Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова
І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Київ — 2013

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

Навчальне видання

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної

Конспект лекцій

для студентів І курсу технічних спеціальностей

Укладачі: *Гайдей Віктор Олександрович*, канд. фіз-мат. наук, доц.
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Алєксєєва Ірина Віталіївна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій з вищої математики «Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» є складовою **навчального комплекту** з вищої математики, який містить:

— конспект лекцій,

— практикум,

— збірник індивідуальних домашніх завдань,

— збірник контрольних та тестових завдань.

Конспект складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в НТУУ «Київський політехнічний інститут», його зміст відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи дисципліни «Вища математика»:

— границя функції, неперервність;

— диференціальне числення функцій однієї змінної;

— інтегральне числення функцій однієї змінної.

Конспект містить теоретичний матеріал, обсяг і рівень строгості якого потребує курс вищої математики для майбутніх інженерів. Доведення більшості теорем і коментар до них буде доступний в електронному вигляді. Передбачено, що опанування лекції з конспекту супроводжується опануванням відповідного заняття з практикуму.

Метою конспекту є:

— систематичний виклад теоретичного матеріалу, що звільняє лектора від «надиктовування» і дозволяє більше пояснювати;

— ефективна підготовка студента до колоквіуму та іспиту;

— виділення наріжних питань математичного аналізу.

Пропонований конспект супроводжує, але аж ніяк не замінює живу лекцію, як і текст драматичного твору не замінює вистави.

МОВА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

1. Теореми і методи їх доведення

Теореми. Необхідна й достатня умови

Зазвичай у математиці будь-яку теорему формулюють у вигляді «якщо P, то Q», або «з P випливає Q». Що коротше можна записати як

$$\boxed{P \Rightarrow Q,}$$

де P — *умова* теореми, Q — *висновок*, $\Rightarrow$ — символ *імплікації*.

Виділяють чотири типи теорем:

$P \Rightarrow Q$ — *пряма*;

$Q \Rightarrow P$ — *обернена*;

$\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ — *протилежна*;

$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ — *протилежна оберненій*.

Якщо пряма теорема правдива, то обернена може бути як правдивою, так і неправдивою.

Теореми пряма і протилежна оберненій, а також обернена і протилежна — еквівалентні:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P});$$
$$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}),$$

де $\Leftrightarrow$ — символ *еквіваленції*.

Якщо твердження $P \Rightarrow Q$ правдиве, то кажуть, що P є *достатньою умовою* для Q, а Q — *необхідною умовою* для P.

Якщо правдиві пряма теорема $P \Rightarrow Q$ і обернена $Q \Rightarrow P$, то умова P є *необхідною та достатньою* для умови Q і умова Q — *необхідною та достатньою* для P. Отже, умови P та Q — еквівалентні. Тоді пишуть

$$\boxed{P \Leftrightarrow Q,}$$

Твердження такої теореми зазвичай звучить так: «P тоді й лише тоді, коли Q». Ці теореми ще називають *критеріями*.

Основні методи доведення

1. Зазвичай математичне твердження (теорему) $P \Rightarrow Q$ доводять будуючи ланцюжок

$$P \Rightarrow R_1 \Rightarrow .... \Rightarrow R_n \Rightarrow Q$$

наслідків, кожен елемент якого або є аксіомою, або є вже доведеним твердженням. Цей тип доведення ґрунтується на правилі класичного виведення: якщо P і $P \Rightarrow Q$ є правдивими, то Q — правдиве.

2. Але, інколи ефективним є *доведення від супротивного*, яке ґрунтується на властивості

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Схема доведення методом від супротивного.

Крок 1. Припускають, правдивість умови $\overline{Q}$.

Крок 2. Міркуваннями приводять до суперечності з умовою P.

Крок 3. Висновують про правдивість теореми.

3. Часто в математичних твердженнях йдеться про нескінченну множину об'єктів. Існує метод міркувань, що замінює нездійсненний перебір такої нескінченної множини випадків — *метод математичної індукції*, який ґрунтується на *принципі математичної індукції*:

Твердження $P(n)$, правдивість якого залежить від натурального числа n, вважають правдивим, якщо виконано дві умови:

1) твердження $P(n)$ правдиве для $n = 1$;

2) із припущення, що $P(n)$ правдиве для $n = k$, де k — будь-яке натуральне число, випливає, що воно правдиве і значення $n = k + 1$.

Схема методу математичної індукції.

Крок 1. Перевіряють істинність твердження $P(1)$.

Крок 2. Припускаючи істинність твердження $P(k)$, доводять істинність твердження $P(k + 1)$.

Крок 3. Висновують про правдивість твердження: «якщо твердження правдиве для кожного натурального значення k, то, відповідно до принципу математичної індукції, твердження $P(n)$ є правдивим для будь-яких натуральних значень n.»

2. Математична символіка

Логічні символи

Для скорочення і уточнення математичних записів використовують логічну символіку.

1. *Квантор існування* $\exists$ відповідає словам «існує», «знайдеться». Вираз «існує x такий, що виконано $A(x)$» скорочено записують як

$$\boxed{\exists x : A(x).}$$

Вираз «існує *єдиний* x такий, що виконано $A(x)$» записують як

$$\boxed{\exists!\, x : A(x).}$$

2. *Квантор спільності* $\forall$ відповідає словам «для будь-якого», «для всіх». Вираз «для будь-якого x виконано $A(x)$» скорочено записують як

$$\boxed{\forall x : A(x).}$$

3. Замість виразів «з A випливає B», «якщо A, то B» пишуть

$$\boxed{A \Rightarrow B,}$$

де $\Rightarrow$ — символ *імплікації*.

4. Вираз «A тоді й лише тоді, коли B» скорочують як

$$\boxed{A \Leftrightarrow B,}$$

де $\Leftrightarrow$ — символ *еквіваленції*, який означає рівносильність тверджень.

5. Заперечення твердження A записують як $\bar{A}$.

Якщо в символьний запис твердження P входять квантори $\exists, \forall$ і умова A, то для того щоб побудувати символьний запис протилежного твердження $\bar{P}$, треба:

квантор $\exists$ замінити на $\forall$, квантор $\forall$ — на $\exists$, а умову A — на $\bar{A}$.

Отже,

$$\overline{\exists x : A(x)} \Leftrightarrow \forall x : \bar{A}(x);$$
$$\overline{\forall x : A(x)} \Leftrightarrow \exists x : \bar{A}(x).$$

Приміром, запереченням твердження

$$\forall x \in X : x < M$$

є твердження

$$\exists x \in X : x \geq M.$$

Скорочені позначення

1. Індекс j *перебігає* натуральні значення від 1 до n:

$$\boxed{j = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow j = \overline{1, n}.}$$

2. *Сума* n доданків, що мають один і той самий вигляд і відрізняються лише індексами

$$\boxed{a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,}$$

де Σ — символ підсумовування, k — індекс підсумовування.

3. Добуток перших n натуральних чисел називають *факторіалом* і позначають

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.}$$

Приміром,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Визначальною властивістю факторіала є те, що

$$\boxed{(n+1)! = n!(n+1).}$$

Вважають, що

$$\boxed{0! = 1.}$$

Біноміальна формула Ньютона

Біномом називають суму або різницю двох алгебричних виразів.

Нагадаймо, відомі формули:

$$(a+b)^0 = 1;$$
$$(a+b)^1 = a+b;$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Для будь-якого натурального n правдива *біноміальна формула Ньютона*

$$\boxed{\begin{gathered}(a+b)^n = \\ = b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + a^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,\end{gathered}}$$

де C_n^k — *біноміальні коефіцієнти*, які обчислюють за формулою

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.}$$

Біноміальні коефіцієнти C_n^k мають властивості:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}, k = \overline{0, n}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

3) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = \overline{0, n-1}$.

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

У цьому розділі означено:

— *числові множини, числову пряму й окіл точки;*
— *обмежені і необмежені множини;*
— *відображення множин;*
— *числову функцію і числову послідовність;*
— *основні характеристики функцій;*
— *обернену і складену функцію;*
— *гіперболічні функції;*
— *границю функції;*
— *границю числової послідовності, збіжні та розбіжні послідовності;*
— *однобічні границі функції в точці;*
— *нескінченно малі (н. м. ф) і нескінченно великі функції (н. в. ф.);*
— *невизначеності;*
— *еквівалентні нескінченно малі функції;*
— *число* e;
— *функцію неперервну в точці, в інтервалі і на відрізку;*
— *точки розриву.*

У цьому розділі розглянуто:

— *дії з множинами;*
— *способи задавання функцій і числових послідовностей;*
— *умову оборотності функції;*
— *властивості функцій, які мають скінченні границі;*
— *ознаку Веєрштраса про збіжність числової послідовності;*
— *критерій існування границі;*
— *властивості нескінченно малих функцій;*
— *першу і другу визначні границі;*
— *таблицю еквівалентностей;*
— *властивості функцій, неперервних в точці і на відрізку;*
— *неперервність елементарних функцій;*
— *класифікацію точок розриву.*

У цьому розділі обґрунтовано методи:

— *дослідження числових послідовностей на монотонність;*
— *знаходження границі функції в точці;*
— *знаходження границі числової послідовності;*
— *розкриття невизначеностей за допомогою еквівалентностей;*
— *порівняння нескінченно малих функцій;*
— *дослідження функції на неперервність і точки розриву.*

ЛЕКЦІЯ 1. МНОЖИНИ

1.1. Основні поняття

Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за певною ознакою. Об'єкти, які утворюють множину називають *елементами* множини.

Множини зазвичай позначають великими літерами латинки $A, B, ..., X, Y, ...$, а їхні елементи — малими літерами $a, b, ..., x, y, ...$.

Якщо елемент x *належить* множині A (x *є елементом* множини A), то пишуть $x \in A$.

Якщо елемент x *не належить* множині A (x *не є елементом* множини A), то пишуть $x \notin A$.

Множину називають *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. Множину, що не містить жодного елементу, називають *порожньою множиною* і позначають $\varnothing$.

Способи задавання множин:

1) переліком усіх елементів;

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

2) *характеристичною* властивістю, яку мають її елементи, і лише вони.

$$A = \{x \mid x \text{ має властивість } P\}.$$

Множину формують не будь-які об'єкти, а елементи деякої множини, яку називають *універсальною* і позначають U.

1.2. Рівність множин. Підмножина

Означення 1.1 **(рівності множин).** Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, і кожен елемент множини B є елементом множини A, то множини A та B називають *рівними* і позначають

$$A = B.$$

У множині однакові елементи не розрізняють і порядок запису елементів множини не важливий.

Означення 1.2 **(підмножини).** Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B (множина A *міститься* у множині B) і пишуть

$$A \subset B.$$

Множина з n елементів має 2^n підмножин.

1.3. Дії з множинами

Нехай множини A та B є підмножинами універсальної множини U.

Означення 1.3 **(об'єднання множин).** *Об'єднанням* (*сумою*) множин A та B називають множину тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин і позначають

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Означення 1.4 **(перерізу множин).** *Перерізом* (*добутком*) множин A та B називають множину тих і лише тих елементів, які належать одночасно як множині A, так і множині B, і позначають

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Означення 1.5 **(різниці множин і доповнення множини).** *Різницею* множин A та B називають множину всіх елементів множини A, які не належать множині B і позначають

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Доповненням множини A називають множину $\overline{A} = U \setminus A$.

Дії з множинами ілюструють за допомогою діаграм Ейлера — Вена.

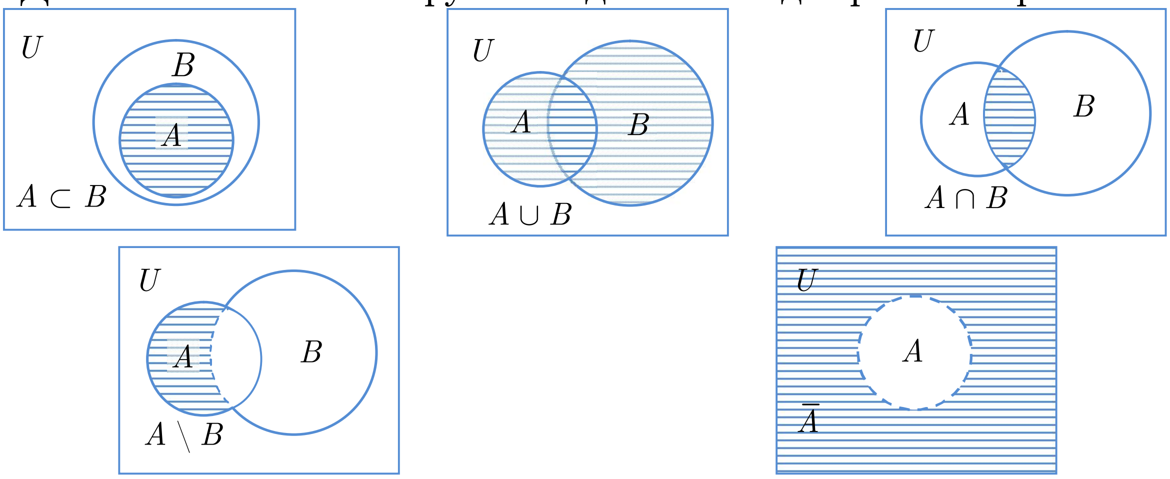


Рис. 1.1. Діаграми Ейлера — Вена для дій з множинами

1.4. Числові множини

Множину *натуральних* чисел позначають

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Множину *цілих* чисел позначають

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Множину *раціональних* чисел позначають

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Будь-яке раціональне число можна записати як *скінченний* або *нескінченний періодичний* десятковий дріб.

Множину ірраціональних чисел позначають

$$\mathbb{I} = \left\{ x \middle| x \neq \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Будь-яке ірраціональне число можна записати лише *нескінченним неперіодичним* десятковим дробом.

Множину *дійсних* чисел позначають

$$\mathbb{R} = \{x \mid x = a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\},$$

де a — ціле число, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$— десяткові цифри.

Правдиві співвідношення:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.}$$

Скінченні проміжки можна записати так:

1) *відрізок* $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$;

2) *інтервал* $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;

3) *півінтервал* $[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$;

4) *півінтервал* $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.

Множину дійсних чисел зручно доповнити елементами, які називають *плюс нескінченністю* та *мінус нескінченністю* і позначають $+\infty$ та $-\infty$, вважаючи при цьому, що:

1) $-\infty < x < +\infty, \ x + (+\infty) = +\infty, \ x - (+\infty) = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $x(+\infty) = +\infty, x(-\infty) = -\infty \quad \forall x > 0$;

3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Множину

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

називають *розширеною* множиною дійсних чисел (*розширеною* числовою прямою).

Іноді множину дійсних чисел доповнюють одним елементом *нескінченністю* (нескінченно віддаленою точкою)

$$\infty.$$

Множини:

$$(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad [a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\},$$
$$(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\},$$
$$(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$$

називають *необмеженими проміжками*.

1.5. Числова пряма

Числовою віссю називають пряму, на якій вибрано:

1) деяку точку O, *початок відліку*;

2) *додатний напрям*, який позначають стрілкою;

3) *масштаб* для вимірювання довжини.

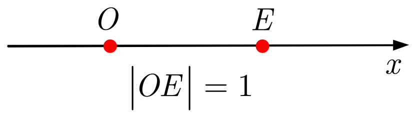


Рис. 1.2. Числова вісь Ox

Зазвичай числову вісь зображують горизонтально і додатний напрям вибирають зліва направо.

Модулем (*абсолютною величиною*) дійсного числа x називають число

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Між точками числової осі і множиною дійсних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій точки числової осі *зображатимуть* дійсні числа, а дійсні числа *характеризуватимуть* розташування точок на числовій осі, будуть їх *координатами*.

Правило зображення дійсного числа x_M точкою числової осі M:

1) відрізок OM має довжину, яка дорівнює $|x_M|$;

2) якщо $x_M < 0$, то точка M розташована ліворуч від точки O,

якщо $x_M = 0$, то точка M зливається з точкою O,

якщо $x_M > 0$, то точка M розташована праворуч від точки O.

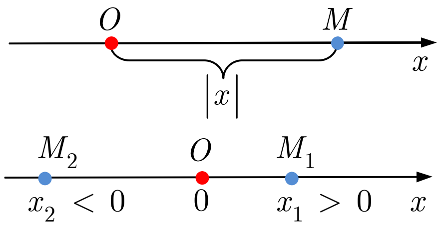


Рис. 1.3. Зображення дійсних чисел точками числової прямої

Точка $(-\infty)$ на числовій прямій розташована ліворуч від усіх чисел, а точка $(+\infty)$ — праворуч від усіх чисел.

Віддаль між точками M_1 та M_2 числової прямої з координатами x_1 та x_2 знаходять за формулою

$$d(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|.$$

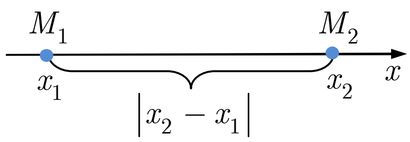


Рис. 1.4. Віддаль між точками

Околи

Означення 1.6 **(ε-околу).** Множину дійсних чисел, віддаль яких від точки x_0 менша за $\varepsilon > 0$, називають ε-*околом* точки x_0 і позначають

$$U_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|x - x_0\right| < \varepsilon\right\} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon).$$

Число x_0 називають *центром* околу, ε — його *радіусом*.

Проколеним ε-*околом* точки x_0 називають її ε-окіл, з якого виключено саму точку x_0 і позначають $U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

ε-*околом нескінчености* називають множину

$$U_\varepsilon(\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \left|x\right| > \varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty).$$

ε-*околом плюс нескінченності* називають множину

$$U_\varepsilon(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon\} = (\varepsilon; +\infty), \varepsilon > 0.$$

ε-*околом мінус нескінченності* називають множину

$$U_\varepsilon(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Дійсні числа мають властивість *відокремлюваності*: якщо a та b — два різні дійсні числа, то їх завжди можна відокремити одне від одного неперетинними околами.

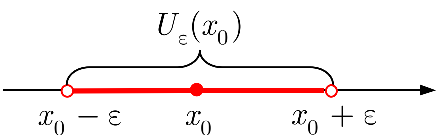


Рис. 1.5. ε-окіл точки $x_0 \in \mathbb{R}$

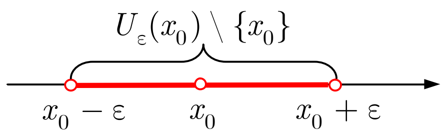


Рис. 1.6. Проколений ε-окіл точки $x_0 \in \mathbb{R}$

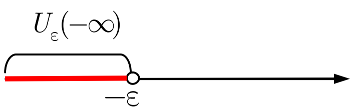


Рис. 1.7. ε-окіл точки $(-\infty)$

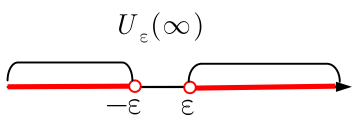


Рис. 1.8. ε-окіл точки ∞

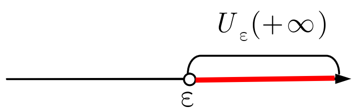


Рис. 1.9. ε-окіл точки $(+\infty)$

1.6. Обмежені і необмежені числові множини

Означення 1.7 **(обмеженої множини).** Числову множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою зверху* (*обмеженою знизу*), якщо існує таке число M (число m), що для будь-якого числа $x \in A$ виконано нерівність

$$x \le M \quad (m \le x).$$

Число M називають *верхньою межею* множини A, а число m — *нижньою межею* множини A.

Числову множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою*, якщо існує таке число $C > 0$, що для будь-якого числа $x \in A$ виконано нерівність

$$\left|x\right| \le C.$$

Приміром, множина $E = (-\infty; 0]$ обмежена зверху числом 0; множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ обмежена знизу числом 1.

Множину, що не є обмеженою зверху (знизу), називають *необмеженою зверху* (*необмеженою знизу*).

Приміром, множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ необмежена зверху; множина всіх від'ємних чисел необмежена знизу.

Якщо серед елементів множини A є *найбільше* число, то його позначають $\max A$.

Якщо серед елементів множини A є *найменше* число, то його позначають $\min A$.

Будь-яка скінченна множина $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ має найбільший та найменший елементи, а для нескінченної множини це не завжди так.

Будь-яка обмежена зверху (знизу) множина має нескінченно багато верхніх (нижніх) меж.

Означення 1.8 **(точних меж).** Найменшу з усіх верхніх меж обмеженої зверху множини $A \subset \mathbb{R}$ називають *точною верхньою межею* і позначають $\sup A$.
Найбільшу з усіх нижніх меж обмеженої знизу множини $A \subset \mathbb{R}$ називають *точною нижньою межею* і позначають $\inf A$.

Для необмеженої зверху множини A вважають, що $\sup A = +\infty$.

Для необмеженої знизу множини A вважають, що $\inf A = -\infty$.

Будь-яка обмежена зверху непорожня множина дійсних чисел має точну верхню межу, а будь-яка обмежена знизу — точну нижню межу.

1.7. Відображення множин

Якщо задано множини X, Y і правило f, за яким кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що задано *відображення* f множини X *у* множину Y (*функцію*, означену на множині X, із значеннями у множині Y) і позначають

$$y = f(x), x \in X \text{ або } f : X \to Y.$$

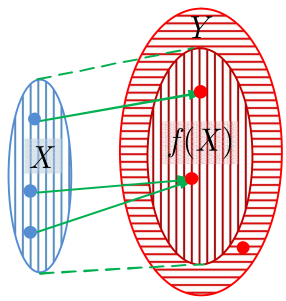


Рис. 1.10. Відображення $f : X \to Y$

Елемент $y \in Y$, у який відображено елемент $x \in X$, називають *образом елементу* x при відображенні f (*значенням функції* f, що відповідає значенню аргументу x). При цьому x називають *прообразом елементу* $f(x)$.

Відображення f, що можна уявляти як «чорну скриньку», перетворює прообраз x у його образ y.

Рис. 1.11. Функція як чорна скринька

Множину X називають *областю означення* відображення f і позначають $D(f)$. Множину образів усіх елементів $x \in X$ при відображенні f називають *образом множини* X при цьому відображенні (*множиною значень функції*) і позначають

$$E(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

Якщо ж $f(X) = Y$, то кажуть, що функція f *відображує* множину X *на* множину Y.

Відображення $f : X \to Y$ називають *взаємно однозначним*, якщо кожний елемент $y \in Y$ є образом лише одного елементу $x \in X$.

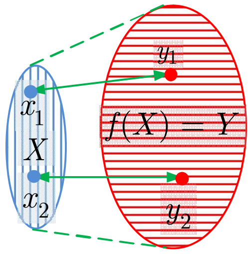


Рис. 1.12. Взаємно однозначне відображення

Функцію $f : X \to \mathbb{R}$ називають *дійсною (скалярною)* функцією, функцію $f : \mathbb{R} \to Y$ називають функцією *дійсного (скалярного)* аргументу, а функцію $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ називають *дійсною функцією дійсного аргументу (скалярною функцією скалярного аргументу)*.

Функцію $f : \mathbb{N} \to Y$ називають *послідовністю* елементів множини Y, а функцію $f : \mathbb{N} \to Y \subset \mathbb{R}$ — *числовою послідовністю*

$$a_n = f(n), n \in \mathbb{N}.$$

Якщо множина значень функції містить лише одне число C, то таку функцію називають *сталою*.

ЛЕКЦІЯ 2. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ

2.1. Графік числової функції

Розгляньмо числову функцію $f : X \to Y$, що відображує числову множину $X \subset \mathbb{R}$ у числову множину $Y \subset \mathbb{R}$.

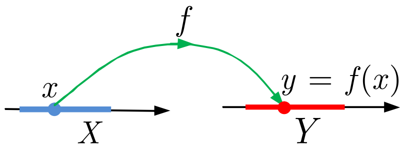


Рис. 2.1. Числова функція $f : X \to Y$

Множину точок площини Oxy з координатами $(x; f(x)), x \in X$, називають *графіком* Γ функції f, означеної на множині $X \subset \mathbb{R}$.

Зазвичай графіком функції є деяка лінія; але, приміром, якщо $X = \mathbb{N}$, то графіком функції є набір ізольованих точок.

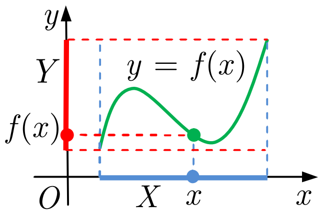


Рис. 2.2. Графік функції $y = f(x), x \in X$

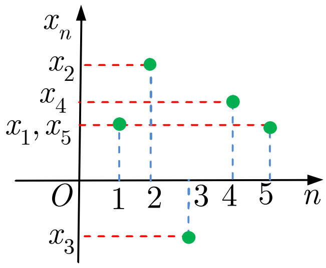


Рис. 2.3. Графік функції $y = f(n), n \in \mathbb{N}$

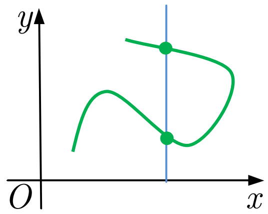


Рис. 2.4. Крива, що не є графіком функції

2.2. Способи задавання функції

1. Аналітичний спосіб, коли функцію задають формулою (формулами) або співвідношенням.

Аналітично функцію $f : X \to Y$ можна задавати

1) *явно*: одним аналітичним виразом $y = f(x), x \in X$ або кількома

$$y = \begin{cases} f_1(x), x \in X_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x), x \in X_n; \end{cases}$$

2) *неявно* — співвідношенням

$$F(x, y) = 0,$$

якщо $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$;

3) *параметрично* — рівностями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T \subset \mathbb{R},$$

де залежність y від x задано не безпосередньо, а за допомогою допоміжної змінної, *параметра* t.

2. Графічний спосіб задавання функції — функцію задають її графіком у прямокутній декартовій системі координат; абсциси точок графіка належать області означення функції, а ординати рівні відповідним значенням функції.

3. Табличний спосіб задавання функції, коли функцію задають таблицею низки значень аргументу і відповідних значень функції.

4. Алгоритмічний (програмний) спосіб, коли функцію задають програмою на одній з мов програмування.

5. Описовий спосіб, коли функцію задають словесним описом відповідності f, що дозволяє за заданим $x \in D(f)$ визначити $y \in E(f)$.

2.3. Числова послідовність

Означення 2.1 (числової послідовності). *Числовою послідовністю* називають числову функцію $x_n = f(n)$, означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, і позначають як

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots = \{x_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називають *членами послідовності*, а x_n — n-м або *загальним членом послідовності*.

Геометрично послідовність $\{x_n\}$ зображають точками площини Oxy з координатами $(n; x_n), n \in \mathbb{N}$.

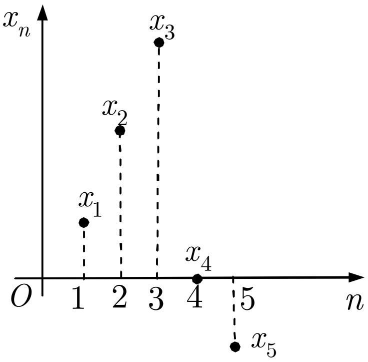


Рис. 2.5. Зображення послідовності точками площини

Послідовність можна задати:

1) формулою загального члена, приміром, *геометрична прогресія*

$$x_n = b_0 q^{n-1}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x_n\} = b_0, b_0 q, b_0 q^2, \ldots, b_0 q^{n-1}, \ldots;$$

2) словесним описом, приміром, «$\{x_n\}$ — послідовність простих чисел», звідки

$$\{x_n\} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots;$$

3) *рекурентною* формулою, коли задають кілька членів послідовності і вказують правило, за яким можна знайти наступні її члени, приміром послідовність *Фібоначчі* $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

2.4. Основні характеристики поведінки функції

Нулі і знак функції на множині $X \subset D(f)$

Значення аргументу $x \in D(f)$, для якого значення функції $f(x)$ дорівнює нулеві, називають *нулем функції*. Отже, нулі функції є коренями рівняння

$$f(x) = 0.$$

В інтервалі, на якому функція додатна, графік її розташований над віссю Ox, а в інтервалі, на якому вона від'ємна,— під віссю Ox; у точках перетину з віссю абсцис функція дорівнює нулеві.

Парність і непарність функції

Означення 2.2 **(парної і непарної функції).** Функцію f називають *парною (непарною)*, якщо:

1) область її означення симетрична щодо точки O;

2) для кожного x з області означення виконано рівність

$$f(-x) = f(x) \ \ (f(-x) = -f(x)).$$

Графік парної функції симетричний щодо осі Oy, а непарної — щодо початку координат.

Приміром, функція $y = |x|$ є парною функцією, функція *знак числа* (*сигнум*)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

є непарною функцією, а *одинична функція Гевісайда*

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

є функцією загального вигляду.

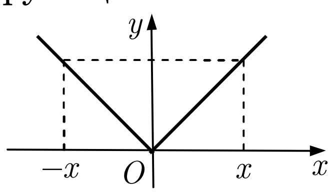


Рис. 2.6. Графік парної функції $y = |x|$

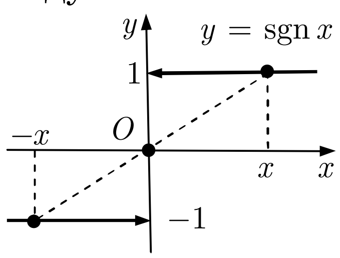


Рис. 2.7. Графік непарної функції $y = \operatorname{sgn} x$

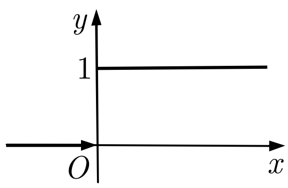


Рис. 2.8. Графік функції Гевісайда $y = \eta(x)$

Властивості парних і непарних функцій.
1. Зміна знаку перед функцією не змінює її парності (непарності).
2. Сума парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією.
3. Добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією.
4. Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.

Періодичність функції

Означення 2.3 **(періодичної функції).** Функцію f називають *періодичною*, якщо існує число $T \neq 0$, таке, що:
1) для кожного x з області означення $x + T$ теж належить області означення;
2) виконано рівність
$$f(x+T) = f(x).$$
Число T називають *періодом* функції f.

Якщо існує найменший додатний період функції, то його називають *основним періодом*.

Якщо T — основний період функції f, то графік такої функції «повторюється» з періодичністю T.

Приміром, функція *дробова частина числа*
$$y = \{x\} = x - [x]$$
періодична з основним періодом 1, а функція-стала
$$f(x) = c = \text{const}, D(f) = \mathbb{R}.$$
періодична, але основного періоду не має.

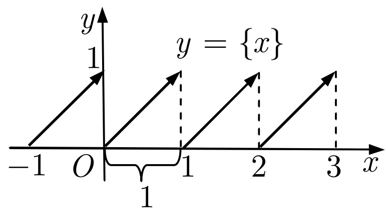


Рис. 2.9. Графік періодичної функції $y = \{x\}$

Властивості періодичних функцій.
1. Якщо T — період функції f, то її періодами також будуть числа $mT, m \in \mathbb{Z}$.
2. Якщо функція $y = f(x), x \in D(f)$, періодична з періодом T, то функція $y = f(\omega x)$ — періодична з періодом $\dfrac{T}{\omega}$.

Монотонність функції

Означення 2.4 **(монотонних функцій).** Функцію $y = f(x), x \in D$, називають *зростаючою* (*спадною*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції і позначають $f \nearrow$ ($f \searrow$), тобто

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Функцію $y = f(x), x \in D(f)$, називають *неспадною* (*незростаючою*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає не менше (не більше) значення функції, тобто

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

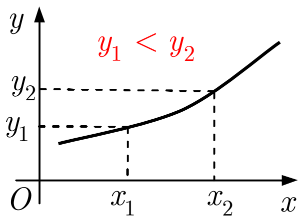


Рис. 2.10. Графік зростаючої функції

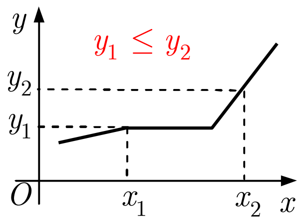


Рис. 2.11. Графік неспадної функції

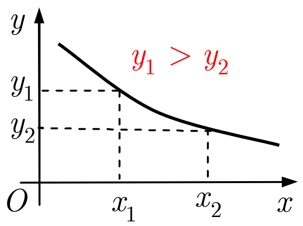


Рис. 2.12. Графік спадної функції

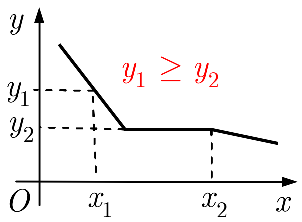


Рис. 2.13. Графік незростаючої функції

Зростаючі, спадні, неспадні і незростаючі функції називають *монотонними*; зростаючі і спадні — *строго монотонними*.

Стала функцію $y = c$ є незростаючою і неспадною водночас.

Запишімо означення монотонних послідовностей.

Послідовність $\{x_n\}$:

1) *зростає* (позначають $\{x_n\} \nearrow$), якщо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1};}$$

2) *не спадає*, якщо

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le x_{n+1};}$$

3) *спадає* (позначають $\{x_n\} \searrow$), якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1};}$$

4) *не зростає*, якщо

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge x_{n+1}.}$$

Монотонність послідовності $\{a_n\}$ можна встановити вивчаючи знак різниці $a_{n+1} - a_n$ або, для послідовностей $\{b_n\}$ з додатними членами, порівнюючи відношення $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ з 1.

$a_{n+1} - a_n$	$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$	Послідовність
> 0	> 1	зростаюча
< 0	< 1	спадна
≥ 0	≥ 1	неспадна
≤ 0	≤ 1	незростаюча

Обмеженість функції

Означення 2.5 (обмеженої функції).
Функцію f називають *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині $X \subset D(f)$ якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$, що для будь-яких значень аргументу $x \in X$ виконано умову
$$f(x) \leq M \;\; (m \leq f(x)).$$
Функцію f називають *обмеженою* на множині $X \subset D(f)$, якщо існує таке число $C > 0$, що для будь-яких значень аргументу $x \in X$ виконано умову
$$\left|f(x)\right| \leq C.$$

Приміром, функція $y = x^2$ є обмеженою знизу на своїй природній області означення $\mathbb{R}$ і необмеженою зверху; функція $y = 2 - x^2$ обмежена зверху і необмежена знизу на $\mathbb{R}$; функція $y = \sin x$ є обмеженою на $\mathbb{R}$.

Геометрично обмеженість функції числом C означає, що її графік розташований у смузі завширшки $2C$.

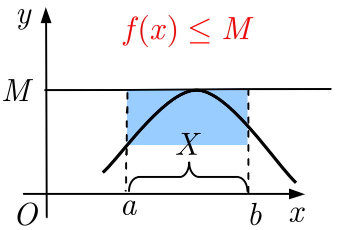


Рис. 2.14. Графік функції, обмеженої зверху на множині X

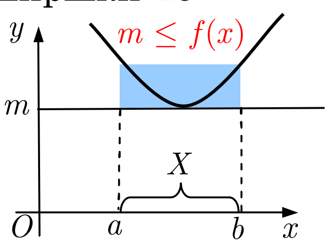


Рис. 2.15. Графік функції, обмеженої знизу на множині X

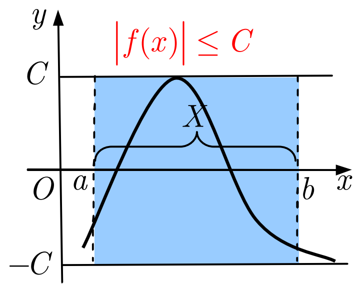


Рис. 2.16. Графік функції, обмеженої на множині X

Означення 2.6 (найменшого і найбільшого значень функції). Точну верхню межу M значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції називають *найбільшим значенням функції* на цьому відрізку і позначають

$$\max_{[a;b]} f(x) = \sup_{x\in[a;b]} f(x) = M.$$

Точну нижню межу m значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f називають *найменшим значенням функції* на цьому відрізку і позначають

$$\min_{[a;b]} f(x) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = m.$$

2.4. Обернена функція

Розгляньмо числову функцію

$$y = f(x), x \in D(f),$$

яка взаємно однозначно відображує множину $D(f)$ на множину $E(f)$.

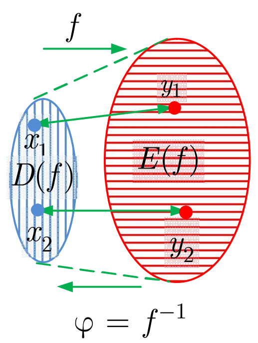


Рис. 2.17. Взаємно обернені функції

Оскільки взаємно однозначна функція кожному елементу $y \in E(f)$ ставить у відповідність єдиний елемент $x \in D(f)$, то на множині $E(f)$ означено функцію

$$\varphi = f^{-1},$$

з областю означення $E(f)$ і множиною значень $D(f)$, *обернену до функції* f. У цьому разі пишуть $x = \varphi(y)$ або $x = f^{-1}(y)$. Отже,

$$y = f^{-1}(x) : f(y) = x.$$

Якщо функція φ обернена до функції f, то функція f буде оберненою до функції φ. Про функції f та φ кажуть, що вони *взаємно обернені*.

Функція $y = f(x)$ має обернену тоді й лише тоді, коли функція f задає взаємно однозначну відповідність між множинами D та E.

Функцію $y = f(x)$ і обернену до неї функцію $x = \varphi(y)$ зображує та сама крива. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ симетричні щодо прямої $y = x$.

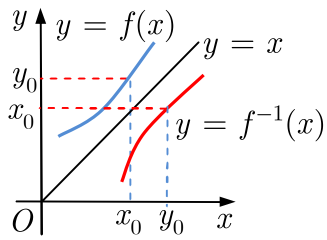


Рис. 2.18. Графіки взаємно обернених функцій

Функцію, до якої існує обернена функція, називають *оборотною*.

Теорема 2.1 (достатня умова оборотності). Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на множині X, то існує обернена до неї функція $x = f^{-1}(y)$, яка також зростає (спадає).

2.5. Складена функція

Нехай на множині D означено числову функцію $u = g(x)$ із множиною значень E і на множині E задано функцію $y = f(u)$ із множиною значень F. Тоді функція g відображує елементи $x \in D$ в елементи $u \in E$, а функція f відображує елементи $u \in E$ в елементи $y \in F$:

$$x \xrightarrow{g} u \xrightarrow{f} y.$$

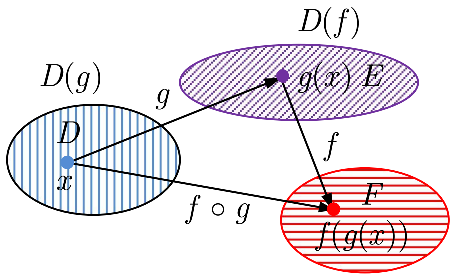


Рис. 2.19. Схема відображень для складеної функції $y = f(g(x))$

Кожному значенню $x \in D$ зіставлено (з допомогою проміжної змінної $u \in E$) одне, цілком певне, значення $y \in F$.

У цьому разі y називають *складеною функцією* аргументу x і пишуть

$$y = f(g(x)), x \in D.$$

Складену функцію $y = f(g(x))$ можна записати як ланцюжок рівностей:

$$y = f(u), u = g(x).$$

2.6. Елементарні функції

Тригонометричні функції

Нагадаймо, що *тригонометричними* функціями називають:

1) *синус* $y = \sin x, D(f) = \mathbb{R}$;

2) *косинус* $y = \cos x, D(f) = \mathbb{R}$;

3) *тангенс* $y = \operatorname{tg} x, D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \middle| x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

4) *котангенс* $y = \operatorname{ctg} x, D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \middle| x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Обернені тригонометричні функції

Оберненими тригонометричними функціями називають:

1) *арксинус* $y = \arcsin x, D(f) = [-1;1]$;
2) *арккосинус* $y = \arccos x, D(f) = [-1;1]$;
3) *арктангенс* $y = \operatorname{arctg} x, D(f) = \mathbb{R}$;
4) *арккотангенс* $y = \operatorname{arcctg} x, D(f) = \mathbb{R}$.

Гіперболічні функції

Гіперболічними функціями називають:

1) *гіперболічний синус*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

2) *гіперболічний косинус*

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

3) *гіперболічний тангенс*

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, D(f) = \mathbb{R};$$

4) *гіперболічний котангенс*

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

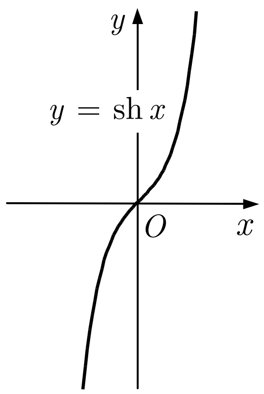


Рис. 2.20. Графік гіперболічного синуса

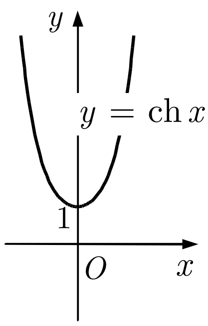


Рис. 2.21. Графік гіперболічного косинуса

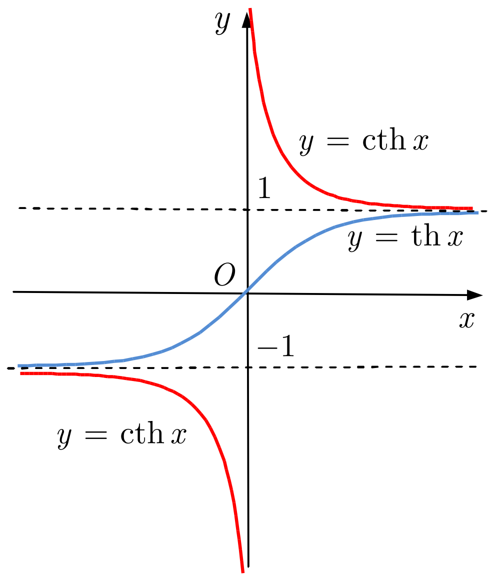


Рис. 2.22. Графіки гіперболічних тангенса і котангенса

Співвідношення для гіперболічних функцій схожі на співвідношення для тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

2) $\begin{cases} \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \end{cases}$

Основні елементарні функції

Основними елементарними функціями називають:

1) *сталу* функцію $f(x) = C, D(f) = \mathbb{R}$;

2) *степеневу* функцію $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, D(f) = (0;+\infty)$;

3) *показникову* функцію $y = a^x, a > 0, a \neq 1, D(f) = \mathbb{R}$;

4) *логарифмічну* функцію $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, D(f) = (0;+\infty)$;

5) тригонометричні функції;

6) обернені тригонометричні функції.

Всі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також їхні суперпозиції, утворюють *клас елементарних функцій.*

ЛЕКЦІЯ 3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

3.1. Границя функції в точці

Точкою дотикання множини X називають точку x_0, будь-який окіл якої містить точки множини X, відмінні від точки x_0.

Приміром, точками дотикання інтервалу $(a;b)$ будуть його внутрішні точки і точки a та b. Єдиною точкою дотикання множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ є $+\infty$.

Розгляньмо функцію $f(x), x \in X$, і точку x_0, яка є точкою дотикання множини X.

Означення 3.1 **(границі функції мовою околів, за Коші).** Точку A називають *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0, якщо для будь-якого ε-околу $U_\varepsilon(A)$ точки A існує проколений δ-окіл $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, такий, що для всіх

$$x \in X \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

і позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Розпишімо окремі випадки сформульованого означення.

1. x_0, A — числа. Число A називають *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X :$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

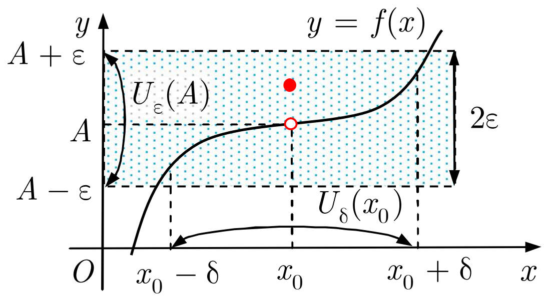


Рис. 3.1. Скінченна границя функції $f(x)$ коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

2. x_0 — число, $A = \infty$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X:$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

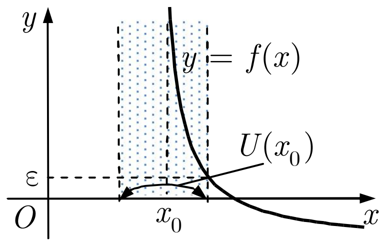


Рис. 3.2. Нескінченна границя функції $f(x)$, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ (за Коші)

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то графік функції має в точці x_0 *вертикальну асимптоту* $x = x_0$.

3. $A = f(x_0)$. Якщо функція $f(x), x \in X$, означена в точці $x_0 \in X$ разом з деяким її околом і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцію $f(x)$ називають *неперервною в точці* x_0.

> Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області означення.

Точка x_0 може як належати області означення функції f так і не належати. Оскільки під час знаходження границі точку x_0 виключають з розгляду, то існування границі функції в точці є *локальною* властивістю функції.

> **Теорема 3.1 (про функції, що мають скінченну границю).**
>
> **1** (*єдиність границі*). Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то ця границя єдина.
>
> **2** (*обмеженість*). Якщо f має скінченну границю в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, у якому функція f обмежена.
>
> **3** (*збереження знаку*). Якщо функція f має скінченну додатну (від'ємну) границю A в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, в якому функція f додатна (від'ємна).
>
> **4** (*збереження нерівності*). Якщо в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \le f_2(x)$ і існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, то
>
> $$\lim_{x\to x_0} f_1(x) \le \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$
>
> **5** (*теорема про проміжну функцію, про «двох вартових»*). Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A \in \mathbb{R}$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

3.2. Границя числової послідовності

Розгляньмо важливий випадок скінченної границі $A \in \mathbb{R}$ функції $f(x)$ у точці $x_0 = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X: \quad x > \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

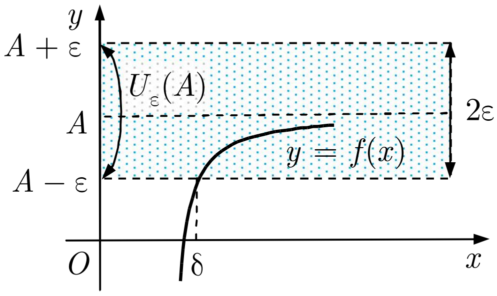


Рис. 3.3. Скінченна границя функції $f(x)$ коли $x \to +\infty$

Якщо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$, то графік функції має *горизонтальну асимптоту* $y = A$.

Оскільки єдиною точкою дотикання множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ є $+\infty$, то границю послідовності можна розглядати, коли $n \to +\infty$.

Означення 3.2 **(границі послідовності).** Точку a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ такий, що всі члени послідовності з номерами $n > N_\varepsilon$ потраплять в ε-окіл точки a і пишуть

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a, \text{ коли } n \to \infty.$$

Числову послідовність, що має скінченну границю a, називають *збіжною до числа* a і *розбіжною*, якщо вона не має скінченної границі.

Послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a, якщо поза межами будь-якої симетричної горизонтальної смуги завширшки 2ε міститься лише скінченна кількість точок послідовності.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon: \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left| x_n - a \right| < \varepsilon.$$

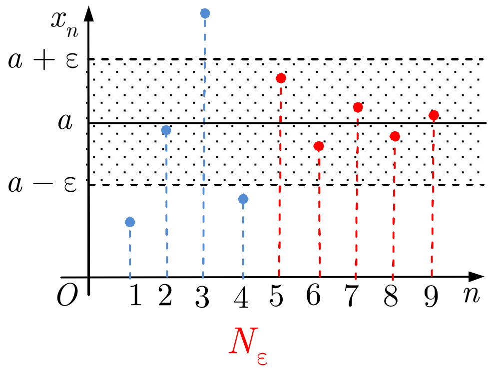


Рис. 3.4. Геометричний зміст збіжної послідовності

Границя послідовності не залежить від відкидання скінченної кількості членів послідовності або їх змінювання.

Означення 3.3 **(границі функції мовою послідовностей, за Гейне).** Точку $A \in \mathbb{R}$ називають *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* $x_0 \in \mathbb{R}$, якщо для будь-якої послідовності точок $\{x_n\}$, збіжної до x_0 $(x_n \neq x_0)$ відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до точки A, тобто

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Важливим інструментом дослідження послідовності на збіжність є

Теорема 3.2 **(ознака Веєрштраса).** Якщо монотонна послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то вона збігається. При цьому, якщо $\{x_n\}$ неспадна (незростаюча) послідовність, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}\right).$$

3.3. Однобічні границі

В означенні границі функції $f(x)$ вважають, що точка x прямує до точки x_0 довільним чином: як зліва, так і справа (тобто залишаючись як меншою, так і більшою, ніж x_0). Однак, значення границі може залежати від того, з якого боку (зліва чи справа) x прямує до x_0.

Означення 3.4 **(границі функції зліва і справа).** Точку A називають *границею* функції $f(x), x \in X$, у точці x_0 *зліва* (*лівою границею* в точці x_0) якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$, які справджують нерівність

$$-\delta < x - x_0 < 0,$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Точку A називають *границею* функції $f(x), x \in X$, у точці x_0 *справа* (*правою границею* в точці x_0) якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$, які справджують нерівність

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Границю зліва в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x).$$

Границю справа в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x).$$

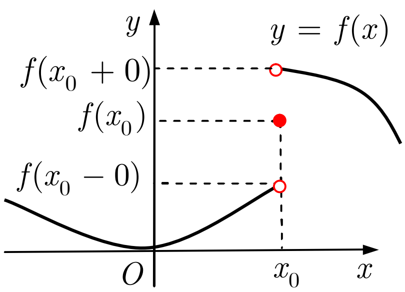


Рис. 3.5. Однобічні границі функції $y = f(x)$ у точці x_0

Границю, коли $x \to -\infty$, можна вважати границею справа, а границю, коли $x \to +\infty$,— границею зліва.

Теорема 3.3 **(критерій існування скінченної границі).** Функція $f(x), x \in X$, має скінченну границю A в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні числу A границі зліва і справа:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

3.4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

Означення 3.5. **(нескінченно малої і нескінченно великої функції).** Функцію f називають *нескінченно малою* (*н. м. ф.*), коли $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

і *нескінченно великою* (*н. в. ф.*), якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$ (або $-\infty$, або $+\infty$).

З означень границі функції в точці випливає, що функція $\alpha(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < \left|x - a\right| < \delta \Rightarrow \left|\alpha(x)\right| < \varepsilon.$$

Будь-яка н. в. ф. в околі точки x_0 є необмеженою в околі цієї точки. Обернене твердження не правдиве.

Теорема 3.4 **(про властивості нескінчено малих функцій).**

1. Алгебрична сума скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією.

2. Добуток нескінченно малої функції, коли $x \to x_0$, на обмежену в околі точки x_0 функцію є нескінченно малою функцією.

3. Добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією.

4. Частка від ділення н. м. ф. на функцію, що має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою функцією.

Теорема 3.5 **(про зв'язок н. м. ф. і н. в. ф.).** Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією в точці x_0, і навпаки, обернена до нескінченно великої функції є нескінченно малою функцією.

Теорема 3.6 **(про зв'язок функції, її границі і н. м. ф.).** Число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 тоді й лише тоді, коли функцію можна зобразити у вигляді

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$.

3.5. Знаходження границь функцій

Теорема 3.7 **(про арифметичні дії з функціями, що мають скінченні границі).** Якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R},$$

то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = CA$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = A^B, A > 0$.

«Визначеності» і невизначеності

У теоремах 3.4, 3.5 і 3.7 йдеться про ситуації, в яких можна без будь-яких перетворень, відразу, писати значення границь.

Твердження цих теорем можна узагальнити, поповнюючи перелік відповідних ситуацій, «визначеностей».

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \infty; \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \infty \ (A \neq 0).$$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = +\infty; \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty.$$

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0; \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty.$$

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

5. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0, B > 0, \ \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty, B < 0;$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{f(x)} = 1, B > 0.$$

6. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0, 0 \le A < 1, \ \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty, A > 1;$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x)^{f(x)} = 0, A < 0; \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)^{f(x)} = +\infty, A > 0;$$

7. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty, 0 \le A < 1,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0, A > 1.$$

Але 3.4, 3.5 і 3.7 і їх узагальнення не описують усі можливі випадки границь.

Приміром, частка н. м. ф. може: бути н. м. ф., бути н. в. ф., мати скінченну границю, не мати границі.

Якщо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$, то вираз $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ називають *невизначеністю* типу $\dfrac{0}{0}$.

Розкрити невизначеність — означає знайти границю відповідного виразу, якщо вона існує.

Використовуючи символіку: A, B — функції, що мають скінченні границі, 1 — функція, що прямує до 1, 0 — н. м. ф., ∞ — н. в. ф., «визначеності» і невизначеності можна звести до таблиці:

Визначеності	Невизначеності
$\frac{A}{B}\ (B \neq 0),\ \frac{A}{0}\ (A \neq 0)$	$\frac{0}{0}$
$\frac{A}{\infty},\ \frac{\infty}{A}$	$\frac{\infty}{\infty}$
$A \cdot B, A \cdot \infty\ (A \neq 0), \infty \cdot \infty$	$0 \cdot \infty$
$A \pm B, A \pm \infty,$ $(+\infty) + (+\infty), (-\infty) + (-\infty)$	$\infty - \infty$
$A^B\ \ (A > 0), A^0\ (A > 0), 0^B\ (B \neq 0)$	0^0
$A^{\pm\infty}\ (A \geq 0, A \neq 1)$	1^∞
$\infty^A\ (A \neq 0)$	∞^0

Правдиве правило розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

ЛЕКЦІЯ 4. ЕКВІВАЛЕНТНІ НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ

4.1. Порівняння нескінченно малих функцій

Нескінченно малі та нескінченно великі функції порівнюють між собою досліджуючи їх частку.

Означення 4.1. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$. Тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають *н. м. ф. вищого порядку мализни, ніж* $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, і позначають

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), x \to x_0,$$

(символ o читають як «о-мале»);

2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \in \mathbb{R}\ (A \neq 0)$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *н. м. ф. однакового порядку мализни*, коли $x \to x_0$ і позначають

$$\alpha(x) \asymp \beta(x), x \to x_0;$$

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними н. м. ф.*, коли $x \to x_0$ і позначають

$$\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0;$$

4) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *непорівнянними н. м. ф.*

Означення 4.2 **(порядку мализни).** Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$. Якщо існує таке $k > 0$, що

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = A \in \mathbb{R}\ \ (A \neq 0),$$

то $\alpha(x)$ називають функцією k-*го порядку мализни щодо* $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, і пишуть

$$\alpha(x) \sim A(\beta(x))^k, x \to x_0.$$

Функцію $A(\beta(x))^k$ називають *головною частиною функції* $\alpha(x)$ щодо $\beta(x)$, коли $x \to x_0$.

Для нескінченно великих функцій говорять про *порядок росту*.

Теорема 4.1 (про властивості еквівалентних функцій).
1. Границя добутку (відношення) двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну з них замінити на еквівалентну їй н. м. ф.
2. Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж кожна з них.
3. Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку мализни (головній частині всієї суми).
4. Сума скінченної кількості нескінченно великих функцій різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку росту (головній частині всієї суми).

Заміну суми н. м. ф. (н. в. ф.) її головною частиною називають *відкиданням н. м. ф. вищих порядків мализни* (*н. в. ф. нижчих порядків росту*).

Приміром, для функції $f(x) = ax^m + bx^n, m < n$.

$$f(x) \sim ax^m, x \to 0;$$
$$f(x) \sim bx^n, x \to \infty.$$

4.2. Перша визначна границя

Якщо кут x виражений у радіанах, то правдива *перша визначна границя*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

► Спершу доведімо нерівність

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Припустімо, що кут $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. З рисунку 4.1 бачимо, що

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сек.}OAB} < S_{\Delta OAC}.$$

Оскільки розглянуті площі рівні відповідно

$$\frac{1}{2}\sin x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

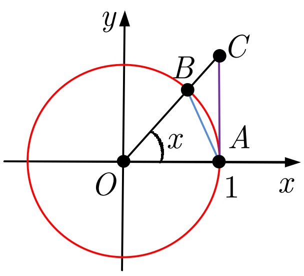


Рис. 4.1. Перша визначна границя

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Розділивши всі члени цієї рівності на $\sin x > 0$, дістанемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ця нерівність буде правдивою і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ завдяки парності функцій $y = \cos x$ та $y = \frac{\sin x}{x}$.

З нерівності $\left|\sin x\right| < \left|x\right|$ випливає, що

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

Звідки

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \lim_{x \to 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Оскільки $f_1(x) = \cos x \to 1$ та $f_2(x) = 1 \to 1$, коли $x \to 0$, то за теоремою про проміжну функцію одержимо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \blacktriangleleft$$

Наслідками першої визначної границі є такі границі:

1) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;}$ 2) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};}$

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;}$ 4) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.}$

4.3. Друга визначна границя

Розгляньмо послідовність із загальним членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}:$$

Використовуючи біноміальну формулу Ньютона, можна показати, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає і обмежена зверху:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, n = 1,2,\ldots.$$

За ознакою Веєрштраса це означає, що існує скінченна границя послідовності $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, яку позначають

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Число e ірраціональне,

$$e \approx 2{,}7182818\ldots.$$

Границя, що означує число e, є прикладом невизначеності вигляду 1^∞.

З певних міркувань число e зручно вибрати як основу для системи логарифмів. Логарифм дійсного числа $x > 0$ за основою e називають *натуральним* і позначають

$$\boxed{\ln x = \log_e x.}$$

Узагальненням означення числа e є *друга визначна границя*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Доведення її базується на нерівності

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, x \ge 1,$$

де $n = [x]$ — ціла частина числа x, і теоремі про двох вартових.

Покладаючи $y = \frac{1}{x}$ у другій визначній границі, дістанемо

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.}$$

Наслідками другої визначної границі є такі границі:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a};}$

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;}$

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a;}$

4) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1;}$

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.}$

4.4. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Із визначних границь і наслідків з них випливає така таблиця еквівалентностей:

1. $\sin x \sim x, x \to 0.$	**6.** $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}, x \to 0.$
2. $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0.$	**7.** $\ln(1+x) \sim x, x \to 0.$
3. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, x \to 0.$	**8.** $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0.$
4. $\arcsin x \sim x, x \to 0.$	**9.** $e^x - 1 \sim x, x \to 0.$
5. $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0.$	**10.** $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, x \to 0.$

Н. м. ф., що стоять у правих частинах виписаних еквівалентностей, є головними частинами функцій, що стоять у лівих частинах, коли $x \to 0$.

За допомогою еквівалентностей можна одержати формулу розкриття однієї з степенево-показникових невизначеностей:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}.}$$

Зауваження 4.1.

1. З таблиці еквівалентностей і теореми 4.1 випливають *асимптотичні рівності*. Приміром,

$$\sin x = x + o(x), x \to 0,$$

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0.$$

2. Формули таблиці еквівалентностей залишаться правильними, якщо x замінити на будь-яку н. м. ф. $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$. Приміром,

$$\sin(5(x-1)^2) \sim 5(x-1)^2, x \to 1.$$

3. У разі добутку та частки під знаком границі можна замінювати н. м. ф. на еквівалентну їй н. м. ф.

4. У разі різниці (суми) еквівалентних нескінченно малих функцій під знаком границі **не можна** міняти н. м. ф на еквівалентні. У цьому разі перетворюють різницю (суму) на добуток (частку) або використовують асимптотичні рівності.

ЛЕКЦІЯ 5. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

5.1. Неперервність функції в точці

Неперервні функції є основним класом функцій, які розглядають у математичному аналізі.[1]

Нехай функція $f(x), x \in X$, означена в деякому околі точки $x_0 \in X$.

Означення 5.1 (функції, неперервної в точці). Функцію $f(x), x \in X$, називають *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції $f(x)$, коли $x \to x_0$, і ця границя дорівнює значенню функції в точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Отже, функція $f(x), x \in X$, є неперервною в точці x_0, якщо виконано умови:

1) вона означена в точці x_0;

2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то останню рівність можна переписати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

З означення неперервної в точці x_0 функції $y = f(x)$ випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Позначмо *приріст аргументу* в точці x_0 як

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$

і відповідний йому *приріст функції* $f(x)$ як

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Тоді умову неперервності можна переписати як

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.}$$

[1] Уявлення про неперервну функцію як функцію, графік якої можна накреслити не відриваючи олівця від паперу, є лише початковим уявленням, що потребує уточнення.

Функція $f(x), x \in X$, є *неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Теорема 5.1 **(про властивості функцій неперервних у точці).**
1. Функція, неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки.
2. Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл $U(x_0)$, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$.
3. Якщо для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ і функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.
4. Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\dfrac{f}{g}$ (у разі, якщо $g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0.
5 (*неперервність складеної функції*). Нехай функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних у точці, випливають з означення неперервності і відповідних властивостей границі функції в точці.

На властивості 5 ґрунтується метод заміни змінної для границь неперервних функцій:

якщо функція $y = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, то

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y), \quad y = g(x).}$$

Можна довести, що правдива

Теорема 5.2 **(про неперервність елементарної функції).** Елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.

5.2. Точки розриву функції

Точку, в якій функція f неперервна, називають *точкою неперервності* функції f.

Теорема 5.3 (критерій неперервності функції в точці). Функція $f(x), x \in X$, неперервна в точці $x_0 \in X$ тоді й лише тоді, коли існують $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ і

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Розгляньмо функцію $f(x), x \in X$, означену в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 5.2 (точки розриву). Точку x_0 називають *точкою розриву* функції f, якщо: функція f або не означена в точці x_0, або f означена в цій точці, але не є в ній неперервною.

Розрив функції в точці x_0 геометрично означає «розрив» графіка функції в цій точці.

Точки розриву класифікують залежно від порушення умови неперервності функції.

Означення 5.3 (типів точок розриву). Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні однобічні границі функції $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$, то її називають *точкою розриву 1-го роду* (*точкою скінченного розриву*), а величину

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

називають *стрибком функції*.

У разі, якщо в точці розриву x_0 функція f не має хоча б однієї однобічної границі або має нескінченну границю, то точку x_0 називають *точкою розриву 2-го роду.*

Можлива детальніша класифікація розривів.

1. Якщо стрибок функції в точці розриву 1-го роду x_0 дорівнює нулеві, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву*.

Усувний розрив можна «усунути», змінюючи значення функції в точці x_0 (доозначуючи функцію f у точці x_0), тобто утворюючи нову функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & x = x_0, \end{cases}$$

що збігається з функцією f скрізь, окрім точки x_0. Тоді функція g буде вже неперервною в цій точці.

2. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 існують обидві однобічні границі, але хоча б одна з них нескінченна, то точку x_0 називають *точкою нескінченного розриву* (*полюсом*). У таких точках графік функції має вертикальну асимптоту $x = x_0$.

3. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 не існує хоча б одна з однобічних границь, то точку x_0 називають *точкою істотного розриву*.

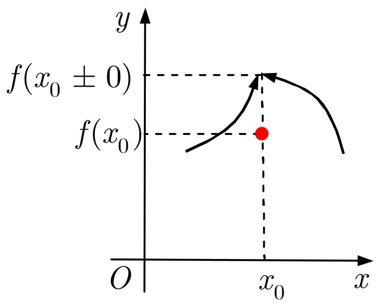


Рис. 5.1. Точка розриву 1-го роду (усувного)

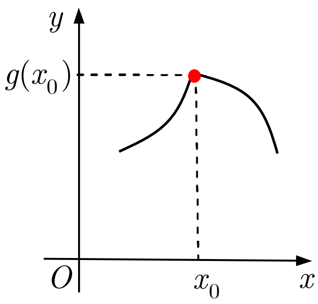


Рис. 5.2. Усунення розриву

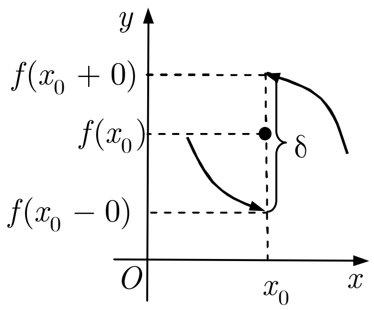


Рис. 5.3. Точка розриву 1-го роду (неусувного)

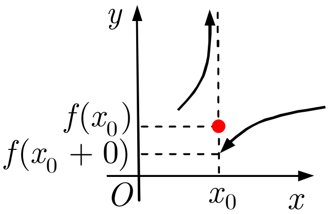


Рис. 5.4. Точка розриву 2-го роду (нескінченного)

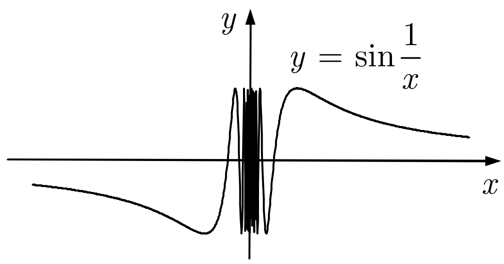


Рис. 5.5. Точка розриву 2-го роду (істотного)

Приміром, для функції

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

точка $x_0=0$ є точкою розриву. Обчислімо однобічні границі в точці $x_0=0$:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\operatorname{sgn} x=\lim_{x\to+0}1=1;$$
$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\operatorname{sgn} x=\lim_{x\to+0}(-1)=-1.$$

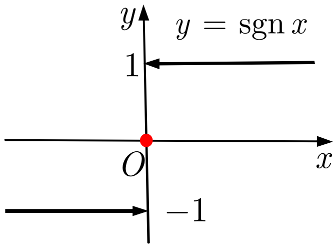


Рис. 5.6. Графік функції $y=\operatorname{sgn} x$

Оскільки в точці $x_0=0$ існують скінченні, не рівні між собою, однобічні границі, то це точка розриву 1-го роду, неусувного, із стрибком

$$\delta=f(+0)-f(-0)=1-(-1)=2.$$

5.3. Теореми Веєрштраса

Функцію f у точці x_0 називають *неперервною справа*, якщо $f(x_0+0)=f(x_0)$, і *неперервною зліва*, якщо $f(x_0-0)=f(x_0)$.

Означення 5.4 (функції неперервної на відрізку). Функцію f називають *неперервною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.
Функцію f називають *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$ і в точці a неперервна справа, а в точці b — неперервна зліва.
Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.

Теорема 5.4 (про обмеженість функції, Веєрштраса). Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, обмежена на ньому.

Теорема 5.5 (про найбільше та найменше значення, Веєрштраса). Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значення.

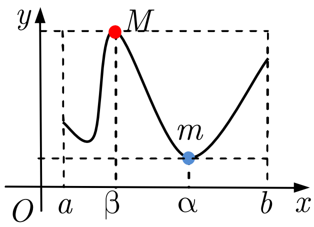


Рис. 5.7. Теореми Веєрштраса

Досягати свої найбільше та найменше значення на відрізку $[a;b]$ функція f може і в кількох точках.

5.4. Теореми Больцано — Коші

Теорема 5.6 **(про нулі функції, Больцано — Коші).** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ і $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої

$$f(c) = 0.$$

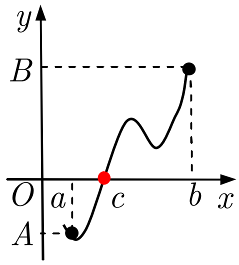


Рис. 5.8. Теорема про нулі функції

Теорема 5.7 **(про проміжні значення, Больцано — Коші).** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b], f(a) = A, f(b) = B$, і C — будь-яке число, що лежить між A та B, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка c, в якій

$$f(c) = C.$$

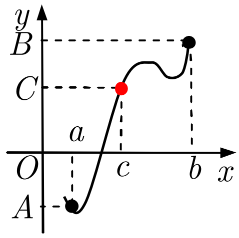


Рис. 5.9. Теорема про проміжні значення функції

Теорема 5.8 **(про неперервність оберненої функції).** Якщо функція f строго монотонна і неперервна на відрізку $[a;b]$, то обернена функція f^{-1} неперервна на $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

У цьому розділі означено:

— *похідну функції;*

— *диференційовність функції в точці;*

— *диференціал функції;*

— *дотичну та нормаль до кривої;*

— *похідну і диференціал* n*-го порядку;*

— *формулу Тейлора (многочлен Тейлора, залишковий член формули Тейлора);*

— *локальні екстремуми (мінімум і максимум) функції;*

— *опуклість донизу і догори графіка функції;*

— *точку перегину;*

— *асимптоти графіка функції (похилі і вертикальні).*

У цьому розділі розглянуто:

— *критерій існування похідної;*

— *критерій і необхідну умову диференційовності;*

— *геометричний зміст похідної і диференціала;*

— *правила й основні формули диференціювання;*

— *теореми про середнє диференціального числення;*

— *правило Бернуллі — Лопіталя;*

— *теорему Тейлора;*

— *формули Тейлора — Маклорена для деяких елементарних функцій;*

— *достатню умову монотонності функції;*

— *умови (необхідна, достатні) існування локального екстремуму;*

— *достатню умову опуклості й угнутості функції;*

— *умови існування (необхідну, достатню) точки перегину;*

— *критерій існування похилої асимптоти.*

У цьому розділі обґрунтовано методи:

— *знаходження похідних і диференціалів будь-якого порядку явно, неявно і параметрично заданих функцій;*

— *знаходження рівняння дотичної і нормалі до кривої;*

— *знаходження похідної* n*-го порядку від добутку функцій (формула Лейбніца);*

— *розкриття невизначеностей за правилом Бернуллі — Лопіталя і формулою Тейлора;*

— *наближені обчислення за Тейлоровою формулою;*

— *дослідження функцій на монотонність і локальні екстремуми;*

— *дослідження графіків функцій на опуклість і точки перегину;*

— *знаходження похилих і вертикальних асимптот графіка функції;*

— *знаходження глобальних екстремумів;*

— *повного дослідження функцій і побудови їх графіків.*

ЛЕКЦІЯ 6. ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

6.1. Похідна функції

Розгляньмо функцію $f(x)$, означену в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0. Надамо фіксованому значенню аргументу x_0 приріст Δx такий, що $x = x_0 + \Delta x$ належить околу $U(x_0)$.

Означення 6.1 (похідної функції в точці). *Похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 називають границю відношення приросту функції

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної використовують ще позначення:

$$y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

З означення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 випливає, що

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо значенню аргументу x функції $f(x)$ відповідає певне значення $f'(x)$, то означено функцію

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Кажуть, що функція f «*породжує*» функцію f', а функція f' «*походить*» від функції f.

Якщо для деякого значення x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty \text{ (або } -\infty \text{ чи } +\infty),$$

то кажуть, що в точці x_0 існує *нескінченна похідна*.

Однобічні похідні

Означення 6.2 (однобічних похідних). *Лівою (правою) похідною функції* $f(x)$ *у точці* x_0 називають

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad\left(\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

і позначають $f'_-(x_0)$ $(f'_+(x_0))$.

Праву і ліву похідні функції в точці називають *однобічними похідними* функції в цій точці.

Користуючись поняттям однобічних границь функції, дістаємо:

Теорема 6.1 (критерій існування скінченної похідної). У точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)$ тоді й лише тоді, коли існують скінченні права та ліва похідні і ці похідні рівні між собою

$$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0).$$

Знаходження похідної функції в точці

Дію відшукання похідної функції f називають *диференціюванням*. Щоб знайти похідну від заданої функції $f(x), x\in X$, за означенням, треба:

1) надаючи фіксованому аргументові $x\in D(f)$ приріст Δx, обчислити значення функції $f(x+\Delta x)$;

2) знайти відповідний приріст функції

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x);$$

3) утворити відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

4) знайти границю цього відношення, коли $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x).$$

Приміром,

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sim\dfrac{\Delta x}{2},\\ \Delta x\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

6.2. Диференційовність функції

Розгляньмо функцію $f(x)$, яка означена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення 6.3 **(диференційовності функції в точці).** Функцію $f(x)$ називають *диференційовною в точці* x_0, якщо її приріст у цій точці

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

можна записати як

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \Delta x \to 0,$$

де A — деяке дійсне число, $\alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0$.

Теорема 6.2 **(критерій диференційовності).** Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.

Теорема 6.3. **(необхідна умова диференційовності).** Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.

Зворотне твердження неправдиве: з неперервності функції f у деякій точці не випливає диференційовність її в цій точці.

Приміром, функція $y = |x|$ непрерервна в точці $x_0 = 0$, але не має похідної в цій точці, а, отже, не є диференційовною.

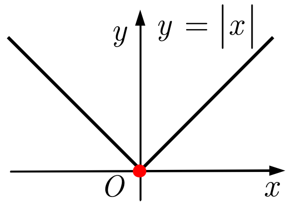


Рис. 6.1. Приклад неперервної недиференційовної функції в точці $x_0 = 0$

6.3. Диференціал функції

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто має скінченну похідну $f'(x_0)$ і

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \Delta x \to 0.$$

Означення 6.4 **(диференціала функції в точці).** *Диференціалом функції* $f(x)$ *у точці* x_0 називають головну, лінійну щодо Δx, частину приросту диференційовної функції $f(x)$ і позначають

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Знайдімо, приміром, диференціал функції $f(x) = x$.

Оскільки

$$f'(x) = x' = 1,$$

то

$$df = dx = \Delta x,$$

тобто диференціал незалежної змінної дорівнює приростові цієї змінної і формулу для обчислення диференціала можна ще записати так:

$$\boxed{df = f'(x)dx.}$$

З неї випливає рівність

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Отже, позначення $\dfrac{df}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів df та dx.

6.4. Геометричний зміст похідної і диференціала

Дотична до кривої

Розгляньмо задачу будування дотичної до довільної плоскої кривої. Нехай $f(x)$ неперервна функція, означена в деякому околі точки x_0. Розгляньмо дві точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ графіка цієї функції.

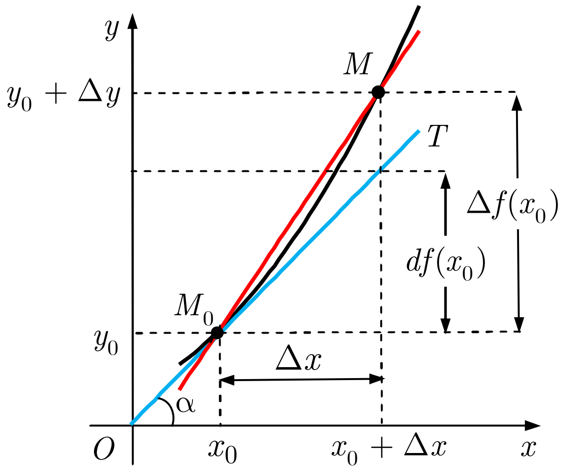


Рис. 6.2. Дотична до кривої

Через них проходить єдина пряма — січна

$$M_0M : \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Кутовий коефіцієнт січної

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо точка M рухається вздовж кривої до точки M_0, то січна повертається навколо точки M_0 і прямує до деякого граничного положення M_0T, яке називають *дотичною до кривої в точці* M_0.

Січна прямуватиме до граничного положення, відмінного від вертикальної прямої, тоді й лише тоді, коли існує скінченна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

яка є *кутовим коефіцієнтом дотичної* до графіка функції $f(x)$ у точці x_0.

У разі скінченної похідної $f'(x_0)$ дотична до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має рівняння

$$\boxed{y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).}$$

З рівняння дотичної, позначаючи ординату дотичної через $y_{\text{дот}}$, дістаємо рівності:

$$y_{\text{дот}} - y_0 = f'(x_0)\Delta x = dy(x_0).$$

1. Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α — кут нахилу дотичної до осі Ox.

2. Диференціал функції дорівнює приростові ординати дотичної.

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину називають кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.

Перетворюючи рівняння січної до вигляду

$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

і спрямовуючи Δx до нуля, дістанемо, що нескінченній похідній відповідає вертикальна дотична з рівнянням $x = x_0$.

Якщо в точці x_0 існують однобічні нескінченні похідні однакових або протилежних знаків, то в цій точці графік функції має вертикальну дотичну з рівнянням

$$\boxed{x = x_0.}$$

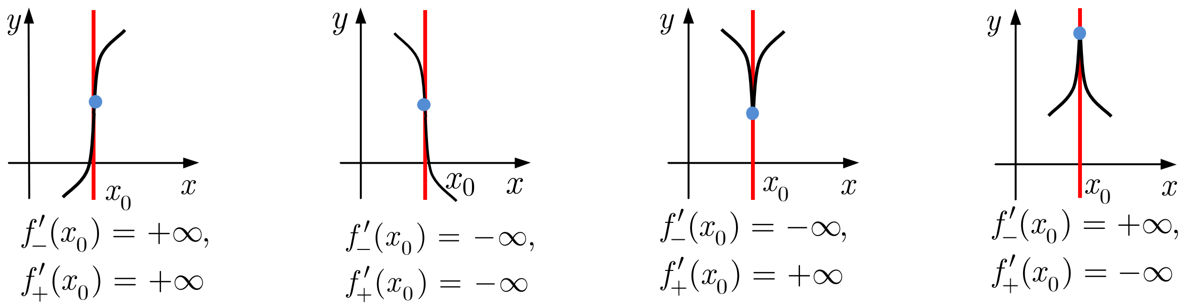


Рис. 6.3. Вертикальні дотичні до графіків функції

Якщо в точці x_0 не існує скінченної чи нескінченної похідної, то точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою злому графіка функції і в такій точці не можна провести дотичну.

Рис. 6.4. До графіка функції у точці зламу не можна провести дотичну

Нормаль до кривої

Нормаллю до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; y_0)$ називають пряму, що перпендикулярна до дотичної в цій точці.

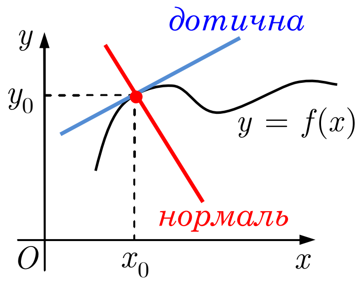


Рис. 6.5. Нормаль до кривої

Оскільки кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані співвідношенням

$$k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

то

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

за умови, що $k_{\text{дот}} = f'(x_0) \neq 0$.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ є вертикальною прямою $x = x_0$, то нормаль до графіка є горизонтальною прямою

$$\boxed{y = y_0;}$$

а у разі горизонтальної дотичної $y = y_0$ нормаль має рівняння

$$\boxed{x = x_0.}$$

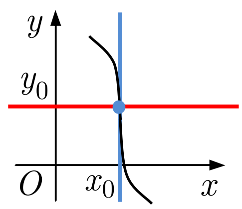


Рис. 6.6. Горизонтальна нормаль

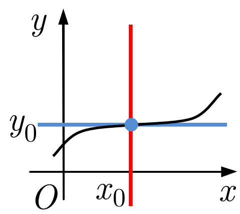


Рис. 6.7. Вертикальна нормаль

ЛЕКЦІЯ 7. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

7.1. Правила диференціювання

Теорема 7.1 (про диференціювання суми, добутку і частки функцій). Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовні в точці x, то в цій точці диференційовні їхні сума $u(x)+v(x)$, добуток $u(x)v(x)$ та частка $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (за умови, що $v(x)\neq 0$), причому

$$(u+v)' = u' + v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0).$$

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

Диференціювання складеної функції

Нехай функція $u=\varphi(x)$ задана в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0, а функція $y=f(u)$ — в деякому околі $V(u_0)$ точки $u_0=\varphi(x_0)$, причому $f(U(x_0))\subset V(u_0)$ і, отже, в околі точки x_0 визначено складену функцію

$$y = f(\varphi(x)).$$

Теорема 7.2 (про похідну складеної функції). Якщо функція $u=\varphi(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y=f(u)$ диференційовна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ також диференційовна в точці x_0 і

$$y'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0), u = \varphi(x).$$

У разі диференційовності функції $u=\varphi(x)$ в околі точки x_0, а функції $y=f(u)$ в околі точки $u_0=\varphi(x_0)$, правдива формула для похідної складеної функції в околі точки x_0:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \Leftrightarrow y'_x = y'_u u'_x.}$$

Логарифмічне диференціювання

Правило диференціювання складеної функції дозволяє значно спростити задачу знаходження її похідної.

Розгляньмо функцію $y = f(x) > 0$, утворімо складену функцію

$$\ln y = \ln f(x)$$

і обчислімо її похідну

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

Звідси випливає правило логарифмічного диференціювання:

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln f(x))'.}$$

Похідну від натурального логарифму функції називають *логарифмічною похідною* цієї функції.

Логарифмічне диференціювання спрощує знаходження похідної:

1) степенево-показникових функцій $(u(x))^{v(x)}$;

2) функції, що має велику кількість співмножників.

Приміром,

$$((\sin x)^x)' = (\sin x)^x(\ln(\sin x)^x)' = (\sin x)^x(x \ln \sin x)' =$$

$$= (\sin x)^x \left(1 \cdot \ln \sin x + x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x}\right) =$$

$$= (\sin x)^x \left(\ln \sin x + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x \left(\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x\right).$$

Диференціювання оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ має обернену функцію $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

> **Теорема 7.3** **(про похідну оберненої функції).** Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) \neq 0$, то обернена функція $x = \varphi(y)$ також має у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ похідну, причому
>
> $$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Якщо умови теореми 7.3 виконано в деякому околі точок x_0 та $y_0 = f(x_0)$, то

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} \Leftrightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}.}$$

7.2. Основні формули диференціювання

Нехай $u = u(x), v = v(x)$ — диференційовні функції, C — стала.

Функція	Похідна	Функція	Похідна
C	0	$\arcsin u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$\arccos u$	$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$a^u, 0 < a \neq 1$	$a^u \ln a \cdot u'$	$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
e^u	$e^u u'$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\log_a u$, $0 < a \neq 1$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$	$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	$\operatorname{th} u$	$\dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	$\operatorname{cth} u$	$-\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$
$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$		
$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$		

7.3. Диференціювання неявних функцій

Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0.$$

Якщо в рівнянні $F(x, y) = 0$ під y розуміти функцію $y(x)$, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Диференціюючи цю тотожність за змінною x, вважаючи, що y є функцією x, дістаємо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y.

Розв'язуючи його щодо y', знаходимо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно

$$y'_x = g(x, y).$$

7.4. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Нехай функцію $y(x)$ задано параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Припустімо, що функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні для будь-якого $t \in T$ й $x'(t) \neq 0$. Крім того, вважатимемо, що функція $x = x(t)$ має обернену функцію $t(x)$, яка також диференційовна. Тоді функцію $y = y(x)$, задану параметрично, можна розглядати як складену функцію

$$y = y(t), t = t(x),$$

де t — проміжний аргумент.

Тоді

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отже, похідна функції $y = y(x)$, заданої параметрично теж задається параметрично рівняннями

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}. \end{cases}}$$

Приміром, якщо задано функцію $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi]$, то її похідну задають рівняння

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \dfrac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

ЛЕКЦІЯ 8. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

8.1. Похідні вищих порядків

Розгляньмо диференційовну в кожній точці $x \in X$ функцію $f(x)$.

Тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо *похідною 1-го порядку* (*першою похідною*), також є функцією від x. Якщо функція $f'(x)$ диференційовна, то можна означити її похідну

$$\boxed{(f'(x))' = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},}$$

яку називають похідною 2-го порядку (*другою похідною*) *функції* f.

Означення 8.1. **(похідної n-го порядку).** *Похідною n-го порядку* функції f називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))', n = 1, 2, \ldots,$$
$$f^{(0)}(x) \equiv f(x).$$

Похідні 1-го, 2-го та 3-го порядку позначають штрихами, приміром,

$$f'(x), f''(x), f'''(x).$$

Починаючи з похідної 4-го порядку, похідні позначають цифрами (римськими або арабськими, взятими в дужки). Приміром,

$$f^{(4)}(x) \equiv f^{\mathrm{IV}}(x).$$

Функцію $f(x)$ називають n *разів диференційовною* в точці $x \in X$, якщо в цій точці функція має всі похідні до n-го порядку включно.

Множину всіх функцій f, означених в інтервалі $(a;b)$, які мають неперервну похідну n-го порядку, позначають $C^n(a;b)$.

Функцію f, що має похідні будь-якого порядку в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називають *нескінченно диференційовною* в $(a;b)$ і пишуть $f \in C^\infty(a;b)$.

Приміром, функції $e^x, \sin x, \cos x$ є нескінченно диференційовними на $(-\infty;+\infty)$.

Методом математичної індукції можна одержати формули:

$$\boxed{(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & n \le m, \\ 0, & n > m, \end{cases} n \in \mathbb{N};}$$

$$\boxed{(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, n \in \mathbb{N};}$$

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N};}$$

$$\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N}.}$$

Похідні вищих порядків суми і добутку функцій

Теорема 8.1. (про похідні вищих порядків суми і добутку функцій). Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні n-го порядку в точці x, то функції $u(x) \pm v(x)$ та $u(x)v(x)$ також мають похідні n-го порядку в цій точці, причому

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x);$$

$$(u(x)v(x))^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x),$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$; $u^{(0)}(x) = u, v^{(0)}(x) = v(x), n \in \mathbb{N}$.

Формулу для $(uv)^{(n)}$ називають *Лейбніцовою*. Вона нагадує формулу Ньютонового біному, лише замість степенів стоять порядки похідних.

Наслідок. Якщо функція f є n разів диференційовною в точці x, а $C = \text{const}$, то

$$(Cf(x))^{(n)} = Cf^{(n)}(x), C = \text{const}, n \in \mathbb{N}.$$

Приміром,

$$(x \sin x)^{(2012)} = \left| \begin{matrix} C_{2012}^0 = 1 & u^{(2012)} = \sin(x + 1006\pi) = \sin x & v = x \\ C_{2012}^1 = 2012 & u^{(2011)} = \sin\left(x + \dfrac{2011\pi}{2}\right) = -\cos x & v' = 1 \\ C_{2012}^2 = \ldots & u^{(2010)} = \ldots & v'' = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 1 \cdot x \sin x + 2012 \cdot 1(-\cos x) + 0 + \ldots = x \sin x - 2012 \cos x.$$

8.2. Диференціали вищих порядків

Розгляньмо диференційовну функцію $f(x)$. Її диференціал (диференціал 1-го порядку)

$$df(x) = f'(x)dx$$

залежить від x та dx.

Диференціалом 2-го порядку (*другим диференціалом*) функції $f(x)$ називають диференціал від диференціала 1-го порядку і позначають

$$\boxed{d^2 f = d(df).}$$

Означення 8.2 (диференціала n-го порядку). *Диференціалом n-го порядку* (*n-м диференціалом*) функції $f(x)$ називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку і позначають

$$d^n f = d(d^{n-1} f), n \in \mathbb{N},$$
$$d^0 f = f.$$

Формули обчислення диференціалів вищих порядків

Нехай $f(x)$ є функцією незалежної змінної x, що має диференціали будь-якого порядку. Тоді

$$df(x) = f'(x)dx,$$

де $dx = \Delta x$ є сталим. За означенням

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Отже,

$$\boxed{d^2 f = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.}$$

Так само

$$d^3 f = d(d^2 f) = d(f''(x)(dx)^2) = d(f''(x))(dx)^2 =$$
$$= (f'''(x)dx)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 = f'''(x)dx^3.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\boxed{d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, n \in \mathbb{N}.}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.}$$

Виведімо тепер формули для обчислення диференціалів у разі, коли аргумент x є диференційовною функцією $x = \varphi(t)$ незалежної змінної t. Для одного й того самого Δt, але різних t (а, отже, й різних x) прирости Δx різні, тобто в цьому разі $dx = \Delta x$ не можна вважати незалежним від x, оскільки диференціал функції

$$dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt.$$

Тому

$$df = f_t'dt = f_\varphi' \cdot \varphi'(t)dt = f_x'dx.$$

Отже, перший диференціал функції f визначають однією і тією самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи є функцією іншого аргументу.

Цю властивість диференціала називають *інваріантністю форми першого диференціала*.

Знайдімо диференціал 2-го порядку:

$$d^2f(x) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2x =$$

$$= (f''(x)dx)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Отже, диференціали 2-го (і вище) порядку вже не мають властивості інваріантності.

8.2. Похідні вищих порядків від функцій, заданих параметрично

Розгляньмо функцію $y = y(x)$ задану параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Оскільки

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x,$$

то

$$y : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x : \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y''_{xx} : \begin{cases} x = x(t), \\ y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \end{cases}} \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{(n)}_{x^n} : \begin{cases} x = x(t), \\ y^{(n)}_{x^n} = \dfrac{(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_t}{x'_t}. \end{cases}}$$

ЛЕКЦІЯ 9. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

9.1. Теореми про середнє значення

Означення 9.1 (диференційовності функції в інтервалі). Функцію f називають *диференційовною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Множину всіх диференційовних в інтервалі $(a;b)$ функцій позначатимемо як $D(a;b)$.

Диференційовним в інтервалі функціям притаманні спільні властивості — теореми про середнє значення.

Теорема 9.1 (Роля). Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізку $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a) = f(b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, у якій похідна функції дорівнює нулеві, тобто

$$f'(\xi) = 0, \xi \in (a;b).$$

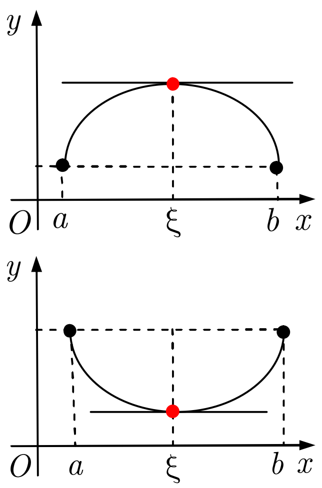


Рис. 9.3. Теорема Роля

Теорема 9.2 (Лаґранжа). Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$

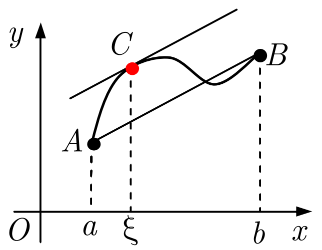


Рис. 9.4. Теорема Лаґранжа

Формулу

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)}$$

ще називають *Лаґранжовою формулою*.

Якщо в Лаґранжовій формулі покласти $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, то вона набуде вигляду

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \xi \in \left(x_0; x_0 + \Delta x\right).$$

Оскільки формула дає точний зв'язок приросту функції і приросту аргументу, її ще називають *формулою скінченних приростів* (вказати точку ξ часто не можливо).

Теорема 9.3 (Коші). Якщо функції f і g:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,

3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b.$$

9.2. Правило Бернуллі — Лопіталя

Теорема 9.4 (про правило Бернуллі — Лопіталя). Якщо:

1) функції f та g означені, неперервні і диференційовні у проколеному околі точки x_0;

2) $g'(x) \neq 0$ у всіх точках цього околу;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$;

4) існує $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

то існує $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Правило Бернуллі — Лопіталя використовують, щоб розкривати невизначенності $\dfrac{0}{0}$ та $\dfrac{\infty}{\infty}$. Решту невизначеностей зводять до них за допомогою перетворень.

За правилом Бернуллі — Лопіталя можна довести, що:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0.$$

Тобто, степенева функція $x^\alpha, \alpha > 0$, зростає не порівняно швидше логарифмічної і не порівняно повільніше показникової функції.

$$\boxed{\ln x \ll x^\alpha \ll e^x, x \to +\infty \ \forall \alpha > 0.}$$

ЛЕКЦІЯ 10. ТЕЙЛОРОВА ФОРМУЛА

10.1. Многочлен і формула Тейлора

Найпростішими функціями в розумінні обчислень їхніх значень є многочлени. Виникає питання про можливість заміни функції $f(x)$ в околі точки x_0 многочленом деякого степеня.

Нехай функція $f(x)$ принаймні n разів диференційовна в околі точки x_0.

Означення 10.1 (многочлена Тейлора). *Многочленом Тейлора n-го порядку функції $f(x)$ за степенями $(x-x_0)$* називають многочлен

$$\tilde{P}_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad (f^{(0)} = f).$$

Значення похідних функції і її многочлена Тейлора до n-го порядку включно збігаються:

$$f(x_0) = \tilde{P}_n(x_0), f'(x_0) = \tilde{P}_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = \tilde{P}_n^{(n)}(x_0).$$

Означення 10.2 (формули Тейлора). *Формулою Тейлора n-го порядку функції $f(x)$ в околі точки x_0* називають формулу

$$\boxed{f(x) = \tilde{P}_n(x) + R_n(x),}$$

де $\tilde{P}_n(x)$ — многочлен Тейлора, $R_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$ — *залишковий член формули Тейлора*.

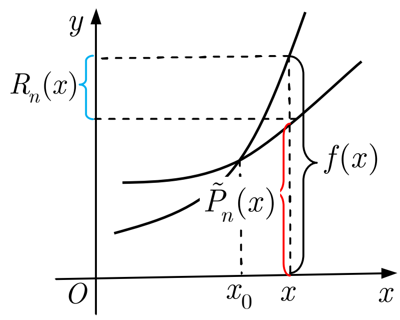


Рис. 10.1. Формула Тейлора

Залишковий член формули Тейлора $R_n(x)$ визначає похибку наближення функції $f(x)$ її многочленом Тейлора $\tilde{P}_n(x)$.

Якщо $f(x) = P_n(x)$ є многочленом n-го порядку, то $R_n(x) = 0$.

Формулу Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ називають *формулою Тейлора — Маклорена.*

10.2. Різні форми Тейлорової формули

Тейлорова формула в диференціальній формі

Покладаючи $x - x_0 = \Delta x, x = x_0 + \Delta x$ у Тейлоровій формулі

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

дістаньмо

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n(x).$$

Оскільки

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$
$$f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n f(x_0),$$

то Тейлорову формулу n-го порядку функції f можна записати в *диференціальній формі*

$$\boxed{\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + R_n(x).}$$

Тейлорова формула із залишковим членом у формі Пеано

Теорема 10.1 (Тейлора). Якщо функція $y = f(x)$ означена й n разів диференційовна в околі точки x_0, то правдива формула Тейлора n-го порядку функції f із залишковим членом у *формі Пеано*:

$$f(x) = \tilde{P}_n(x) + o((x - x_0)^n) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + o((x - x_0)^n), x \to x_0.$$

Тейлорова формула із залишковим членом у формі Лаґранжа

Якщо вимагати від функції $f(x)$ $(n + 1)$ разів диференційовності в околі точки x_0, то можна записати формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лаґранжа:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \tilde{P}_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \ \xi \in (x_0; x). \end{aligned}}$$

10.3. Розвинення за формулою Тейлора — Маклорена елементарних функцій

1. Розвинення функції $f(x) = e^x$.

Функція $f(x) = e^x$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$. Знайдімо послідовні похідні від функції $f(x) = e^x$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x, \\ f'(x) = e^x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(0) = 1 \\ f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}, \xi \in (0; x). \end{array}\right.$$

Підставляючи одержані значення $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0), f^{(n+1)}(\xi)$ у формулу Тейлора — Маклорена із залишковими членами у формі Пеано і Лаґранжа, дістаємо

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}, \quad \xi \in (0; x). \end{aligned}}$$

2. Розвинення $f(x) = \sin x$.

$$\boxed{\begin{gathered} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k}); \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \cos\xi \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \xi \in (0; x). \end{gathered}}$$

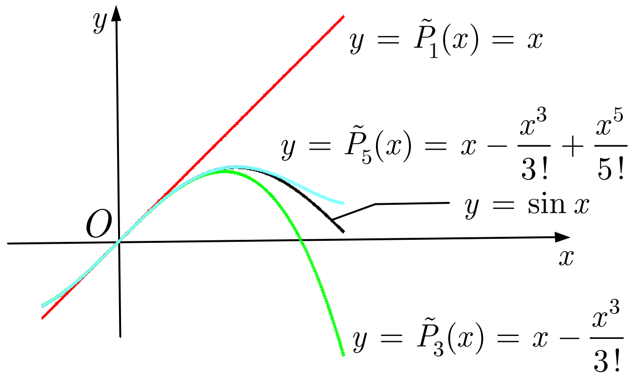


Рис. 10.2. Наближення функції $f(x) = \sin x$ Тейлоровими многочленами

3. Розвинення функції $f(x) = \cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \cos\xi \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!},$$
$$\xi \in (0; x).$$

4. Розвинення функції $f(x) = \ln(1 + x)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$
$$\xi \in (0; x).$$

5. Розвинення функції $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, \ \xi \in (0; x).$$

Якщо $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то всі члени формули Тейлора — Маклорена, починаючи з $(m+1)$-го зникають, і формула Тейлора — Маклорена перетворюється на відому формулу *Ньютонового бінома*

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^m \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

10.3. Застосування Тейлорової формули

1. Формули Тейлора — Маклорена із залишковим членом у формі Пеано є джерелом асимптотичних формул.

Приміром, для функції $f(x) = e^x$ маємо:

$$e^x = 1 + x + o(x),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Використаємо ці формули до обчислення границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Формулу Тейлора за степенями $(x - x_0)$ із залишковим членом у формі Лаґранжа застосовують для обчислення наближених значень функції в околі $U(x_0)$.

Значення $f(x)$ в околі $U(x_0)$ обчислюють за формулою

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

похибка наближення не перевищує

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right|, \quad \xi \in (x_0; x).$$

ЛЕКЦІЯ 11. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

11.1. Дослідження функцій за допомогою першої похідної

Монотонність функцій

Теорема 11.1 **(достатні умови строгої монотонності).** Якщо функція f диференційовна в інтервалі $(a;b)$ та $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ скрізь, крім, можливо, скінченної кількості точок, у яких $f'(x)=0$ в $(a;b)$, то функція f зростає (спадає) в інтервалі $(a;b)$.

Якщо функція f зростає (спадає) в $(a;b)$, то це ще не означає, що $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ в усіх точках проміжку.

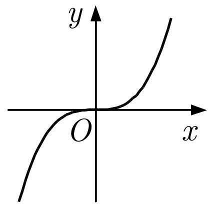


Рис. 11.1. Зростаюча функція

Приміром, функція $y=x^3$ зростає в $(-\infty;+\infty)$, однак $y'(0)=3x^2\Big|_{x=0}=0.$

Інтервали монотонності функції відокремлюють один від одного або точки, де похідна дорівнює нулеві, або точки, де похідна дорівнює нескінченності чи не існує.

Означення 11.1 **(критичної точки 1-го порядку).** Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку*, якщо виконано одну з умов:

1) $f'(x_0)=0$;
2) $f'(x_0)=\infty$;
3) $\nexists f'(x_0)$.

Геометрично ці умови означають, що у критичній точці 1-го порядку дотична або паралельна осі Ox (умова 1) (такі точки називають *стаціонарними*), або паралельна осі Oy (умова 2) (такі точки називають *точками вертання*) або дотичної не існує (умова 3) (такі точки називають *кутовими*).

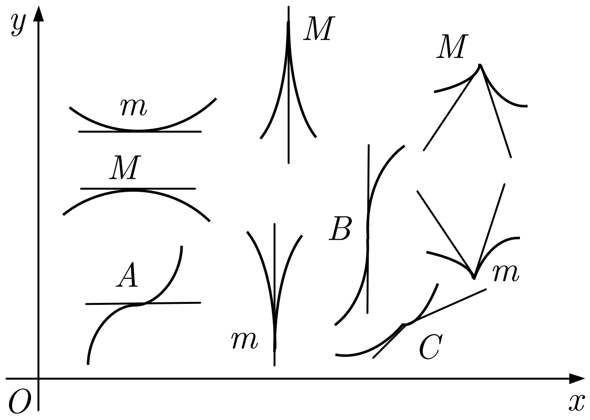


Рис. 11.2. Критичні точки 1-го порядку

Локальні екстремуми функції

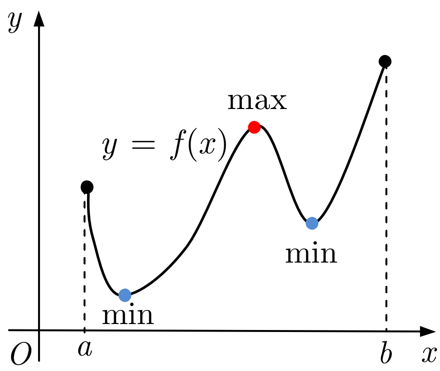


Рис. 11.3. Локальні екстремуми

Означення 11.2 (точок локального екстремуму). Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції $f(x)$, якщо існує δ-окіл точки x_0, такий, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$
$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Точки максимуму і мінімуму називають *точками екстремуму функції.*

Значення $f(x_0)$ називають *локальним максимумом* (*мінімумом*) функції.

Теорема 11.2 (необхідна умова існування локального екстремуму функції). Якщо в точці x_0 функція f досягає локального екстремуму, то ця точка є критичною точкою 1-го порядку, тобто виконано одну з умов:

1) $f'(x_0) = 0$;
2) $f'(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f'(x_0)$.

Обернене твердження неправильне: не будь-яка критична точка є точкою локального екстремуму.

Теорема 11.3 (достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 — критична точка і функція f неперервна в деякому околі точки x_0. Якщо в цьому околі:

1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму;

2) $f'(x) < 0$, коли $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, коли $x > x_0$,, то функція досягає в точці x_0 мінімуму;

3) похідна не змінює знак переходячи через x_0, то в точці x_0 екстремуму немає.

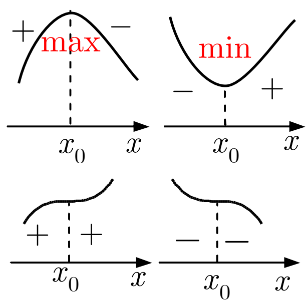


Рис. 11.4. Достатня умова локального екстремуму

Теорема 11.4 (достатня умова локального екстремуму). Нехай функція $f(x)$ має в околі точки x_0 першу і другу похідні, причому $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. Тоді:

1) якщо $f''(x_0) > 0$, то функція має в точці x_0 локальний мінімум;

2) якщо $f''(x_0) < 0$, то функція має в точці x_0 локальний максимум.

Екстремуми функції мають лише локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно із близькими до нього значеннями.

Глобальні екстремуми функції

Теорема Веєрштраса твердить, що неперервна на відрізку $[a;b]$ функція досягає на цьому відрізку свого найменшого та найбільшого значення, які ще називають *глобальними екстремумами* функції на відрізку.

Цих значень функція може набувати або в точках локальних екстремумів в інтервалі $(a;b)$, або на межі при $x = a$ чи $x = b$.

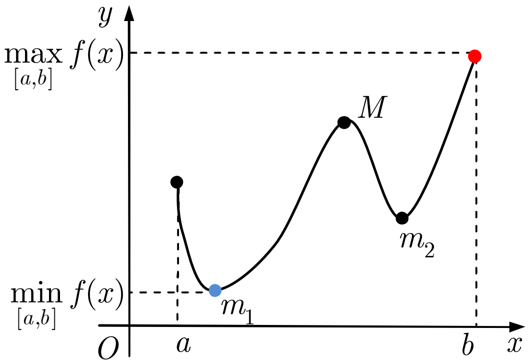


Рис. 11.5. Глобальні екстремуми функції

11.2. Дослідження функцій за допомогою другої похідної

Опуклість функції

Розгляньмо функцію $f(x), x \in (a;b)$. Нехай x_1 та x_2 — дві різні точки інтервалу $(a;b)$. Через точки $A(x_1;f(x_1))$ та $B(x_2;f(x_2))$ графіка функції f проведімо хорду AB.

Означення 11.3 (опуклості донизу і догори). Функцію f називають *опуклою донизу* (*угнутою*) в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, хорда AB $(A = f(x_1), B = f(x_2))$ лежить не нижче графіка цієї функції і позначають $f \cup$

Функцію f називають *опуклою догори* (*опуклою*) в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, хорда AB лежить не вище графіка цієї функції і позначають $f \cap$.

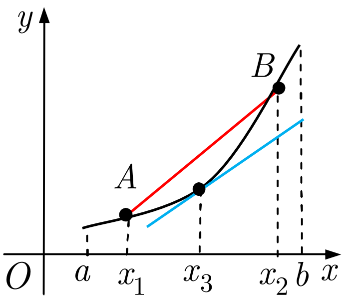


Рис. 11.6. Угнута функція

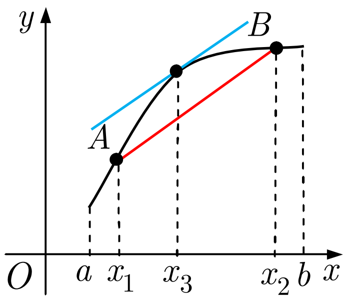


Рис. 11.7. Опукла функція

Неперервно диференційовна функція f опукла донизу (догори) в інтервалі $(a;b)$ тоді й лише тоді, коли всі точки $(x;f(x)), x \in (a;b)$, графіка функції лежать не нижче (не вище) дотичної, проведеної до нього в будь-якій точці $(x_3;f(x_3)), x_3 \in (a;b)$.

Теорема 11.5 (достатня умова опуклості функції). Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді:
1) якщо $f''(x) > 0\, \forall x \in (a;b)$, то графік цієї функції в інтервалі $(a;b)$ опуклий донизу;
2) якщо $f''(x) < 0\, \forall x \in (a;b)$, то графік цієї функції в інтервалі $(a;b)$ опуклий догори.

Точка перегину

Нехай функція $y = f(x)$ означена в деякому околі точки x_0.

Означення 11.4 (точки перегину). *Точкою перегину* функції $y = f(x)$ називають точку x_0, у якій напрям опуклості змінюється на протилежний.

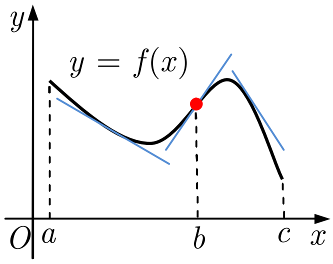


Рис. 11.9. Точка перегину

Інтервали опуклості функції можуть відокремлюватись один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулеві, або точками, де друга похідна дорівнює нескінченності, або точками, де друга похідна не існує.

Означення 11.5 (критичної точки 2-го порядку). Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 2-го порядку*, якщо виконано одну з умов:
1) $f''(x_0) = 0$;
2) $f''(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f''(x_0)$.

Теорема 11.6 **(необхідна умова існування точки перегину)**. Якщо x_0 є точкою перегину функції f, то x_0 — критична точка 2-го порядку, тобто виконану одну з умов:

1) $f''(x_0) = 0$;
2) $f''(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f''(x_0)$.

Ця умова не є достатньою. Приміром, для функції

$$y = x^4, y''(0) = 12x^2 \mid_{x=0} = 0,$$

але $x = 0$ не є точкою перегину.

Теорема 11.7 **(достатня умова існування точки перегину)**. Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ міняє знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f.

Приміром, дослідімо на монотонність, точки локального екстремуму, опуклість і точки перегину функцію $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

$$D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

$$y' = \frac{3x^2(3 - x^2) + 2x^4}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2(9 - x^2)}{(3 - x^2)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 3;$$

$$y' = \infty \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

y'	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$	
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	x
		min								max		

$$y'' = \left(\frac{x^2(9 - x^2)}{(3 - x^2)^2} \right)' = \frac{6x(9 + x^2)}{(3 - x^2)^3}.$$

$$y'' = 0, x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = 0;$$

$$y'' = \infty, x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

y''	$+$		$-$		$+$		$-$	
y	$\cup$	$\sqrt{3}$	$\cap$	0	$\cup$	$\sqrt{3}$	$\cap$	x
				т. перегину				

У точці $x = 3$ функція f досягає максимуму

$$y_{\max} = y(3) = -\frac{9}{2},$$

а в точці $x = -3$ функція досягає мінімуму

$$y_{\min} = y(-3) = \frac{9}{2}.$$

Точка $(0;0)$ є точкою перегину.

ЛЕКЦІЯ 12. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

12.1. Асимптоти графіка функції

Означення 12.1 (асимптоти). *Асимптотою* кривої з нескінченною гілкою називають таку пряму, що віддаль d від точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.

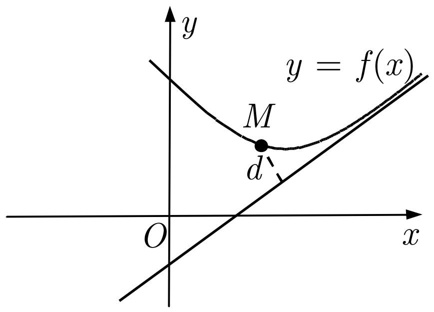


Рис. 12.1. Асимптота кривої

Вертикальні асимптоти

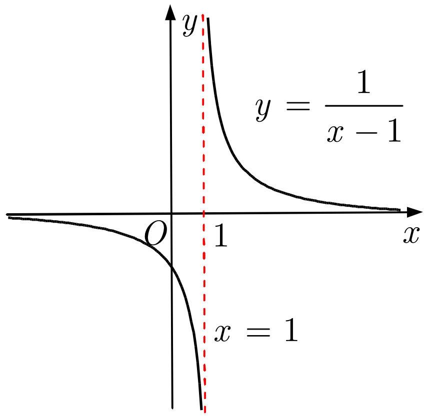
Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\boxed{\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty} \text{ або } \boxed{\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty.}$$

Справді, при цьому віддаль

$$d = \left| x - x_0 \right|$$

від точки $M(x; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$ до прямої $x = x_0$ прямує до нуля і точка M необмежено віддаляється від початку координат.



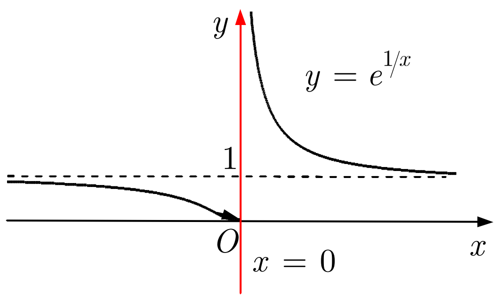


Рис. 12.2. Приклади вертикальних асимптот

Похилі асимптоти

Розгляньмо функцію $f(x)$ задану в околі $U_\varepsilon(+\infty)$ (випадок $-\infty$ розглядають так само). Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою графіка функції $y = f(x)$ (її називають *похилою*, а в разі $k = 0$ — *горизонтальною асимптотою*).

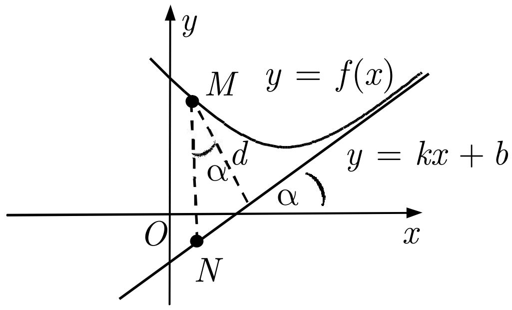


Рис. 12.3. Похила асимптота

Те що пряма $y = kx + b$ є асимптотою кривої $y = f(x)$, коли $x \to +\infty$, означає, що віддаль d від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли $x \to +\infty$. З рисунку бачимо, що $d = \left|MN\right|\left|\cos\alpha\right|$. Оскільки $\cos\alpha \neq 0$, прямування до нуля d, коли $x \to +\infty$, тягне за собою прямування до нуля

$$\left|MN\right| = \left|f(x) - kx - b\right|,$$

і навпаки.

Отже, пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ тоді й лише тоді, коли

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0.}$$

Існування асимптоти графіка функції означає, що, коли $x \to +\infty$ функція поводить себе «майже як лінійна функція».

Теорема 12.1 **(критерій існування похилої асимптоти).** Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b.$$

Приміром, знайдімо асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

$$D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty.$$

Графік має вертикальні асимптоти:

$$x = -\sqrt{3} \text{ та } x = \sqrt{3}.$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1;$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Графік має двобічну похилу асимптоту $y = -x.$.

12.2. Схема повного дослідження функції

Дослідження двічі диференційовної функції $y = f(x)$ на $D(f)$ (за винятком, можливо, скінченої множини точок) і побудову її графіка варто проводити за схемою:

1. Знаходять область означення функції f — множину $D(f)$.

2. Встановлюють можливі симетрії графіка функції.

3. Визначають можливі точки розриву функції і асимптоти її графіка.

4. За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності і точки екстремуму.

5. За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину.

6. Знаходять можливі точки перетину графіка функції з осями координат.

7. Будують графік функції $y = f(x)$ за встановленою інформацією.

Приміром, побудуємо графік функції $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

1. $D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

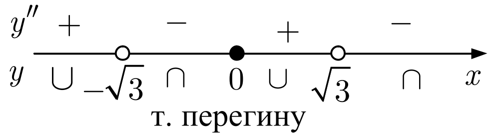
2. Функція непарна.

3. Точки $x = \pm\sqrt{3}$ є точками розриву 2-го роду, нескінченного. Прямі $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$ є двобічними вертикальними асимптотами. Пряма $y = -x$ є двобічною похилою асимптотою.

4. $y_{\max} = y(3) = -\dfrac{9}{2}, y_{\min} = y(-3) = \dfrac{9}{2}$.

y'	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$	
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	x
		min								max		

5. Точка $x = 0$ є точкою перегину.



6. Точкою перетину з осями є точка $O(0;0)$.

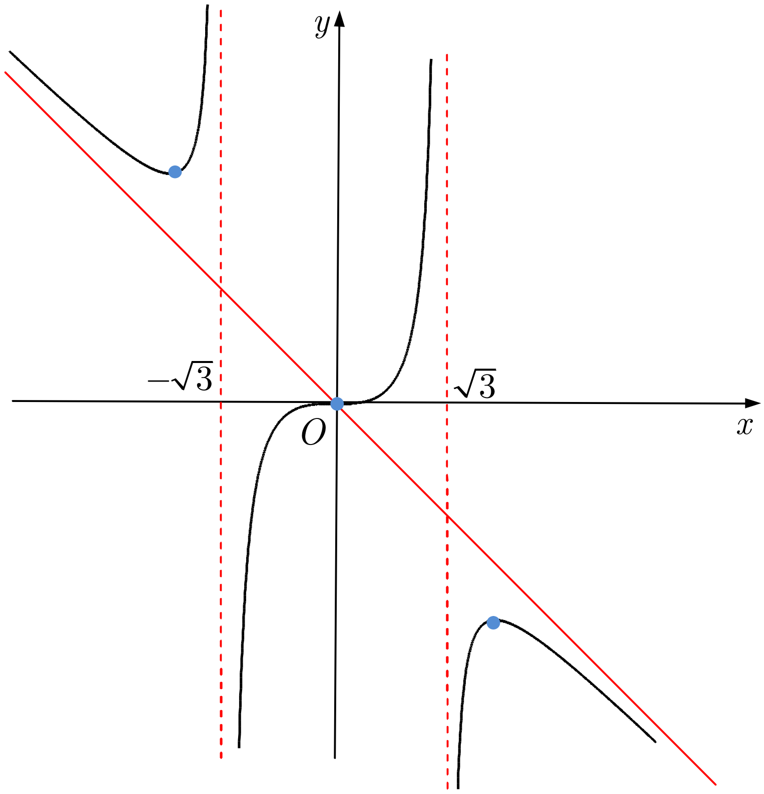


Рис. 12.4. Графік функції $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

У цьому розділі означено:

— первісну функції;

— невизначений інтеграл від функції.

У цьому розділі розглянуто:

— достатню умову існування первісної;

— теорему про первісну;

— правила і основні формули інтегрування;

— основні класи функцій, первісні яких виражаються через елементарні;

— теорему про заміну змінної у невизначеному інтегралі;

— теорему про інтегрування частинами у невизначеному інтегралі;

— теорему про розклад правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів;

— теорему Чебишова про інтегрування диференціального бінома.

У цьому розділі обґрунтовано методи:

— безпосереднього інтегрування;

— заміни змінної (зокрема, введення функції під знак диференціала);

— інтегрування частинами;

— розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів;

— знаходження невизначених коефіцієнтів розкладу;

— інтегрування тригонометричних виразів;

— інтегрування ірраціональних виразів.

ЛЕКЦІЯ 13. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

13.1. Первісна

У диференціальному численні за заданою функцією f знаходять її похідну $f'(x)$ або диференціал $df(x) = f'(x)dx$. Слушно поставити зворотну задачу:

за заданою функцією f відшукати таку функцію F, що

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Означення 13.1 **(первісної).** Функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо вона диференційовна для будь-якого $x \in (a;b)$ і

$$F'(x) = f(x).$$

Операцію відшукання первісної F для функції f називають *інтегруванням*.

Теорема 13.1 **(достатня умова існування первісної).** Будь-яка неперервна в інтервалі $(a;b)$ функція f має в цьому інтервалі первісну F.

Теорема 13.2 **(про первісну).** Якщо $F(x)$ є первісною функції f в інтервалі $(a;b)$, то будь-яка інша первісна функції f в цьому інтервалі має вигляд

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

де $C \in \mathbb{R}$ є сталою.

Приміром, для функції $f(x) = e^x$ первісною на $\mathbb{R}$ є не лише $F(x) = e^x$, але й будь-яка функція $e^x + C$, де C — довільна стала.

13.2. Невизначений інтеграл

Означення 13.2. Сукупність $\{F(x) + C\}$ всіх первісних функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, x — *змінною інтегрування*, $C \in \mathbb{R}$ — *сталою інтегрування*.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Невизначений інтеграл геометрично є однопараметричною сукупністю кривих

$$y = F(x) + C$$

де C — параметр, що мають спільну властивість:

усі дотичні до кривих у точках з абсцисами $x = x_0$ паралельні між собою.

Криві сукупності $\{F(x) + C\}$ називають *інтегральними кривими*. Вони не перетинають одна одну і не дотикаються одна до одної. Через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

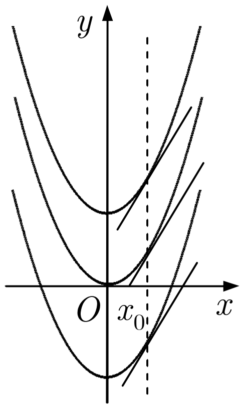


Рис. 13.1. Графік $\int 2x dx = x^2 + C$

Теорема 13.3 (про властивості невизначеного інтеграла).

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3 (*лінійність*). Невизначений інтеграл від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації інтегралів:

$$\int [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx,$$

де сталі α_1 та α_2 не дорівнюють нулеві одночасно.

4 (*інваріантність формул інтегрування*). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити будь-якою диференційовною функцією цієї змінної:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

де u — диференційовна функція.

13.3. Основні формули інтегрування

Оскільки інтегрування — це дія, обернена до диференціювання, то формули інтегрування можна одержати оберненням відповідних формул диференціювання. Інакше кажучи, таблицю основних формул інтегрування можна одержати з таблиці похідних елементарних функцій при зворотному її читанні (справа наліво).

Загальніше, з того що

$$(F(x)+C)' = f(x)$$

випливає

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Подамо таблицю основних невизначених інтегралів (тут літера u може позначати як незалежну змінну $(u = x)$, так і функцію від незалежної змінної $(u = u(x))$.

1. $\displaystyle\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C.$
3. $\displaystyle\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$
4. $\displaystyle\int e^{u}du = e^{u} + C.$
5. $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C.$
6. $\displaystyle\int \cos u du = \sin u + C.$
7. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
8. $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$
10. $\displaystyle\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$
11. $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \ (a \neq 0).$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \ (|u| > |a|).$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \ (|u| < |a|).$

17. $\displaystyle\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$

18. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Якщо первісна F для функції f є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\displaystyle\int f(x)dx$ *виражається в елементарних функціях*. Але не будь-який інтеграл від елементарних функцій виражається в елементарних функціях.

Приміром, доведено, що такі інтеграли не виражаються через елементарні функції:

1) $\displaystyle\int e^{-x^2} dx$ (*Пуассонів інтеграл*);

2) $\displaystyle\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ (*Френелеві інтеграли*);

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}, 0 < x < 1$ (*інтегральний логарифм*);

4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx, x \neq 0$ (*інтегральний синус*);

5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx, x \neq 0$ (*інтегральний косинус*).

ЛЕКЦІЯ 14. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

14.1. Метод безпосереднього інтегрування

На відміну від диференціального числення, де, користуючись правилами і таблицею похідних, можна знайти похідну або диференціал будь-якої заданої функції, в інтегральному численні немає загальних прийомів знаходження невизначених інтегралів, а є лише окремі методи, що дозволяють зводити заданий інтеграл до табличного.

Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності та інваріантності невизначеного інтеграла.

Приміром,

$$\int\left(4x^2-\frac{3}{x^2+9}\right)dx=4\int x^2dx-3\int\frac{dx}{x^2+9}=$$
$$=4\cdot\frac{x^3}{3}+C_1-3\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C_2=$$
$$=\frac{4x^3}{3}-\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C,$$

де $C=C_1+C_2$.

14.2. Метод заміни змінної

Метод інтегрування заміною змінної полягає у запровадженні нової змінної інтегрування (підстановки). При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який є простішим за шуканий.

Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(t)$ задано відповідно в інтервалах $(a;b)$ та $(\alpha;\beta)$, причому функція φ відображує проміжок $(\alpha;\beta)$ на $(a;b)$.

Теорема 14.1 **(про заміну замінної).** Якщо функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a;b)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна і строго монотонна в інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $\varphi'(t)\neq 0$, то правдива *формула інтегрування заміною змінної*:

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,}$$

де у праву частину треба підставити $t=\varphi^{-1}(x)$.

Цю теорему застосовують одним із таких двох способів:

1) інтеграл $\int g(x)dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

у якому для функції f відома первісна F, тоді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C;$$

2) після підстановки $x = \varphi(t)$ інтеграл $\int g(x)dx$ набуває вигляду

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(t)dt,$$

де для функції $f(t)$ відома первісна F і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

У першому способі йдеться про «введення функції під знак диференціала»:

$$\boxed{\varphi'(x)dx = d\varphi(x),}$$

а у другому — про «виведення функції з-під знаку диференціала»:

$$\boxed{dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt.}$$

14.3. Введення функції під знак диференціала

Лінійна підстановка

Розгляньмо спершу найпростіший випадок інтегрування введенням функції під знак диференціала, що дозволяє за відомим інтегралом

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

знайти інтеграл

$$\int f(au + b)du.$$

За властивістю інваріантності маємо

$$\boxed{\int f(au + b)d(au + b) = F(au + b) + C.}$$

Тоді,

$$\int f(au + b)du = \left| \begin{matrix} d(au + b) = adu; \\ du = \dfrac{1}{a}d(au + b) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(au + b)d(au + b) = \frac{1}{a}F(au + b) + C.$$

Приміром,

$$\int \sqrt{2x+3}dx = \left| \begin{aligned} &d(2x+3) = 2dx; \\ &dx = \frac{1}{2}d(2x+3) \end{aligned} \right| = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{1/2} d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x+3)^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C.$$

Загальний випадок

Метод інтегрування введенням під знак диференціала ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

у якій неявно використовують підстановку $u = \varphi(x)$:

$$\boxed{\begin{gathered} \int f(\varphi(x))dg(x) = \left| \; u = \varphi(x) \right| = \int f(u)du = \\ = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \end{gathered}}$$

Найважливішим для ефективного використання методу є «побачити» у підінтегральній функції множник, що є похідною внутрішнього аргументу складеної функції і ввести його під знак диференціала.

зовнішня функція

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

внутрішня функція

похідна внутрішньої функції

Часто використовують такі перетворення диференціала («введення під знак диференціала»):

$$f'(x)dx = df(x);$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2); \qquad \frac{1}{x}dx = d(\ln x);$$

$$\cos x dx = d(\sin x); \qquad \sin x dx = -d(\cos x);$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x);$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx = d(\operatorname{arctg} x); \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x).$$

Приміром,

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

14.4. Метод інтегрування частинами

Метою методу інтегрування частинами є перехід від складнішого інтеграла $\int udv$ до простішого («нескладнішого») інтеграла $\int vdu$.

Приміром, цей метод використовують для знаходження інтегралів

$$\int (3x-1)e^{2x}dx, \int x \operatorname{arctg} xdx \text{ та } \int e^{3x} \cos 2xdx.$$

Теорема 14.2 (про інтегрування частинами). Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні в інтервалі $(a;b)$, то в цьому проміжку правдива *формула інтегрування частинами*:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Зауваження 14.1.
1. Щоб перейти від функції u до її диференціала du, функцію u диференціюють. Щоб перейти від диференціала dv до функції v, диференціал dv інтегрують:

$$u \xrightarrow{\frac{d}{dx}} du; \quad dv \xrightarrow{\int} v.$$

2. Знаходячи функцію v за її диференціалом dv, можна брати будь-яке значення сталої $\tilde{C}$, оскільки в остаточний результат вона не входить. Тому для зручності покладають $\tilde{C} = 0$.

Розгляньмо основні типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду

$$\int P_n(x)e^{ax}dx, \int P_n(x)\cos bxdx, \int P_n(x)\sin bxdx,$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n.

Щоб знайти інтеграли 1-го типу покладають

$$\boxed{u = P_n(x)}$$

і застосовують формулу інтегрування частинами n разів.

2. Інтеграли вигляду

$$\int P_n(x)\ln xdx, \int P_n(x)\arcsin kxdx, \int P_n(x)\arccos kxdx,$$

$$\int P_n(x)\operatorname{arctg} kxdx, \int P_n(x)\operatorname{arcctg} kxdx,$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n.

Щоб знайти інтеграли 2-го типу покладають за u функцію при $P_n(x)$:

$$\boxed{u = \ln x} \text{ чи } \boxed{u = \operatorname{arcf} x.}$$

3. Інтеграли вигляду

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx,$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx, \int \cos\ln xdx, \int \sin\ln xdx.$$

1. Щоб знайти інтеграли 3-го типу

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx,$$

вибирають

$$\boxed{u = \sqrt{a^2 - x^2}} \text{ чи } \boxed{u = \sqrt{x^2 \pm a^2},}$$

інтегрують частинами, перетворюють одержаний інтеграл і розв'язують лінійне рівняння щодо шуканого інтеграла.

2. Щоб знайти інтеграли 3-го типу

$$\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx$$

двічі інтегрують частинами, вибираючи

$$\boxed{u = e^{ax}}$$

і розв'язують лінійне рівняння щодо шуканого інтеграла.

Розгляньмо приклад інтегрування частинами в інтегралі 1-го типу:

$$\int (3x-1)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = 3x - 1 \rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\int udv = uv - \int vdu}{=} (3x-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x}dx = \frac{3x-1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

ЛЕКЦІЯ 15. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

15.1. Раціональні функції

Найпростішою цілою раціональною функцією є многочлен n-го порядку, тобто функція вигляду

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ — дійсні сталі, причому $a_0 \neq 0$.

Коренем многочлена $P_n(x)$ називають таке значення x_0 (взагалі кажучи, комплексне) змінної x, для якого многочлен дорівнює нулеві, тобто

$$P_n(x_0) = 0.$$

Кожен многочлен $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами єдиним чином можна розкласти на дійсні множники вигляду

$$x - a \text{ та } x^2 + px + q,$$

де $a, p, q \in \mathbb{R}$, причому квадратичні множники не мають дійсних коренів і, отже, нерозкладні на дійсні лінійні множники. Об'єднуючи однакові множники, многочлен $P_n(x)$ можна записати як добуток

$$P_n(x) = a_0(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2}...(x - a_k)^{\alpha_k} \times$$
$$\times(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}...(x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l},$$

де $\alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,k}, \mu_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,l}; \alpha_1 + ... + \alpha_k + 2\mu_1 + ... + 2\mu_l = n.$

Корінь a_i многочлена називають *простим*, якщо $\alpha_i = 1$ і *кратним*, якщо $\alpha_i > 1$; число α_i називають *кратністю кореня*.

Властивості многочленів.
1. Якщо многочлен $P_n(x) \equiv 0$, то всі його коефіцієнти дорівнюють нулеві.
2. Якщо два многочлени тотожно рівні один одному, то коефіцієнти одного многочлена дорівнюють відповідним коефіцієнтам другого.

Раціональною функцією (*раціональним дробом*) називають відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}.$$

Якщо степінь многочлена в чисельнику менше за степінь многочлена у знаменнику $(n < m)$, то дріб називають *правильним*. Якщо степінь многочлена у знаменнику не перевищує степеня многочлена у знаменнику $(n \geq m)$, то дріб називають *неправильним*.

Будь-який неправильний раціональний дріб можна зобразити як суму многочлена (цілої частини) і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)},$$

де $R_{n-m}(x)$ — ціла частина дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$; $\tilde{P}(x)$ — остача від ділення $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

15.2. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Елементарним дробом називають правильний раціональний дріб одного з чотирьох типів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$.

Тут A, a, p, q, M, N — дійсні числа, а квадратний тричлен не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Елементарні дроби 1-го та 2-го типів інтегрують безпосередньо з допомогою основних правил інтегрального числення:

1. $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln\left|x-a\right| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$

Інтеграл від елементарного дробу 3-го типу зводиться до табличних інтегралів вилученням у чисельнику диференціала знаменника. А саме,

3. $$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{matrix} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ Mx+N = \dfrac{M}{2}(2x+p) + N - \dfrac{Mp}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

4. Інтеграл

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

заміною

$$t = x + \frac{p}{2}$$

зводиться до інтеграла

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$$

який можна знайти за рекурентною формулою

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left((2n-3)I_{n-1} + \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right), n = 2, 3, \ldots$$

Приміром, знаючи табличний інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

за рекурентною формулою знаходимо, що

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(I_1 + \frac{t}{t^2+a^2}\right) = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

15.3. Інтегрування раціональних дробів

Розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів

Теорема 15.1 (про розклад на суму елементарних дробів). Правильний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$ зі знаменником

$$\begin{gathered}Q_m(x) = a_0(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_k)^{\alpha_k} \times \\ \times(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}, \\ \alpha_i \in \mathbb{N}, i=\overline{1,k}, \mu_j \in \mathbb{N}, p_j^2-4q_j<0, j=\overline{1,l},\end{gathered}$$

можна єдиним чином розкласти на суму елементарних дробів:

$$\begin{gathered}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \\ + \dots + \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \\ + \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{M_{1\mu_1}x+N_{1\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} + \\ + \dots + \frac{M_{l1}x+N_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \dots + \frac{M_{l\mu_l}x+N_{l\mu_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}}.\end{gathered}$$

У цьому розкладі

$$\begin{gathered}A_{11},\dots,A_{1\alpha_1},\dots,A_{k1},\dots,A_{k\alpha_k}, \\ M_{11},N_{11},\dots,M_{1\mu_1},N_{1\mu_1},\dots,M_{l1},N_{l1},\dots,M_{l\mu_l},N_{l\mu_l}\end{gathered}$$

— деякі дійсні сталі, невизначені коефіцієнти, частина яких може дорівнювати нулеві. Їхня загальна кількість дорівнює степеню многочлена у знаменнику, тобто m.

Приміром,

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Невизначений інтеграл від будь-якої раціональної функції завжди виражається через скінченну кількість елементарних функцій.

Метод невизначених коефіцієнтів

1. *Спосіб прирівнювання коефіцієнтів*.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти розкладу, праву частину рівності зводять до спільного знаменника і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої та правої частин. Тобто одержують систему лінійних рівнянь, із яких і знаходять невизначені коефіцієнти.

Приміром, знайдімо коефіцієнти розкладу:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

Праву частину цього розкладу зведімо до спільного знаменника:.

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{x^3-8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \equiv (A+B)x^2 + (2A+C-2B)x + 4A - 2C.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 1 = 2A+C-2B \\ x^0 & 0 = 4A-2C \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}.$$

2. *Спосіб домноження (викреслювання).* Нехай

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}, \quad \varphi(a) \neq 0.$$

Кратному дійсному кореню $x = a$ відповідає в розкладі дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ низка елементарних дробів:

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}.$$

Коефіцієнт A_α знаходять за формулою

$$\boxed{A_\alpha = \left.\frac{P_n(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right|_{x=a} = \frac{P_n(a)}{\varphi(a)},}$$

а решту коефіцієнтів за формулами:

$$\boxed{A_{\alpha-k} = \frac{1}{k!}\left.\left(\frac{P_n(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right)^{(k)}\right|_{x=a}, k = \overline{1, \alpha-1}.}$$

ЛЕКЦІЯ 16. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

16.1. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Загальний підхід

Умовимося через $R(u, v, w, \ldots)$ позначати раціональну функцію щодо $u, v, w, \ldots$, тобто вираз, який одержано з величин $u, v, w, \ldots$, а також дійсних чисел з допомогою чотирьох арифметичних дій.

Розгляньмо нетабличний інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де підінтегральна функція є раціональною функцією від $\sin x$ та $\cos x$. Знайти його можна різними методами. Іноді буває досить перетворити підінтегральний вираз, використовуючи відомі тригонометричні формули, застосувати методи підведення множника під знак диференціала, заміни змінної або інтегрування частинами.

Універсальна тригонометрична підстановка

Для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ існує загальна універсальна схема обчислення, яка ґрунтується на *універсальній тригонометричній підстановці*

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, x \in (-\pi; \pi).}$$

Цим підставленням інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ перетворюють в інтеграл від раціональної функції змінної t, який завжди виражається в елементарних функціях.

Справді, нехай $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Виразімо $\sin x, \cos x$ та dx через t:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}. \end{array}}$$

Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\frac{2dt}{t^2+1} = \int R_1(t)dt.$$

За допомогою універсальної підстановки зручно обчислювати інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

Універсальна підстановка інколи приводить до порівняно громіздких раціональних дробів. Тому буває зручнішим використовувати інші підстановки.

1) якщо підінтегральна функція непарна щодо $\sin x$, тобто

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку

$$\boxed{\cos x = t, x \in [0; \pi];}$$

2) якщо підінтегральна функція непарна щодо $\cos x$, тобто

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку

$$\boxed{\sin x = t, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];}$$

3) якщо підінтегральна функція парна щодо $\sin x$ та $\cos x$, тобто

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку

$$\boxed{\operatorname{tg} x = t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).}$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^n x \cos^m x dx$

1. Якщо хоча б одне з чисел m або n — непарне, то відокремлюють від непарного степеня один співмножник і виражають із допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ парний степінь, що залишився. Отже,

1) якщо $m = 2k-1, k \in \mathbb{N}$, то підінтегральний вираз перетворюють так:

$$\boxed{\sin^{2k-1} x dx = \sin x(\sin x)^{2k-2} dx = -(1-\cos^2 x)^{k-1} d(\cos x);}$$

2) якщо $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$, то підінтегральний вираз перетворюють так:

$$\boxed{\cos^{2k-1} x dx = (1-\sin^2 x)^{k-1} d(\sin x).}$$

2. Якщо ж m та n — парні числа, то степені понижують, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.\end{gathered}}$$

Отже,

$$\boxed{\sin^{2k} x \cos^{2l} x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l, k, l \in \mathbb{N}.}$$

16.2. Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx$

Для знаходження інтегралів цього типу використовують тригонометричні тотожності:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1,\\ \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} - 1,\end{aligned}}$$

а саме:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}^n x &= \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right);\\ \operatorname{ctg}^n x &= \operatorname{ctg}^{n-2} x \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right).\end{aligned}}$$

16.3. Інтеграли від добутку тригонометричних функцій

Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx \ (m, n \in \mathbb{R}).$$

Їх обчислюють розкладанням підінтегральної функції в суму за формулами:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),\\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),\\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).\end{aligned}}$$

ЛЕКЦІЯ 17. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

17.1. Дробово-лінійна підстановка

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx$

Тут $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k \in \mathbb{Z}, R(\cdot)$ — раціональна функція. Такі інтеграли зводять до інтегралів від раціональних функцій заміною

$$\boxed{x = t^s,}$$

де s — найменший спільний знаменник дробів $\dfrac{m_1}{n_1}, \dots, \dfrac{m_k}{n_k}$.

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right) dx$

Тут $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k \in \mathbb{Z}$. Ці інтеграли зводять до інтегралів від раціональної функції заміною

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,}$$

де s — найменший спільний знаменник дробів $\dfrac{m_1}{n_1}, \dots, \dfrac{m_k}{n_k}$.

Інтеграли від ірраціональних функцій не завжди виражаються через елементарні функції. Приміром, еліптичні інтеграли 1-го та 2-го роду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$0 < k < 1,$$

не інтегруються в елементарних функціях.

17.2. Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

1. Інтеграл $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ обчислюють вилученням у чисельнику диференціала від підкореневого виразу і, при потребі, вилученням повного квадрату під коренем.

Приміром,

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+2x+2) = (2x+2)dx \\ 3x-1 = \frac{3}{2}(2x+2)-4 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 4\int \frac{d(x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) + C.$$

2. Інтеграл вигляду $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводять до попереднього типу заміною

$$\boxed{x-\alpha = \frac{1}{t}.}$$

3. *Тригонометричні підстановки.* Інтеграли вигляду

$$\int R(x, \sqrt{k^2-x^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2 \pm k^2})dx$$

можна зводити до раціональних функцій підстановками:

1) $\boxed{x = k\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$, для інтеграла $\displaystyle\int R(x, \sqrt{k^2-x^2})dx$;

2) $\boxed{x = k\,\mathrm{tg}\, t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$, для інтеграла $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2+k^2})dx$;

3) $\boxed{x = \frac{k}{\cos t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)}$, для інтеграла $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-k^2})dx$.

Тригонометричні підстановки найефективніші в обчисленні визначених інтегралів, де не потрібно вертатись до старої змінної.

4. Інтеграли $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx, \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ можна також знаходити інтегруванням частинами.

17.3. Інтегрування диференціального біному

Теорема 17.1 **(Чебишова).** Інтеграли вигляду

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx \ \ (m, n, p \in \mathbb{Q}, a, b \in \mathbb{R})$$

від *диференціального біному* виражаються через елементарні функції лише у трьох випадках:

1) якщо $p \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $x = t^s$, де s — найменший спільний знаменник дробів m та n;

2) якщо $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $a + bx^n = t^s$, де s — знаменник дробу $p = \dfrac{k}{s}$;

3) якщо $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $ax^{-n} + b = t^s$, де s — знаменник дробу $p = \dfrac{k}{s}$.

У решті випадків інтеграли від диференціального біному не виражаються через елементарні функції.

Приміром,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3}dx =$$

$$= \left| \begin{gathered} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}; \\ \frac{m+1}{n} = 2 \Rightarrow 1 + x^{1/4} = t^3; t = (1 + x^{1/4})^{1/3}; \\ \frac{1}{4}x^{-3/4}dx = 3t^2dt \end{gathered} \right| =$$

$$= \int x^{1/4}(1 + x^{1/4})^{1/3}x^{-3/4}dx = \int (t^3 - 1)t \cdot 12t^2dt = 12\int (t^6 - t^3)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + C.$$

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ПИТАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вступ до аналізу

1. Окіл скінченної і нескіченної точки. Обмежені множини.

Підпункт «Околи» п. 1.5 і п. 1.6. лекції 1.

2. Границя функції в точці.

П. 3.1 лекції 3 (одну із властивостей довести).

3. Границя числової послідовності.

П. 3.2 лекції 3 (теорему Веєрштраса з доведенням).

4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

П. 3.4 лекції 3 (одне із тверджень з доведенням).

5. Знаходження границь функцій.

П. 3.5 лекції 3 (одне із тверджень Т. 3.7 довести). Перелік невизначеностей.

6. Порівняння нескінченно малих.

П. 4.1 лекції 4 (одне із тверджень Т. 4.1 довести).

7. Перша визначна границя.

П. 4.2 лекції 4.

8. Друга визначна границя.

П. 4.3 лекції 4.

9. Неперервність функції в точці.

П. 5.1 лекції 5 (Т. 5.1 (без доведення). Т. 5.2 (довести для $f(x) = \sin x$)).

10. Точки розриву.

П. 5.2 лекції 5.

11. Функції неперервні на відрізку.

П. 5.3 і 5.4 лекції 5 (одне із тверджень довести).

Диференціальне числення функцій однієї змінної

1. Похідна функції в точці. Правила диференціювання.

П. 6.1 лекції 6 (без підпункту знаходження похідної функції в точці). Т. 7.1 (правило диференціювання добутку довести).

2. Диференційовність функції в точці.

П. 6.2 і 6.3 лекції 6(Т. 6.2 довести)

3. Геометричний зміст похідної і диференціала.

П. 6.4 лекції 6.

4. Похідіні й диференціали вищих порядків.

П. 8.1 лекції 8.

5. Теореми про середнє.

П. 9.1 лекції 9 (одну з теорем довести).

6. Правило Бернуллі — Лопіталя.

П. 9.2 лекції 9.

7. Формула Тейлора.

П. 10.1 і 10.2 лекції 10 (Т. 10.1 довести). Формула Тейлора — Маклорена для $f(x) = e^x$.

8. Монотонність функцій.

Озн. 2.4. Підпункт Монотонність функції п. 11.1 лекції 11 (Т. 11.1 з доведенням).

9. Локальний екстремум функції.

Підпункт Локальні екстремуми функції п. 11.1 лекції 11 (Т. 11.3 довести).

10. Опуклість функцій. Точки перегину

П. 11.2 лекції 11 (Т. 11.7 довести).

11. Асимптоти кривої

П. 12.1 лекції 12 (Т. 12.1 довести).

Інтегральне числення функцій однієї змінної

1. Первісна. Невизначений інтеграл.

П. 13.1 і 13.2 лекції 13 (Т. 13.1 довести).

2. Основні методи інтегрування.

Т. 14.1 лекції 14 (довести) і Т. 14.2 (довести).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники і посібники

1. *Вища* математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 400 с. — ISBN 966-06-0229-4.

2. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 1. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 336 с. — ISBN 978-5-354-01237-4.

3. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 2. — М.: Эдиториал УРСС, 2007. — 192 с. — ISBN 978-5-382-00208-8.

4. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

5. *Жевняк Р. М.* Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1992. — 384 с.

6. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч.2. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 224 с.

7. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN: 966-575-055-0.

8. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: *Айрис-Пресс*, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

9. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

Задачники

10. *Алексєєва І. В.* Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федеорова. — К.: НТУУ «КПІ», 2012. — 176 с.

11. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. — 448 с. — ISBN 5-8114-0107-8.

12. *Сборник* задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие / Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др. Под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1993. — 480 с. — ISBN 5-02-014433-9.