Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського І тур, 28-30 січня 2023 року
Задачі для студентів старших курсів, категорія Т

1. Послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ задано рекурентно: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$,

$$x_{n+2} = 20x_n + 23x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дослідіть на збіжність та у разі збіжності знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2023)^n}.$$

2. Знайти таку неперервну функцію $(f(x), x \geq 1)$, що

$$\int_1^x \frac{dt}{f^{2023}(t)} = f(x) - 1, \quad x \geq 1.$$

3. Позначимо через $\mathbb{R}^3_+$ перший координатний октант у $\mathbb{R}^3$. Для кожного фіксованого $\alpha > 0$ описати геометричне місце точок $A \in \mathbb{R}^3_+$, які задовольняють таку умову: найменший об'єм частини октанту, що відтинається довільною площиною, проведеною через A, дорівнює α.

4. Нехай $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ та $g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — такі диференційовні на $(0,\infty)$ функції, що $f'(x) \neq 0$, $x > 0$, та для всіх $x > 0$ виконується рівність

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = 2023 \cdot \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Знайдіть $g(2)$, якщо $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $g(1) = 2023$.

5. Обчисліть

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}.$$

6. Означимо операцію $\circledast$ у такий спосіб:

$$a \circledast b = \frac{a+b}{ab+1}.$$

Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} 2 \circledast 3 \circledast \ldots \circledast n.$$