференційовні на $(0, \infty)$ функції, що $f'(x) \neq 0$, $x > 0$, та для всіх $x > 0$ виконується рівність

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = 2023 \cdot \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Знайдіть $g(2)$, якщо $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $g(1) = 2023$.

5. На прямій $\operatorname{Re} z = 5$ знайти найбільше значення виразу

$$\operatorname{Re}(z^2) - \operatorname{Im}(z^2).$$

6. Означимо операцію \otimes у такий спосіб:

$$a \otimes b = \frac{a + b}{ab + 1}.$$

Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \otimes 3 \otimes \dots \otimes n.$$