

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

**І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова**

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ
ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
ПРАКТИКУМ**

Київ — 2013

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 252 с.

*Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 5 від 22.01.2009)*

Навчальне видання
Диференціальне та інтегральне числення
функцій однієї змінної
Практикум

для студентів І курсу технічних спеціальностей

Укладачі:	<i>Алексєєва Ірина Віталіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц. Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц. Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц. Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.</i>
Відповідальний редактор	<i>О. І. Клесов, д-р фіз.-мат. наук, професор</i>
Рецензенти:	<i>С. В. Єфіменко, канд. фіз.-мат. наук, доц. В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.</i>

Зміст

Передмова.....	6
Розділ 4. МНОЖИНИ	7
4.1. Висловлювання.....	7
4.2. Квантори	7
4.3. Теореми.....	8
4.4. Множини.....	8
4.5. Властивості дій над множинами і висловлюваннями	10
4.6. Числові множини.....	11
4.7. Відображення множин	12
4.8. Потужність множин	13
4.9. Дії з числами. Дроби	14
4.10. Відсотки. Пропорції	15
4.11. Подільність натуральних чисел.....	16
4.12. Деякі спеціальні нерівності.....	17
4.13. Числова вісь	18
4.14. Числові проміжки.....	19
4.15. Елементи комбінаторики	20
4.16. Біноміальна формула Ньютона.....	21
4.17. Обмежені множини	22
4.18. Точкові множини.....	22
Розділ 5. ФУНКЦІЇ	23
5.1. Функція однієї змінної	23
5.2. Основні характеристики функції.....	24
5.3. Степенева функція.....	26
5.4. Стала, лінійна і дробово-лінійна функції.....	29
5.5. Квадратична функція	30
5.6. Многочлени	31
5.7. Показникова і логарифмічна функції.....	32
5.8. Тригонометричні функції	34
5.9. Обернені тригонометричні функції.....	36
5.10. Властивості тригонометричних	38
і обернених тригонометричних функцій	38
5.11. Основні тригонометричні рівняння.....	40
5.12. Гіперболічні функції	42
5.13. Класифікація функцій	44
5.14. Функція модуль	45
5.15. Геометричні перетворення графіків функцій	46

Розділ 6. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ	48
6.1. Числові послідовності	48
6.2. Границя послідовності	49
6.3. Границя функції	50
6.4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції	51
6.5. Деякі важливі границі функцій	52
6.6. Порівняння нескінченно малих функцій	53
6.7. Визначні границі	54
6.8. Таблиця еквівалентностей	54
6.9. Неперервність функції в точці	55
6.10. Неперервність функції на відрізку	56
6.11. Точки розриву функції	57
6.12. Метод інтервалів	58
Розділ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	59
7.1. Похідна і диференціал функції	59
7.2. Правила диференціювання	60
7.3. Формули диференціювання	60
7.4. Формули для похідних вищих порядків	61
7.5. Геометричний зміст похідної і диференціала	62
7.6. Основні теореми диференціального числення	63
7.7. Тейлорова формула	64
7.8. Асимптоти. Екстремуми. Точки перегину	65
7.9. Дослідження функції на монотонність і точки екстремуму	66
7.10. Дослідження функції на напрям опуклості і точки перегину	67
7.11. Схеми дослідження функції	68
Розділ 8. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	69
8.1. Первісна. Невизначений інтеграл	69
8.2. Основні формули інтегрування	70
8.3. Основні методи інтегрування	70
8.4. Інтегрування дробово-раціональних виразів	72
8.5. Інтегрування тригонометричних виразів	74
8.6. Інтегрування ірраціональних виразів	75
Модуль 1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ	77
1. Множини. Функції	77
2. Границя послідовності	84
3. Границя функції	92
4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції	100
5. Неперервність функції. Точки розриву функції	107

Модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ	
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	115
6. Похідна. Техніка диференціювання	115
7. Застосування похідної.....	126
8. Похідні вищих порядків.....	131
9. Правило Бернуллі — Лопіталю	134
10. Тейлорова формула	139
11. Дослідження функцій за допомогою похідних.....	144
12. Побудова графіків функцій.....	150
Модуль 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	159
13. Інтегрування внесенням під знак диференціала.....	159
14. Методи замінування змінної і інтегрування частинами.....	167
15. Інтегрування дробово-раціональних функцій	173
16. Інтегрування тригонометричних виразів	182
17. Інтегрування ірраціональних виразів.....	186
Додаток. Грецька абетка	192
Модуль 0. АДАПТАЦІЙНИЙ КУРС	
ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ	193
1. Дії з числами.....	193
2. Модуль	197
3. Факторіали. Біноміальні коефіцієнти.....	201
4. Прогресії.....	203
5. Лінійна функція	207
6. Квадратична функція	209
7. Многочлени	215
8. Степенева функція	216
9. Показникова та логарифмічна функції	224
10. Тригонометричні та обернені тригонометричні функції	231
11. Парність, непарність, періодичність функцій.....	246
Список використаної і рекомендованої літератури	249

Передмова

Практикум з вищої математики «Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» є складовою **навчального комплексу** з вищої математики, який містить: конспект лекцій, практикум, збірник індивідуальних домашніх завдань, збірник контрольних та тестових завдань.

Практикум складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в НТУУ «КПІ», його зміст відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи дисципліни «Вища математика»:

- множини;
- границя функції і неперервність;
- похідна й диференціал;
- техніка диференціювання;
- правило Бернуллі — Лопіталя і формула Тейлора;
- повне дослідження функцій та побудова їхніх графіків;
- первісна й інтеграл;
- основні методи інтегрування;
- інтегрування деяких класів функцій.

У практикум включено також основні теми адаптаційного курсу з елементарної математики.

Практикум містить розгорнутий довідковий матеріал, якого потребує свідоме розв'язування задач, широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання, сприяють розвиткові практичних навичок і є зразком належного оформлення розв'язань задач для самостійної роботи, задачі для самостійної роботи в аудиторії та домашнього завдання з відповідями.

Метою практикуму є:

- допомогти опанувати студентам основ математичного аналізу;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використанням конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них подано у списку рекомендованої літератури.

У практичній частині використано такі позначення:

[**A.B.C**] — посилання на клітинку **C**, у якій уміщено теоретичний факт або формулу, таблиці **A.B.** з теми **A**;

①, ②, ③, ... — посилання у навчальній задачі на коментар, який уміщено після її розв'язання.

Розділ 4. МНОЖИНИ

4.1. Висловлювання

❶ Висловлювання. Під висловлюванням p розуміють твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне.		Істинному висловлюванню p приписують значення $p = 1$, а хибному — значення $p = 0$.																																														
❷ Дії з висловлюваннями																																																
❶ Заперечення висловлювання p		$\bar{p}$ («не p »)																																														
❷ Диз'юнкція висловлювань p та q		$p \vee q$ (« p або q »)																																														
❸ Кон'юнкція висловлювань p та q		$p \wedge q$ (« p і q »)																																														
❹ Імплікація висловлювань p та q		$p \Rightarrow q$ («якщо p , то q »)																																														
❺ Еквіваленція висловлювань p та q		$p \Leftrightarrow q$ (« p тоді й лише тоді, коли q »)																																														
❸ Таблиця істинності дій над висловлюваннями																																																
<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$\bar{p}$</th><th>$p \vee q$</th><th>$p \wedge q$</th><th>$p \Rightarrow q$</th><th>$p \Leftrightarrow q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>		p	q	$\bar{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	<table><tr><td colspan="2">❶ $\bar{\bar{p}} = p$;</td></tr><tr><td>❷ $p \vee 0 = p$;</td><td>❹ $p \wedge 0 = 0$;</td></tr><tr><td>❸ $p \vee 1 = 1$;</td><td>❺ $p \wedge 1 = p$;</td></tr><tr><td>❹ $p \vee p = p$;</td><td>❻ $p \wedge p = p$;</td></tr><tr><td>❺ $p \vee \bar{p} = 1$;</td><td>❼ $p \wedge \bar{p} = 0$</td></tr></table>		❶ $\bar{\bar{p}} = p$;		❷ $p \vee 0 = p$;	❹ $p \wedge 0 = 0$;	❸ $p \vee 1 = 1$;	❺ $p \wedge 1 = p$;	❹ $p \vee p = p$;	❻ $p \wedge p = p$;	❺ $p \vee \bar{p} = 1$;	❼ $p \wedge \bar{p} = 0$
p	q	$\bar{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$																																										
0	0	1	0	0	1	1																																										
0	1	1	1	0	1	0																																										
1	0	0	1	0	0	0																																										
1	1	0	1	1	1	1																																										
❶ $\bar{\bar{p}} = p$;																																																
❷ $p \vee 0 = p$;	❹ $p \wedge 0 = 0$;																																															
❸ $p \vee 1 = 1$;	❺ $p \wedge 1 = p$;																																															
❹ $p \vee p = p$;	❻ $p \wedge p = p$;																																															
❺ $p \vee \bar{p} = 1$;	❼ $p \wedge \bar{p} = 0$																																															

4.2. Квантори

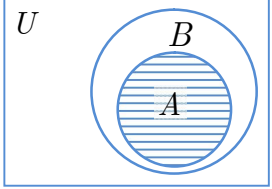
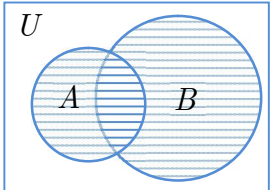
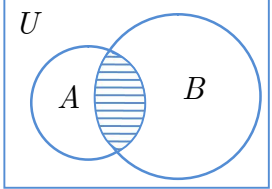
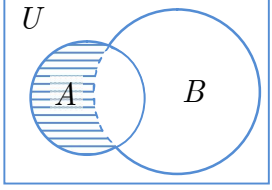
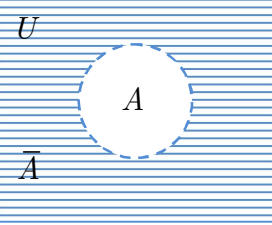
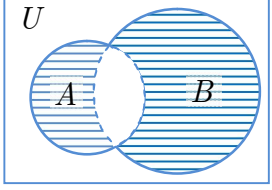
❶ Квантор існування	$\exists$ («існує», «знайдеться»)
$\exists x : A(x)$ («існує x такий, що виконано $A(x)$ ») $\exists !$ («існує єдиний»)	
❷ Квантор загальності	$\forall$ («для будь-якого», «для всіх»)
$\forall x : A(x)$ («для будь-якого x виконано $A(x)$ »)	
❸ Правила заперечення кванторів	1) $\overline{\exists x : A(x)} \Leftrightarrow \forall x : \overline{A(x)}$; 2) $\overline{\forall x : A(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{A(x)}$

4.3. Теореми

❶ Типи теорем і логічний квадрат	
① $P \Rightarrow Q$ — пряма; ② $Q \Rightarrow P$ — обернена; ③ $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ — протилежна; ④ $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ — протилежна оберненій $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P};$ $(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})$	
❷ Необхідна і достатня умови	
① Правдива теорема $P \Rightarrow Q$	P — достатня умова для Q ; Q — необхідна умова для P
② Правдивий критерій $P \Leftrightarrow Q$ (правдиві теореми $P \Rightarrow Q$ і $Q \Rightarrow P$)	P — необхідна і достатня умова для Q ; Q — необхідна і достатня умова для P
❸ Методи доведення теореми $P \Rightarrow Q$. ① Прямий. $P \Rightarrow T_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow Q$ ② Непрямий (від супротивного) $\bar{Q} \Rightarrow T_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow \bar{P}.$ ③ Метод математичної індукції.	❹ Схема доведення методом математичної індукції. ① Перевіряють правдивість твердження $P(n)$ для $n = 1$. ② Припускаючи правдивість твердження $P(k)$, доводять твердження $P(k + 1)$. ③ На підставі принципу математичної індукції висновують правдивість твердження $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

4.4. Множини

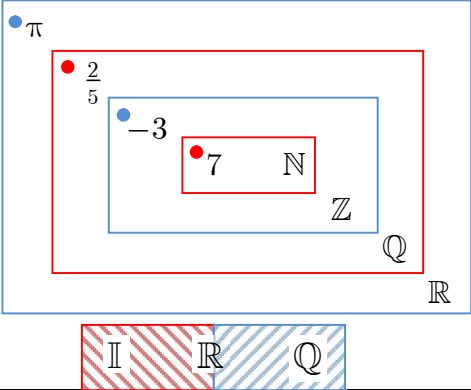
❶ Множина. Під множиною розуміють сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за якою-небудь ознакою.	Об'єкти, які утворюють множину називають елементами множини.
① x належить множині A (x є елементом A)	$x \in A$
② x не належить множині A (x не є елементом A)	$x \notin A$
③ універсальна множина	U
④ порожня множина (не містить жодного елемента)	$\emptyset$

❷ Способи задавання множин:		
❶ <i>переліком</i> своїх елементів	$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$	
❷ <i>характерною</i> властивістю	$A = \{x \mid P(x)\}$ — множина всіх x , які мають властивість $P(x)$	
❸ Включення множин. $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$ A є підмножиною B (Дії з множинами унаочнюються за допомогою <i>діаграм Ейлера — Вена</i>)		❶ $A \subset A;$ ❷ $\emptyset \subset A;$ ❸ $A \subset U$
❹ Рівність множин. $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B, \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B, \\ B \subset A \end{cases}$	
❺ Об'єднання (сума) множин. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$		❶ $A \cup A = A;$ ❷ $A \cup \emptyset = A;$ ❸ $A \cup U = U$
❻ Переріз (добуток) множин. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$		❶ $A \cap A = A;$ ❷ $A \cap \emptyset = \emptyset;$ ❸ $A \cap U = A$
❼ Різниця множин. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$		❶ $A \setminus A = \emptyset;$ ❷ $A \setminus \emptyset = A;$ ❸ $A \setminus U = \emptyset$
❽ Доповнення множини. $\bar{A} = U \setminus A$		❶ $A \cup \bar{A} = U;$ ❷ $A \cap \bar{A} = \emptyset;$ ❸ $A \setminus \bar{A} = A;$ ❹ $\bar{\bar{A}} = A$
❾ Симетрична різниця множин. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$		❶ $A \Delta A = \emptyset;$ ❷ $A \Delta \emptyset = A;$ ❸ $A \Delta U = \bar{A}$
❿ Декартів добуток множин	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$ $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ разів}}$	

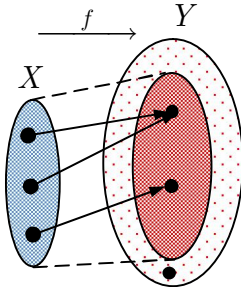
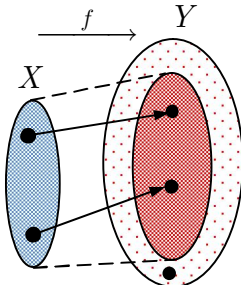
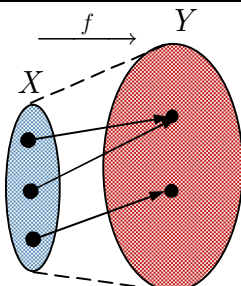
4.5. Властивості дій над множинами і висловлюваннями

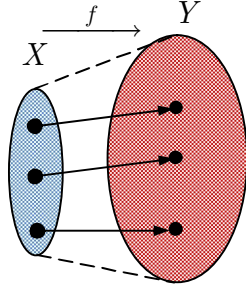
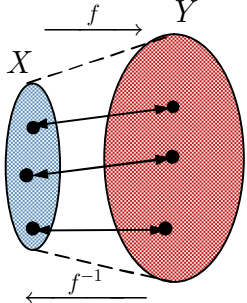
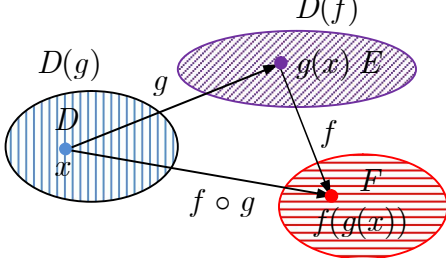
❶ Комутативність:	
① об'єднання	$A \cup B = B \cup A$
② диз'юнкції	$p \vee q = q \vee p$
③ перерізу	$A \cap B = B \cap A$
④ кон'юнкції	$p \wedge q = q \wedge p$
❷ Асоціативність:	
① об'єднання	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
② диз'юнкції	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
③ перерізу	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
④ кон'юнкції	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
❸ Дистрибутивність:	
① об'єднання щодо перерізу	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
② диз'юнкції щодо кон'юнкції	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
③ перерізу щодо об'єднання	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
④ кон'юнкції щодо диз'юнкції	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
❹ Закони де Моргана для:	
① об'єднання	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
② перерізу	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
③ диз'юнкції ($\downarrow$ — стрілка Пірса)	$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q} = p \downarrow q$
④ кон'юнкції ($ $ — штрих Шефера)	$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q} = p q$
⑤ імплікації	$\overline{p \Rightarrow q} = \bar{p} \vee q = p \wedge \bar{q}$
⑥ еквіваленції ($\oplus$ — виключне або)	$\overline{p \Leftrightarrow q} = (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) = p \oplus q$
❺ Закони поглинання	
①	$A \cup (A \cap B) = A$
②	$A \cap (A \cup B) = A$
③	$p \vee (p \wedge q) = p$
④	$p \wedge (p \vee q) = p$
❻ Закони склеювання	
①	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$
②	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) = p$

4.6. Числові множини

❶ Запис числа у <i>десятковій</i> системі	$\overline{\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0} =$ $= \alpha_n \cdot 10^n + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0,$ $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
❷ Запис числа у <i>двійковій</i> системі	$\overline{\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0} =$ $= \alpha_n \cdot 2^n + \dots + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_0,$ $\alpha_i \in \{0, 1\}$
❸ <i>Десяткові дроб</i> и ($a \in \mathbb{Z}, \alpha_i, \beta_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$)	
❶ <i>скінченний</i>	$a, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$
❷ <i>нескінченний періодичний</i>	$a, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k) =$ $= a, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \underbrace{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}_{\text{період}} \dots \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots$
❹ <i>Позначення числових множин</i>	
❶ Множина <i>натуральних</i> чисел	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
❷ Множина <i>цілих</i> чисел	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
❸ Множина <i>раціональних</i> чисел	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} =$ $= \{x \mid x - \text{скінченний або нескінченний періодичний десятковий дріб}\}$
❹ Множина <i>дійсних</i> чисел	$\mathbb{R} = \{x \mid x - \text{нескінченний десятковий дріб}\}$
❺ Множина <i>ірраціональних</i> чисел	$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ $= \{x \mid x - \text{нескінченний неперіодичний десятковий дріб}\}$
❻ Включення числових множин. ❶ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R};$ ❷ $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$	

4.7. Відображення множин

❶ Відображення. Відображенням множини X у множину Y (функцією з множини X у множину Y) називають правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність лише один елемент $y \in Y$.	$f : X \rightarrow Y$	
	$y = f(x), x \in X$	
аргумент функції	x (прообраз елемента $f(x)$)	
значення функції	$f(x)$ (образ елемента x)	
область означення функції	$D(f) = X$	
множина значень функції	$E(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$	
❷ Деякі типи функцій		
❶ дійсна функція	$E(f) \subset \mathbb{R}$	
❷ функція дійсного аргументу	$D(f) \subset \mathbb{R}$	
❸ дійсна функція кількох змінних	$D(f) \subset \mathbb{R}^n, E(f) \subset \mathbb{R}$	
❹ вектор-функція	$D(f) \subset \mathbb{R}, E(f) \subset \mathbb{R}^n$	
❺ послідовність елементів множини Y	$f : \mathbb{N} \rightarrow Y$	
❻ числова послідовність	$f : \mathbb{N} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$	
❸ Взаємно однозначне відображення (ін'єкція)	$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : \\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \\ f(x_1) \neq f(x_2)$	
❹ Відображення множини X на множину Y (сюр'єкція)	$\forall y \in Y \forall x \in X : \\ f(x) = y \\ f(X) = Y$	

⑤ Взаємно однозначна відповідність між X та Y (бієкція)	$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$	
⑥ Обернена функція. Якщо відображення $f : X \rightarrow Y$ є бієкцією, то функцію $f^{-1} : Y \rightarrow X$: $x = f^{-1}(y), y \in Y$ називають оберненою до f функцією.		
⑦ Складена функція. Якщо $g : D \rightarrow E, f : E \rightarrow F$, то функцію $f \circ g : D \rightarrow F$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in D$ називають складеною функцією (суперпозицією функцій f та g).		

4.8. Потужність множин

① Скінченна множина. Множину A називають скінченною, якщо вона має скінченну кількість елементів.	Кількість усіх підмножин n-елементної скінченної множини дорівнює 2^n.
② Рівнопотужні множини. Множини A та B називають рівнопотужними, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність і позначають $A \sim B$.	③ Зліченна множина. Множину A називають зліченною, якщо $A \sim \mathbb{N}$. Елементи множини A можна занумерувати.
④ Властивості скінченних, нескінченних і злічених множин	
① Множина A скінченна тоді й лише тоді, коли $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. ② Множина A нескінченна тоді й лише тоді, коли існує множина $B \subset A, B \neq A$, така, що $A \sim B$. ③ Нескінченна підмножина зліченної множини зліченна.	④ Нескінченна множина містить зліченну підмножину. ⑤ Множини $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ — злічені, множини $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ — незлічені. ⑥ Декартів добуток злічених множин є зліченною множиною.

4.9. Дії з числами. Дроби

❶ Додавання. $x + y = z,$ де x, y — доданки, z — сума.	❷ Множення. $x \cdot y = z,$ де x, y — множники, z — добуток.
❸ Властивості додавання. ① $x + y = y + x$ (комутативність додавання); ② $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність додавання); ③ $x + 0 = x$ (існування нуля); ④ $x + (-x) = 0$ (існування протилежного числа $(-x)$).	❹ Властивості множення. ① $x \cdot y = y \cdot x$ (комутативність множення); ② $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (асоціативність множення); ③ $1 \cdot x = x$ (існування одиниці); ④ $x \cdot x^{-1} = 1$ ($x \neq 0$) (існування оберненого числа x^{-1}).
⑤ $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (дистрибутивність множення щодо додавання).	
❺ Віднімання. $x - y = x + (-y) = z,$ x — зменшуване, y — від'ємник, z — різниця.	❻ Ділення. $x : y = x \cdot y^{-1} = z \quad (y \neq 0).$ x — ділене, y — дільник, z — частка.
❼ Правило знаків для множення і ділення	
$\begin{array}{ll} + \cdot + = + & + \cdot - = - \\ - \cdot + = - & - \cdot - = + \end{array}$	$\begin{array}{ll} + : + = + & + : - = - \\ - : + = - & - : - = + \end{array}$
❽ Звичайні дроби $\frac{x}{y},$ де x — чисельник, $y \neq 0$ — знаменник.	Якщо $a < b$, то дріб $\frac{a}{b}$ називають правильним, а якщо $a > b$, то — неправильним.
❾ Виділення цілої частини неправильного дроби	$\frac{a}{b} = \frac{bc + r}{b} = c + \frac{r}{b},$ $0 \leq r < b$
❿ Дії з дробами (знаменники всіх дробів відмінні від нуля)	
① $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b};$ ② $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c};$ ③ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ak}{m} \pm \frac{cl}{m} = \frac{ak \pm cl}{m},$	де $m = \text{НСК}(b, d), k = \frac{m}{b}, l = \frac{m}{d};$ ④ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$ ⑤ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, c \neq 0$

4.10. Відсотки. Пропорції

❶ Відсотки. Відсоток (процент) числа a — це одна сота частина a .	$1\% a = \frac{a}{100} = 0,01a$
❷ Задачі на відсотки	
❶ Знаходження відсотків числа	$p\% a = \frac{pa}{100}$
❷ Знаходження числа за відсотками	$p\% a = b \Rightarrow a = b : \frac{p}{100} = \frac{b}{p} \cdot 100$
❸ Знаходження процентного відношення чисел	число a становить $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ від числа b
❹ Якщо число a збільшити на $p\%$, то дістанемо число	$a \left(1 + \frac{p}{100} \right)$
❺ Якщо число a зменшити на $p\%$, то дістанемо число	$a \left(1 - \frac{p}{100} \right)$
❻ Формула складених відсотків. Якщо A — початковий вклад, p — річний відсоток, то наприкінці n -го року вклад становитиме	$A \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$
❼ Пропорція. Пропорцією називають рівність двох відношень: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0,$ де a, d — <i>крайні</i> члени пропорції; b, c — <i>середні</i> члени пропорції	❶ Властивості пропорції. ❶ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; ❷ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; ❸ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
❺ Задачі на пропорцію	❶ $\frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{ad}{c}$; ❷ $\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{bc}{d}$
❻ Поділ числа a у відношенні $k : l$	$\frac{ak}{k+l} \text{ та } \frac{al}{k+l}$
❼ Масова частка речовини. Якщо суміш містить k речовин масою $m_1, m_2, \dots, m_k$, то масова концентрація i -ої речовини	$x_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_k},$ $i = 1, 2, \dots, k$

4.11. Подільність натуральних чисел

❶ Ділення націло. Натуральне число a ділиться на натуральне число b (позначають $a:b$), якщо існує натуральне число c таке, що $a = bc$. Якщо $a:b$, то b — дільник a , число a кратне b , c — частка.		❷ Ділення з остачею. Якщо a — ділене, b — дільник і $a = bc + r, r < b,$ то кажуть, що c — неповна частка, r — остача.	
❸ Основні властивості подільності ($a, b, c \in \mathbb{N}$)			
❶ $0:a$; ❷ $a:1$; ❸ $a:a$;		❹ $a:b, b:a \Rightarrow a = b$; ❺ $a:b, b:c \Rightarrow a:c$; ❻ $a:(bc) \Rightarrow a:b, a:c$	
❹ Ознаки подільності числа $m = \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n, \Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$			
❶ $m:2$	$\alpha_n \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	❹ $m:5$	$\alpha_n \in \{0, 5\}$
❷ $m:3$	$\Sigma:3$	❺ $m:9$	$\Sigma:9$
❸ $m:4$	$\overline{\alpha_{n-1} \alpha_n}:4$	❻ $m:10$	$\alpha_n = 0$
❺ Парні числа. Натуральне число називають <i>парним</i> , якщо воно ділиться націло на 2. Його можна записати у вигляді $n = 2k, k \in \mathbb{N}$		❻ Непарні числа. Натуральне число називають <i>непарним</i> , якщо воно не ділиться націло на 2. Його можна записати у вигляді $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$	
❼ Прості і складені числа. Простим числом називають натуральне число, яке має лише два різних дільники — одиницю і саме число.		Натуральне число, яке має більше як два різних дільники, називають <i>складеним</i> . Число 1 не належить ані до простих, ані до складених.	
❽ Основна теорема подільності. Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей добуток єдиний з точністю до порядку співмножників. $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$ де p_i — прості числа, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.			
❾ Найбільший спільний дільник. Найбільшим спільним дільником натуральних чисел a та b називають найбільше число, на яке ділиться і число a , і число b і позначають $\text{НСД}(a, b).$		❿ Найменше спільне кратне. Найменшим спільним кратним натуральних чисел a та b називають найменше число, яке ділиться як на число a , так і на число b , і позначають $\text{НСК}(a, b).$	
$\text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСК}(a, b) = ab$			

⑪ Алгоритм знаходження НСД. ① Розкладають задані числа на прості множники. ② Складають добуток зі спільних простих множників, узятих з найменшим показником степеня.	⑫ Алгоритм знаходження НСК. ① Розкладають задані числа на прості множники. ② Складають добуток з усіх простих множників, узятих з найбільшим показником степеня.
---	---

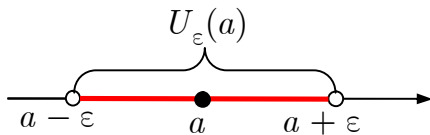
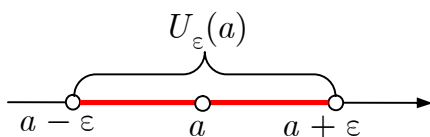
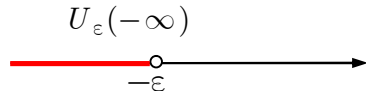
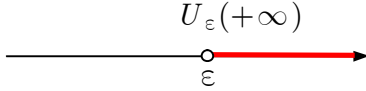
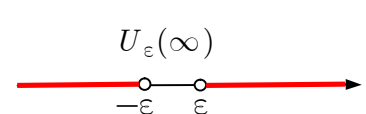
4.12. Деякі спеціальні нерівності

① Порівняння дійсних чисел. Для будь-яких дійсних чисел a та b встановлено одне з трьох відношень:	① $a = b$ (a дорівнює b); ② $a < b$ (a менше за b , b більше за a) ③ $a > b$ (a більше за b , b менше за a)
② Властивості рівностей. ① Якщо $a = b, b = c$, то $a = c$. Якщо $a = b$, то: ② $a \pm c = b \pm c$; ③ $ac = bc$; ④ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}, c \neq 0$	③ Властивості нерівностей. ① Якщо $a < b, b < c$, то $a < c$. Якщо $a < b$, то: ② $a \pm c < b \pm c$; ③ $ac < bc, c > 0$ і $ac > bc, c < 0$; ④ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}, c > 0$ і $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, c < 0$
④ Нерівність Бернуллі	$(1 + h)^n > 1 + nh \quad (h > -1, n \in \mathbb{N})$
⑤ Середнє арифметичне чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$	$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
⑥ Середнє геометричне чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$	$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$
⑦ Середнє гармонічне чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$	$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$
⑧ Середнє квадратичне чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$	$S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$
⑨ Співвідношення між середніми	$H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n \quad (a_i > 0)$
⑩ Нерівність Коші	$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (a_i \geq 0)$

4.13. Числова вісь

❶ Модуль дійсного числа. Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа x називають число	$ x = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
❷ Нескінченності. Множину дійсних чисел доповнюють елементами, які називають <i>плюс нескінченністю</i> та <i>мінус нескінченністю</i> і позначають $+\infty$ та $-\infty$, вважаючи при цьому, що:	1) $x + (+\infty) = +\infty$, $x - (+\infty) = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$; 2) $x(+\infty) = +\infty$, $x(-\infty) = -\infty \quad \forall x > 0$; 3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; 4) $-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
❸ Числова вісь. Числовою віссю називають пряму, на якій вибрано: 1) початок — точку O ; 2) додатний напрям; 3) масштаб.	Між точками числової осі і множиною дійсних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність.
❹ Правило зображення дійсного числа x_M точкою числової осі M : 1) $ OM = x_M $; 2) якщо $x_M < 0$, то точка M розташована ліворуч від точки O , якщо $x_M = 0$, то точка $M = O$; якщо $x_M > 0$, то точка M розташована праворуч від точки O .	Число x називають <i>координатою</i> точки M на числовій осі і позначають $M(x)$.
❺ Віддаль між точками. Віддаль між точками $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$ на прямій знаходять за формулою $d(M_1, M_2) = x_2 - x_1 .$	

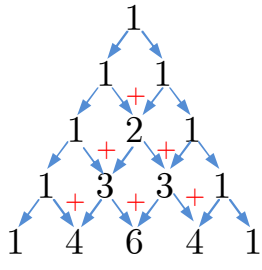
4.14. Числові проміжки

❶ Відрізок $[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	
❷ Інтервал $(a; b) = \{x \mid a < x < b\}$	
❸ Півінтервали	
❶ $[a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}$	
❷ $(a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	
❹ Нескінченні проміжки	
❶ $(a; +\infty) = \{x \mid a < x\}$	
❷ $(-\infty; b) = \{x \mid x < b\}$	
❸ $[a; +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$	
❹ $(-\infty; b] = \{x \mid x \leq b\}$	
❺ $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$	
❺ ε-окіл точки $a \in \mathbb{R}$. $U_\varepsilon(a) = \{x \mid x - a < \varepsilon\} =$ $= (a - \varepsilon; a + \varepsilon), \varepsilon > 0$	
❻ Проколений ε-окіл точки $a \in \mathbb{R}$. $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{x \mid 0 < x - a < \varepsilon\} =$ $= (a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon)$	
❼ ε-окіл точки $-\infty$ $U_\varepsilon(-\infty) = \{x \mid x < -\varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon)$	
❽ ε-окіл точки $+\infty$ $U_\varepsilon(+\infty) = \{x \mid x > \varepsilon\} = (\varepsilon; +\infty)$	
❾ ε-окіл точки ∞ $U_\varepsilon(\infty) = \{x \mid x > \varepsilon\} =$ $= (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$	

4.15. Елементи комбінаторики

❶ Факторіал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n; \quad 0! = 1$	
	$(n+1)! = n!(n+1)$	
❷ Подвійний факторіал	$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)$	
	$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$	
❸ Розміщення. Розміщенням з n елементів по k елементів ($0 \leq k \leq n$) називають будь-який упорядкований набір з k елементів n -елементної множини. Розміщення різняться одне від одного або складом елементів або порядком їх розташування.	Кількість розміщень	
	без повторення	з повтореннями
	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$
❹ Перестановка. Перестановкою з n елементів (без повторень) називають будь-яку впорядковану підмножину з n елементів заданої множини. Перестановки різняться одне від одного лише порядком розташування елементів.	Кількість перестановок $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$	
	без повторення	з повтореннями
	$P_n = n!$	$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
❺ Комбінація. Комбінацією з n елементів по k елементів ($0 \leq k \leq n$) називають будь-який набір з k елементів n -елементної множини. Комбінації різняться одна від одної лише складом елементів.	Кількість комбінацій	
	без повторення	з повтореннями
	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
❻ Правило суми. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b — іншими n способами, то вибір «або a , або b » можна здійснити $m+n$ способами.	❼ Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і після кожного з таких виборів об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір « a та b » (у вказаному порядку) можна здійснити mn способами.	
❽ Властивості A_n^k. ① $A_n^n = A_n^{n-1} = P_n = n!$; ② $A_n^0 = 1$; ③ $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$	❾ Властивості C_n^k. ① $C_n^k = C_n^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$; ② $C_n^0 = C_n^n = 1$; ③ $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = 0, 1, \dots, n-1$; ④ $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$	

4.16. Біноміальна формула Ньютона

❶ Сума n доданків $a_1, a_2, \dots, a_n$	$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$	
❷ Біноміальна формула Ньютона. $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$		
❸ Біноміальний коефіцієнт	C_n^k	
❹ Паскалів трикутник		
$(a + b)^0 = 1$ $(a + b)^1 = a + b$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	$\begin{array}{ccccc} & & C_0^0 & & \\ & & C_1^0 & C_1^1 & \\ & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\ & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{array}$	
❺ Формули скороченого множення		
❶ квадрат суми	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
❷ квадрат різниці	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
❸ різниця квадратів	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	
❹ куб суми	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
❺ куб різниці	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
❻ сума кубів	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	
❼ різниця кубів	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	
❽ $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$		
❾ Формули перетворення ірраціональностей		
❶ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}};$	❸ $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{a + b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}};$	
❷ $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$	❹ $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$	

4.17. Обмежені множини

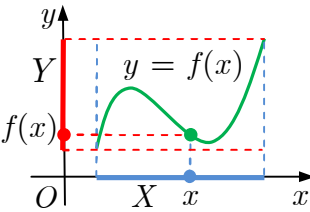
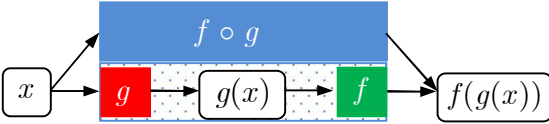
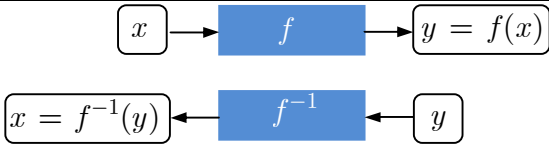
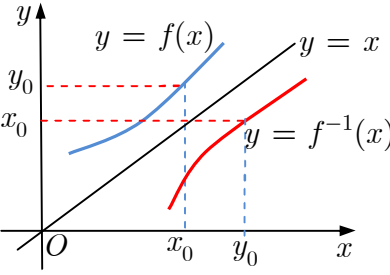
❶ Обмежені множини	
❶ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають <i>обмеженою зверху</i>, якщо $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \leq M.$ M — <i>верхня межа</i> множини A.	❷ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають <i>обмеженою знизу</i>, якщо $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \geq m.$ m — <i>нижня межа</i> множини A.
❸ Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають <i>обмеженою</i>, якщо вона обмежена зверху і знизу.	$\exists C > 0 : \forall x \in A \Rightarrow x \leq C.$
❷ Точні межі множини	
❶ Число $M \in \mathbb{R}$ є <i>точною верхньою межею</i> множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо: 1) $\forall x \in A : x \leq M$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in A : x_0 > M - \varepsilon$. Позначають $M = \sup A$	❷ Число $m \in \mathbb{R}$ є <i>точною нижньою межею</i> множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо: 1) $\forall x \in A : x \geq m$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in A : x_0 < m + \varepsilon$. Позначають $m = \inf A$
❸ Існування точних меж. Будь-яка обмежена зверху непорожня множина дійсних чисел має точну верхню межу, а будь-яка обмежена знизу — точну нижню межу.	Для необмеженої зверху множини вважають, що $\sup A = +\infty$. Для необмеженої знизу множини A вважають, що $\inf A = -\infty$.

4.18. Точкові множини

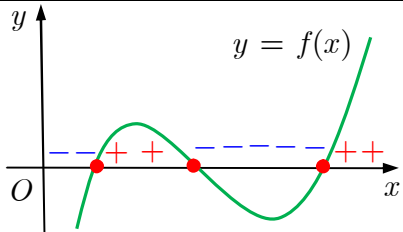
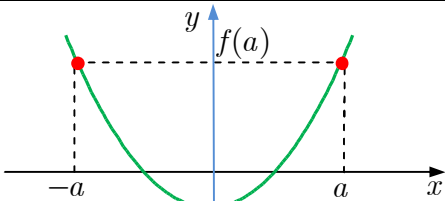
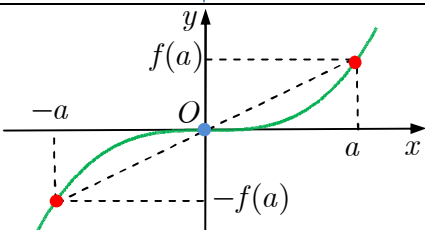
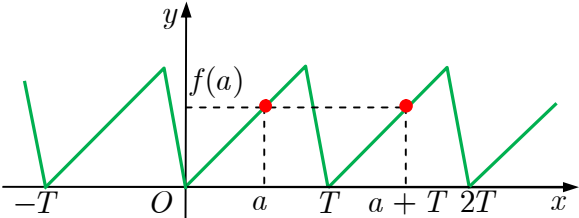
❶ Внутрішня точка. Точку $M \in D$ називають <i>внутрішньою</i> точкою множини D, якщо існує такий окіл точки M, який повністю міститься в множині D.	❷ Відкрита множина. Множину D, кожна точка якої є внутрішньою, називають <i>відкритою</i>.
❸ Межа множини. Точку M називають <i>межовою</i> точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки, які належать D, так і точки, які їй не належать.	❹ Межа множини. Множина всіх межових точок множини D утворює її <i>межу</i> ∂D.
❺ Гранична точка. Точку M називають <i>граничною</i> точкою множини D, якщо кожен її окіл містить нескінченну кількість точок множини D.	❻ Замкнена множина. Множину $\bar{D}$, яка містить усі свої межові точки, називають <i>замкненою</i>. $\bar{D} = D \cup \partial D.$

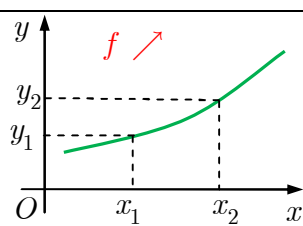
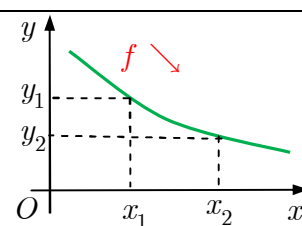
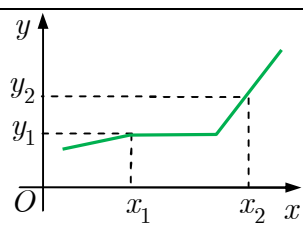
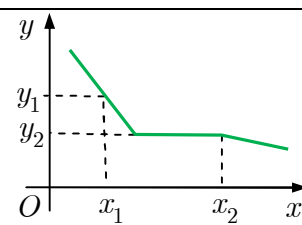
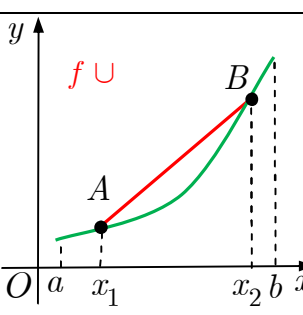
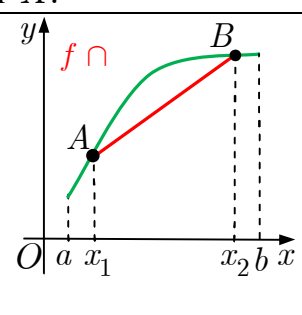
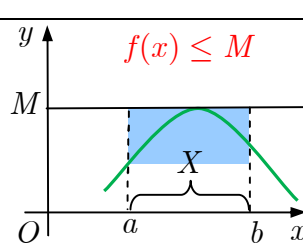
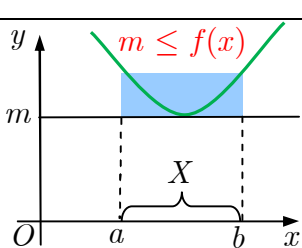
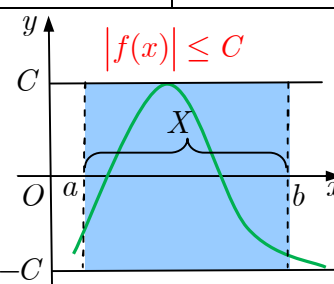
Розділ 5. ФУНКЦІЇ

5.1. Функція однієї змінної

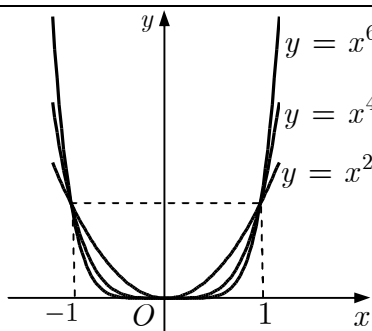
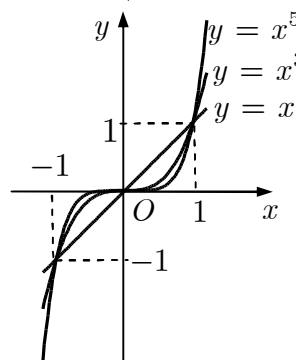
❶ Функція $f(x), x \in X \subset \mathbb{R}$	
❷ Графік функції $f(x), x \in X$. $\Gamma = \{M(x; y) \mid x \in X, y = f(x)\},$ $\Gamma \subset X \times Y$	
❸ Рівність функцій $f_1(x), x \in X_1$ і $f_2(x), x \in X_2$	1) $X_1 = X_2;$ 2) $\forall x \in X_1 : f_1(x) = f_2(x)$
❹ Сума (різниця) функцій $f(x)$ та $g(x)$	$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$ $x \in D(f) \cap D(g)$
❺ Добуток функцій $f(x)$ та $g(x)$	$(fg)(x) = f(x)g(x),$ $x \in D(f) \cap D(g)$
❻ Частка функцій $f(x)$ та $g(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$ $x \in D(f) \cap D(g), g(x) \neq 0$
❼ Складена функція f від g g — внутрішня функція, f — зовнішня функція	$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$ $x \in D(g) \cap \{x \mid g(x) \in D(f)\}$ 
❽ Обернена функція. Нехай функція f установлює взаємно однозначну відповідність між множинами D та E . Оберненою до f функцією називають функцію f^{-1} таку, що: $x = f^{-1}(y), y \in E.$ Функцію, яка має обернену, називають <i>оборотною</i> .	 
Графіки взаємно обернених функцій симетричні щодо прямої $y = x$.	Якщо функція зростає (спадає) на інтервалі, то вона має обернену функцію на цьому інтервалі, яка зростає (спадає).

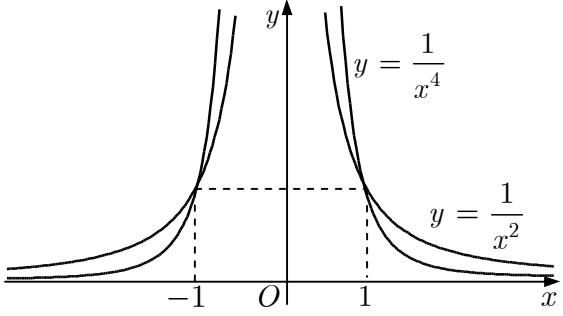
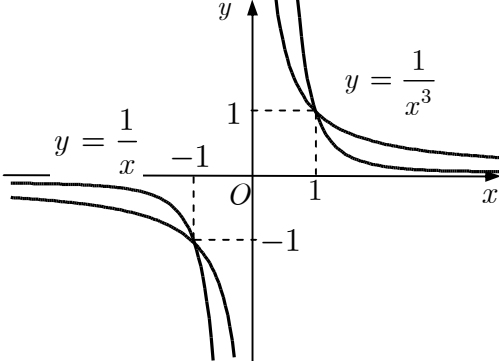
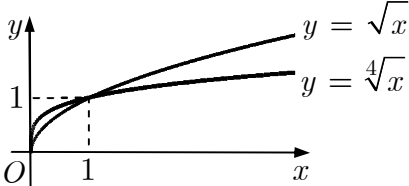
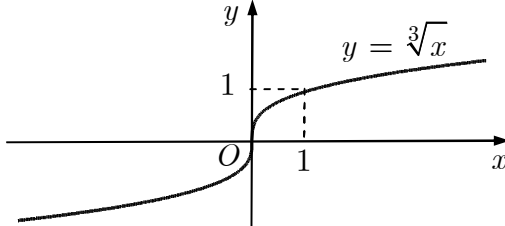
5.2. Основні характеристики функції

❶ Нулі і проміжки знакосталості функції. $X_- = \{x \mid f(x) < 0\};$ $X_0 = \{x \mid f(x) = 0\};$ $X_+ = \{x \mid f(x) > 0\}$	
❷ Парна функція. $\forall x \in D(f) : -x \in D(f) \text{ і } f(-x) = f(x)$ Графік парної функції симетричний щодо осі Oy.	
❸ Непарна функція. $\forall x \in D(f) : -x \in D(f) \text{ і } f(-x) = -f(x)$ Графік непарної функції симетричний щодо початку координат.	
❹ Властивості парних і непарних функцій	
❶ Зміна знаку перед функцією не змінює її парності (непарності). ❷ Сума парних функцій є парною функцією. ❸ Сума непарних функцій є непарною функцією.	❹ Добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією. ❺ Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.
❺ Періодична функція з періодом T $\exists T \neq 0 \quad \forall x \in D(f) : x + T \in D(f)$ і $f(x + T) = f(x)$ Графік T-періодичної функції складається з повторюваних фрагментів графіка функції на проміжку $[0; T]$.	
Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом T, то функція $Af(kx + b)$ також є періодичною з періодом $\frac{T}{ k }$.	

⑥ Монотонні функції			
① Зростаюча функція на множині X		② Спадає функція на множині X	
$\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$		$\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$	
③ Неспадає функція на множині X		④ Незростаюча функція на множині X	
$\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2)$		$\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$	
Функції зростаючі, спадні, неспадні і незростаючі на множині X називають монотонними на цій множині.			
⑦ Опукла донизу (угнута) функція на X .		⑧ Опукла догори (опукла) функція на множині X .	
$\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 < x_2 \Rightarrow$ хорда AB не нижче за графік $y = f(x)$		$\forall x_1, x_2 \in X :$ $x_1 < x_2 \Rightarrow$ хорда AB не вище за графік $y = f(x)$	
⑨ Обмежені функції			
① Функція обмежена зверху на множині X		② Функція обмежена знизу на множині X	
$\exists M \in \mathbb{R} :$ $\forall x \in X \Rightarrow$ $f(x) \leq M$		$\exists m \in \mathbb{R} :$ $\forall x \in X \Rightarrow$ $m \leq f(x)$	
③ Обмежена функція на множині X $\exists C > 0 : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq C$			

5.3. Степенева функція

① Степінь x^α	x — основа степеня; α — показник степеня	
① натуральний показник $n \in \mathbb{N}$	$x^1 = x$ $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ разів}}$	$0^n = 0;$ $1^n = 1$
② нульовий показник	$x^0 = 1, x \neq 0$	
③ від'ємний показник $(-n) \in \mathbb{Z}_-$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$	
④ дробовий показник $(m, n \in \mathbb{N})$	$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} \quad (n \neq 1)$	
② Арифметичний корінь $\sqrt[n]{x}$	x — підкореневий вираз; n — показник степеня	
з невід'ємного числа x	$a = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow a^n = x, x \geq 0$	
з від'ємного числа x	$^{2n-1}\sqrt{x} = -^{2n-1}\sqrt{-x}, x < 0$	
	$^{2n}\sqrt{x}, x < 0$ — не існує	
③ Окремі випадки степеневої функції.		
① Степенева функція $y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [0; +\infty)$. Функція парна. Графіком є парабола порядку $2n$.		
② Степенева функція $y = x^{2n-1}$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; зростає на $\mathbb{R}$. Графік — парабола порядку $2n - 1$. (для $n = 1$ графіком є пряма).		

③ Степенева функція $y = \frac{1}{x^{2n}}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0; +\infty)$. Функція парна. Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.	
④ Степенева функція $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція непарна; спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.	
⑤ Степенева функція $y = \sqrt[2n]{x}$. $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$. Функція зростає на $[0; +\infty)$.	
⑥ Степенева функція $y = \sqrt[2n-1]{x}$. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; зростає на $\mathbb{R}$.	
④ Піднесення до степеня і взяття кореня є взаємно оберненими діями.	$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x , & n = 2k, \\ x, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N};$ $(\sqrt[n]{x})^n = x$
⑤ Властивості степенів. ① $x^a x^b = x^{a+b}$; ② $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$; ③ $(x^a)^b = x^{ab}$; ④ $(xy)^a = x^a y^a$; ⑤ $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$	⑥ Властивості коренів ($x \geq 0, y \geq 0$). ① $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$; ② $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$; ③ $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$; ④ $\sqrt[n]{x^n y} = x \sqrt[n]{y}$; ⑤ $x \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n y}$

7 Основні степеневі рівняння і нерівності ($n \in \mathbb{N}$)

	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$	
$x^{2n} < a$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} x > -\sqrt[2n]{a}, \\ x < \sqrt[2n]{a} \end{cases}$	
$x^{2n} = a$	$\emptyset$	$x = 0$	$x = \pm \sqrt[2n]{a}$	
$x^{2n} > a$	$\mathbb{R}$	$x \neq 0$	$\begin{cases} x < -\sqrt[2n]{a}, \\ x > \sqrt[2n]{a} \end{cases}$	
$\sqrt[2n]{x} < a$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < a^{2n} \end{cases}$	
$\sqrt[2n]{x} = a$	$\emptyset$	$x = 0$	$x = a^{2n}$	
$\sqrt[2n]{x} > a$	$x \geq 0$	$x > 0$	$x > a^{2n}$	
$x^{2n+1} < a$	$x < \sqrt[2n+1]{a}$			
$x^{2n+1} = a$	$x = \sqrt[2n+1]{a}$			
$x^{2n+1} > a$	$x > \sqrt[2n+1]{a}$			
$\sqrt[2n+1]{x} < a$	$x < a^{2n+1}$			
$\sqrt[2n+1]{x} = a$	$x = a^{2n+1}$			
$\sqrt[2n+1]{x} > a$	$x > a^{2n+1}$			

8 Рівносильність деяких ірраціональних рівнянь та нерівностей

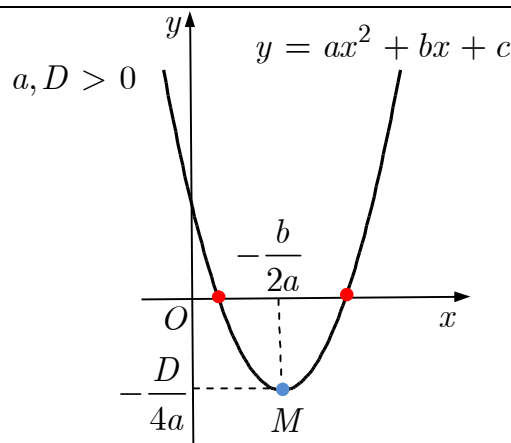
① $f^{2n}(x) = g^{2n}(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) ;$	⑧ $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x);$
② $f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$	⑨ $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > f(x); \end{cases}$
③ $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$	⑩ $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}; \end{cases}$
④ $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x);$	⑪ $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$
⑤ $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases}$	
⑥ $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < (g(x))^{2n+1};$	
⑦ $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > (g(x))^{2n+1};$	

5.4. Стала, лінійна і дробово-лінійна функції

❶ Стала функція $y = a$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \{a\}$. Функція парна. Графік — горизонтальна пряма.																	
❷ Лінійна функція $y = ax + b$ ($a \neq 0$). $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$. Графіком є пряма лінія з кутовим коефіцієнтом $k = a = \operatorname{tg} \alpha$.	$a > 0$																
❸ Лінійне рівняння і нерівності																	
<table><tr><td></td><td>$a < 0$</td><td>$a > 0$</td></tr><tr><td>$ax + b > 0$</td><td>$x < -\frac{b}{a}$</td><td>$x > -\frac{b}{a}$</td></tr><tr><td>$ax + b = 0$</td><td colspan="2">$x = -\frac{b}{a}$</td></tr><tr><td>$ax + b < 0$</td><td>$x > -\frac{b}{a}$</td><td>$x < -\frac{b}{a}$</td></tr></table>		$a < 0$	$a > 0$	$ax + b > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$	$ax + b = 0$	$x = -\frac{b}{a}$		$ax + b < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$x < -\frac{b}{a}$	<table><tr><td>$a < 0$</td><td>$a > 0$</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	$a < 0$	$a > 0$		
	$a < 0$	$a > 0$															
$ax + b > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$															
$ax + b = 0$	$x = -\frac{b}{a}$																
$ax + b < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$x < -\frac{b}{a}$															
$a < 0$	$a > 0$																
❹ Дробово-лінійна функція $y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - (ad)/c}{cx + d} \quad (c \neq 0).$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}.$ Графік — гіпербола. Вертикальна асимптота $x = -\frac{d}{c}$, горизонтальна асимптота $y = \frac{a}{c}$.	$a > 0$																

5.5. Квадратична функція

❶ Квадратична функція
 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
 $D(f) = \mathbb{R}$.
 Графіком є парабола.



❷ Дискримінант

$$D = b^2 - 4ac$$

❸ Виділення повного квадрату

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}$$

❹ Корені квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

❺ Розклад на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

❻ Теорема Вієта

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

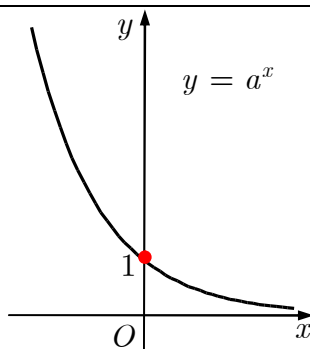
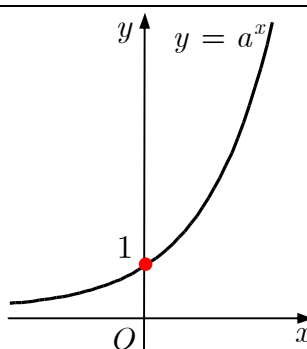
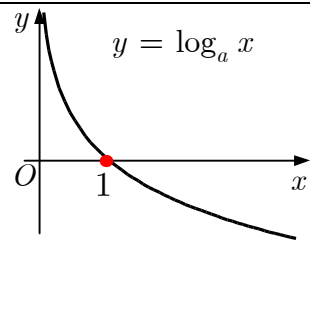
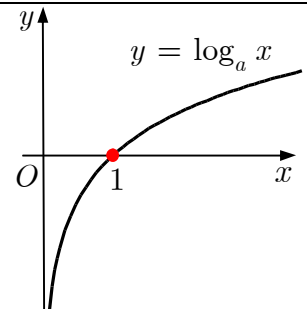
❼ Квадратні рівняння і нерівності ($x_1 < x_2$)

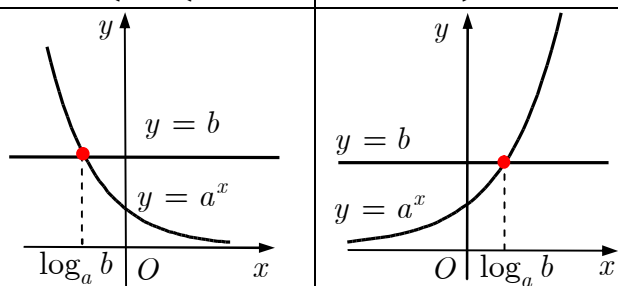
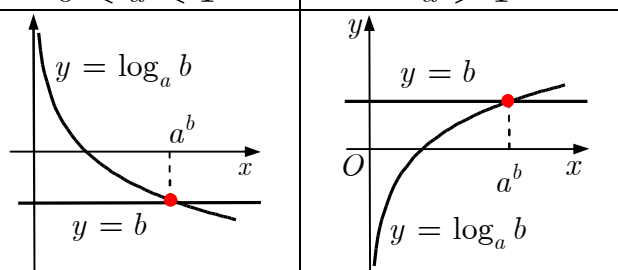
	$a < 0$			$a > 0$		
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$ax^2 + bx + c < 0$	$\mathbb{R}$	$x \neq x_1$	$\begin{cases} x < x_1, \\ x > x_2 \end{cases}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} x > x_1, \\ x < x_2 \end{cases}$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\emptyset$	$x = x_1$	$\{x_1, x_2\}$	$\emptyset$	$x = x_1$	$\{x_1, x_2\}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} x > x_1, \\ x < x_2 \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$x \neq x_1$	$\begin{cases} x < x_1, \\ x > x_2 \end{cases}$
проміжки знакосталості функції $y = ax^2 + bx + c$						

5.6. Многочлени

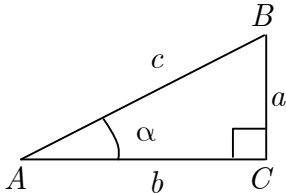
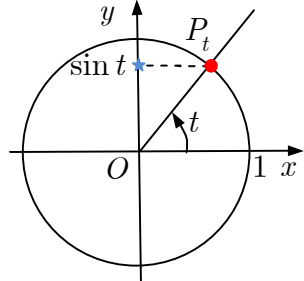
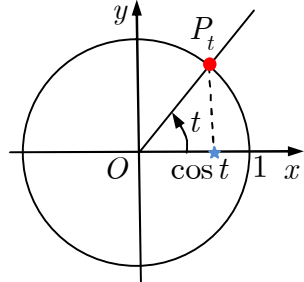
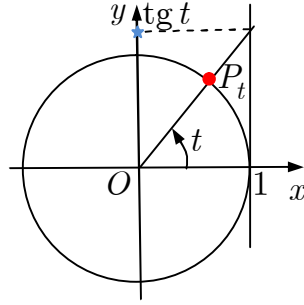
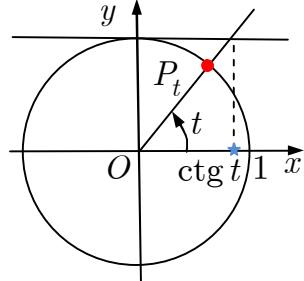
❶ Многочлен n-го степеня $(a_0 \neq 0, n \in \mathbb{N})$	$P_n(x) =$ $= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — коефіцієнти многочлена; a_0 — старший коефіцієнт;	a_0x^n — старший член многочлена; a_n — вільний член многочлена.
❷ Тотожна рівність многочленів. $P_n(x) \equiv Q_m(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : P_n(x) = Q_m(x).$	Два многочлени тотожно рівні, якщо вони однакового степеня і мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.
❸ Корені (нулі) многочлена	
❶ x_0 — корінь многочлена $P_n(x)$	$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$
❷ x_0 — корінь кратності k	$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x)$
❹ Основна теорема алгебри. Многочлен степеня n може мати не більше як n коренів.	Многочлен непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.
❺ Раціональні корені многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$	
Раціональними коренями многочлена з цілими коефіцієнтами можуть бути лише числа $\frac{m}{p}$	$m \in \mathbb{Z}$ — дільник a_n , $p \in \mathbb{Z}$ — дільник a_0 , $\text{НСД}(m, p) = 1$.
❻ Ділення многочлена на многочлен. $\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{B_m(x)}$	$Q_{n-m}(x)$ — частка ($n \geq m$); $R_k(x)$ — остача ($k < m$)
❼ Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює значенню цього многочлена для $x = a$: $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + P_n(a)$	
❽ Схема Горнера	
$b_0 = a_0;$ $b_1 = a_1 + \alpha b_0;$... $b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2};$ $r = a_n + \alpha b_{n-1}$	
$P_n(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n, Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}, r = P_n(a)$	

5.7. Показникова і логарифмічна функції

❶ Логарифм. Логарифмом додатного числа x за основою a ($a > 0, a \neq 1$) називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб одержати число x , і позначають $\log_a x$.	$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x, x > 0$	
	① $\log_a 1 = 0$;	② $\log_a a = 1$
❷ Показникова функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0; +\infty)$. Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$ Горизонтальна асимптота $y = 0$.	$0 < a < 1$	$a > 1$
		
❸ Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$. $D(f) = (0; +\infty), E(f) = \mathbb{R}$. Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$ Вертикальна асимптота $x = 0$.	$0 < a < 1$	$a > 1$
		
❹ Окремі випадки логарифмів і показникової функції		
① Десятковий логарифм	$\lg x = \log_{10} x$	
② Натуральний логарифм	$\ln x = \log_e x$	
③ Експоненціальна функція	$y = e^x$	
❺ Властивості логарифмів ($x > 0, y > 0$)		
① основна логарифмічна тотожність	$a^{\log_a b} = b$	
② логарифм добутку	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	
③ логарифм частки	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	

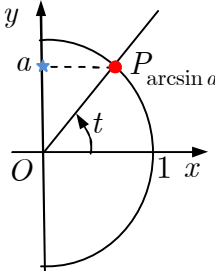
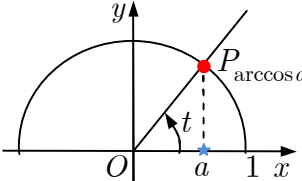
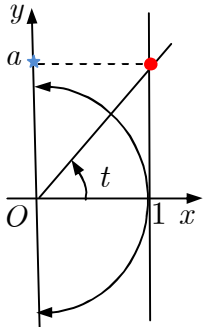
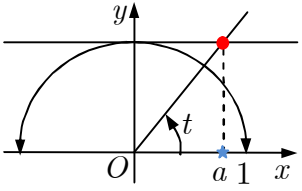
④ логарифм степеня		$\log_{a^r} x^p = \frac{p}{r} \log_a x$	
⑤ логарифм оберненого числа		$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$	
⑥ формула переходу до іншої основи		$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $= \frac{\ln x}{\ln a}$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
⑥ Логарифмічна і показникова функції є <i>взаємно оберненими</i>		$\log_a a^x = x;$ $a^{\log_a x} = x, x > 0$	
⑦ Зв'язок між степеневою, показниковою і логарифмічною функціями		$x^\alpha = a^{\alpha \log_a x},$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$	
⑧ Основні показникові рівняння і нерівності			
	$b \leq 0$	$b > 0$	$0 < a < 1$
		$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x < b$	$\emptyset$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^x = b$	$\emptyset$	$x = \log_a b$	
$a^x > b$	$\mathbb{R}$	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$
			
⑨ Основні логарифмічні рівняння і нерівності			
	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x < b$	$x > a^b$	$0 < x < a^b$	$a > 1$
$\log_a x = b$	$x = a^b$		
$\log_a x > b$	$0 < x < a^b$	$x > a^b$	
			
⑩ Показникові і логарифмічні рівняння і нерівності			
① $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$		④ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	
$0 < a < 1$		$a > 1$	
② $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$		⑤ $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$	
③ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$		⑥ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	

5.8. Тригонометричні функції

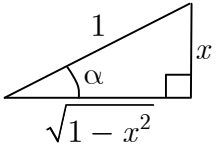
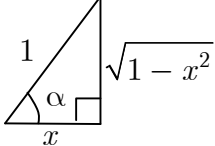
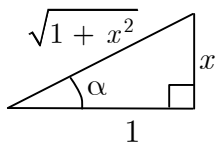
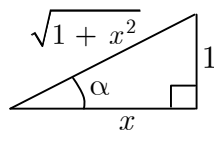
❶ Прямокутний трикутник. AB — гіпотенуза; AC — прилеглий катет; BC — протилежний катет		
❷ Синус. Синусом числа t називають ординату точки P_t одиничного кола і позначають $\sin t$. Період синуса 2π: $\sin(t + 2\pi k) = \sin t, k \in \mathbb{Z}$		$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$
❸ Косинус. Косинусом числа t називають абсцису точки P_t одиничного кола і позначають $\cos t$. Період косинуса 2π: $\cos(t + 2\pi k) = \cos t, k \in \mathbb{Z}$		$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$
❹ Тангенс. Тангенсом числа t називають ординату точки перетину прямої $x = 1$ (осі тангенсів) із променем OP_t. Період тангенса π: $\operatorname{tg}(t + \pi k) = \operatorname{tg} t, k \in \mathbb{Z}$		$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$
❺ Котангенс. Котангенсом числа t називають абсцису точки перетину прямої $y = 1$ (осі котангенсів) із променем OP_t. Період котангенса π: $\operatorname{ctg}(t + \pi k) = \operatorname{ctg} t, k \in \mathbb{Z}$		$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

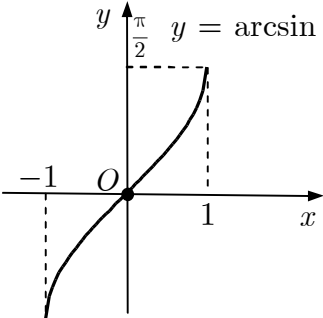
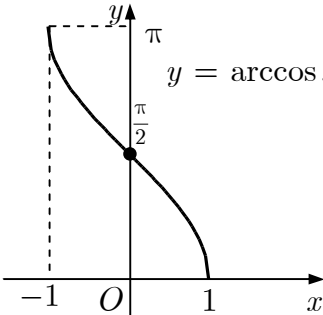
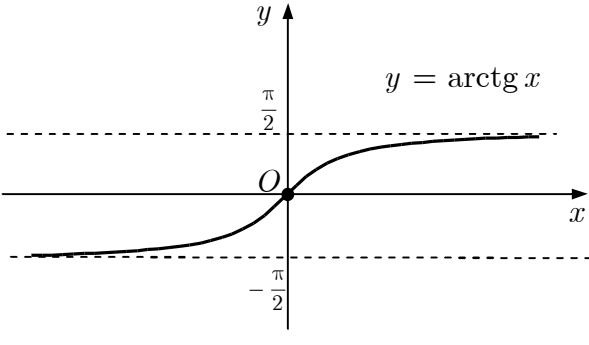
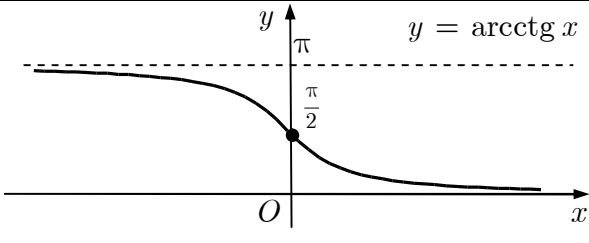
⑥ Зв'язок між тригонометричними функціями	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
⑦ Функція $y = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1; 1]$. Функція непарна; періодична з періодом $T = 2\pi$; обмежена: $ \sin x \leq 1$. Графік — <i>синусоїда</i> .		
⑧ Функція $y = \cos x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1; 1]$. Функція парна; періодична з періодом $T = 2\pi$; обмежена: $ \cos x \leq 1$. Графік — <i>косинусоїда</i> .		
⑨ Функція $y = \operatorname{tg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; періодична з періодом $T = \pi$; зростає на $D(f)$. Графік — <i>тангенсоїда</i> . Вертикальні асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.		
⑩ Функція $y = \operatorname{ctg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}, E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна; періодична з періодом $T = \pi$; спадає на $D(f)$. Графік — <i>котангенсоїда</i> . Вертикальні асимптоти $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.		

5.9. Обернені тригонометричні функції

❶ Арксинус. Арксинусом числа a називають число $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a, і позначають $\arcsin a$.	$\arcsin a = t \Rightarrow$ $\sin t = a$	
❷ Арккосинус. Арккосинусом числа a називають число $t \in [0; \pi]$, косинус якого дорівнює a і позначають $\arccos a$.	$\arccos a = t \Rightarrow$ $\cos t = a$	
❸ Арктангенс. Арктангенсом числа a називають число $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a, і позначають $\operatorname{arctg} a$.	$\operatorname{arctg} a = t \Rightarrow$ $\operatorname{tg} t = a$	
❹ Арккотангенс. Арккотангенсом числа a називають число $t \in (0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a, і позначають $\operatorname{arcctg} a$.	$\operatorname{arcctg} a = t \Rightarrow$ $\operatorname{ctg} t = a$	

❺ Формули значень тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$\sin$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x
				

6 Функція $y = \arcsin x$. $D(f) = [-1; 1], E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$ Функція непарна; зростає на $D(f)$.	
7 Функція $y = \arccos x$. $D(f) = [-1; 1], E(f) = [0; \pi].$ Функція спадає на $D(f)$.	
8 Функція $y = \operatorname{arctg} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$ Функція непарна; зростає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y = \pm \frac{\pi}{2}$.	
9 Функція $y = \operatorname{arcctg} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0; \pi).$ Функція спадає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y = 0$, $y = \pi$.	
10 Прямі і обернені тригонометричні функції є <i>взаємно оберненими</i>	
① $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1; 1],$	$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
② $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1; 1]$	$\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi]$
③ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
④ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0; \pi)$

5.10. Властивості тригонометричних і обернених тригонометричних функцій

❶ Знаки тригонометричних функцій

$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$

❷ Парність (непарність) функцій

① $\sin(-x) = -\sin x$;

② $\cos(-x) = \cos x$;

③ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;

④ $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;

⑤ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

⑥ $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

❸ Формули зведення

	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi - x$	$\pi + x$
$\sin$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\cos$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
tg	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$
ctg	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

① $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$;

② $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$;

③ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

④ $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

❹ «Стандартні» значення

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

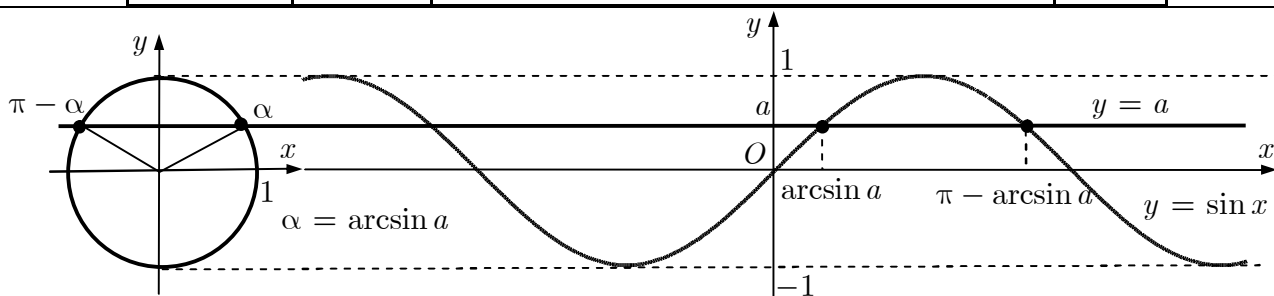
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
$\arcsin$	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	—
$\arccos$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	—
arctg	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

⑤ Основні тригонометричні тотожності. ① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; ② $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$; ③ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; ④ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	⑥ Формули додавання. ① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$; ② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$; ③ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$; ④ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$
⑦ Формули кратних аргументів. ① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; ② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; ③ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$; ④ $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$	⑧ Формули зниження степеня. ① $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; ② $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
⑨ Формули для універсальної тригонометричної підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{ або } u = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$	① $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2u}{u^2+1}$; ② $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{u^2-1}{u^2+1}$
⑩ Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. ① $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$; ② $2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$; ③ $2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$	
⑪ Перетворення суми тригонометричних функцій у добуток. ① $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$; ② $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$; ③ $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$	
⑫ Формула доповняльного кута. $A \sin \omega t + B \cos \omega t = M \sin(\omega t + \alpha)$	$M = \sqrt{A^2 + B^2}$ — амплітуда; α — доповняльний кут: $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{A}{M}, \\ \sin \alpha = \frac{B}{M} \end{cases}$

5.11. Основні тригонометричні рівняння

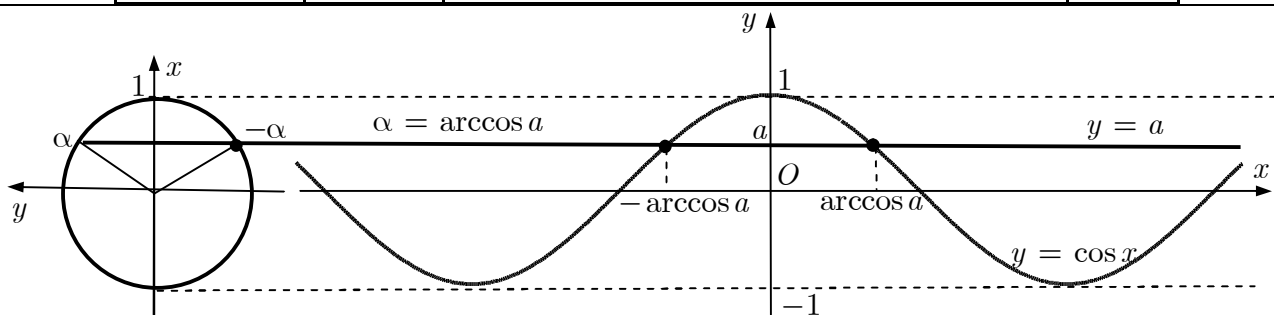
❶ Рівняння і нерівності з синусом

	$a < -1$	$ a \leq 1$	$a > 1$
$\sin x < a$	$\emptyset$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$	$\mathbb{R}$
$\sin x = a$	$\emptyset$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\emptyset$
$\sin x > a$	$\mathbb{R}$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$	$\emptyset$
$\sin x = -1$		$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\sin x = 0$		$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\sin x = 1$		$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	



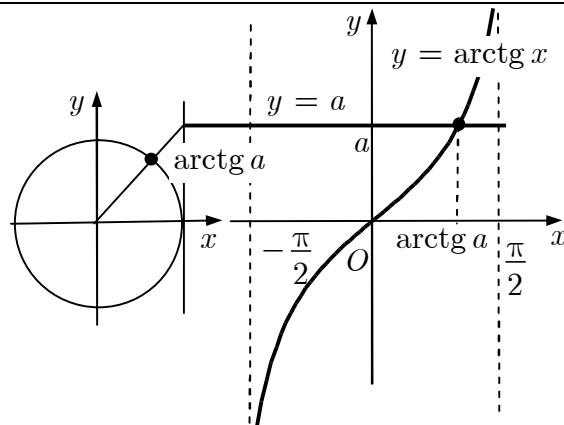
❷ Рівняння і нерівності з косинусом

	$a < -1$	$ a \leq 1$	$a > 1$
$\cos x < a$	$\emptyset$	$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$	$\mathbb{R}$
$\cos x = a$	$\emptyset$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\emptyset$
$\cos x > a$	$\mathbb{R}$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n$	$\emptyset$
$\cos x = -1$		$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\cos x = 0$		$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$\cos x = 1$		$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	

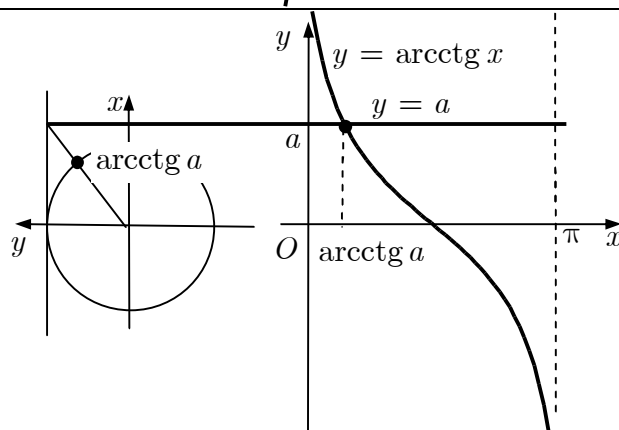


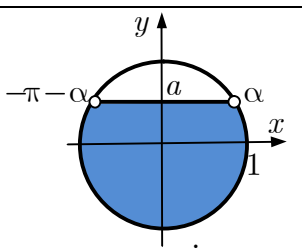
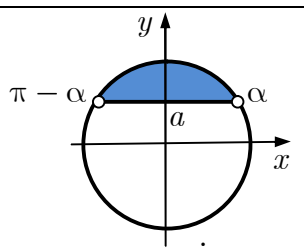
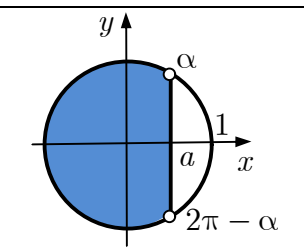
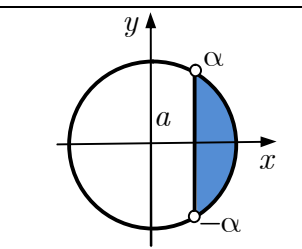
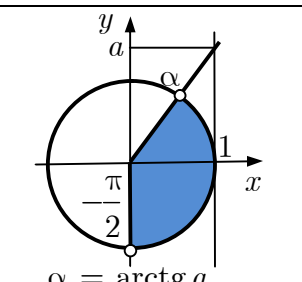
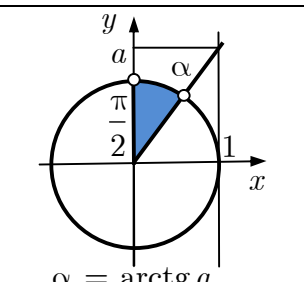
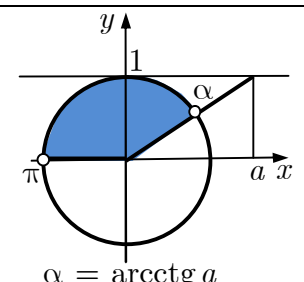
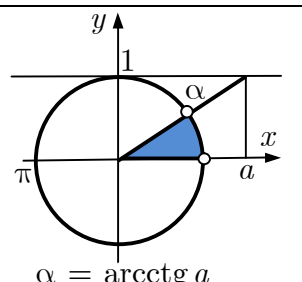
③ Рівняння і нерівності з тангенсом

$\operatorname{tg} x < a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x > a$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

**④ Рівняння і нерівності з котангенсом**

$\operatorname{ctg} x < a$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi(n+1)$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x > a$	$\pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



$\sin x < a$	$\sin x > a$	$\cos x < a$	$\cos x > a$
			
$\operatorname{tg} x < a$	$\operatorname{tg} x > a$	$\operatorname{ctg} x < a$	$\operatorname{ctg} x > a$
			

5.12. Гіперболічні функції

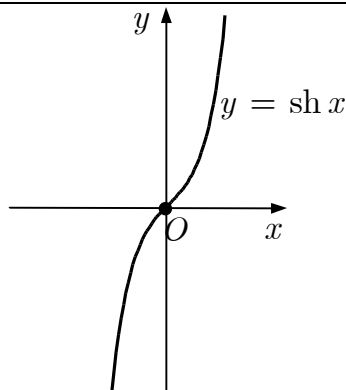
❶ Гіперболічний синус

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}.$$

Функція непарна.

Зростає на $\mathbb{R}$.

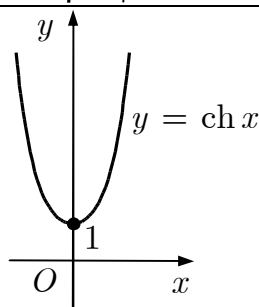


❷ Гіперболічний косинус

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [1; +\infty).$$

Функція парна.



❸ Гіперболічний тангенс

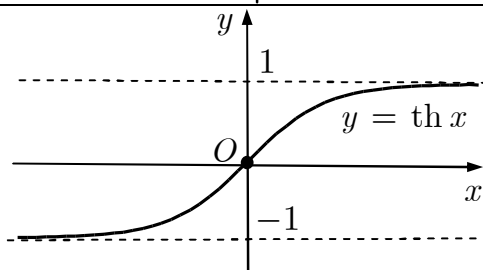
$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

$$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (-1; 1).$$

Функція непарна;

зростає на $\mathbb{R}$.

Графік має горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.



❹ Гіперболічний котангенс

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

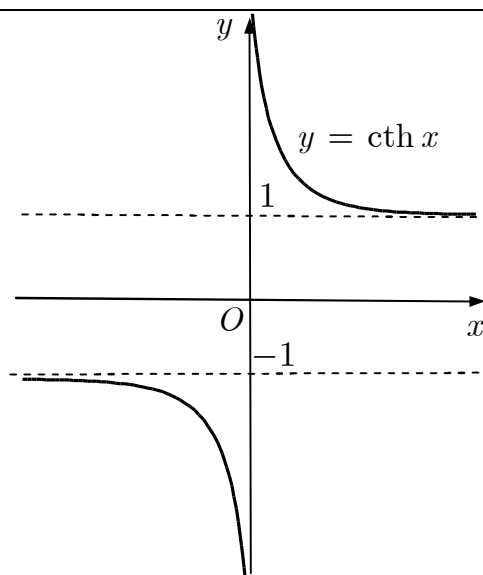
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus [-1; 1].$$

Функція непарна;

спадає на $D(f)$.

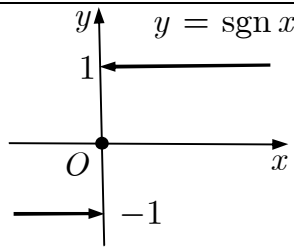
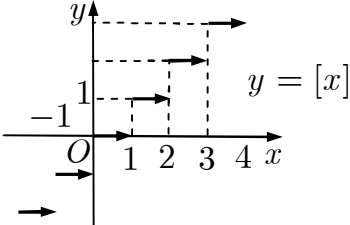
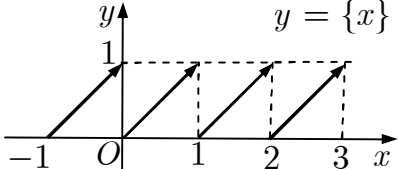
Вертикальна асимптота $x = 0$;

горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.

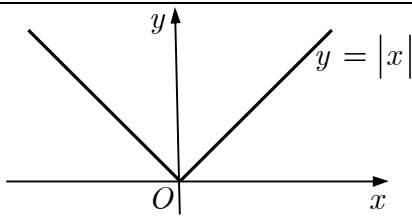
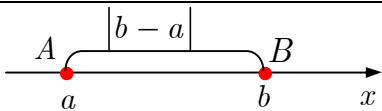
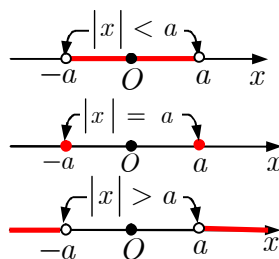
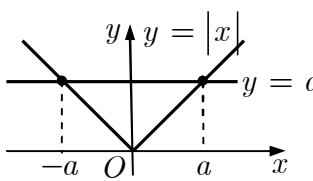


⑤ Парність (непарність) функцій ① $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; ② $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$; ③ $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$; ④ $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$	⑥ «Стандартні» значення. $\operatorname{sh} 0 = 0$; $\operatorname{ch} 0 = 1$; $\operatorname{th} 0 = 0$
⑦ Основні тотожності. ① $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; ② $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1$; ③ $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; ④ $1 - \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	⑧ Формули додавання. ① $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$; ② $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x$; ③ $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$; ④ $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}$
⑨ Формули кратних аргументів. ① $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$; ② $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; ③ $\operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x$; ④ $\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$	⑩ Формули зниження степеня. ① $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$; ② $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$
⑪ Формули для універсальної гіперболічної підстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2} \text{ або } u = \operatorname{cth} \frac{x}{2}$	① $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2u}{u^2-1}$; ② $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{u^2+1}{u^2-1}$
⑫ Формули перетворення добутку гіперболічних функцій у суму. ① $2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)$; ② $2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)$; ③ $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)$	
⑬ Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток. ① $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}$; ② $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$; ③ $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$	

5.13. Класифікація функцій

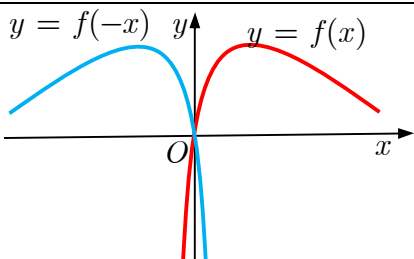
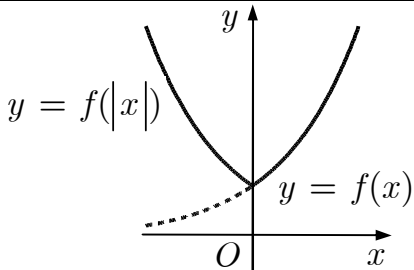
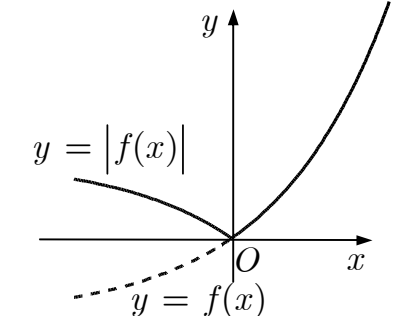
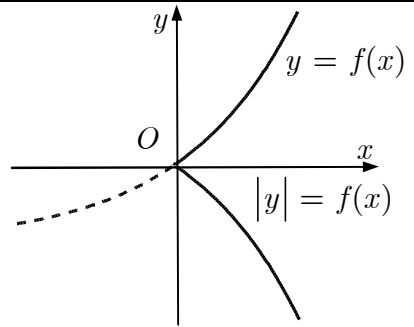
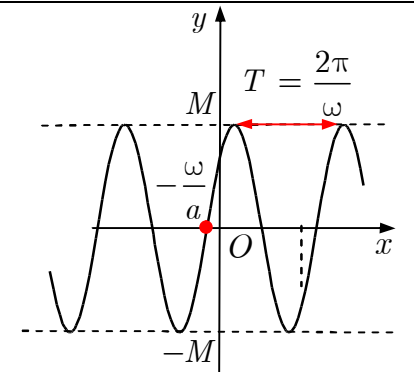
❶ Основні елементарні функції. До основних елементарних функцій належать: стала, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні й обернені тригонометричні функції.	❷ Елементарна функція. Функцію, одержану скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над основними елементарними функціями, називають <i>елементарною</i>.
❸ Раціональні функції. Многочлен $P_n(x)$ називають <i>цілою раціональною</i> функцією. Функцію $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають <i>дробово-раціональною</i> функцією.	❹ Ірраціональні функції. Функцію, утворену скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називають <i>ірраціональною</i>.
❺ Алгебричні функції. Раціональну або ірраціональну функцію називають <i>алгебричною</i>.	❻ Трансцендентна функція. Елементарну функцію, яка не є алгебричною називають <i>трансцендентною</i>.
❺ Функція, задана різними аналітичними виразами	$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1, \\ \dots & \dots \\ f_n(x), & x \in X_n \end{cases}$
❽ Функція знак числа (сигнум) $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \{-1, 0, 1\}$. Функція непарна.	
❾ Ціла частина числа $y = [x] = \begin{cases} x, & x = n \in \mathbb{Z}, \\ n, & n < x < n + 1, \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{Z}$.	
❿ Дробова частина числа $y = \{x\} = x - [x]$ $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [0; 1)$. Функція періодична з періодом $T = 1$.	

5.14. Функція модуль

❶ Функція $y = x = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [0; +\infty)$. Функція парна.																	
❷ Властивості модуля. ❶ $x \geq 0$; ❷ $x = -x$; ❸ $x = y \Rightarrow x = y$; ❹ $- x \leq x \leq x$; ❺ $xy = x y$;	❻ $\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y }$; ❼ $x + y \leq x + y$ (нерівність трикутника); ❽ $x - y \leq x - y \leq x + y$																
❸ Геометричний зміст модуля. Віддаль між точками $A(a)$ та $B(b)$ числової прямої дорівнює $b - a$.																	
❹ Основні рівняння і нерівності з модулем.																	
<table><tr><td></td><td>$a < 0$</td><td>$a = 0$</td><td>$a > 0$</td></tr><tr><td>$x < a$</td><td>$\emptyset$</td><td>$\emptyset$</td><td>$\begin{cases} x > -a, \\ x < a \end{cases}$</td></tr><tr><td>$x = a$</td><td>$\emptyset$</td><td>$x = 0$</td><td>$\{-a, a\}$</td></tr><tr><td>$x > a$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$x \neq 0$</td><td>$\begin{cases} x < -a, \\ x > a \end{cases}$</td></tr></table>		$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$	$ x < a$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} x > -a, \\ x < a \end{cases}$	$ x = a$	$\emptyset$	$x = 0$	$\{-a, a\}$	$ x > a$	$\mathbb{R}$	$x \neq 0$	$\begin{cases} x < -a, \\ x > a \end{cases}$	 
	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$														
$ x < a$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\begin{cases} x > -a, \\ x < a \end{cases}$														
$ x = a$	$\emptyset$	$x = 0$	$\{-a, a\}$														
$ x > a$	$\mathbb{R}$	$x \neq 0$	$\begin{cases} x < -a, \\ x > a \end{cases}$														
❺ Рівняння і нерівності з модулем																	
❶ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ ❷ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	❸ $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$ ❹ $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$ ❺ $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$																

5.15. Геометричні перетворення графіків функцій

❶ Паралельне перенесення вздовж осі Ox. Щоб побудувати графік $y = f(x - a)$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a (ліворуч для $a < 0$, праворуч для $a > 0$).	<table border="1"> <thead> <tr> <th>$a < 0$</th><th>$a > 0$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	$a < 0$	$a > 0$		
$a < 0$	$a > 0$				
❷ Паралельне перенесення вздовж осі Oy. Щоб побудувати графік $y = f(x) + b$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b (вниз для $b < 0$, вгору для $b > 0$).	<table border="1"> <thead> <tr> <th>$b < 0$</th><th>$b > 0$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	$b < 0$	$b > 0$		
$b < 0$	$b > 0$				
❸ Стискання (розтягування) вздовж осі Ox. Щоб побудувати графік $y = f(kx)$, графік $y = f(x)$ розтягують у $\frac{1}{k}$ разів ($0 < k < 1$) уздовж осі Ox чи стискають у k разів ($k > 1$) вздовж осі Ox					
❹ Стискання (розтягування) вздовж осі Oy. Щоб побудувати графік $y = cf(x)$, графік $y = f(x)$ стискають в $\frac{1}{c}$ разів ($0 < c < 1$) вздовж осі Oy чи розтягують у c разів ($c > 1$) вздовж осі Oy.					
❺ Дзеркальне відбиття щодо осі Ox. Щоб побудувати графік $y = -f(x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відображають щодо осі Ox.					

❸ Дзеркальне відбиття щодо осі Oy. Щоб побудувати графік $y = f(-x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відображують щодо осі Oy.	
❹ Графік функції $y = f(x)$. Щоб побудувати графік $y = f(x)$, частину графіка $y = f(x)$, $x \geq 0$, доповнюють його відбитком щодо осі Oy.	
❺ Графік функції $y = f(x)$. Щоб побудувати графік $y = f(x)$, частину графіка $y = f(x)$, $y \geq 0$, не міняють, а частину графіка $y = f(x)$, $y < 0$, відбивають щодо осі Ox.	
❻ Графік рівняння $y = f(x)$. Щоб побудувати графік $y = f(x)$, беруть частину графіка $y = f(x)$, $y \geq 0$, і доповнюють її відбитком щодо осі Ox.	
❼ Гармонічне коливання $y = M \sin(\omega t + \alpha)$, де t — час, $M > 0$ — амплітуда, $\omega > 0$ — частота (колова), $\omega t + \alpha$ — фаза, α — початкова фаза.	

Розділ 6. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

6.1. Числові послідовності

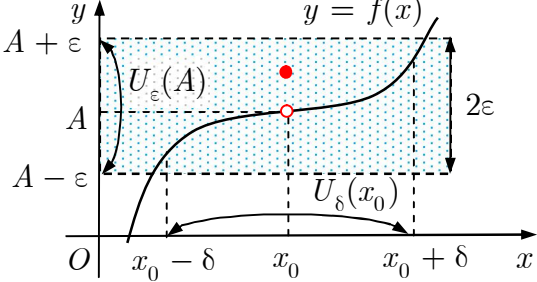
❶ Числова послідовність. Числовою послідовністю $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots = \{x_n\}, n \in \mathbb{N},$ називають числову функцію $x_n = f(n)$ означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$.		$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — члени послідовності; $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, — n-й (загальний) член послідовності; Рекурентна формула — формула, яка виражає будь-який член послідовності, через один чи кілька попередніх членів.
❷ Арифметична прогресія		$\{a_n\} = a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$
❶ Означення (d — різниця прогресії)		$a_{n+1} = a_n + d$
❷ n -й член		$a_n = a_1 + d(n - 1)$
❸ Характеристична властивість		$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2$
❹ Сума n перших членів		$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$
❸ Геометрична прогресія		$\{b_n\} = b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots$
❶ Означення (q — знаменник прогресії)		$b_{n+1} = b_n q \ (b_1 \neq 0, q \neq 0)$
❷ n -й член		$b_n = b_1 q^{n-1}$
❸ Характеристична властивість		$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, n \geq 2$
❹ Сума n перших членів		$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
❹ Послідовність Фібоначчі		$\{F_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$
❶ Означення (рекурентна формула)		$F_1 = F_2 = 1,$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$
❷ n -й член $(\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ — золотий переріз)		$F_n = \frac{\varphi^n + (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$

5 Обмежена послідовність $\{x_n\}$	$\exists C > 0 \quad \forall n : x_n \leq C$	
6 Монотонні послідовності ($\Delta = x_{n+1} - x_n$; $q = \frac{x_{n+1}}{x_n}, x_n > 0$)		
1 Зростаюча послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \nearrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$	
	$\Delta > 0$	$q > 1$
2 Неспадаюча послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$	
	$\Delta \geq 0$	$q \geq 1$
3 Спадаюча послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \searrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$	
	$\Delta < 0$	$q < 1$
4 Незростаюча послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$	
	$\Delta \leq 0$	$q \leq 1$

6.2. Границя послідовності

1 Скінченна границя числової послідовності x_n. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n - a < \varepsilon.$	2 Нескінченна границя числової послідовності x_n. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall E > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n > E.$
3 Збіжні і розбіжні послідовності. Послідовність $\{x_n\}$ називають збіжною, якщо вона має скінченну границю a , і розбіжною, якщо вона має нескінченну границю або не має границі.	
4 Необхідна ознака збіжності. Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.	5 Достатня умова збіжності (ознака Вєрштраса). Якщо монотонна послідовність обмежена, то вона збігається.
6 Число e	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
7 Сума нескінченно спадної геометричної прогресії	$S = \lim_{n \rightarrow \infty} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{b_1}{1 - q}, q < 1$

6.3. Границя функції

❶ Означення (за Коші), мовою околів $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\forall U_\varepsilon(A) \exists U_\delta(x_0) : \\ \forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$
❷ Означення (за Гейне), мовою послідовностей $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\forall \{x_n\} : x_n \in D(f), n \in \mathbb{N} : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$
❸ Означення скінченної границі (за Коші), мовою ε - δ ($x_0, A \in \mathbb{R}$) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in D(f) : \\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	
❹ Ліва границя. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x < x_0}} f(x)$	❺ Права границя. $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x > x_0}} f(x)$
❻ Критерій існування скінченної границі. Функція $f(x)$, $x \in X$, має скінченну границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні границі зліва і справа:	
❼ Властивості функцій, що мають скінченну границю	
❶ Якщо функція має границю в точці, то ця границя єдина. ❷ Функція, що має скінченну границю в точці, обмежена в деякому околі цієї точки. ❸ Якщо функція f має додатну (від'ємну) границю A в точці x_0 , то існує проколений окіл точки x_0 , в якому функція f додатна (від'ємна).	❹ Якщо в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$ і існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$ ❺ Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$ і в деякому околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$

③ Теорема про арифметичні дії з функціями, які мають скінченні границі

Якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B,$$

то:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB,$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = CA;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0;$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N};$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = A^B.$$

6.4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

① Нескінченно мала функція в точці x_0 (н. м. ф.)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$
② Нескінченно велика функція в точці x_0 (н. в. ф.)	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (або } \pm \infty)$
③ Властивості нескінченно малих функцій ($\alpha(x) \rightarrow 0, \beta(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$)	
① сума н. м. ф.	$\alpha(x) + \beta(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$
② добуток н. м. ф.	$\alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$
③ добуток н. м. ф. на обмежену в околі точки x_0 функцію $f(x)$	$\alpha(x)f(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$
④ частка н. м. ф. і функції $f(x)$, яка має ненульову границю	$\frac{\alpha(x)}{f(x)} \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$
⑤ зв'язок між н. м. ф. і н. в. ф.	$\frac{1}{\alpha(x)} \rightarrow \infty$, коли $x \rightarrow x_0, \alpha(x) \neq 0$
	$\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$, коли $f(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow x_0$
④ Теорема про зв'язок функцій, її границі і н. м. ф. Число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 тоді й лише тоді, коли функцію можна зобразити у вигляді	
$f(x) = A + \alpha(x),$	
де $\alpha(x)$ — н. м. ф., коли $x \rightarrow x_0$.	

∞ — н. в. ф., 0 — н. м. ф., 1 — функція, що має границю 1	
5 Невизначеності	$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$
6 «Визначеності» ($a, b \in \mathbb{R}$)	
$a + (+\infty) = +\infty;$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty;$
$a \cdot (+\infty) = +\infty, a > 0;$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty;$
$\frac{a}{\infty} = 0;$	$\frac{a}{0} = \infty;$
$0^{+\infty} = 0;$	$0^{-\infty} = +\infty;$
$a^{+\infty} = 0, 0 < a < 1;$	$a^{+\infty} = +\infty, 1 < a < +\infty;$
$(+\infty)^b = 0, -\infty \leq b < 0;$	$(+\infty)^b = +\infty, 0 < b < +\infty$

6.5. Деякі важливі границі функцій

1 $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0, \alpha > 0$	2 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty, \alpha > 0$
3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$	4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\alpha} = \infty, \alpha > 0$
5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m \end{cases}$	
6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a > 1 \end{cases}$
7 $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x &= -\infty, \end{aligned} \quad a > 1$	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x &= +\infty, \end{aligned} \quad 0 < a < 1$
8 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}$	9 $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x &= \pi; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x &= 0 \end{aligned}$

6.6. Порівняння нескінченно малих функцій

❶ $\alpha(x)$ — н. м. ф. вищого порядку мализни , ніж $\beta(x)$, коли $x \rightarrow x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$	$\alpha(x) = o(\beta(x)),$ $x \rightarrow x_0$
❷ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — н. м. ф. одного порядку мализни , коли $x \rightarrow x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$	$\alpha(x) \asymp \beta(x)),$ $x \rightarrow x_0$
❸ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — еквівалентні н. м. ф. , коли $x \rightarrow x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$	$\alpha(x) \sim \beta(x),$ $x \rightarrow x_0$
❹ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — непорівнянні н. м. ф., коли $x \rightarrow x_0$	$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	
❺ $\alpha(x)$ н. м. ф. порядку k щодо н. м. ф. $\beta(x)$, коли $x \rightarrow x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C,$	$\alpha(x) \sim C(\beta(x))^k,$ $x \rightarrow x_0,$
	$C \neq 0, C \neq \infty;$ $C(\beta(x))^k$ — <i>головна частина</i> функції $\alpha(x)$ щодо $\beta(x), x \rightarrow x_0$	
❻ <i>Властивості еквівалентних функцій</i> ($\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow x_0$)		
❶ Границя добутку (відношення) двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожен з них замінити на еквівалентну їй н. м. ф.	$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\gamma(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x)\gamma(x);$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$	
❷ Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж кожна з них.	$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)),$ $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$	
❸ Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку мализни.	$f(x) = ax^m + bx^n \sim ax^m,$ $m < n, x \rightarrow 0$ $(ax^m$ — <i>головна частина</i> н. м. ф. $f(x))$	
❹ Сума скінченної кількості нескінченно великих функцій різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку росту.	$f(x) = ax^m + bx^n \sim bx^n,$ $m < n, x \rightarrow \infty$ $(bx^n$ — <i>головна частина</i> н. в. ф. $f(x))$	

6.7. Визначні границі

❶ Перша визначна границя	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
❷ Наслідки з 1-ої визначної границі.	
❶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$	❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$
❷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$	❹ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
❸ Друга визначна границя	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e$
❹ Наслідки з 2-ої визначної границі.	
❶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a};$	❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$
❷ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$	❹ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$
	❺ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$
Розкриття степенєво-показникових невизначеностей	
❺ $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)}$	❻ $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x)-1)v(x)}$

6.8. Таблиця еквівалентностей

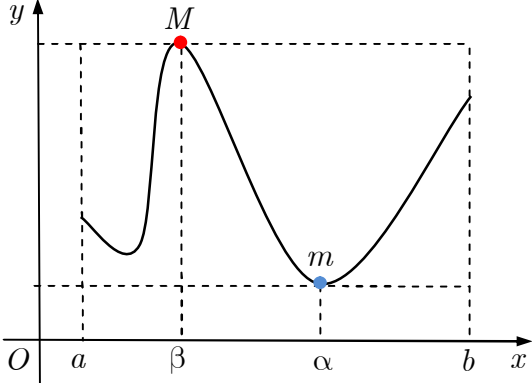
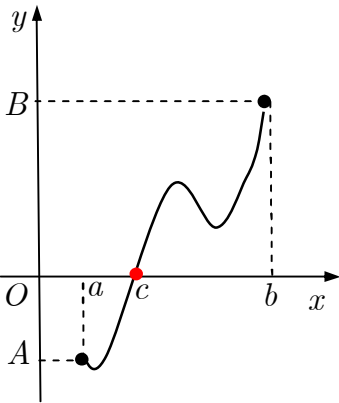
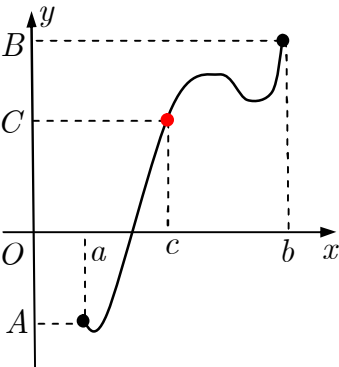
❶ $\sin x \sim x, x \rightarrow 0.$	❻ $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, x \rightarrow 0.$
❷ $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0.$	❼ $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0.$
❸ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0.$	❽ $a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0.$
❹ $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0.$	❾ $e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0.$
❺ $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0.$	❿ $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, x \rightarrow 0.$

6.9. Неперервність функції в точці

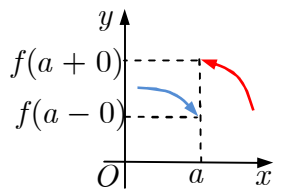
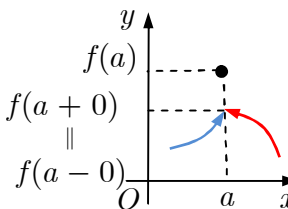
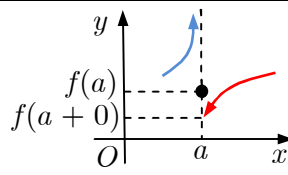
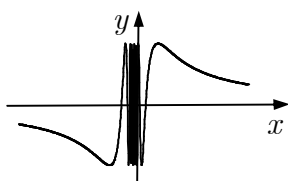
❶ Функція неперервна в точці. Функцію $f(x)$, $x \in X$, означену в околі точки x_0, називають <i>неперервною в точці x_0</i>, якщо границя функції дорівнює значенню функції в цій точці.	$f(x) \text{ неперервна в точці } x_0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$
Функція $f(x)$ <i>неперервна зліва</i> у точці x_0, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$	Функція $f(x)$ <i>неперервна справа</i> у точці x_0, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$
❷ Критерій неперервності функції в точці. Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли	$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$
❸ Приріст аргументу в точці x_0	$\Delta x = x - x_0$
❹ Приріст функції $f(x)$ у точці x_0	$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
❺ Функція неперервна в точці*. Функцію $f(x)$, $x \in X$, називають <i>неперервною в точці $x_0 \in X$</i>, якщо	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0.$
❻ Властивості функцій неперервних у точці. ❶ Функція, неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки. ❷ Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то існує окіл $U(x_0)$, у якому функція $f(x)$ має знак числа $f(x_0)$. ❸ Якщо для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ і функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то існує $U(x_0)$, окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.	❹ Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці x_0, то й функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ та $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0. ❺ Нехай функція $g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0. ❻ Основні елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.

* Означення [6.9.1] та [6.9.5] еквівалентні.

6.10. Неперервність функції на відрізку

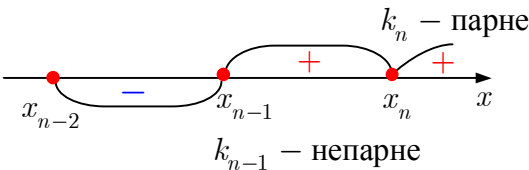
❶ Функція неперервна на відрізку. Функцію $f(x)$ називають <i>неперервною на відрізку</i> $[a; b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу $(a; b)$, в точці a неперервна справа, а в точці b — неперервна зліва.	
Множину всіх неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій позначають $C[a; b]$.	
Властивості неперервних на відрізку функцій	
❷ Теорема про обмеженість функції (Весригаса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на ньому.	 $M = \max_{x \in [a; b]} f(x), m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$
❸ Теорема про найбільше та найменше значення (Весригаса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значень.	
❹ Теорема про нулі функції (Больцано — Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ і $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a; b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c) = 0$.	
❺ Теорема про проміжні значення (Больцано — Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, і набуває на його кінцях різних значень $f(a) = A$, $f(b) = B$, і $C \in [A; B]$, то в інтервалі $(a; b)$ знайдеться принаймні одна точка c, в якій $f(c) = C$.	
❻ Теорема про неперервність оберненої функції. Якщо функція $f(x)$ строго монотонна і неперервна на відрізку $[a; b]$, то	обернена функція $f^{-1}(y)$ неперервна на $[A; B]$, де $[A; B]$ — множина значень функції $f(x)$.

6.11. Точки розриву функції

❶ Точка розриву. Точку x_0 називають <i>точкою розриву</i> функції $f(x)$, якщо вона означена в околі точки x_0 (окрім, можливо самої точки x_0), але не є неперервною в цій точці.	Порушено рівність $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$	
Класифікація точок розриву		
❷ Розрив 1-го роду <i>(скінченний розрив)</i>	обидві однобічні границі $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ функції $f(x)$ у точці x_0 існують і скінченні	
① неусувний (стрибок)	$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$	
② усувний	$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$	
❸ Розрив 2-го роду	хоча б одна з однобічних границь $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ функції $f(x)$ у точці x_0 нескінченна або не існує	
① нескінченний (полюс)	$\exists f(x_0 - 0) = \pm\infty$ або $\exists f(x_0 + 0) = \pm\infty$	
② істотний	$\nexists f(x_0 - 0)$ або $\nexists f(x_0 + 0)$	

④ Схема дослідження функції на неперервність у точці. ① Знаходять $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$. ② Висновують: 1) якщо існують скінченні одnobічні границі і $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0),$ то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0; 2) якщо існують скінченні одnobічні границі і $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ або функція не означена в точці x_0, то функція $f(x)$ має розрив 1-го роду, усувний, у точці x_0;	3) якщо існують скінченні одnobічні границі і $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$, то функція $f(x)$ має розрив 1-го роду, неусувний, у точці x_0; 4) якщо існують одnobічні границі і хоча б одна з них нескінченна, то функція $f(x)$ має розрив 2-го роду, нескінченний (поліус), у точці x_0 (графік функції має вертикальну асимптоту $x = x_0$); 5) якщо хоча б одна із границь не існує, то функція $f(x)$ має розрив 2-го роду, істотний, у точці x_0.
--	--

6.12. Метод інтервалів

① Алгоритм методу інтервалів знаходження проміжків знакосталості функції $f(x)$. ① Знаходять область означення $D(f)$ функції $f(x)$. ② Визначають дійсні корені рівняння $f(x) = 0$. ③ Розбивають область означення $D(f)$ коренями на проміжки знакосталості функції $f(x)$. ④ Визначають знаки функції $f(x)$ на кожному проміжку, обчислюючи значення функції $f(x)$ у внутрішній точці кожного проміжку або за правилом розставлення знаків. ⑤ Записують проміжки знакосталості.	② Правило розставлення знаків. ① Функція $f(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_n},$ $x_1 < x_2 < \dots < x_n,$ є додатною справа від точки x_n. ② Після переходу від одного проміжку до сусіднього (справа наліво) через точку $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, функція $f(x)$: 1) змінює знак, якщо k_i — непарне; 2) не змінює знак, якщо k_i — парне. 
--	--

Розділ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

7.1. Похідна і диференціал функції

❶ Похідна функції в точці. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$	
Позначення похідної функції $y = f(x)$	$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$
❷ Ліва похідна. Лівою похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають $f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	❸ Права похідна. Правою похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають $f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
❹ Критерій існування похідної. Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну тоді й лише тоді, коли	існують права та ліва похідні і ці похідні рівні між собою: $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0).$
❺ Функція, диференційовна в точці. Функцію $f(x)$ називають диференційовною в точці x_0, якщо її приріст у цій точці $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	можна зобразити як $\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$ де A — деяке дійсне число, $\alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \rightarrow 0$.
❻ Критерій диференційовності. Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.	❼ Необхідна умова диференційовності. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.
❽ Диференціал функції. Головну, лінійну щодо Δx, частину приросту функції називають <i>диференціалом функції</i> в точці x_0 і позначають $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$	
❾ Формула обчислення диференціала	$df(x_0) = f'(x_0)dx$

7.2. Правила диференціювання

❶ $(Cu)' = Cu', C = \text{const}$	❷ $(u \pm v)' = u' \pm v'$
❸ $(uv)' = u'v + uv'$	❹ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
❺ $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$	❻ $y = f(x) \Rightarrow y' = f(x)(\ln f(x))'$
❼ <i>Похідна оберненої функції</i>	$y'_x = \frac{1}{x'_y}$
❽ <i>Похідна параметрично заданої функції</i> $y(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha; \beta) \end{cases}$	$y'(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}, t \in (\alpha; \beta) \end{cases}$

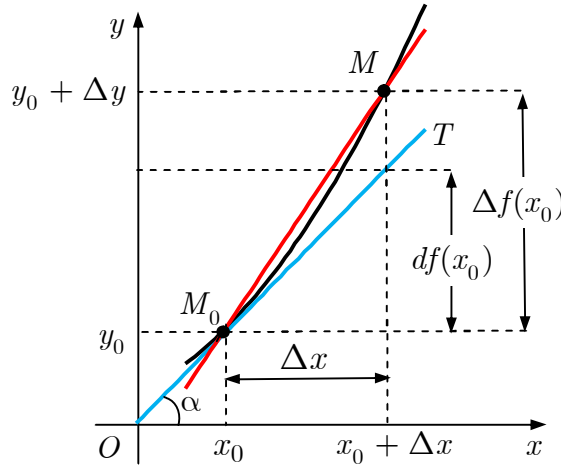
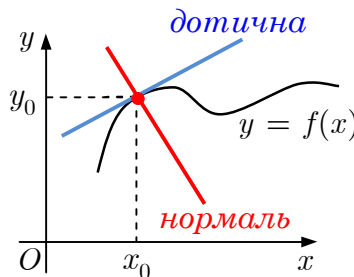
7.3. Формули диференціювання

$u = u(x)$ (якщо $u(x) = x$, то $u' = x' = 1$)	
❶ $(C)' = 0, C = \text{const}$	❷ $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
❸ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0$	❹ $(e^u)' = e^u u'$
❺ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, a > 0, a \neq 1$	❻ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
❼ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	❽ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
❾ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	❿ $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
⓫ $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	⓬ $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
⓭ $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	⓮ $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
⓯ $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$	⓰ $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
⓱ $(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$	⓲ $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$

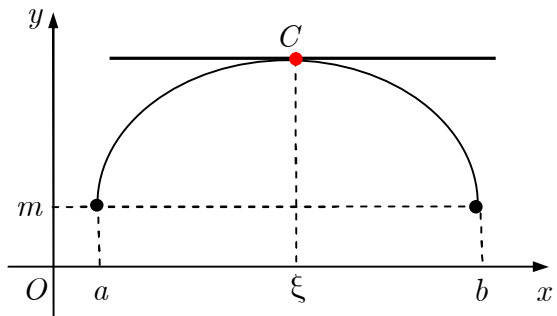
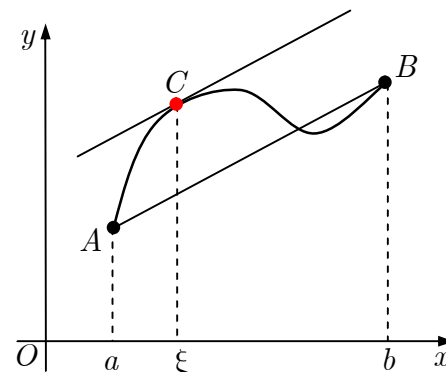
7.4. Формули для похідних вищих порядків

❶ Похідні вищих порядків	$f''(x) = (f'(x))',$ $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', n \in \mathbb{N}$
Позначення	$y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}, \dots;$ $f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x);$ $\frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$
❷ Диференціали вищих порядків	$d^2 f(x_0) = d(df(x_0)),$ $d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0))$
❸ Інваріантність 1-го диференціала	$df(u(x)) = f'(u)du, u = u(x)$
❹ Формула обчислення диференціала	$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$ де x — незалежний аргумент
❺ Лейбніцова формула	$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$
	$u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$
❻ Похідна параметрично заданої функції $y(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha; \beta) \end{cases}$	$y^{(n)}(x) : \begin{cases} x = x(t), \\ y_{x^n}^{(n)}(t) = \frac{(y_{x^{n-1}}^{(n-1)}(t))'_t}{x'_t(t)}, t \in (\alpha; \beta) \end{cases}$
❼ Похідні вищих порядків деяких функцій.	
❶ $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & n \leq m, \\ 0, & n > m \end{cases}$ $m \in \mathbb{N}$	❷ $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$
❸ $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$	❹ $(e^x)^{(n)} = e^x$
❺ $(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n \ln a}$	❻ $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$
❼ $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$	❽ $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$

7.5. Геометричний зміст похідної і диференціала

❶ Дотична і нормаль до кривої. Дотичною до кривої в точці M_0 називають пряму M_0T, що є граничним положенням січної M_0M, коли точка M прямує по кривій до точки M_0.		
❷ Нормалю до кривої називають прямою, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику.		
❸ Геометричний зміст похідної і диференціала в точці		
❶ Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто	$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут нахилу дотичної до осі Ox. ❷ Диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної.	
❹ Рівняння дотичної	$f'(x_0) < \infty$	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
	$f'(x_0) = \infty$	$x = x_0$
❺ Рівняння нормалі	$f'(x_0) \neq 0$	$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	$f'(x_0) = 0$	$x = x_0$
❻ Кут між двома кривими. Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину називають кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.		

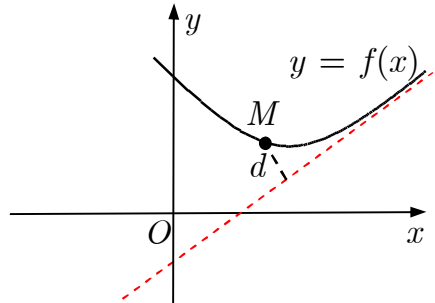
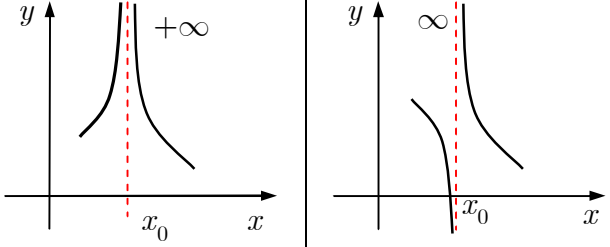
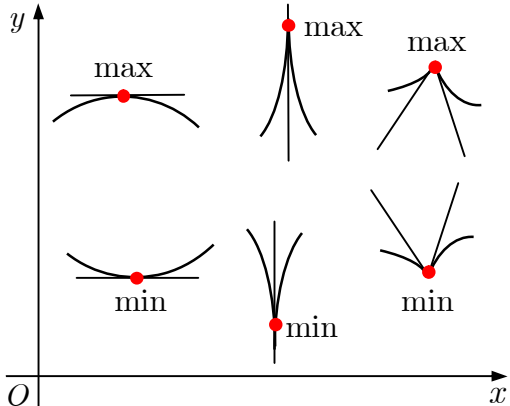
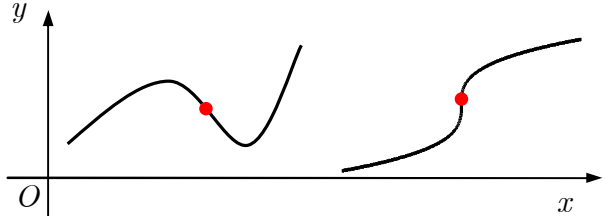
7.6. Основні теореми диференціального числення

❶ Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на відрізку $[a; b]$; 2) диференційовна в інтервалі $(a; b)$; 3) на кінцях відрізку $[a; b]$ набуває рівних значень $f(a) = f(b)$, то в інтервалі $(a; b)$ існує принаймні одна точка ξ, така, що $f'(\xi) = 0, \xi \in (a; b).$	 На графіку функції існує точка M, дотична в якій паралельна осі Ox.
❷ Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на відрізку $[a; b]$, 2) диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то в інтервалі $(a; b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (a; b).$	 На графіку функції існує точка C, дотична в якій паралельна січній AB.
❸ Теорема Коші. Якщо функції $f(x), g(x)$: 1) неперервні на відрізку $[a; b]$, 2) диференційовні в інтервалі $(a; b)$, 3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a; b)$, то в інтервалі $(a; b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \xi \in (a; b).$	❹ Правило Бернуллі — Лопіталя. Якщо функції $f(x), g(x)$: 1) означені і диференційовні у проколеному околі точки x_0, 2) $g'(x) \neq 0$ в цьому околі, 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (∞), 4) існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix} = A.$

7.7. Тейлорова формула

❶ Многочлен Тейлора n -го порядку функції $f(x)$ за степенями $(x - x_0)$	$\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
❷ Формула Тейлора n -го порядку для функції $f(x)$ в околі точки x_0	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$
❸ Формула Тейлора — Маклорена для функції $f(x)$ в околі точки $x_0 = 0$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$
❹ Залишковий член формули Тейлора	$R_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$
❺ Залишковий член у формі Пеано	$R_n(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$
❻ Залишковий член у формі Лагранжа	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0; x)$
❼ Теорема Тейлора. Якщо функція $f(x)$ означена в деякому околі точки x_0 і n разів диференційовна в ньому, то правдива <i>Тейлорова формула</i> в околі точки x_0 із залишковим членом у формі <i>Пеано</i> : $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$ $x \rightarrow x_0.$	
❽ Формула Тейлора — Маклорена для деяких елементарних функцій	
❶ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in (0; x)$	
❷ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$	
❸ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cos \xi \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	
❹ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cos \xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$	
❺ $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}^{k \text{ співмножників}}}{k!} x^k + \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}^{n+1 \text{ співмножник}}}{(1+\xi)^{n-\alpha+1} (n+1)!} x^{n+1}$	

7.8. Асимптоти. Екстремуми. Точки перегину

❶ Асимптота. Асимптотою кривої з нескінченною гілкою називають таку пряму, що віддаль d точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.	
❷ Вертикальна асимптота. Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$	
❸ Похила асимптота $y = kx + b$. Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$
❹ Екстремум функції в точці. Якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність:	
❶ $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$, то точку x_0 називають <i>точкою строгого локального максимуму</i> функції $f(x)$, а значення $f(x_0)$ — <i>локальним максимумом</i> функції; ❷ $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0$, то точку x_0 називають <i>точкою строгого локального мінімуму</i> функції $f(x)$, а значення $f(x_0)$ — <i>локальним мінімумом</i> функції.	 Точки максимуму і мінімуму називають <i>точками екстремуму функції</i>, а максимумами та мінімумами функції — <i>екстремумами функції</i>.
❺ Точка перегину. Точку x_0 називають <i>точкою перегину</i> функції $f(x)$, якщо під час переходу через неї функція змінює напрям опуклості на протилежний.	

7.9. Дослідження функції на монотонність і точки екстремуму

❶ Критична точка 1-го порядку.

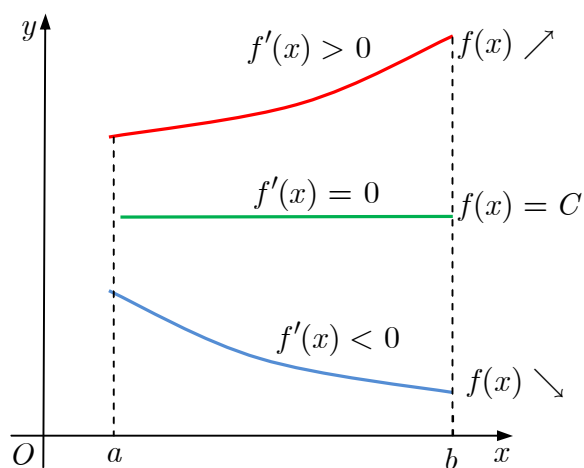
Нехай функція $f(x)$ означена в околі точки x_0 . Точку x_0 називають критичною точкою 1-го порядку, якщо виконано одну з умов:

- 1) $f'(x_0) = 0$;
- 2) $f'(x_0) = \infty$;
- 3) $\nexists f'(x_0)$.

❷ Достатня умова монотонності

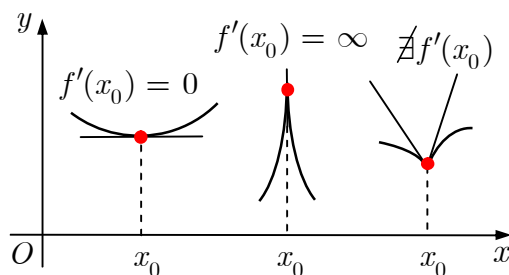
функції. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Тоді якщо $\forall x \in (a; b)$:

- 1) $f'(x) > 0$, то функція f зростає в інтервалі $(a; b)$ ($f \nearrow$);
- 2) $f'(x) = 0$, то функція $f(x)$ стала в інтервалі $(a; b)$;
- 3) якщо $f'(x) < 0$, то функція f спадає в інтервалі $(a; b)$ ($f \searrow$).



❸ Необхідна умова існування

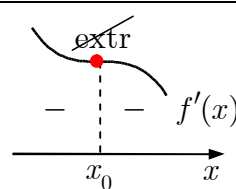
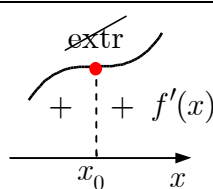
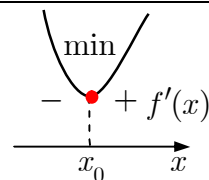
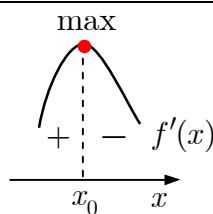
екстремуму. Якщо функція f означена в деякому околі точки x_0 і досягає в цій точці екстремуму, то точка x_0 є критичною точкою 1-го порядку.



❹ Перша достатня умова існування екстремуму.

Нехай x_0 — критична точка 1-го порядку і функція f неперервна в деякому околі точки x_0 . Якщо в цьому околі:

- 1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму;
- 2) $f'(x) < 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) > 0$ для $x > x_0$, то функція досягає в точці x_0 мінімуму;
- 3) похідна не змінює знак переходячи через x_0 , то в точці x_0 екстремуму немає.



❷ Друга достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна в точці x_0 та $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тоді:

- 1) якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму;
- 2) якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму.

7.10. Дослідження функції на напрям опуклості і точки перегину

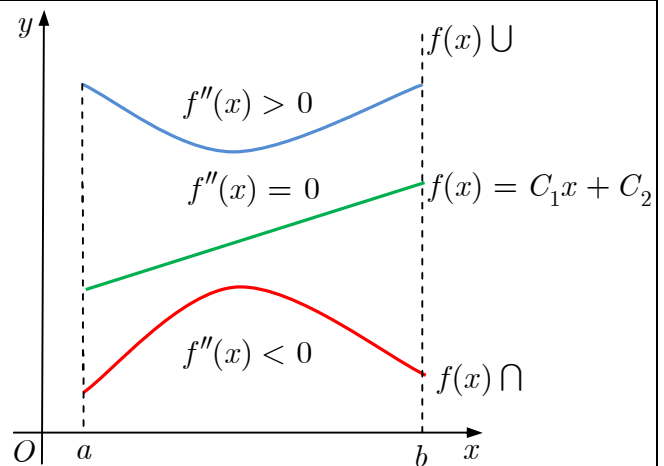
❶ Критична точка 2-го порядку.

Нехай функція f означена в околі точки x_0 . Точку x_0 називають критичною точкою 2-го порядку, якщо виконано одну з умов:

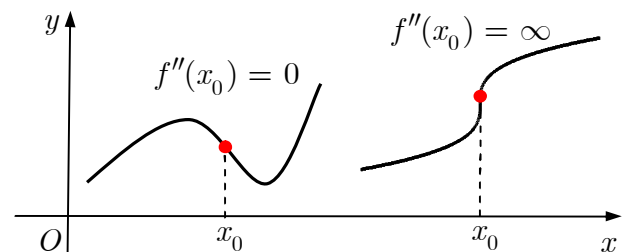
- 1) $f''(x_0) = 0$;
- 2) $f''(x_0) = \infty$;
- 3) $\nexists f''(x_0)$.

❷ Достатня умова опуклості донизу (догори). Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі $(a; b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді, якщо $\forall x \in (a; b)$:

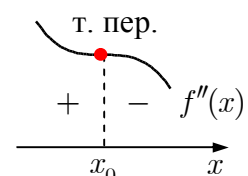
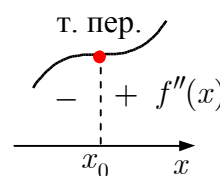
- 1) $f''(x) > 0$, то функція в інтервалі $(a; b)$ опукла донизу ($f \cup$);
- 2) $f''(x) = 0$, то функція в інтервалі $(a; b)$ лінійна;
- 3) якщо $f''(x) < 0$, то функція в інтервалі $(a; b)$ опукла догори ($f \cap$).



❸ Необхідна умова існування точки перегину. Якщо функція f означена в деякому околі точки x_0 і точка x_0 — точка перегину функції f , то точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку.



❹ Достатня умова існування точки перегину. Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f .



7.11. Схеми дослідження функції

❶ Схеми дослідження функції на монотонність і локальні екстремуми. ❶ Знаходять область означення функції. ❷ Серед внутрішніх точок області означення знаходять критичні точки 1-го порядку функції $f(x)$. ❸ Досліджують знак першої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область означення. ❹ Застосовуючи достатні умови монотонності й існування локального екстремуму, висновують про поведінку функції. Обчислюють значення функції в точках екстремуму.	❷ Схеми дослідження функцій на напрям опуклості і точки перегину. ❶ Знаходять область означення функції. ❷ Серед внутрішніх точок області означення знаходять критичні точки 2-го порядку функції $f(x)$. ❸ Досліджують знак другої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область означення. ❹ Застосовуючи достатні умови опуклості й існування точки перегину, висновують про поведінку функції.
❸ Схеми дослідження функції на глобальний екстремум. ❶ Знаходять критичні точки 1-го порядку функції в інтервалі $(a; b)$; ❷ Обчислюють значення функції у знайдених критичних точках і на кінцях відрізка $[a; b]$. ❸ Серед обчислених значень функції вибирають найбільше та найменше значення функції на $[a; b]$.	❹ Схеми повного дослідження функції та побудови її графіка. ❶ Знаходять область означення $D(f)$ функції $f(x)$. ❷ Встановлюють можливі симетрії графіка функції. ❸ Визначають можливі точки розриву функції і асимптоти її графіка. ❹ За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності і точки екстремуму. ❺ За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину. ❻ Знаходять можливі точки перетину графіка функції з осями координат. ❼ Будують графік функції $y = f(x)$.

Розділ 8. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

8.1. Первісна. Невизначений інтеграл

❶ Первісна. Функцію $F(x)$ називають <i>первісною</i> функції $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$, якщо вона диференційовна для будь-якого $x \in (a; b)$ і $F'(x) = f(x).$	
❷ Теорема про первісну. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ в цьому інтервалі має вигляд $\Phi(x) = F(x) + C,$ $C = \text{const} \in \mathbb{R}$	
❸ Достатня умова існування первісної. Будь-яка неперервна на відрізьку $[a; b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізьку первісну $F(x)$.	
❹ Невизначений інтеграл. Сукупність $F(x) + C$ всіх первісних функції $f(x)$ в інтервалі $(a; b)$ називають <i>невизначеним інтегралом</i> від функції $f(x)$ і позначають $\int f(x)dx = F(x) + C$	
Знаходження невизначеного інтеграла називають <i>інтегруванням</i> .	$f(x)dx$ — підінтегральний вираз; $f(x)$ — підінтегральна функція; x — змінна інтегрування; C — довільна стала.
❺ Властивості невизначеного інтеграла	
❶ $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x);$ ❷ $d \left(\int f(u)du \right) = f(u)du;$ ❸ $\int dF(u) = F(u) + C;$ ❹ $\int kf(u)du = k \int f(u)du, k \neq 0;$	❺ $\int (f_1(u) \pm f_2(u))du =$ $= \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du;$ ❻ <i>Інваріантність формул інтегрування.</i> $\int f(u)du = F(u) + C, u = \varphi(x)$

8.2. Основні формули інтегрування*

❶ $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	❷ $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
❸ $\int e^u du = e^u + C$	❹ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
❺ $\int \sin u du = C - \cos u$	❻ $\int \cos u du = \sin u + C$
❼ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	❽ $\int \frac{du}{\sin^2 u} = C - \operatorname{ctg} u$
❾ $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$	❿ $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$
⓫ $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	⓬ $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = C - \operatorname{cth} u$
⓭ $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + C,$ $a \neq 0$	⓮ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$
⓯ $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C,$ $a \neq 0$	⓰ $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C,$ $a \neq 0$
⓱ $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$	⓲ $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
⓳ $\int \operatorname{tg} u du = C - \ln \cos u $	⓴ $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$

8.3. Основні методи інтегрування

❶ **Метод заміни змінної.** Якщо функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна і строго монотонна, $\varphi'(t) \neq 0$ в інтервалі $(\alpha; \beta)$, то правдива

формула заміни змінної:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

* Формулу ❸ називають «довгим логарифмом», а ❶ — «високим логарифмом».

❷ Метод введення функції під знак диференціала	$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du(x)$
❸ Перетворення диференціалів деяких функцій	
① $dx = \frac{1}{a} d(ax + b), a, b = \text{const};$ ② $x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha} d(x^{\alpha}), \alpha \neq 0;$ ③ $\frac{dx}{x} = d(\ln x);$ ⑤ $\cos x dx = d(\sin x);$ ⑥ $\sin x dx = -d(\cos x);$	⑦ $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);$ ⑧ $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);$ ⑨ $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x);$ ⑩ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\operatorname{arcsin} x)$
❹ Метод інтегрування частинами. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні на деякому проміжку, то на цьому проміжку правдива	формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du.$
❺ Типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами ($P_n(x)$ — многочлен степеня n)	
① $\int P_n(x) \begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \\ e^{\alpha x} \end{Bmatrix} dx$	$u = P_n(x)$
② $\int P_n(x) \ln x dx$	$u = \ln x$
③ $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$	$u = \operatorname{arctg} x$
④ $\int e^{ax} \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx, \int \begin{Bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{Bmatrix} dx$	Двічі інтегрувати частинами $\Rightarrow$ рівняння щодо шуканого інтеграла.
⑤ $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx, \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$	Один раз інтегрувати частинами $\Rightarrow$ рівняння щодо шуканого інтеграла.

8.4. Інтегрування дробово-раціональних виразів

Типи елементарних дробів	Інтегрування елементарних дробів
❶ Дріб I типу $\frac{A}{x-a}$	$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln x-a + C$
❷ Дріб II типу $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$	$\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$
❸ Дріб III типу $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, D = p^2 - 4q < 0$	
① $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$	Виділяють повний квадрат у знаменнику
② $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$	Виділяють у чисельнику похідну від знаменника: $d(x^2+px+q) = (2x+p)dx;$ $Mx+N \equiv \frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)$
❹ Дріб IV типу $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, D = p^2 - 4q < 0, k \geq 2$	
① $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^k}$	$I_k = \frac{1}{2\alpha^2(k-1)} \times$ $\times \left(\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^{k-1}} + (2n-3)I_{k-1} \right),$ $k \in \mathbb{N}$
② $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$	$t = x + \frac{p}{2}$
Розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів	
❺ Раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називають <i>правильним</i> , якщо степінь чисельника менше, ніж степінь знаменника.	Будь-який неправильний дріб можна подати як суму многочлена і правильного дробу: $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \tilde{P}_{m-n}(x) + R_l(x), l < n$

⑥ Теорема розкладання. Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($n > m$) можна єдиним чином розкласти на суму елементарних дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{P_m(x)}{(x-a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-a_l)^{k_l} (x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{r_s}} = \\ &= \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{x-a_1} + \dots + \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + \dots + \frac{M_{r_1}x+N_{r_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots \end{aligned}$$

⑦ Метод прирівнювання. Праву частину рівності зводять до спільного знаменника, а потім прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої і правої частин.

⑧ Метод викреслювання.

Множнику $(x-a)^\alpha$ правильного

дробу $\frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}$, $\varphi(a) \neq 0$,

відповідає розклад

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a}$$

$$A_\alpha = \frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha} \varphi(x)} \Big|_{x=a},$$

$$A_{\alpha-k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{P_m(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha} \varphi(x)} \right)^{(k)} \Big|_{x=a},$$

$k = 1, \alpha - 1.$

⑨ Схема розкладання правильного дробу на суму елементарних.

① Розкладають знаменник дробу на множники.

② Записують розклад на елементарні дробі з невизначеними коефіцієнтами.

③ Визначають коефіцієнти методом прирівнювання або викреслювання.

⑩ Схема інтегрування дробово-раціонального виразу.

① Виділяють (у разі потреби) цілу частину дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

② Правильний дріб розкладають на суму елементарних дробів.

③ Інтегрують суму цілої частини і елементарних дробів.

8.5. Інтегрування тригонометричних виразів

Основні способи знаходження $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$	
❶ Загальний випадок — універсальна тригонометрична підстановка	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
❷ $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\cos x) d(\cos x)$
❸ $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\sin x) d(\sin x)$
❹ $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$I = \int \tilde{R}(\operatorname{tg} x) d(\operatorname{tg} x)$ $\text{або } I = \int \tilde{R}(\operatorname{ctg} x) d(\operatorname{ctg} x)$
Знаходження $\int \sin^m x \cos^n x dx$	
❺ $m = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$	$\sin^{2k-1} x dx = \sin x (\sin x)^{2k-2} dx =$ $= -(1 - \cos^2 x)^{k-1} d(\cos x)$
❻ $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$	$\cos^{2k-1} x dx = (1 - \sin^2 x)^{k-1} d(\sin x)$
❼ $m = 2k, n = 2l, k, l \in \mathbb{N}$	$\sin^{2k} x \cos^{2l} x =$ $= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l$
❽ $\int \operatorname{tg}^m x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$	
❾ $\int \operatorname{ctg}^m x dx = \int \operatorname{ctg}^{m-2} x \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \operatorname{ctg}^{m-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$	
❿ $\int \sin kx \cos lxdx = \frac{1}{2} \int (\sin(k-l)x + \sin(k+l)x) dx$	
⓫ $\int \cos kx \cos lxdx = \frac{1}{2} \int (\cos(k-l)x + \cos(k+l)x) dx$	
⓬ $\int \sin kx \sin lxdx = \frac{1}{2} \int (\cos(k-l)x - \cos(k+l)x) dx$	

8.6. Інтегрування ірраціональних виразів

❶ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	Виносять старший коефіцієнт і виділяють повний квадрат під коренем.		
❷ $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$	Виділяють у чисельнику похідну від підкореневого виразу: $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx;$ $Ax + B \equiv \frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right).$		
❸ $\int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	$t = \frac{1}{x - \alpha}$		
❹ $\int R\left(x, X^{r_1/s_1}, ..., X^{r_n/s_n}\right) dx,$ де $X = \frac{ax + b}{cx + d}$	$\frac{ax + b}{cx + d} = t^m,$ $m = \text{НСК}(s_1, ..., s_n)$		
❺ Інтегрування диференціального бінома $\int x^m(a + bx^n)^p dx, m, n, p \in \mathbb{Q}$ (теорема Чебишова)			
I $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $x = t^k,$ $k = \text{НСК}(s_1, s_2),$ $n = \frac{r_2}{s_2}, m = \frac{r_1}{s_1}$	II $\frac{m + 1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow a + bx^n = t^s,$ $p = \frac{r}{s}$	III $\frac{m + 1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow ax^{-n} + b = t^s,$ $p = \frac{r}{s}$	IV У решті випадків інтеграл не виражається в елементарних функціях.
❻ Тригонометричні підстановки			
① $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$		
② $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$x = a \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$		
③ $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$		

Модуль 1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1. Множини. Функції

Навчальні задачі

1.1. Методом математичної індукції довести, що

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Розв'язання. [4.3.4.]

[Крок 1. Перевіряємо правдивість твердження для $n = 1$.]

Для $n = 1$ рівність правдива:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

[Крок 2. Припускаючи правдивість твердження для $n = k$, доводимо твердження для $n = k + 1$.]

Нехай ця рівність правдива при $n = k$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Доведімо, що рівність правдива і при $n = k + 1$, тобто

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Справді,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \\ & = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

[Крок 3. Висновуємо правдивість твердження для будь-якого n .]

1.2. Розкласти біном $(a+b)^6$.

Розв'язання. [4.15.5, 4.15.9, 4.16.2–4.16.4.]

[Випишуємо формулу для бінома у згорнутому вигляді і розгортаємо його.]

$$\begin{aligned} (a+b)^6 &= \sum_{k=0}^6 C_6^k a^{6-k} b^k = \\ &= C_6^0 a^6 b^0 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6 = \end{aligned}$$

[Обчислюємо біноміальні коефіцієнти.]

$$\begin{aligned} C_6^0 &= C_6^6 = 1; \quad C_6^1 = C_6^5 = \frac{6!}{1!5!} = 6; \quad C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15; \\ C_6^3 &= \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20. \end{aligned}$$

[Підставляємо знайдені коефіцієнти в розклад.]

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

1.3. Записати усі підмножини множини $M = \{1, 2, 3\}$.

Розв'язання. [4.4.3.]

Порожня множина $\emptyset$ є підмножиною будь-якої множини.

Одноелементні підмножини множини M : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

Двоелементні підмножини множини M : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

Триелементна множина $M = \{1, 2, 3\}$ є своєю підмножиною.

Множина M має $2^3 = 8$ підмножин:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

1.4. Задано множини

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq 2\}.$$

Знайдіть і зобразіть множини $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Розв'язання. [4.4.5–4.4.7.]

[Знаходимо множини A та B , розв'язуючи відповідні нерівності.]

$$|x - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1; \quad 0 < x < 2.$$

$$|x + 1| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 2, \\ x + 1 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -3. \end{cases}$$

[Зображуємо знайдені множини на числових осях. Решту множин можна знаходити як аналітично, так і графічно.]

$$A = (0; 2);$$

$$B = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty);$$

$$A \cup B = (-\infty; -3] \cup (0; +\infty);$$

$$A \cap B = [1; 2);$$

$$A \setminus B = (0; 1);$$

$$B \setminus A = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty).$$

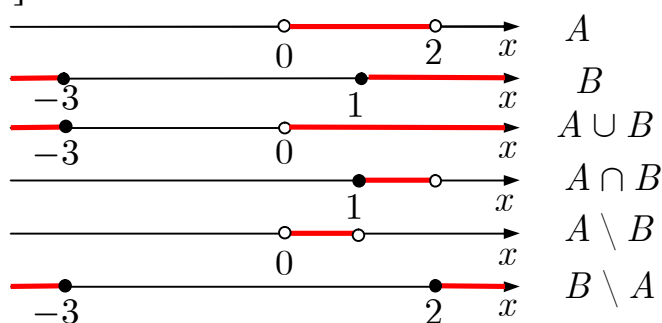


Рис. до зад. 1.4.

1.5. Знайти $\sup A, \inf A, \max A, \min A$, якщо $A = [0; 2)$.

Розв'язання. [4.1.7.]

Оскільки $\forall x \in [0; 2) \exists x^* : x < x^*$, то ця множина не має найбільшого елемента.

Множина верхніх меж A — це множина $[2; +\infty)$ з найменшим елементом 2, який і є точною верхньою межею множини $[0; 2)$. Отже, $\sup A = 2$.

Множина нижніх меж — це множина $(-\infty; 0]$ з найбільшим елементом $0 \in A$, який і є точною нижньою межею множини A . Отже, $\min A = \inf A = 0$.

1.6. Знайти $f(-2), f(0), f(1)$, якщо $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

Розв'язання.

Маємо функцію, що задана різними формулами на різних проміжках. Оскільки, $-2 \leq 0, 0 \leq 0$, то значення $f(-2), f(0)$ знайдемо за формулою $f(x) = 1 + x$:

$$f(-2) = -1; \quad f(0) = 1.$$

Оскільки $1 > 0$, то значення $f(1)$ знаходимо за формулою $f(x) = 2^x$:

$$f(1) = 2.$$

1.7. Визначити функцію $f(x)$, яка справджує умову $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$.

Розв'язання.

Нехай $x + 1 = t$, тоді $x = t - 1$. Отже,

$$f(t) = f(x + 1) = x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

1.8. Продовжити функцію $y = x^2, x \in (0; +\infty)$ на $(-\infty; 0]$ так, щоб продовжена функція на $\mathbb{R}$ стала: а) парною, б) непарною:

Розв'язання. [5.2.2–5.2.4.]

Нехай продовжуємо функцію на проміжок $(-\infty, 0)$ виразом $y = g(x)$, та $y(0) = a$.

а) для парності функції потрібно, щоб

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty; 0) \quad y(x) = g(x) &= y(-x) = f(-x) = x^2, \\ y(0) = a &= y(-0) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

б) для непарності функції потрібно, щоб

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty; 0) \quad y(x) = g(x) &= \\ &= -y(-x) = -f(-x) = -x^2; \\ y(0) = a &= -y(-0) = -a \Rightarrow a = 0. \end{aligned}$$

Отже,

а) $y(x) = x^2, x \in (-\infty; 0), y(0) \in \mathbb{R}$; (рис. 1);

б) $y(x) = -x^2, x \in (-\infty; 0]$ (рис. 2).

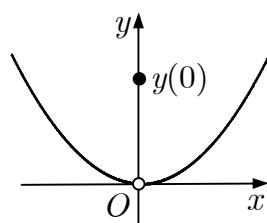


Рис. 1 до зад. 1.8

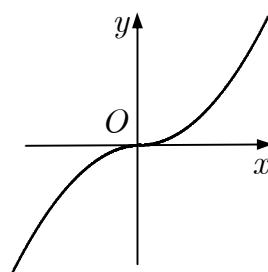


Рис. 2 до зад. 1.8

1.9. Знайти обернену функцію до функції $y = 2x + 5$ і визначити її область означення.

Розв'язання. [4.7.6, 5.1.8.]

Для функції $f(x) = 2x + 5, D(f) = E(f) = \mathbb{R}$.

Функція $f(x)$ зростає для всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, вона має обернену функцію на $\mathbb{R}$.

Розв'яжімо рівняння $y = 2x + 5$ щодо x :

$$y = 2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y - 5}{2}.$$

Оберненою до f функцією є функція $y = \frac{x - 5}{2}, x \in \mathbb{R}$.

1.10. Знайти композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, вказати їхні області означення, якщо

$$f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x};$$

Розв'язання. [4.7.7, 5.1.7.]

$$D(f) = \mathbb{R}, D(g) = [0; +\infty).$$

$$E(g) = [0; +\infty) \subset D(f);$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x,$$

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = [0, +\infty).$$

$$E(f) = [0; +\infty) \subseteq D(g);$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \mathbb{R}.$$

Отже,

$$(f \circ g)(x) = x, x \in [0; +\infty);$$

$$(g \circ f)(x) = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

1.11. Замініть крапки виразами «достатньо, але не необхідно», «необхідно, але не достатньо», «необхідно й достатньо» і запишіть висловлювання символічно так, щоб утворились істинні твердження:

1) для того щоб виграти в лотереї, ... мати хоча б один лотерейний квиток;

2) для того щоб сума двох дійсних чисел була числом раціональним, ... щоб кожен доданок був раціональним числом;

3) для того щоб трикутник був рівнобедреним, ... щоб кути при основі були рівні.

1.12. З'ясуйте зміст висловлювань і встановіть, істинні вони чи хибні ($x, y \in \mathbb{R}$):

1) $\forall x \exists y : x + y = 3;$

2) $\exists y \forall x : x + y = 3;$

3) $\exists x, y : x + y = 3;$

4) $\forall x, y : x + y = 3.$

1.13. Методом математичної індукції доведіть, що для будь-якого n :

1) $n(2n^2 - 3n + 1)$ ділиться націло на 6;

2) $n^5 - n$ ділиться націло на 5;

$$3) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$4) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1.14. Розкладіть біном:

$$1) (1+x)^5;$$

$$2) (a-b)^4.$$

$$3) (a-\sqrt{2})^6;$$

$$4) (a+2b)^5.$$

1.15. Опишіть переліком елементів множину:

$$1) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = -3\}; \quad 2) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x = 10\};$$

$$3) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}; \quad 4) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 2 = 0\};$$

$$5) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x - 2 = 0\}; \quad 6) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x - 2 = 0\}.$$

1.16. Запишіть рівнянням або нерівністю умову і знайдіть множину точок координатної прямої, яку ця умова задає: віддаль між точками:

$$1) M(x) \text{ та } N(4) \text{ дорівнює } 5; \quad 2) M(x) \text{ та } N(-3) \text{ менша за } 2;$$

$$3) M(x) \text{ та } N(1) \text{ не більша за } 0,5; \quad 4) M(-4) \text{ та } N(x) \text{ не менша за } \frac{1}{5}.$$

1.17. Запишіть усі підмножини множини M , якщо:

$$1) M = \{3, 4\};$$

$$2) M = \{5, 6, 12\}.$$

1.18. Задано множини: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$, $C = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Установіть, який із двох записів правильний:

$$1) A \in B \text{ або } A \subset B;$$

$$2) A \in C \text{ або } A \subset C.$$

1.19. Задано множини A та B . Знайдіть множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

$$1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}; \quad 2) A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{1, 2, 4, 5\};$$

$$3) A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\};$$

$$4) A = (-2; 3], B = [2; 4);$$

$$5) A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d, e\};$$

$$6) A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq 2\};$$

$$7) A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{I} \text{ — множина ірраціональних чисел.}$$

1.27. Продовжте функцію $f(x)$, $x \in (0; +\infty)$ на $(-\infty; 0]$ так, щоб функція на $\mathbb{R}$ була: а) парною, б) непарною:

1.28. З'ясуйте чи є функція оборотна; якщо так, то знайдіть відповідну обернену функцію і її область означення:

1) $y = (x - 1)^3$;

2) $y = \cos 2x$.

1.29. Знайдіть композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, вкажіть їхні області означення:

1) $f(x) = 1 - x, g(x) = x^2$;

2) $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$.

1.30. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| - x$;

2) $y = |x| - (\sqrt{x})^2$;

3) $y = \operatorname{sgn} \cos x$;

4) $y = \operatorname{sgn} \sin x$;

5) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

6) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

7) $y = x^{\log_x(x^2-2)}$;

8) $y = \sqrt{2}^{\log_2 x}$;

9) $y = \sin(\arcsin x)$;

10) $y = \arcsin(\sin x)$.

1.31. Побудуйте графіки функцій $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x - a)$, $f(x) - a$, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}, a = 2$;

2) $f(x) = 3x - 1, a = 2$.

1.32. Зобразіть на координатній площині множину:

1) $M = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$;

2) $M = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 > 9\}$;

3) $M = \{(x; y) \mid x^2 \geq 2y + 1\}$;

4) $M = \{(x; y) \mid x^2 \geq y^2 - 1, x + y < 1\}$;

5) $M = \{(x; y) \mid xy > 1, y > x^2\}$;

6) $M = \{(x; y) \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\}$.

Відповіді

1.11. 1) «необхідно, але не достатньо», $P \Rightarrow Q$; 2) «достатньо, але не необхідно», $P \Leftarrow Q$; 3) «необхідно й достатньо», $P \Leftrightarrow Q$.

1.12. 1) істинне; 2) хибне; 3) істинне; 4) хибне.

1.14. 1) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$; 2) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$;

3) $a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$;

4) $a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$.

1.15. 1) $M = \{1, 3\}$; 2) $\{-2, 5\}$; 3) $M = \emptyset$; 4) $M = \emptyset$; 5) $\{1\}$; 6) $\{-1, 2\}$.

1.16. 1) $|x - 4| = 5, \{-1, 9\}$; 2) $|x + 3| < 2, (-5; -1)$; 3) $|x - 1| \leq 0, 5, [0, 5; 1, 5]$;

4) $|x + 4| \geq \frac{1}{5}, (-\infty; -4, 2) \cup (-3, 8; +\infty)$.

1.17. 1) $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}$; 2) $\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{12\}, \{5, 6\}, \{5, 12\}, \{6, 12\}, \{5, 6, 12\}$.

1.18. 1) $A \subset B$; 2) $A \in C, A \subset C$.

1.19. 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{2, 3\}, A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \{4, 5\}$;

2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B = \{1, 2\}, A \setminus B = \{3, 6\}, B \setminus A = \{4, 5\}$;

3) $A = (1; +\infty), B = (-\infty; 2), A \cup B = (-\infty; +\infty), A \cap B = (1; 2), A \setminus B = [2; +\infty), B \setminus A = (-\infty; 1]$;

4) $A \cup B = (-2; 4), A \cap B = [2; 3], A \setminus B = (-2; 2), B \setminus A = (3; 4)$;

5) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}, A \cap B = \{b, c\}, A \setminus B = \{a\}, B \setminus A = \{d, e\}$;

6) $A = (-2; 0), B = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty), A \cup B = (-\infty; 0) \cup [3; +\infty), A \cap B = (-2; -1], A \setminus B = (-1; 0), B \setminus A = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$;

7) $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset, A \setminus B = \mathbb{Q}, B \setminus A = \mathbb{I}$.

1.20. 1) $\bar{A} = (0; 1)$; 2) $\bar{B} = \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\}$; 3) $\bar{C} = \left[0; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

4) $D = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

1.21. 1) $A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$; 2) $A = (A_1 \cap A_2) \cup A_3$; 3) $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

1.22. 1) $\exists \max A, \exists \min A, \sup A = 1, \inf A = 0$; 2) $\exists \max A, \sup A = 2, \min A = \inf A = 0$;

3) $\max A = \sup A = 3, \min A = \inf A = -1$; 4) $\max A = \sup A = 1, \exists \min A, \inf A = 0$.

1.23. 1) $G = [0; 4]$; 2) $(1; 3]$.

1.24 1) тотожні на будь-якому інтервалі, який не містить точку 0; 2) тотожні на проміжку $[0; +\infty)$.

1.25. $f(-1) = -2; f(0) = 0; f(2) = 2; f(3) = 3$.

1.26. 1) $f(x) = x^2 - 2$; 2) $f(x) = \sin x$.

1.27. $f_{\Pi} = \begin{cases} f(x), x > 0, \\ a \in \mathbb{R}, x = 0, \\ f(-x), x < 0, \end{cases} f_{\Pi} = \begin{cases} f(x), x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -f(-x), x < 0. \end{cases}$

1.28. 1) Обернена функція $y = \sqrt[3]{x + 1}, D = \mathbb{R}$; 2) оберненої функції не існує.

1.29. 1) $(f \circ g)(x) = 1 - x^2, x \in \mathbb{R}; (g \circ f)(x) = (1 - x)^2, x \in \mathbb{R}$;

2) $(f \circ g)(x) = x, x \in [0; +\infty); (g \circ f)(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

2. Границя послідовності

Навчальні задачі

2.1. Записати перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = 2^{n+1}$;

2) $x_1 = -1, x_n = -nx_{n-1}$.

3) x_n — n -й знак у десятковому записі числа π .

Розв'язання. [6.1.1]

1) [Підставляємо значення $n = 1, 2, 3, 4, 5$ у формулу для загального члена послідовності.]

$$x_1 = 2^{1+1} = 4, x_2 = 2^{2+1} = 8, x_3 = 16, x_4 = 32, x_5 = 64.$$

Отже, $\{x_n\} = 4, 8, 16, 32, 64, \dots$

2) [Послідовно визначаємо члени з рекурентної формули.]

$$x_1 = -1, x_2 = -2 \cdot (-1) = 2, x_3 = -3 \cdot 2 = -6, x_4 = 24, x_5 = -120.$$

Отже,

$$\{x_n\} = -1, 2, -6, 24, -120, \dots$$

3) Оскільки $\pi = 3,141592654\dots$, то

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 1, x_5 = 5.$$

Отже, $\{x_n\} = 3, 1, 4, 1, 5, \dots$

2.2. Доведіть, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо:

$$1) x_n = \frac{n}{2n+1};$$

$$2) x_n = \frac{2^n}{n};$$

Розв'язання. [6.1.6.]

$$1) [\text{Записуємо } x_{n+1}.] x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

[Досліджуємо $\Delta = x_{n+1} - x_n$.]

$$\begin{aligned} \Delta = x_{n+1} - x_n &= \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \\ &= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n+3)n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отже, $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростає.

$$2) x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0.$$

$$q - 1 = \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 = \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} : \frac{2^n}{n} \right) - 1 = \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{n-1}{n+1} > 0 \quad \forall n \geq 2.$$

Отже, $q > 1$ і $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n\}$ зростає.

2.3. Доведіть, що числова послідовність $\{x_n\}$ обмежена, якщо:

$$1) x_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4};$$

$$2) x_n = \frac{(-1)^n n + 11}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Розв'язання. [6.1.5.]

$$1) 0 < \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4} = 1 - \frac{3}{n^3 + 4} < 1 \Rightarrow \left| \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4} \right| < 1.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою.

2) Оскільки

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n n + 11 \right| &\stackrel{[0.2.1]}{\leq} \left| (-1)^n n \right| + 11 = n + 11, \\ \sqrt{n^2 + 1} &> \sqrt{n^2} = n, \end{aligned}$$

то

$$\left| x_n \right| = \frac{\left| (-1)^n n + 11 \right|}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{n + 11}{n} = 1 + \frac{11}{n} \leq 12.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою.

2.4. 1) Довести за означенням, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$;

2) визначити номер N_ε , такий, що

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon = 0,001 \quad \forall n > N_\varepsilon.$$

Розв'язання. [6.2.1.]

1) Виберімо довільне додатне число ε і покажімо, що для нього можна визначити такий номер N_ε , що для всіх номерів $n > N_\varepsilon$ буде виконано нерівність

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Розв'яжімо нерівність:

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Отже, за N_ε можна взяти $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$, якщо $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil > 0$ або 1, якщо $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \leq 0$.

2) Якщо $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, тоді

$$\begin{aligned} N &= \left\lceil \frac{1}{\frac{1}{1000}} - 1 \right\rceil = [999] = 999; \\ \forall n > 999 : \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| &< \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

2.5. Довести, що послідовність $\{x_n\}$, яку означено рекурентним співвідношенням $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$, збіжна. Знайти її границю.

Розв'язання. [6.2.3, 6.2.6.]

Доведімо, що для всіх n правдива нерівність $x_n < 2$. Припустімо, що цю нерівність доведено при $n = k$, $x_k < 2$. Тоді маємо

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Оскільки $x_1 < 2$, то, на підставі принципу математичної індукції, нерівність $x_n < 2$ доведено для всіх n . Оскільки, крім того, $0 < x_n$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена. З нерівності

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n$$

випливає, що вона зростає.

Отже, за ознакою Веєрштраса, ця послідовність має границю, яку позначмо s . Перейдімо до границі в рівності

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n.$$

За теоремою [1.19.8] маємо

$$s^2 = s + 2,$$

звідки $s_1 = -1, s_2 = 2$. Але, оскільки $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $s \geq 0$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

2.6. Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$ є розбіжною.

Розв'язання. [6.2.3, 6.2.5.]

Розгляньмо послідовність

$$\{x_n\} = -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

Якщо вибрати $\varepsilon = 1$, то всі парні члени послідовності потрапляють в інтервал

$(0; 2)$ з центром у точці $x = 1$, а всі непарні

— в інтервал $(-2; 0)$ з центром у точці

$x = -1$, причому ці інтервали не перетинаються.

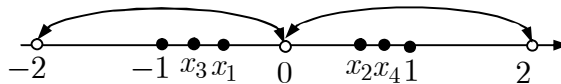


Рис. до зад. 2.6

А за означенням, якщо точка $x = 1$ або $x = -1$ була б границею послідовності $\{x_n\}$, то всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, мали б потрапити у вибраний інтервал.

2.7. Знайти:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{96n^2 + 39n};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3 - 1}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}.$$

Розв'язання. [6.3.8, 6.5.1, 6.5.5, 6.4.6.]^①

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{96n^2 + 39n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 - 6n^2 + 12n - 8)}{96n^2 + 39n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + 16}{96n^2 + 39n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + \frac{16}{n^2}}{96 + \frac{39}{n}} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

поділімо чисельник і знаменник на n^2

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{5/6}} + \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}}}{\left(1 + \frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{1} = 2.$$

поділімо чисельник і знаменник на n^2 – «найвищий степінь» n з урахуванням показників коренів

$$3) (n+1)! = (n+1)n!; \quad (n+2)! = (n+2)(n+1)n!.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(1 + (n+1))}{n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} \stackrel{[6.5.5]}{=} 0,$$

оскільки степінь многочлена в чисельнику менше, ніж степінь многочлена у знаменнику.

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left| \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0}{n \rightarrow \infty} \right| = \frac{1}{-1} = -1.$$

Коментар. ① Щоб знайти границі типу 1)–3) ділять чисельник і знаменник дробу на n у найвищому степені всього виразу (коли цей степінь з'ясується), або на вираз, який найшвидше зростає (приклад 4).

2.8. Знайти:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n-1}.$$

Розв'язання. [6.4.3, 6.3.8, 6.5.5, 6.2.7.]

1) [Тут застосувати теорему [6.3.8] безпосередньо не можна. Отже, перетворюємо загальний член послідовності.]

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) &\stackrel{[4.16.5]}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \left(\sqrt{n^2 + 1} + n \right)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left((n^2 + 1) - n^2 \right)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{найбільший степінь} \\ \text{виразу } n, \text{ а не } n^2 \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Ця послідовність є часткою сум двох геометричних прогресій із знаменниками $q_1 = \frac{1}{3}$ та $q_2 = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \frac{(1/3)^{n+1} - 1}{1/3 - 1}}{1 \cdot \frac{(1/4)^{n+1} - 1}{1/4 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)}{\frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)} \stackrel{[6.2.7]}{=} \frac{9}{8} \stackrel{[6.3.8]}{=} \frac{9}{8}.$$

3) [Тут не можна скористатись безпосередньо теоремою [6.3.8], оскільки маємо суму нескінченної кількості н. м. п. Перетворюємо загальний член послідовності, зводячи дроби до спільного знаменника і користуючись формулою суми арифметичної прогресії з різницею 1. [6.1.2]]

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + (n-1)}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} \stackrel{[6.5.5]}{=} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) Послідовність є добутком н. м. п. $\left\{ \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n-1} \right\}$ (степінь чисельника менша за степінь знаменника) й обмеженої послідовності $\{\sin n^2\}$, оскільки

$$|\sin n^2| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, за властивістю [6.4.3] маємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n-1} = 0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

2.9. Запишіть перші 5 членів послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n};$

2) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + 2.$

2.10. Доведіть, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо:

1) $x_n = n^3 + 2n;$

2) $x_n = n - \ln n;$

3) $x_n = \frac{3^n}{n+1};$

4) $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}.$

2.11. Доведіть, що числова послідовність $\{x_n\}$ обмежена, якщо:

1) $x_n = (-1)^n;$

2) $x_n = \frac{n+1}{n}.$

2.12. Дослідіть послідовність на монотонність і обмеженість:

1) $x_n = n - \frac{1}{n};$

2) $x_n = \cos \frac{\pi n}{2};$

3) $x_n = -\frac{n^2+1}{n^2};$

4) $x_n = -\sqrt{n}.$

2.13. Знайдіть найбільший елемент обмеженої зверху послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1) $x_n = 6n - n^2 - 5;$

2) $x_n = e^{10n-n^2-24};$

3) $x_n = \frac{10^n}{n!};$

4) $x_n = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}.$

2.14. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і визначте номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такий, що $|x_n - a| < \varepsilon = 0,001 \quad \forall n > N_\varepsilon$, якщо:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3;$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1.$

2.15. Знайдіть:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+4n)^2 + 2n^2};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - n^4}{n^4 + 3};$

- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)^3 - (n+3)^3};$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(2n-1)}{4n^3 + 1};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[4]{n+5} + n};$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{9n^2 + 2n}}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{8n^3 + 2}};$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!};$
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!}{(n+3)! + (n+2)!};$
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n - 4^n}{3 \cdot 5^n + 4^n};$
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{3^n - 4^{n+1}};$
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right);$
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 3});$
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2 + 1} \right);$
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5}{4n + 1} - \frac{n^2 + 4}{2n + 3} \right);$
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos n!}{n^2 + 1};$
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \sin 2^n}{n^3 + 1};$
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} \right);$
- 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right);$
- 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$
- 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$

2.16. Доведіть існування границі послідовності

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}.$$

2.17. Доведіть існування границі послідовності і знайдіть її:

- 1) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots;$
- 2) $0, 2, \quad 0, 23, \quad 0, 233, \quad 0, 2333, \dots;$
- 3) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2 + x_n}, x_1 = a > 0.$

2.18. Встановіть, які із заданих послідовностей є нескінченно великими, а які нескінченно малими:

$$1) x_n = 2^{\sqrt{n}};$$

$$2) x_n = n^{(-1)^n};$$

$$3) x_n = n \sin \frac{\pi n}{2};$$

$$4) x_n = \lg(\lg n), n \geq 2;$$

$$5) x_n = n + \sqrt[3]{2 + n - n^3};$$

$$6) x_n = \sqrt{2n^2 + 4n + 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2}.$$

Відповіді

2.9. 1) $\{x_n\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$; 2) $\{x_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

2.12. 1) зростаюча, необмежена; 2) немонотонна, обмежена; 3) зростаюча, обмежена; 4) спадна, обмежена зверху.

2.13. 1) $x_{\max} = x_3 = 4$; 2) $x_{\max} = x_5 = e$; 3) $x_{\max} = x_9 = x_{10} = \frac{10^9}{9!}$; 4) $x_{\max} = x_1 = \frac{\pi^2}{6}$.

2.15. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) -2; 6) 2; 7) 0; 8) ∞ ; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-\frac{1}{4}$; 11) $\frac{1}{3}$; 12) 0; 13) -1; 14) $\frac{5}{8}$; 15) 0; 16) 0; 17) 1; 18) $\frac{3}{4}$; 19) 1; 20) $\frac{1}{2}$.

2.17. 1) 2; 2) $\frac{7}{30}$; 3) 0.

2.18. 1), 4) — н. в. п.; 5) — н. м. п.

3. Границя функції

Навчальні задачі

3.1. Виходячи з означення границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1) = 9;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x + 2} = \infty.$$

Розв'язання. [6.3.3.]

1) Візьмімо $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta(\varepsilon)$, що для всіх x , які справджують нерівність $|x - 2| < \delta$, виконано нерівність

$$|(4x + 1) - 9| < \varepsilon; |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Якщо $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, то

$$|x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(4x + 1) - 9| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1) = 9$.

2) За означенням

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : x > \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x+2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Візьмімо довільне $\varepsilon > 0$, тоді

$$\frac{1}{x+2} < \varepsilon; x+2 > \frac{1}{\varepsilon}; x > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Якщо $\delta = \frac{1}{\varepsilon} - 2$, коли $\frac{1}{\varepsilon} - 2 > 0$, або $\delta = 0$, коли

$\frac{1}{\varepsilon} - 2 < 0$, то

$$x > \delta \Rightarrow \frac{1}{x+2} < \varepsilon,$$

а, отже, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

3) За означенням

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x+2} \right| > \varepsilon.$$

Візьмімо довільне $\varepsilon > 0$, тоді

$$\left| \frac{1}{x+2} \right| = \frac{1}{|x+2|} > \varepsilon \Rightarrow |x+2| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Якщо $\delta_2 = \frac{1}{\varepsilon}$, то для всіх x :

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x+2} \right| > \varepsilon.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} = \infty$.

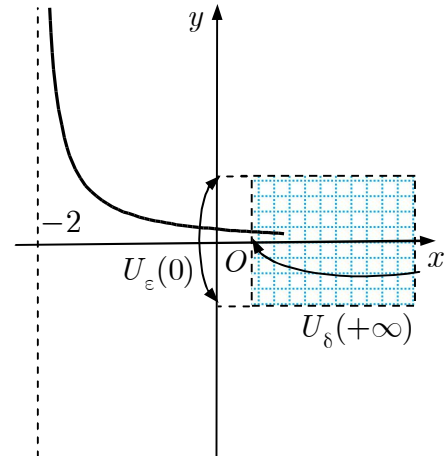


Рис. до зад. 3.1.2)

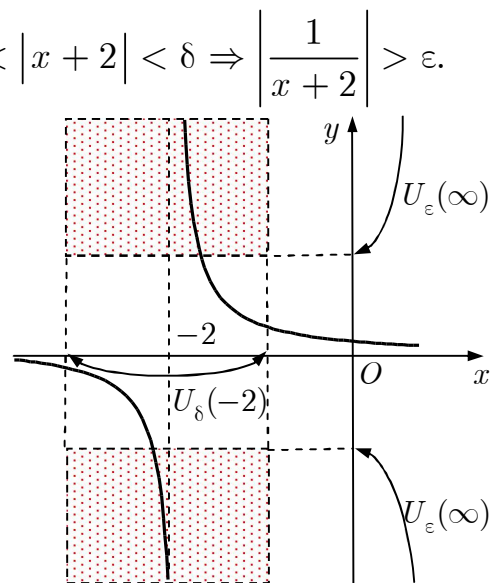


Рис. до зад. 3.1.3)

3.2. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

Розв'язання. [6.3.8, 6.4.5, 6.4.6, 6.5.]^①

1) [Функція є відношенням двох многочленів. Оскільки знаменник не прямує до нуля, коли $x \rightarrow 0$, то до обчислення цієї границі застосовна теорема [6.3.8.]]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{0 - 1}{2 \cdot 0^2 - 0 - 1} = 1.$$

2) [Знаменник дробу прямує до нуля, коли $x \rightarrow -\frac{1}{2}$, а чисельник до нуля не прямує — це «визначена» ситуація.]

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left[\frac{-\frac{3}{4}}{0} \right]^{[6.4.6]} = \infty.$$

3) [Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$ — чисельник і знаменник раціонального дробу прямують до нуля — щоб знайти границю, треба перетворити вираз під знаком границі.]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]^{[5.5.5]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

4) [Оскільки найвищі степені чисельника і знаменника рівні, то границя відношення многочленів, коли аргумент прямує до нескінченності, дорівнює відношенню старших коефіцієнтів чисельника і знаменника.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^{[6.5.5]} = \frac{1}{2}.$$

Справді,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Коментар. ① Способи відшукування границі функції в точці залежать як від самої функції, так і від точки, до якої прямує аргумент функції.

3.3. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 6};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2(x + 1)};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x + 5} - 3}.$$

Розв'язання. [6.3.8.]

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right]^{[5.5.5]} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{2\cancel{(x+2)}\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{7}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2(x + 1)} = \left[\frac{0}{0} \right]^{[5.5.5]} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)^2(x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{(x - 3)(x + 1)} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x + 5} - 3} = \left[\frac{0}{0} \right]^{[4.16.5]} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x + 5} + 3)}{(\sqrt{x + 5} - 3)(\sqrt{x + 5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x + 5} + 3)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4)(\sqrt{x + 5} + 3) = 48.$$

3.4. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6}{5 - 4x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{\sqrt[4]{x^8 - 5x + 3}}.$$

Розв'язання. [6.5.5.]

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^{[6.5.5]} = 0 \text{ (ступінь многочлена знаменника вищий за ступінь многочлена чисельника).}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6}{5 - 4x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^{[6.5.5]} = -\frac{3}{4} \text{ (ступінь многочлена чисельника дорівнює степеню многочлена знаменника — границя дорівнює відношенню старших коефіцієнтів многочленів).}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^{[6.5.5]} = \infty \text{ (ступінь многочлена чисельника вищий за ступінь многочлена знаменника).}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{\sqrt[4]{x^8 - 5x + 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{\sqrt[4]{1 - \frac{5}{x^7} + \frac{3}{x^8}}} \stackrel{[6.4.6]}{=} 4$$

(найвищі степені чисельника і знаменника дорівнюють 2 з урахуванням показника кореня).

3.5. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 + 3x + 1} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2 - x - 2} \right).$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 + 3x + 1} \right) &= [\infty - \infty] = \\ &\stackrel{[4.16.6]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3x - \sqrt{9x^2 + 3x + 1} \right)}{3x + \sqrt{9x^2 + 3x + 1}} \left(3x + \sqrt{9x^2 + 3x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - (9x^2 + 3x + 1)}{3x + \sqrt{9x^2 + 3x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(3x + 1)}{3x + \sqrt{9x^2 + 3x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\left(3 + \frac{1}{x} \right)}{3 + \sqrt{9 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-3}{3 + 3} = -\frac{1}{2}. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 + 3x + 1} \right) &= [-\infty - \infty] = -\infty. \\ 2) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2 - x - 2} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1) - 3}{(x-2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.6. Знайти а) $f(x_0 - 0)$; б) $f(x_0 + 0)$:

$$1) f(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \quad (x \neq 1), x_0 = 1; \quad 2) f(x) = \frac{2}{x-2}, x_0 = 2;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ -2x+2, & x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

Розв'язання. [6.3.4, 6.3.5.]

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{|x-1|} &\stackrel{[4.13.1]}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1; \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{|x-1|} &\stackrel{[4.13.1]}{=} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2}{x-2} = +\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x+1) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (-2x+2) = -2.$$

3.7. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \lg(4x - 1 + \sqrt{2x + 5}); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} 4^{\frac{2x}{x+1}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \sin \left(\pi \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2} \right).$$

Розв'язання. [6.9.1, 6.3.8.]^①

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \lg(4x - 1 + \sqrt{2x + 5}) = \lg \left(\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1 + \sqrt{2x + 5}) \right) = \lg 10 = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} 4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1}} = 4^2 = 16.$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow 2} \sin \left(\pi \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \sin \left(\pi \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x} + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{2\pi}{\sqrt{2x} + 2} = \sin \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\pi}{\sqrt{2x} + 2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Коментар. ① У цій задачі скористаємось можливістю переходу до границі під знаком неперервної функції, а функції $y = \lg x$, $y = 4^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ — неперервні в будь-якій точці області означення.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

3.9. Виходячи з означення границі за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), доведіть, що:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 8) = -5; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 1}{3x + 9} = \frac{5}{3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3.10. Знайдіть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 2x - 16}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 2x - 16};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 2x - 16}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 2x - 16}.$$

3.11. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right);$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x};$

4) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}.$

3.12. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{2x^3 + x + 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{x^2 + x + 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 10};$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 7}{3 - 4\sqrt{x^2 + 2}};$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 3} - \sqrt[5]{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^7 + 1}};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}};$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 4^x - 3^x - 2^x).$

3.13. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3};$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$

5) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{1 - \sqrt{8 - x}};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{x - 2};$

8) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} \quad (n, m \in \mathbb{N}, a > 0).$

3.14. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 12x} - \sqrt{9x^2 + 18x - 5} \right);$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right);$

3) $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{12}{x^2 - 36} - \frac{1}{x - 6} \right);$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right);$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right); \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right).$$

3.15. Знайдіть а) $f(x_0 - 0)$; б) $f(x_0 + 0)$:

$$1) f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}, x_0 = -1; \quad 2) f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}, x_0 = 2;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 2, \\ x^2, & x \geq 2, \end{cases} x_0 = 2; \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

3.16. Знайдіть:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x-1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{x-1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x; \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x.$$

3.17. Знайдіть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \log_2(7x - 1 + \sqrt{3x + 1}); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{x+1}{x^2+1}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \cos \left(\pi \frac{\sqrt{3+x-2}}{x-1} \right); \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

Відповіді

3.10. 1) $\frac{1}{5}$; 2) ∞ ; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{1}{3}$. **3.11.** 1) 9; 2) $\frac{3}{4}$; 3) ∞ ; 4) 0.

3.12. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) ∞ ; 4) -2; 5) -1; 6) 0; 7) 100; 8) $+\infty$.

3.13. 1) 1; 2) ∞ ; 3) 0; 4) 6; 5) -28; 6) 4; 7) $-\frac{1}{12}$; 8) $\frac{n}{m} a^{n-m}$.

3.14. 1) $-\infty$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{12}$; 4) -1; 5) $\frac{1}{4}$; 6) 0.

3.15. 1) $f(-1-0) = -1, f(-1+0) = 1$; 2) $f(2-0) = 0, f(2+0) = +\infty$;
3) $f(2-0) = 3, f(2+0) = 4$; 4) $f(-0) = -2, f(+0) = 0$.

3.16. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) 0.

3.17. 1) 3; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$.

4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Навчальні задачі

4.1. Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$;

Розв'язання. [6.4.3.]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) &\stackrel{[5.10.11]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \sin \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right) = \sin 0 = 0.$$

Функція $2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ обмежена, оскільки:

$$\left| 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 2.$$

Добуток нескінченно малої функції на обмежену є функцією нескінченно малою. Отже,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + x}{2} \sin \frac{1}{2(x + \sqrt{x+1})} = 0.$$

4.2. Знайти:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos 2x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 5x} - 3^{\sin x}}{e^{x^2} - \cos x}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}{x}$.

Розв'язання. [6.8.]

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \sin 5x \stackrel{[6.8.1]}{\sim} 5x, x \rightarrow 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5.$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos 2x} = \left| \begin{array}{l} \sin 2x \stackrel{[6.8.1]}{\sim} 2x, \operatorname{tg} x \stackrel{[6.8.2]}{\sim} x, x \rightarrow 0 \\ 1 - \cos 2x \stackrel{[6.8.3]}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2, x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{2x^2} = 1.$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{[5.10.11]}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \left| \sin \frac{x-a}{2} \sim \frac{x-a}{2}, \right. \\ \left. x \rightarrow a \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{array}{c} \ln(1 + 3^x) \sim 3^x, \\ \ln(1 + 2^x) \sim 2^x, \\ x \rightarrow -\infty \end{array} \right] \stackrel{[6.8.7]}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = 0.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 5x} - 3^{\sin x}}{e^x - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} (3^{\sin 5x - \sin x} - 1)}{(e^x - 1) + (1 - \cos x)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \stackrel{[6.8.8]}{3^{\sin 5x - \sin x} - 1} \sim \\ \stackrel{[5.10.11]}{\sim (\sin 5x - \sin x) \ln 3} = \\ = 2 \ln 3 \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x, x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3^{\sin x} \ln 3 \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x}{(e^x - 1) + (1 - \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3^{\sin x} \ln 3 \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \cos 3x}{\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x}} = \left[\begin{array}{c} 3^{\sin x} \rightarrow 1, \cos 3x \rightarrow 1, \\ \frac{\sin 2x}{x} \stackrel{[6.8.1]}{\rightarrow} 2, \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{[6.8.9]}{\rightarrow} 1, \\ \frac{1 - \cos x}{x} \stackrel{[6.8.3]}{\rightarrow} 0, x \rightarrow 0 \end{array} \right] = 4 \ln 3.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}{x} =$$

$$\stackrel{[6.8.2]}{=} 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x} \right)}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{1+x}}{x \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1+x} \right)} \stackrel{[5.10.6]}{=} =$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{x \left(1 + \frac{1}{1+x} \right)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{x \cdot \frac{x+2}{x+1}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = 2.$$

4.3. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}.$$

Розв'язання. [6.8.]

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} t = x - 1, x = t + 1 \\ t \rightarrow 0, x \rightarrow 1 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 7\pi(t + 1)}{\sin 2\pi(t + 1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(7\pi t + 7\pi)}{\sin(2\pi t + 2\pi)} \stackrel{[5.10.3]}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 7\pi t}{\sin 2\pi t} = \left| \begin{array}{l} \sin 7\pi t \sim 7\pi t, \\ \sin 2\pi t \sim 2\pi t, \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| \stackrel{[6.8.1]}{=} -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{7\pi t}{2\pi t} = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} t = x - 10, \\ x = t + 10, \\ t \rightarrow 0, x \rightarrow 10 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lg(10 + t) - \lg 10}{t} \stackrel{[5.7.5]}{=} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lg\left(1 + \frac{t}{10}\right)}{t} = \left| \begin{array}{l} \lg\left(1 + \frac{t}{10}\right) \sim \frac{t}{10 \ln 10}, \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| \stackrel{[6.8.6]}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{10 \ln 10}}{t} = \frac{1}{10 \ln 10}. \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x - 1} = \left| \begin{array}{l} e^{x-1} - 1 \sim x - 1, \\ x \rightarrow 1 \end{array} \right| \stackrel{[6.8.9]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(x - 1)}{x - 1} = e.$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} t = x - 1, x = t + 1, \\ t \rightarrow 0, x \rightarrow 1 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (t + 1)^{1/3}}{1 - (t + 1)^{1/5}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} (1 + t)^{1/3} - 1 \sim \frac{t}{3}, \\ (1 + t)^{1/5} - 1 \sim \frac{t}{5}, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \stackrel{[6.8.10]}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}t}{-\frac{1}{5}t} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

4.4. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right).$$

Розв'язання.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x}{\ln 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3}{x \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \left| \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow +\infty \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - \frac{2x \sin x}{\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi - 2x \sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2}, \\ x = t + \frac{\pi}{2}, \\ t \rightarrow 0, x \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi - 2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi - (2t + \pi) \cos t}{-\sin t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(1 - \cos t) - 2t \cos t}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(1 - \cos t)}{-\sin t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cos t}{\sin t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi t^2}{-t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cos t}{t} = -\frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} t + 2 \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 2.$$

4.5. Знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{x}{2x+1}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^x;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

Розв'язання. [6.5.6, 6.7.5, 6.7.6.]

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{x}{2x+1}} \stackrel{[6.3.8]}{=} \left[0^{1/2} \right] = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^x = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} \right] \stackrel{[6.5.6]}{=} 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^x = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-\infty} \right] \stackrel{[6.5.6]}{=} +\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x = [1^\infty] \stackrel{[6.7.5]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} - 1 \right) x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1}} = e^{-1}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x} = [1^\infty] \stackrel{[6.7.5]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x+e)-1) \operatorname{ctg} x} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e)-\ln e}{\operatorname{tg} x}} \stackrel{[5.7.5]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\operatorname{tg} x}} \stackrel{[6.8.7]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e}} = e^{1/e}.$$

4.6. Які з функцій є нескінченно малими чи нескінченно великими?

$$1) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x; \text{ а) } x \rightarrow +\infty, \text{ б) } x \rightarrow -\infty;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}; \text{ а) } x \rightarrow +\infty, \text{ б) } x \rightarrow -\infty.$$

Розв'язання. [6.4.1, 6.4.2.]

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = [\infty + \infty] = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

Отже, $f(x)$ — н. в. ф., коли $x \rightarrow -\infty$; $f(x)$ — н. м. ф., коли $x \rightarrow +\infty$.

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 2^x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2^x} = 0.$$

Отже, $f(x)$ — н. м. ф., коли $x \rightarrow +\infty$.

4.7. Визначити порядок мализни і головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x) = x^3 + 1000x^2$ щодо н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x \rightarrow 0$.

Розв'язання. [6.6.5.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1000x^2}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x + 1000)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2-k}(x + 1000) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 2 - k > 0, \\ 1000, & 2 = k, \\ \infty, & 2 - k < 0. \end{cases}$$

Отже, н. м. ф. $\alpha(x)$ має порядок $k = 2$ щодо н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x \rightarrow 0$; головна частина $1000x^2$. Тобто

$$x^3 + 1000x^2 \sim 1000x^2, x \rightarrow 0.$$

4.8. Визначити порядок росту і головну частину нескінченно великої функції

$$\alpha(x) = \frac{x^5}{1+x+2x^2} \text{ щодо функції } \beta(x) = x, x \rightarrow \infty.$$

Розв'язання. [6.6.5.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{1+x+2x^2}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{5-k}}{1+x+2x^2} = \begin{cases} \infty, & 5-k > 2, \\ \frac{1}{2}, & 5-k = 2, \\ 0, & 5-k < 2. \end{cases}$$

Отже, н. в. ф. $\alpha(x)$ має порядок росту $k = 5 - 2 = 3$ щодо н. в. ф. $\beta(x) = x$, коли $x \rightarrow \infty$; головна частина $\frac{1}{2}x^3$. Тобто

$$\frac{x^5}{1+x+2x^2} \sim \frac{x^3}{2}, x \rightarrow \infty.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

4.9. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x}-2};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right);$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x};$

7) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a};$

8) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}.$

4.10. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2};$

2) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right).$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right);$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2.$

4.11. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_2 \frac{10+x}{5+x};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{\pi}{x};$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$$

4.12. Знайдіть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(4^{1/x} - 4^{1/(x+1)} \right).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+x^2} - 1}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}.$$

4.13. Знайдіть:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{mx};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} \right)^{x^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{\cos x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 3^x}{1+x \cdot 7^x} \right)^{1/\operatorname{tg}^2 x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^2 \cdot 2^x}{1+x^2 \cdot 5^x} \right)^{1/\sin^3 x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - e^{x^2} \right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{3})};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - 3^{\sin^2 x} \right)^{1/\ln \cos x}.$$

4.14. Визначте, які функції є нескінченно малими:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}, x \rightarrow 1;$$

$$2) f(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}, x \rightarrow +0;$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^4 + x + 1)}, x \rightarrow \infty.$$

4.15. Визначте, які функції є нескінченно великими:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, x \rightarrow 2;$$

$$2) f(x) = \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x, \text{ а) } x \rightarrow +\infty, \text{ б) } x \rightarrow -\infty.$$

4.16. Визначте порядок мализни і головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо функції $\beta(x) = x$, коли $x \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{ll} 1) \alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}; & 2) \alpha(x) = \ln(1+x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}; \\ 3) \alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1; & 4) \alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x. \end{array}$$

4.17. Визначте порядок росту і головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ щодо функції $\beta(x) = x$, коли $x \rightarrow \infty$.

Відповіді

4.9. 1) 3; 2) 0; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 12; 5) 0; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $-\sin a$; 8) $-\frac{1}{\sin^2 a}$.

4.10. 1) $\frac{1}{2}$; 2) -2 ; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\ln 2$. **4.11.** 1) $\frac{5}{\ln 2}$; 2) $-\frac{\pi^2}{2}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $\frac{3}{2}$.

4.12. 1) 5; 2) $\ln 4$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $4 \ln 2 - 4$.

4.13. 1) ∞ ; 2) 0; 3) e^{km} ; 4) e^8 ; 5) e ; 6) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 7) $\frac{3}{7}$; 8) $\frac{2}{5}$; 9) e^{-9/π^2} ; 10) 9.

4.16. 1) $k = \frac{1}{2}$, головна частина — $(-x^{1/2})$, $x \rightarrow 0$; 2) $k = \frac{2}{3}$, головна частина — $(-2x^{2/3})$, $x \rightarrow 0$; 3) $k = \frac{1}{3}$, головна частина — $(\ln 3 \cdot x^{1/3})$; 4) $k = 3$, головна частина — $\frac{x^3}{2}$.

4.17. $k = 2$, головна частина x^2 , $x \rightarrow \infty$.

5. Неперервність функції. Точки розриву функції

Навчальні задачі

5.1. Дослідити на неперервність функцію:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{\sin x}{x}; & 2) f(x) = e^{1/x}; \\ 3) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & x > 2; \end{cases} & 4) f(x) = \sin \frac{1}{x}. \end{array}$$

Розв'язання. [6.11.]

1) Функція f — елементарна; область означення функції $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отже, $x_0 = 0$ — точка розриву.

[З'ясуємо тип точки розриву, знаходячи однобічні границі].

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$x_0 = 0 \notin D(f),$$

то точка $x_0 = 0$ є точкою розриву 1-го роду, усувного.^①

Функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ можна доозначити в точці $x_0 = 0$, покладаючи

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Функція g вже буде неперервною на $\mathbb{R}$.

2) Функція f — елементарна; область означення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отже, функція f має розрив у точці $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty.$$

Оскільки обидві границі існують і одна з них нескінченна, то $x_0 = 0$ — точка розриву 2-го роду, нескінченного. Графік функції має в точці $x_0 = 0$ праву вертикальну асимптоту.

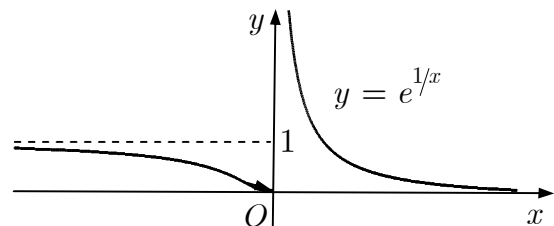


Рис. до зад. 5.1.2)

3) Функція f — неелементарна, означена різними аналітичними виразами на різних проміжках, які є неперервними функціями на цих проміжках. Отже, єдині можливі точки розриву — це точки $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$, де міняються аналітичні вирази для функції f .

Дослідімо точку $x_1 = 0$.

$$f(0) = (0 - 1)^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (1 - x^2) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x - 1)^2 = 1.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(-0)$, $f(+0)$ і

$$f(+0) = f(-0) = 1 = f(0),$$

то за критерієм неперервності [6.9.2] функція f є неперервною в точці $x_1 = 0$.

Дослідімо точку $x_2 = 2$.

$$f(2) = (2 - 1)^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x - 1)^2 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (4 - x) = 2.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(2 - 0)$, $f(2 + 0)$ і

$$f(2 - 0) = 1 \neq 2 = f(2 + 0),$$

то точка $x_2 = 2$ є точкою розриву 1-го роду, неусувного [6.11.2], зі стрибком

$$\delta = f(2 + 0) - f(2 - 0) = 2 - 1 = 1.$$

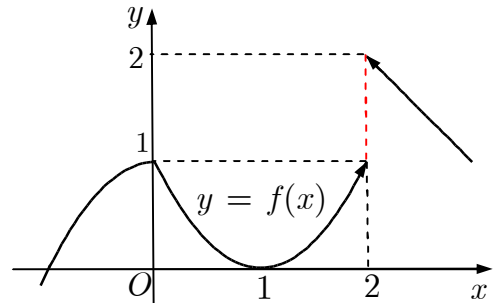


Рис. до зад. 5.1.3)

4) Функція f — елементарна, область означення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дове́дімо, користуючись означенням границі за Гейне [6.3.2], що не існує $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$. Для цього побудуємо дві послідовності значень аргументу:

$$\{x'_n\} = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \right\} = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \dots, \frac{2}{\pi + 2\pi n}, \dots;$$

$$\{x''_n\} = \left\{ \frac{1}{2\pi n} \right\} = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{6\pi}, \dots, \frac{1}{2\pi n}.$$

Обидві послідовності збігаються до нуля. Запишімо послідовності значень функції f :

$$f(x'_n) = 1, 1, 1, \dots, 1, \dots;$$

$$f(x''_n) = 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$$

Оскільки послідовність $\{f(x'_n)\}$ збігається до нуля, а послідовність $\{f(x''_n)\}$ — до одиниці, то не

існує $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.

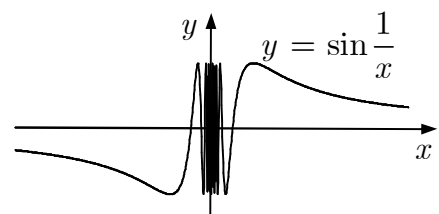


Рис. до зад. 5.1.4)

Точка $x_0 = 0$ є точкою розриву 2-го роду, істотного [6.11.3].

Коментар. ① Усувний розрив можна «усунути», доозначивши функцію $f(x)$ у точці x_0 , тобто утворивши нову функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & x = x_0, \end{cases}$$

що збігається з функцією $f(x)$ скрізь, окрім точки x_0 , і буде вже неперервною в цій точці.

5.2. Показати, що будь-який многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Розв'язання. [6.10.4.]

Розгляньмо многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами

$$P_{2n+1}(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n+1}.$$

Нехай для визначеності $a_0 > 0$. При досить великих за абсолютною величиною від'ємних значеннях x знак многочлена $P_{2n+1}(x)$ буде від'ємним, а при досить великих додатних значеннях x — додатним. Оскільки многочлен є скрізь неперервною функцією, то знайдеться деяка точка, в якій він дорівнює нулеві.

5.3. Знайти з точністю 0,1 корінь рівняння $x^4 + x^3 - 1 = 0$ на відрізку $[0; 1]$.

Розв'язання. [6.10.4.]

Нехай $f(x) = x^4 + x^3 - 1$. Ця функція неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$, а, отже, і на $[0; 1]$.

Оскільки $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, то за теоремою Больцано — Коші

$$\exists c \in (0; 1) : f(c) = 0,$$

тобто рівняння $f(x) = 0$ має корінь на $[0; 1]$. Знайти корінь з точністю 0,1 означає вказати відрізок $[a; b]$ завдовжки $b - a \leq 0,1$, який містить корінь рівняння.

Щоб знайти наближене значення кореня, скористаємось методом половинного поділу.

Крок 1. Покладаємо $a = 0, b = 1$. Обчислюємо

$$f(a) = f(0) = -1, f(b) = f(1) = 1.$$

Перевіряємо

$$\begin{aligned} f(a)f(b) &= -1 \cdot 1 = -1 < 0, \\ |b - a| &= 1 > 0,1. \end{aligned}$$

Крок 2. Обчислюємо

$$x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Крок 3. Обчислюємо

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{16}.$$

Перевіряємо

$$\begin{aligned} f(x_1)f(a) &= -\frac{13}{16} \cdot (-1) = \frac{13}{16} > 0; \\ f(x_1)f(b) &= -\frac{13}{16} \cdot 1 = -\frac{13}{16} < 0. \end{aligned}$$

Покладаємо $a_1 = x_1 = \frac{1}{2}, b_1 = b = 1$. Перевіряємо

$$|a_1 - b_1| = \frac{1}{2} > 0,1.$$

Крок 4. Обчислюємо

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Крок 5. Обчислюємо

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{67}{256}.$$

Перевіряємо

$$f(x_2)f(a_1) = -\frac{67}{256} \cdot \left(-\frac{13}{16}\right) > 0;$$

$$f(x_2)f(b_1) = -\frac{67}{256} \cdot 1 < 0.$$

Покладаємо

$$a_2 = x_2 = \frac{3}{4}, b_2 = b_1 = 1.$$

Перевіряємо

$$|a_2 - b_2| = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

Крок 6. Обчислюємо

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{7}{8} \dots$$

Врешті-решт дістанемо: $x = 0,81$ з точністю $\varepsilon = 0,1$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

5.5. Використовуючи лише графік функції $f(x)$, визначте її точки розриву і їхній тип:

1) рис. 1;

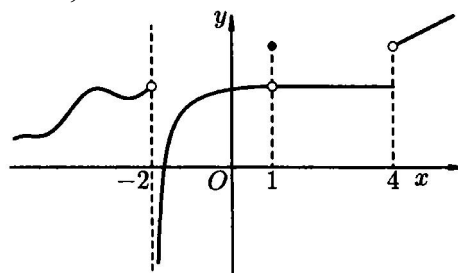


Рис. 1 до зад. 5.5

2) рис 2.

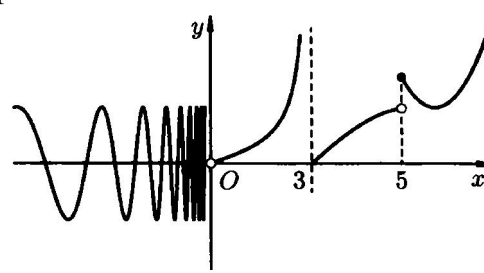


Рис. 2 до зад. 5.5

5.6. Знайдіть точки розриву функції, дослідіть їхній характер, у разі усувного розриву дозначте функцію «за неперервністю». Схематично побудуйте графік функції в околах точок розриву.

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1};$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1};$$

$$3) f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, n \in \mathbb{N};$$

$$4) f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x};$$

$$5) f(x) = \frac{|3x - 5|}{3x - 5};$$

$$6) f(x) = \frac{|x + 2|}{\operatorname{arctg}(x + 2)};$$

$$7) f(x) = (x + 1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$8) f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1};$$

$$9) f(x) = \frac{1}{x^2 - 9};$$

$$10) f(x) = \frac{2}{1 - 3^{3+x}};$$

$$11) f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}};$$

$$12) f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$13) f(x) = \frac{3}{\log_2 |x + 1|};$$

$$14) f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$15) f(x) = \cos \frac{\pi}{2-x};$$

$$16) f(x) = \sin \frac{1}{(x+3)^2};$$

$$17) f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2,5, \\ 2x - 7 & 2,5 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & x < \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{2x+3}, & x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} e^{x+3}, & x \leq -3, \\ 10 - x^2, & |x| \leq 3, \\ \frac{1}{2^{x-2}}, & x > 3; \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \sin \frac{1}{x-3}, & x > 1. \end{cases}$$

5.7. Виберіть значення параметрів так, що функція стала неперервною і побудуйте її графік:

$$1) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 3 - ax^2, & x > 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ A \sin x + B, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5.8. Дослідіть на неперервність функцію і побудуйте її графік:

$$1) y = \frac{1}{\ln|x|}; \quad 2) y = \{x\};$$

$$3) y = \frac{1}{\{x\}}; \quad 4) y = (-1)^{[x]}.$$

5.9. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{(2x-1)(x-2)^3}{(x+1)(x+2)^2} < 0; \quad 2) \frac{(x+3)(x+2)^3(x+1)}{x(x-3)(x-4)} > 0.$$

5.10. Доведіть, що рівняння має розв'язок на вказаному відрізку:

$$1) x^3 - 3x + 1 = 0, x \in [-1; 0]; \quad 2) x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0, x \in [0; 2].$$

Відповіді

5.5.1) функція $f(x)$ має: в точці $x = 2$ розрив 2-го роду, нескінченний; у точці $x = 1$ розрив 1-го роду, усувний; у точці $x = 4$ розрив 1-го роду, неусувний;

2) функція $f(x)$ має: в точці $x = 0$ розрив 2-го роду, істотний; у точці $x = 3$ розрив 2-го роду, нескінченний; у точці $x = 5$ розрив 1-го роду, неусувний.

5.6. 1) функція $f(x)$ має в точці $x = 1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1, \\ \frac{2}{3}, & x = 1; \end{cases}$

2) функція $f(x)$ має в точці $x = -1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq -1, \\ \frac{1}{3}, & x = -1; \end{cases}$

3) функція $f(x)$ має в точці $x = 0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ n, & x = 0; \end{cases}$

4) функція $f(x)$ має в точці $x = 0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

- 5) функція $f(x)$ має в точці $x = \frac{5}{3}$ розрив 1-го роду, неусувний;
- 6) функція $f(x)$ має в точці $x = -2$ розрив 1-го роду, неусувний;
- 7) функція $f(x)$ має в точці $x = 0$ розрив 1-го роду, неусувний;
- 8) функція $f(x)$ має в точці $x = 2$ розрив 1-го роду, неусувний;
- 9) функція $f(x)$ має в точках $x = \pm 3$ розрив 2-го роду, нескінченний;
- 10) функція $f(x)$ має в точці $x = -3$ розрив 2-го роду, нескінченний;
- 11) функція $f(x)$ має в точках $x = \pm 2$ розрив 2-го роду, нескінченний;
- 12) функція $f(x)$ має в точках $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, розрив 2-го роду, нескінченний;
- 13) функція $f(x)$ має в точці $x = -1$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq -1, \\ 0, & x = -1, \end{cases}$ а в точках $x = -2, x = 0$ — розрив 2-го роду, нескінченний;
- 14) функція $f(x)$ має в точці $x = 0$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ а в точках $x = \pm 1$ — розрив 2-го роду, нескінченний;
- 15) функція $f(x)$ має в точці $x = 2$ розрив 2-го роду, істотний;
- 16) функція $f(x)$ має в точці $x = -3$ розрив 2-го роду, істотний;
- 17) функція $f(x)$ має в точці $x = 2,5$ розрив 1-го роду, неусувний;
- 18) функція $f(x)$ має в точці $x = \frac{1}{2}$ розрив 1-го роду, усувний, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{4}, & x = \frac{1}{2}; \end{cases}$
- 19) функція $f(x)$ має в точці $x = 3$ розрив 1-го роду, неусувного;
- 20) функція $f(x)$ має в точках $x = 0, x = 1$ розрив 1-го роду, неусувний, а в точці $x = 3$ — розрив 2-го роду, істотний.
- 5.6.** 1) $x = -1$ — точка розриву 1-го роду (скінченного); 2) $x = -3$ — точка розриву 2-го роду (нескінченного); 3) $x = -1$ — точка розриву 1-го роду (усувного), $x = -2, x = 0$ — точки розриву 2-го роду (нескінченного); 6) $x = \frac{1}{2}$ — точка розриву 1-го роду (усувного).
- 5.7.** 1) $a = 1$; 2) $A = -1, B = 1$.
- 5.8.** 1) $x = 0$ — точка розриву 1-го роду, усувного, $x = \pm 1$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного; 2), 4) $x \in \mathbb{Z}$ — точки розриву 1-го роду, неусувного; 3) $x \in \mathbb{Z}$ — розриви 2-го роду, нескінченного.
- 5.9.** 1) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$; 2) $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$.

Модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6. Похідна. Техніка диференціювання

Навчальні задачі

6.1. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$ у точці x_0 . Обчислити $f'(1)$.

Розв'язання. [7.1.1.]

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= 4(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 8 = \\ &= 4x_0^2 - 3x_0 + 8 + 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2. \\ \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2. \\ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 8x_0 - 3 + 4\Delta x. \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x_0 - 3 + 4\Delta x) = 8x_0 - 3. \\ f'(1) &= 5. \end{aligned}$$

6.2. Знайти похідну функції:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $f(x) = x^4$; | 2) $f(x) = \sqrt{x}$; |
| 3) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$; | 4) $f(x) = 5x^3$; |
| 5) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$; | 6) $f(x) = -\frac{5}{4x^3}$. |

Розв'язання. [7.2.1, 7.3.2.]

- 1) $f'(x) = (x^4)' \stackrel{[7.3.2]}{=}_{\alpha=4} 4x^3$.
- 2) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' \stackrel{[7.3.2]}{=}_{\alpha=1/2} \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- 3) $f'(x) = (\sqrt[4]{x^3})' = (x^{3/4})' \stackrel{[7.3.2]}{=}_{\alpha=3/4} \frac{3}{4} x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Для розв'язання прикладів стануть у пригоді формули:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}, \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}}.$$

Нагадаймо, що сталий множник виносимо за знак похідної [7.2.1].

$$\boxed{(Cu)' = Cu'}.$$

$$4) f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2.$$

$$5) f'(x) = (4\sqrt[3]{x^2})' = 4(x^{2/3})' = 4 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$6) f'(x) = \left(-\frac{5}{4x^3}\right)' = -\frac{5}{4}(x^{-3})' = -\frac{5}{4} \cdot (-3)x^{-4} = \frac{15}{4x^4}.$$

6.3. Знайти похідну функції:

$$1) f(x) = 3x^2 - 5x + 1;$$

$$2) f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2};$$

$$3) f(x) = e^x \sin x;$$

$$4) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}.$$

Розв'язання. [7.2.1–7.2.4, 7.3.]

$$\begin{aligned} 1) f'(x) &= (3x^2 - 5x + 1)' = \\ &\quad (u \pm v)' = u' \pm v', (Cu)' = Cu' \\ &= 3(x^2)' - 5(x)' + (1)' = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5. \end{aligned}$$

2) [Перед тим, як знаходити похідну, переписуємо функцію у вигляді, зручному для диференціювання.]

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)' = \left(3x^{1/3} + 2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}\right)' = \\ &= 3\left(x^{1/3}\right)' + 2(x^{-1})' - \frac{1}{2}(x^{-2})' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3} + 2 \cdot (-1)x^{-2} - \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) f'(x) &= (e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = \\ &\quad (uv)' = u'v + uv' \quad (e^x)' = e^x, (\sin x)' = \cos x \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}\right)' = \frac{(\operatorname{tg} x)' \ln x - \operatorname{tg} x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \\ &\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \ln x - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - \sin x \cdot \cos x}{x \ln^2 x \cdot \cos^2 x}. \end{aligned}$$

6.4. Знайти похідну і диференціал функції:

$$1) f(v) = \operatorname{tg} v \cdot \sin a;$$

$$2) \rho(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi;$$

$$3) s(t) = \ln t + \operatorname{ctg} 3.$$

Розв'язання. [7.2, 7.3, 7.1.8, 7.1.9.]

$$1) f'(v) = (\operatorname{tg} v \cdot \sin a)' \stackrel{[7.2.1]}{=} \sin a \cdot (\operatorname{tg} v)' \stackrel{[7.1.9]}{=} \frac{\sin a}{\cos^2 v}.$$

$$df(v) \stackrel{[7.1.9]}{=} \frac{\sin a}{\cos^2 v} dv.$$

$$2) \rho'(\varphi) = (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)' \stackrel{[7.2.2, 7.2.3]}{=} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi - \sin \varphi = \varphi \cos \varphi.$$

$$d\rho(\varphi) \stackrel{[7.1.9]}{=} \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

$$3) s'(t) = (\ln t + \operatorname{ctg} 3)' \stackrel{[7.2.2]}{=} \frac{1}{t} + 0 = \frac{1}{t}.$$

$$ds(t) \stackrel{[7.1.9]}{=} \frac{dt}{t}.$$

6.5. Знайти похідну функції:

$$1) f(x) = \sin 3x;$$

$$2) f(x) = \operatorname{ctg} qx;$$

$$3) f(x) = \sin(2x^2);$$

$$4) f(x) = 3(\operatorname{tg} x)^2;$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\cos^3 x};$$

$$6) f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 3 \cos^2 4x}.$$

Розв'язання. [7.2.5, 7.3.]

$$1) f'(x) = (\sin 3x)' = (\sin u)' \stackrel{[7.2.5]}{=} \underbrace{\cos 3x}_{\text{похідна синуса}} \cdot \underbrace{(3x)'}_{\text{похідна аргументу}} = 3 \cos 3x.$$

$$2) f'(x) = (\operatorname{ctg} qx)' \stackrel{[7.3.10]}{=} - \frac{(qx)'}{\sin^2 qx} = - \frac{q}{\sin^2 qx}.$$

$$3) f'(x) = [\sin(2x^2)]' \stackrel{[7.3.7]}{=} \cos(2x^2) \cdot (2x^2)' = 4x \cos 2x^2.$$

$$4) f'(x) = [3(\operatorname{tg} x)^2]' = (3u^2)' \stackrel{[7.3.2]}{=} 3 \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' \stackrel{[7.3.9]}{=} 6 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{6 \sin x}{\cos^3 x}.$$

$$5) f'(x) = \left[\frac{1}{\cos^3 x} \right]' = \left[(\cos x)^{-3} \right]' \stackrel{[7.3.2]}{=} -3(\cos x)^{-4} (\cos x)' \stackrel{[7.3.8]}{=} \frac{3 \sin x}{\cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned} 6) f'(x) &= \left[\sqrt{\sin^2 x + 3 \cos^2 4x} \right]' = \left[(\sin^2 x + 3 \cos^2 4x)^{1/2} \right]' \stackrel{[7.3.2]}{=} \\ &= \frac{(\sin^2 x + 3 \cos^2 4x)'}{2(\sin^2 x + 3 \cos^2 4x)^{1/2}} \stackrel{[7.3.2]}{=} \\ &= \frac{2 \sin x \cdot \cos x + 3 \cdot 2 \cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4}{2\sqrt{\sin^2 x + 3 \cos^2 4x}} = \frac{\sin 2x - 12 \sin 8x}{2\sqrt{\sin^2 x + 3 \cos^2 4x}}. \end{aligned}$$

6.6. Знайти похідну функції:

$$1) f(x) = \arcsin(2x);$$

$$2) f(x) = \arcsin^2 3x;$$

$$3) f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$4) f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$5) f(x) = \arccos(x^m);$$

$$6) f(x) = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}.$$

Розв'язання. [7.3.11–7.3.14.]

$$1) f'(x) = \left[\arcsin(2x) \right]' \stackrel{[7.3.11]}{=} \frac{(2x)'}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

$$\begin{aligned} 2) f'(x) &= \left[\arcsin^2 3x \right]' = \left[(\arcsin 3x)^2 \right]' \stackrel{[7.3.2]}{=} 2 \arcsin 3x \cdot (\arcsin 3x)' \stackrel{[7.3.11]}{=} \\ &= 2 \arcsin 3x \cdot \frac{(3x)'}{\sqrt{1 - (3x)^2}} = 2 \arcsin 3x \cdot \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \frac{6 \arcsin 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}. \end{aligned}$$

$$3) f'(x) = \left[\operatorname{arctg} \sqrt{x} \right]' \stackrel{[7.3.13]}{=} \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}.$$

$$4) f'(x) = \left[\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right]' \stackrel{[7.3.14]}{=} -\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{x}{2(x + 1)\sqrt{x^3}} = \frac{1}{2(x + 1)\sqrt{x}}.$$

$$5) f'(x) = \left[\arccos x^m \right]' \stackrel{[7.3.12]}{=} -\frac{(x^m)'}{\sqrt{1 - x^{2m}}} = -\frac{mx^{m-1}}{\sqrt{1 - x^{2m}}}.$$

$$\begin{aligned} 6) f'(x) &= \left[\operatorname{arctg}^4 \sqrt{x} \right]' = \left[(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^4 \right]' \stackrel{[7.3.13]}{=} 4 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x} \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \\ &= 4 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{2 \operatorname{arctg}^3 x}{(1 + x)\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

6.7. Знайти похідні функції:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $f(x) = a^{3x}, a > 0;$ | 2) $f(x) = 7^{\frac{1}{4x}};$ |
| 3) $f(x) = 4^{\sin^2 x};$ | 4) $f(x) = e^{x^4};$ |
| 5) $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}};$ | 6) $f(x) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$ |

Розв'язання. [7.3.3, 7.3.4.]

$$1) f'(x) = \left[a^{3x} \right]' \stackrel{[7.3.3]}{=} a^{3x} \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a.$$

$$2) f'(x) = \left[7^{\frac{1}{4x}} \right]' \stackrel{[7.3.3]}{=} 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right).$$

$$3) f'(x) = \left[4^{\sin^2 x} \right]' \stackrel{[7.3.3]}{=} 4^{\sin^2 x} \ln 4 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x.$$

$$4) f'(x) = \left[e^{x^4} \right]' \stackrel{[7.3.4]}{=} e^{x^4} \cdot 4x^3.$$

$$5) f'(x) = \left[e^{\sqrt{\sin x}} \right]' \stackrel{[7.3.4]}{=} e^{\sqrt{\sin x}} \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

$$\begin{aligned} 6) f'(x) &= \left[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \right]' \stackrel{[7.2.3]}{=} \\ &= (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' = \\ &= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6) = e^x x^3. \end{aligned}$$

6.8. Знайти похідну функції:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $f(x) = \log_2(5x + 4);$ | 2) $f(x) = \ln^5 x;$ |
| 3) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} x;$ | 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$ |

Розв'язання. [7.3.5, 7.3.6.]

$$1) f'(x) = \left[\log_2(5x + 4) \right]' \stackrel{[7.3.5]}{=} \frac{5}{(5x + 4) \ln 2}.$$

$$2) f'(x) = \left[\ln^5 x \right]' \stackrel{[7.3.6]}{=} 5 \ln^4 x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$3) f'(x) = \left[\ln \operatorname{arctg} x \right]' \stackrel{[7.3.6]}{=} \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$4) f'(x) = \left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right]' \stackrel{[7.3.6]}{=} \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

7.9. Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = \operatorname{sh}^2 x;$$

$$2) f(x) = \operatorname{th}^3 x^2;$$

$$3) f(x) = \ln \operatorname{ch} x;$$

$$4) f(x) = \cos(\operatorname{cth} x).$$

Розв'язання. [7.3.15–7.3.18.]

$$1) f'(x) = [\operatorname{sh}^2 x]' = [(\operatorname{sh} x)^2]' \stackrel{[7.3.15]}{=} 2 \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{sh} x)' = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

$$2) f'(x) = [\operatorname{th}^3 x^2]' = [(\operatorname{th} x^2)^3]' \stackrel{[7.3.17]}{=} 3 \operatorname{th}^2 x^2 (\operatorname{th} x^2)' = 3 \operatorname{th}^2 x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2} \cdot 2x.$$

$$3) f'(x) = [\ln \operatorname{ch} x]' = \frac{(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch} x} \stackrel{[7.3.16]}{=} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x.$$

$$4) f'(x) = [\cos(\operatorname{cth} x)]' \stackrel{[7.3.18]}{=} -\sin \operatorname{cth} x \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right) = \frac{\sin \operatorname{cth} x}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

6.10. Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2(x+4)^2}};$$

$$2) f(x) = (\cos x)^{\sin x}.$$

Розв'язання. [7.2.6.]^①

1) [Застосовуючи формулу логарифмічної похідної треба максимально спростити вираз перед диференціюванням.]

$$f'(x) \stackrel{[2.2.6]}{=} f(x) \left(\ln \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2(x+4)^2}} \right)' =$$

максимально використовуємо властивості логарифму

$$\begin{aligned} &= f(x) \left(3 \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{2}{5} \ln(x-3) - 2 \ln(x+4) \right)' = \\ &= \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2(x+4)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} - \frac{2}{x+4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) f'(x) &\stackrel{[7.2.6]}{=} f(x) (\ln(\cos x)^{\sin x})' = f(x) (\sin x \ln \cos x)' = \\ &= (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right). \end{aligned}$$

Коментар. ① Формулу логарифмічної похідної доцільно використовувати для диференціювання виразів з великою кількістю множників або степеневих показникових виразів.

Стануть у пригоді такі формули:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x, y > 0.$$

6.11. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої неявно $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Розв'язання. ^①

[Диференціюємо обидві частини рівності, що задає функцію $y(x)$ неявно, за змінною x .]

$$(x^3)' + (y^3)' - 3a(xy)' = 0.$$

y^3 є складеною функцією,
а xy -добутком

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3ay - 3axy' = 0.$$

[Залишаємо усі доданки, які містять y' , ліворуч і переносимо праворуч решту.]

$$(3y^2 - 3ax)y' = -3x^2 + 3ay.$$

[Виражаємо y' .]

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Коментар. ^① Перехід від неявного задавання функції до явного часто буває складним, а то й неможливим. Для знаходження похідної $y' = \frac{dy}{dx}$ **не рекомендовано** переходити від неявного задавання функції до явного.

6.12. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$y(x) : \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}, \end{cases} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ для довільного значення } t \text{ і для } t = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. [7.2.8.] ^①

$$y'_x(t) = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)'}{(\operatorname{tg} t + t)'} = \frac{\frac{2 \sin t}{\cos^3 t}}{\frac{1}{\cos^2 t} + 1} = \frac{2 \sin t}{\cos t + \cos^3 t};$$

$$y'_x(x) : \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + t, \\ y'_x(t) = \frac{2 \sin t}{\cos t + \cos^3 t}. \end{cases}$$

$$y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи**6.13.** Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1$; 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

3) $f(y) = 2\sqrt{y} - \frac{1}{y} + \sqrt[4]{3}$;

4) $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$;

6) $s(t) = \frac{3t^2 + 1}{t - 1}$.

6.14. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$;

2) $f(x) = \frac{x}{1 - \cos x}$;

3) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

4) $\rho(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$.

6.15. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 \log_3 x$;

2) $f(x) = \frac{x - 1}{\lg x}$;

3) $f(x) = x \sin x \ln x$;

4) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$;

5) $f(x) = \frac{x}{4^x}$;

6) $f(x) = x \cdot 10^x$;

7) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$;

8) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$;

9) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$;

10) $f(x) = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

6.16. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = (5x^2 + 7)^3$;

2) $f(x) = (1 + 5x - 8x^2)^5$;

3) $f(x) = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4$;

4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$;

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}; \quad 6) f(x) = \frac{10}{(4x^3 - 5x^2 + 7x - 1)^4};$$

$$7) f(x) = (5x^2 - 7x + 2)(15x^2 + 5)^3; 8) f(x) = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7 + 4x^3)^2}.$$

6.17. Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = \sqrt{\sin x}; \quad 2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}};$$

$$3) f(x) = \operatorname{ctg}^4 x; \quad 4) f(x) = 5 \cos^5 x;$$

$$5) f(x) = 7 \operatorname{tg}^6 x; \quad 6) f(x) = 8 \sin^2 x;$$

$$7) f(x) = \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{3}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x;$$

$$8) f(x) = \frac{1}{9} \cos 9x + \frac{3}{7} \cos 7x - \frac{8}{3} \cos 3x;$$

$$9) f(x) = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) \sin x; \quad 10) f(x) = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3} \right) \sin^3 x.$$

6.18. Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = \arcsin 5x; \quad 2) f(x) = \arcsin \sqrt{x};$$

$$3) f(x) = \arccos(1 - x^2); \quad 4) f(x) = \arccos \frac{1}{x};$$

$$5) f(x) = \operatorname{arctg} 3x^2; \quad 6) f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x};$$

$$7) f(x) = \arcsin^3 x^2; \quad 8) f(x) = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x^2};$$

$$9) f(x) = \arccos^4 5x; \quad 10) f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3};$$

$$11) f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}, x > 0; \quad 12) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

6.19. Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = 2^{3x}; \quad 2) f(x) = 6^{-x^2};$$

$$3) f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}; \quad 4) f(x) = a^{x^n}, a > 0;$$

$$5) f(x) = (a^x)^n, a > 0; \quad 6) f(x) = e^{1/x};$$

7) $f(x) = \ln(15e^x + x^2);$

8) $f(x) = 5^{\ln(x^2+x+1)}.$

6.20. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \ln \frac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}} \sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}};$

2) $f(x) = \ln \frac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7};$

3) $f(x) = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x);$ 4) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}};$

5) $f(x) = \frac{5x^2}{x^2+1} \sin^3 x \cos^4 x;$

6) $f(x) = \frac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2};$

7) $f(x) = x^x;$

8) $f(x) = (\sin x)^{\arcsin x};$

9) $f(x) = (\ln x)^{e^x};$

10) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x};$

11) $f(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x + x^{1/x};$

12) $f(x) = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}.$

6.21. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \operatorname{ch}^3 x;$

2) $f(x) = \ln \operatorname{th} x;$

3) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{ch} x + \sin x \cdot \operatorname{sh} x;$ 4) $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}.$

6.22. Знайдіть похідні y' функції $y(x)$, заданої неявно:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

2) $2y \ln y = x;$

3) $\cos(xy) = x;$

4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$

5) $y = x + \operatorname{arctg} y;$

6) $x^y = y^x;$

7) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$

8) $a^{x/y} = \left(\frac{x}{y}\right)^a.$

6.23. Знайдіть похідну y'_x функції $y(x)$, заданої параметрично:

1) $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi); \end{cases}$

2) $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t};$

$$3) \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases} \quad 4) x = \frac{3at}{1 + t^3}, y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

6.24. Знайдіть диференціал функції:

$$1) f(x) = \sin x - x \cos x + 4; \quad 2) f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}.$$

Відповіді

6.13. 1) $4x^3 - x^2 + 5x - 0,3$; 2) $2ax + b$; 3) $\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y^2}$; 4) $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$;

5) $\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$; 6) $\frac{3t^2 - 6t - 1}{(t - 1)^2}$.

6.14. 1) $f(x) = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$; 2) $f(x) = \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}$; 3) $f(x) = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$;

4) $\rho'(\varphi) = \varphi \cos \varphi$.

6.15. 1) $f'(x) = 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$; 2) $f'(x) = \frac{x \ln 10 \lg x - x + 1}{x \ln 10 \lg^2 x}$;

3) $f'(x) = \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x$; 4) $f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$;

5) $f'(x) = 4^{-x}(1 - x \ln 4)$; 6) $f'(x) = 10^x(1 + x \ln 10)$; 7) $f'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$;

8) $f'(x) = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$; 9) $f'(x) = e^x(x^2 + 1)$; 10) $f'(x) = -\frac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(1 + 10^x)^2}$.

6.16. 1) $30x(5x^2 + 7)^2$; 2) $5(1 + 5x - 8x^2)^4(5 - 16x)$; 3) $4 \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}\right)$;

4) $\frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 1}}$; 5) $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 5)^4}}$; 6) $-\frac{40(12x^2 - 10x + 7)}{(4x^3 - 5x^2 + 7x - 1)^5}$;

7) $(10x - 7)(15x^2 + 5)^3 + 90x(15x^2 + 5)^2(5x^2 - 7x + 2)$; 8) $\frac{160x^5}{\sqrt[3]{7 + 4x^3}}$.

6.17. 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 2) $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos^3 x}}$; 3) $4 \operatorname{ctg}^3 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$; 4) $25 \cos^4 x \cdot (-\sin x)$;

5) $42 \operatorname{tg}^5 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $8 \sin 2x$; 7) $\cos 7x + 3 \cos 5x + \cos 3x$;

8) $-\sin 9x - 3 \sin 7x + 8 \sin 3x$; 9) $\frac{8 - 3 \cos^4 x}{\cos^5 x}$; 10) $5 \sin^2 x \cos^3 x$.

6.18. 1) $\frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$; 3) $\frac{2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}}$; 4) $\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; 5) $\frac{6x}{1 + 9x^4}$;

$$6) \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}; 7) 3 \arcsin^2 x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}; 8) -\frac{4x}{x^4+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2};$$

$$9) -\frac{20 \arccos^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}; 10) -\frac{3\sqrt{x}}{2(1+x^2)}; 11) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; 12) -\frac{1}{2}.$$

$$6.19. 1) 3 \cdot 2^{3x} \ln 2; 2) -2x \cdot 6^{-x^2} \ln 6; 3) \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}; 4) nx^{n-1}a^{x^n} \ln a; 5) na^{nx} \ln a;$$

$$6) -\frac{e^{1/x}}{x^2}; 7) \frac{15e^x + 2x}{15e^x + x^2}; 8) 5^{\ln(x^2+x+1)} \ln 5 \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

$$6.20. 1) \frac{13}{21(x+4)} + \frac{13}{28(x-3)} - \frac{1}{12(x+1)}; 2) \frac{2}{x} + \frac{7}{x+2} - \frac{4x+7}{2x^2+7x+6} - \frac{14}{2x+3};$$

$$3) 15(5x-4)^2(x-2)^2(3-4x) + 2(5x-4)^3(x-2)(3-4x) - 4(5x-4)^3(x-2)^2;$$

$$4) f(x) = \frac{1}{5} f(x) \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-4} \right); 5) f(x) \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} + 3 \operatorname{ctg} x - 4 \operatorname{tg} x \right);$$

$$6) f(x) \left(\frac{7}{x+5} - \frac{6x-12}{x^2-4x+2} - \frac{6x^2+12x}{x^3+3x^2+5} \right); 7) x^x(\ln x + 1); 8) f(x) \left(\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{\ln \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \right);$$

$$9) (\ln x)^{e^x} e^x \left(\frac{1}{x \ln x} + \ln \ln x \right); 10) (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \right);$$

11)–12) Вказівка. Знайдіть похідну кожного доданку окремо.

$$6.21. 1) 3 \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x; 2) \frac{2}{\operatorname{sh} 2x}; 3) 2 \cos x \cdot \operatorname{sh} x; 4) \frac{2 \operatorname{sh} x \cdot \sin x}{(\operatorname{sh} x + \sin x)^2}.$$

$$6.22. 1) -\frac{b^2 x}{a^2 y}; 2) \frac{1}{2(1+\ln y)}; 3) -\frac{1+y \sin(xy)}{x \sin(xy)}; 4) -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}; 5) \frac{1+y^2}{y^2}; 6) \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x};$$

$$7) \frac{x+y}{x-y}; 8) \frac{y}{x}.$$

$$6.23. 1) y'_x : x = a(\varphi - \sin \varphi), y'_x(\varphi) = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; 2) y'_x : x = 1 + \frac{1}{t}, y'_x(t) = -1;$$

$$3) y'_x : x = \ln(1+t^2), y'_x(t) = \frac{t}{2}; 4) y'_x : x = \frac{3at}{1+t^3}, y'_x(t) = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

$$6.24. 1) x \sin x dx; 2) \operatorname{arctg} x dx.$$

7. Застосування похідної

Навчальні задачі

7.1. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = x^2 - 6x + 4$ в точках $M_1(4; -4)$ та $M_2(3; -5)$.

Розв'язання. [7.5.4, 7.5.5.]

[Обчислюємо, похідні функції $f(x)$ у точках M_1 та M_2 .]

$$f'(x) = 2x - 6; \quad f'(x_1) = 2; \quad f'(x_2) = 0.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_1 має рівняння

$$y - (-4) = 2(x - 4); \quad y = 2x - 12.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_2 має рівняння

$$y - (-5) = 0(x - 3); \quad y = -5.$$

Нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M_1 має рівняння

$$y - (-4) = -\frac{1}{2}(x - 4); \quad y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M_2 має рівняння

$$x = 3.$$

7.2. Визначити, в якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;

2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$;

3) утворює із прямою $3x - y + 1 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. [2.5.2, 2.5.3.]

Нехай точка дотику $M_0(x_0; y_0)$. Тоді:

$$k_{\text{дот.}} = y'(x_0) = 2x_0.$$

1) У паралельних прямих рівні кутові коефіцієнти. Отже,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 4.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ паралельна прямій $y = 4x - 5$ у точці $M_0(2; 4)$.

2) [Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої $2x - 6y + 5 = 0$.]

$$2x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

У перпендикулярних прямих кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням

$$k_1 k_2 = -1.$$

Отже,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = -3 \Rightarrow x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = \frac{9}{4}.$$

Дотична до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$ в точці

$$M_0\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right).$$

3) [Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої $3x - y + 1 = 0$.]

$$3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow k = 3.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \left| \frac{2x_0 - 3}{1 + 2x_0 \cdot 3} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{2x_0 - 3}{6x_0 + 1} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1, \\ x_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1, \\ y_0 = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Дотична до параболи $y = x^2$ утворює кут $\frac{\pi}{4}$ із прямою $3x - y + 1 = 0$ в точках $M_1(-1; 1)$ та $M_2\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$.

7.3. Визначити, під яким кутом перетинаються гіпербола $y = \frac{1}{x}$ із параболою $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. [7.5.6.]

[Знаходимо точки перетину гіперболи та параболи.]

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1, y = 1.$$

Криві перетинаються в точці $M_0(1; 1)$.

[Знаходимо кутові коефіцієнти дотичних у точці M_0 .]

$$k_1 = (\sqrt{x})' \Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2};$$

$$k_2 = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1.$$

Отже,

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)} \right| = 3.$$

Криві утворюють кут $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

7.4. 1) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + 3t + 1$ (м). Визначити його швидкість у момент $t = 4$ с.

2) Кількість електрики, що протікає через провідник, починаючи з моменту $t = 0$, задано формулою $q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (Кл). Знайти силу струму наприкінці п'ятої секунди.

Розв'язання.

1) Швидкість руху тіла є похідною від пройденого шляху. Отже,

$$v(t) = s'(t) = (t^2 + 3t + 1)' = 2t + 3 \Rightarrow v(4) = 11 \text{ (м/с)}.$$

2) Сила струму є похідною від кількості електрики, що протікає через провідник. Отже,

$$I(t) = q'(t) = (2t^2 + 3t + 1)' = 4t + 3 \Rightarrow I(5) = 23 \text{ (A)}.$$

7.5. Написати рівняння дотичної та нормалі у точці $M_0(2; 2)$ до кривої

$$L : \begin{cases} x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{2t} + \frac{3}{2t^2}. \end{cases}$$

Розв'язання. [7.5.4, 7.5.5.]

[Знаходимо значення параметра t , яке відповідає точці $M_0(2; 2)$.]

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}, \\ 2 = \frac{1}{2t} + \frac{3}{2t^2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Точці $(2; 2)$ кривої відповідає значення параметра $t = 1$.

[Обчислюємо похідну $y'_x(1)$.]

$$y'_x(t) \stackrel{[7.4.5]}{=} \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t+6}{2t+4}; \quad y'_x|_{t=1} = \frac{7}{6}.$$

Рівняння дотичної:

$$y = 2 + \frac{7}{6}(x - 2); \quad 6y - 7x + 2 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y = 2 - \frac{6}{7}(x - 2); \quad 7y + 6x - 26 = 0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

7.6. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у заданій точці:

1) $y = \sqrt{x}, x_0 = 4;$

2) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2.$

7.7. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

7.8. 1. Скласти рівняння дотичної до параболи $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 6$, перпендикулярної до прямої $x + 5y - 10 = 0$.

2. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^3$, паралельної прямій $3x - y + 5 = 0$.

7.9. З'ясуйте, під якими кутами перетинаються:

1) парабола $y = x^2$ та пряма $3x - y - 2 = 0$;

2) синусоїда $y = 1 + \sin x$ та пряма $y = 1$;

3) коло $x^2 + y^2 = 8ax$ та крива $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

7.10. 1. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = (9t - t^3)$ м. Знайдіть швидкість руху для моментів $t = 1$ с та $t = 2$ с.

2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$. Знайдіть швидкість руху. Коли тіло рухається у зворотному напрямі?

7.11. 1. Напишіть рівняння дотичної та нормалі до еліпса $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$, у точці $M_0 \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2} \right)$.

2. Напишіть рівняння дотичних до кривої $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, у початку координат і в точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

7.12. Складіть диференціальне рівняння кривої, що має характеристичну властивість:

1) квадрат довжини відрізка, який відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику;

2) будь-яка дотична перетинається з віссю ординат у точці, однаково віддаленій від точки дотику до початку координат.

Відповіді

7.6. 1) $x - 4y + 4 = 0$, $4x + y - 18 = 0$; 2) $y - 5 = 0$, $x + 2 = 0$.

7.7. $(1; 1), (-1; -1)$.

7.8. 1. $5x - y - 38 = 0$; 2. $3x - y \pm 2 = 0$.

7.9. 1) $\alpha_1 = \arctg \frac{1}{7}, \alpha_2 = \arctg \frac{1}{13}$; 2) $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

7.10. 1. 6 м/с; -3 м/с. 2. $v = t^3 - 12t^2 + 32t$, рух у зворотному напрямі від $t = 4$ до $t = 8$.

7.11. 1. $y + \frac{4}{3}x - 4\sqrt{2} = 0, y - \frac{3}{4}x - \frac{7\sqrt{2}}{8} = 0$. 2. $y = 0, (\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$.

7.12. 1) $y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y}{x}}$; 2) $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right)$.

8. Похідні вищих порядків

Навчальні задачі

8.1. Знайти похідні вказаного порядку функції f :

$$1) f(x) = 5x^4, f'''(x); \quad 2) f(x) = \sin^2 x, f^{(5)}(x);$$

$$3) f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}), f''(x).$$

Розв'язання. [7.4.1.]

$$1) f'(x) = 20x^3; \quad f''(x) = (20x^3)' = 60x^2; \quad f'''(x) = (60x^2)' = 120x.$$

$$2) f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x; \quad f''(x) = 2 \cos 2x; \quad f'''(x) = -4 \sin 2x;$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cos 2x; \quad f^{(5)}(x) = 16 \sin 2x.$$

$$3) f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \quad f''(x) = -\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

8.2. Знайти похідну:

$$1) y^{(100)}, y = (x^2 + 1) \cos 2x; \quad 2) y^{(n)}, y = \frac{x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

Розв'язання. [7.4.5.]

1) [Щоб знайти похідну, використовуємо Лейбніцову формулу.]

$$u = \cos 2x, v(x) = x^2 + 1, n = 100.$$

$$(uv)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k u^{(100-k)} v^{(k)}$$

$$v^{(0)}(x) = x^2 + 1 \quad C_{100}^0 = 1 \quad u^{(100)}(x) = 2^{100} \cos 2x$$

$$v'(x) = 2x \quad C_{100}^1 = 100 \quad u^{(99)}(x) = 2^{99} \sin 2x$$

$$v''(x) = 2 \quad C_{100}^2 = 4950 \quad u^{(98)}(x) = -2^{98} \cos 2x$$

$$v'''(x) = 0 \dots\dots\dots$$

Оскільки

$$u^{(100)}(x) = 2^{100} \cos(2x + 50\pi) \stackrel{[7.4.7]}{=} 2^{100} \cos 2x;$$

$$u^{(99)}(x) = 2^{99} \cos\left(2x + \frac{99\pi}{2}\right) = 2^{99} \sin 2x;$$

$$u^{(98)}(x) = 2^{98} \cos(2x + 49\pi) = -2^{98} \cos 2x.$$

$$C_{100}^1 \stackrel{[4.15.5]}{=} \frac{100!}{1!99!} = 100;$$

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} \stackrel{[4.15.5]}{=} \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950.$$

Отже,

$$\begin{aligned} y^{(100)}(x) &= \\ &= 2^{100} \cos 2x \cdot (x^2 + 1) + 100 \cdot 2^{100} \sin 2x \cdot x - 4950 \cdot 2^{99} \cos 2x + 0 + \dots + 0 = \\ &= 2^{100} \left((x^2 - 2474) \cos 2x + 100x \sin 2x \right). \end{aligned}$$

2) Функція означена і диференційовна на $(-\infty; 1), (1; 2), (2; +\infty)$.

[Розкладаємо дробово-раціональний вираз на суму елементарних дробів [8.4.6].]

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - B - 2A}{(x-1)(x-2)}.$$

[У рівних дробів, з рівними знаменниками, повинні бути рівні чисельники. Два многочлени тотожно рівні (тобто для всіх значень x), якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.]

$$x-3 \equiv (A+B)x - B - 2A \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -B-2A=-3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}. \\ y^{(n)} &= 2 \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} \stackrel{[7.4.7]}{=} 2 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

8.3. Знайти другу похідну функції $y(x)$, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

Розв'язання. [7.4.6.]

$$y'(x) : \begin{cases} x = a \cos t, t \in [0; 2\pi), \\ y'_x(t) = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t. \end{cases} \quad y''(x) : \begin{cases} x = a \cos t, t \in [0; 2\pi), \\ y''_{x^2}(t) = \frac{\frac{b}{a} \cdot 1}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}. \end{cases}$$

8.4. Знайти похідну y'' неявної функції, заданої співвідношенням:

$$y = x + \operatorname{arctg} y.$$

Розв'язання.

[Знаходимо 1-шу похідну функції, заданої неявно.]

$$y - x - \operatorname{arctg} y = 0.$$

$$y' - 1 - \frac{y'}{1 + y^2} = 0;$$

$$y' \left(1 - \frac{1}{1 + y^2} \right) = 1;$$

$$y' = \frac{1 + y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

[Диференціюємо вираз для y' за змінною x .]

$$y'' = \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right)' = \underbrace{-\frac{2y'}{y^3}}_{\text{підставляємо вираз для } y'} = -\frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right) = -\frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5}.$$

8.5. Знайти диференціал 2-го порядку функції $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Розв'язання. [7.4.4.]^①

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}; \quad f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}; \quad d^2f = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} dx^2.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

8.6. Знайдіть зазначену похідну:

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = (x + 10)^6, f'''(2);$ | 2) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4, f^{IV}(1);$ |
| 3) $f(x) = x^3 \ln x, f^{IV}(x);$ | 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), f''(x);$ |
| 5) $f(x) = xe^x, f^{(n)}(x);$ | 6) $f(x) = \ln(ax + b), f^{(n)}(x);$ |
| 7) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, f^{(n)}(x);$ | 8) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, f^{(n)}(x).$ |

8.7. Знайдіть зазначену похідну функції $y = y(x)$, заданої неявно:

- | | |
|--|----------------------------|
| 1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0, y'';$ | 2) $y = \sin(x + y), y'';$ |
| 3) $y = \operatorname{tg}(x + y), y''';$ | 4) $e^{x+y} = xy, y''.$ |

8.8. Знайдіть похідну y''_{xx} функції $y = y(x)$, заданої параметрично:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t;$ | |
| 2) $x = a(\varphi - \sin \varphi), y = a(1 - \cos \varphi);$ | |
| 3) $x = \ln t, y = t^2 - 1;$ | 4) $x = \arcsin t, y = \ln(1 - t^2).$ |

8.9. Застосуйте Лейбніцову формулу до обчислення похідної:

- 1) $[(x^2 + 1) \sin x]^{(20)}$; 2) $[(x^3 + 2)e^{4x+3}]^{(4)}$;
 3) $(e^x \sin x)^{(n)}$; 4) $(x^3 \ln x)^{(5)}$.

8.10. Знайдіть диференціал d^2y функції:

- 1) $y = 4^{-x^2}$; 2) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.

8.11. $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x = \operatorname{tg} t$; виразіть d^2y через: 1) x та dx ; 2) t та dt .

Відповіді

- 8.6.** 1) 207360; 2) 360; 3) $\frac{6}{x}$; 4) $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 5) $e^x(x+n)$; 6) $\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$;
 7) $(-1)^n \frac{n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$; 8) $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$.
8.7. 1) $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$; 2) $-\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$; 3) $\frac{-2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$; 4) $-\frac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$.
8.8. 1) $y''_{xx} : x = a \cos^3 t, y''_{xx}(t) = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}$;
 2) $y''_{xx} : x = a(\varphi - \sin \varphi), y''_{xx}(\varphi) = -\frac{1}{a(1-\cos \varphi)^2}$; 3) $y''_{xx} : x = \ln t, y''_{xx}(t) = 4t^2$;
 4) $y''_{xx} : x = \arcsin t, y''_{xx}(t) = -\frac{2}{1-t^2}$.
8.9. 1) $(x^2 - 379) \sin x - 40x \cos x$; 2) $32e^{4x+3}(8x^3 + 24x^2 + 18x + 19)$;
 3) $e^x \sum_{k=0}^n C_n^k \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$; 4) $-\frac{6}{x^2}$.
8.10. 1) $4^{-x^2} 2 \ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1) dx^2$; 2) $\frac{4 \ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2 \sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}} dx^2$.
8.11. 1) $d^2y = \frac{4x}{x^4-1} d^2x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2} dx^2$; 2) $d^2y = -\frac{4}{\cos^2 2t} dt^2$.

9. Правило Бернуллі — Лопітала

Навчальні задачі

9.1. Перевірити Ролєву теорему для функції $f(x) = x - x^3$ на $[-1; 0]$ та $[0; 1]$.

Розв'язання. [7.6.1.]

Оскільки $f(x)$ неперервна і диференційовна на $\mathbb{R}$, то вона є неперервною на відрізках $[-1; 0]$ та $[0; 1]$ і диференційовною в інтервалах $(-1; 0)$ та $(0; 1)$.

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Отже, на $[-1; 0]$ та $[0; 1]$ виконано всі умови Ролєвої теореми для функції $f(x)$. Знайдімо значення ξ , про яке йдеться у теоремі:

$$f'(x) = 1 - 3x^2.$$

$$f'(\xi) = 1 - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}};$$

$$\xi_1 \in (-1; 0), \xi_2 \in (0; 1).$$

9.2. Довести, що для многочлена $P(x) = (x^2 + 1)(x + 3)(x + 2)(x - 1)$ в інтервалі $(-3; 1)$ існує корінь рівняння $P''(x) = 0$.

Розв'язання. [7.6.1.]

Оскільки

$$P(-3) = P(-2) = P(1) = 0,$$

і $P(x)$ — функція диференційовна на $\mathbb{R}$, то для функції $P(x)$ виконано всі умови Ролєвої теореми на $[-3; -2]$ і $[-2; 1]$:

$$\exists \xi_1 \in (-3; -2) : P'(\xi_1) = 0;$$

$$\exists \xi_2 \in (-2; 1) : P'(\xi_2) = 0.$$

Для функції $P'(x)$ на $[\xi_1; \xi_2] \subset (-3; 1)$ виконано всі умови Ролєвої теореми:

$$\exists \zeta \in (\xi_1; \xi_2) \Rightarrow \zeta \in (-3; 1) : P''(\zeta) = 0.$$

9.3. Перевірити Лагранжову теорему для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1; 1]$.

Розв'язання. [7.6.2.]

Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-1; 1]$ і диференційовна в інтервалі $(-1; 1)$. Отже, виконано умови Лагранжової теореми для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1; 1]$.

$$f'(x) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}; \quad f(1) - f(-1) = 2f'(\xi);$$

$$0 = \frac{4}{3} \sqrt[3]{\xi} \Rightarrow \xi = 0 \in (-1; 1).$$

9.4. Довести нерівність

$$|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|.$$

Розв'язання. [7.6.2.]

Для $a = b$, нерівність виконано. Отже, нехай $a < b$. Тоді для функції $y = \arctg x$ на $[a; b]$ виконано умови Лагранжової теореми.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a - b} = \frac{1}{1 + \xi^2}, \xi \in (a; b).$$

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a - b} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|.$$

9.5. З'ясувати чи застосовна теорема Коші для функцій $f(x) = \cos x$,

$$g(x) = x^3 \text{ на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]?$$

Розв'язання. [7.6.3.]

Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і диференційовні на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Але

$$g'(0) = 3x^2 \big|_{x=0} = 0.$$

Невиконання умови теореми призводить до невиконання твердження:

$$\frac{\sin \xi}{3\xi^2} \neq \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})^3 - (-\frac{\pi}{2})^3} = 0 \quad \forall \xi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

9.6. Знайти границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 2x + 1}{x^{100} - 2x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x)^{\ln x}.$$

Розв'язання. [7.6.4.]^①

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = L;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} = L.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = L;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = M;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 = M = L.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 2x + 1}{x^{100} - 2x + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = L;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{50} - 2x + 1)'}{(x^{100} - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{50x^{49} - 2}{100x^{99} - 2} = \frac{24}{49} = L.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = L;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(2x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} = \nexists,$$

тобто правило Бернуллі — Лопіталя не застосовне, але

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\ln x} = [0^0] = \left| \begin{array}{l} \ln x \sim (x-1), \\ x \rightarrow 1-0 \end{array} \right| \stackrel{[1.23.6]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1-x) \cdot (x-1)} =$$

$$= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{(x-1)^{-1}} \right) = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = L.$$

$$\exp \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(1-x)^{-1}}{-(1-x)^{-2}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)} = e^0 = 1 = L.$$

Коментар. ① Щоб перетворити вираз на частку при потребі використовують формули:

$$fg = \frac{f}{g^{-1}} = \frac{g}{f^{-1}}; \quad f^g = e^{g \ln f} (f > 0); \quad f - g = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

- 9.7.** Нехай $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Доведіть, що всі три корені рівняння $f'(x) = 0$ дійсні.
- 9.8.** Доведіть, що рівняння $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не може мати двох різних дійсних коренів у інтервалі $(0; 1)$.
- 9.9.** Доведіть, що рівняння $e^{x-1} + x - 2 = 0$, яке має корінь $x = 1$ (перевірте!), не має інших дійсних коренів.
- 9.10.** Застосовуючи Лагранжову формулу для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на відрізьку $[0; 1]$, визначте точку $x = \xi$, що фігурує у формулі.

9.11. Застосовуючи Лагранжову формулу, доведіть нерівність $e^x > 1 + x, x \neq 0$.

9.12. Застосовуючи формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$ на відрізку $[0; 2]$, визначте точку $x = \xi$, що фігурує у формулі.

9.13. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайдіть:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} + x - 2}{x^{50} + x - 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x});$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right];$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x);$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right);$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1);$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} ((\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x);$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

9.14. Перевірте, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ існує, але його не можна обчислити за правилом Бернуллі — Лопіталя.

Відповіді

9.10. $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **9.12.** $\xi_1 = \frac{1}{2}, \xi_2 = \frac{5}{3}$.

9.13. 1) $\frac{101}{51}$; 2) $\frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 4 - \ln 5}$; 3) 1; 4) $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $-\infty$; 8) $\frac{\alpha}{\beta}$; 9) 0; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $-\frac{2}{\pi}$; 12) $+\infty$; 13) 0; 14) 0; 15) 0; 16) 1; 17) 1; 18) 1; 19) $\frac{1}{e}$; 20) 1.

10. Тейлорова формула**Навчальні задачі**

10.1. Записати формулу Тейлора для нескінченно диференційовної функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) 2-го порядку із залишковим членом у формі Пеано;

2) 3-го порядку із залишковим членом у формі Лагранжа.

Розв'язання. [7.7.2, 7.7.5, 7.7.6.]

1) $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^3), x \rightarrow x_0.$

2) $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4, \xi \in (x_0; x).$

10.2. Функцію $f(x)$ розвинути за степенями $(x - 2)$, якщо:

1) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4;$

2) $f(x) = \frac{x}{1 - x}$ до члена, що містить $(x - 2)^3$.

Розв'язання. [7.7.2, 7.7.5.]

1) Многочлен має похідні будь-якого порядку:

$$f(2) = 0;$$

$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8, \quad f'(2) = 0;$$

$$f''(x) = 24x^2 - 30x - 6, \quad f''(2) = 30;$$

$$f'''(x) = 48x - 30, \quad f'''(2) = 66;$$

$$f^{(4)}(x) = 48;$$

$$f^{(k)}(2) = 0, k = 5, 6, \dots$$

$$f(x) = 15(x - 2)^2 + 11(x - 2)^3 + 2(x - 2)^4.$$

$$2) f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 - \frac{1}{x-1}, \quad x_0 = 2, n = 3.$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k + o((x-2)^3).$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}; \quad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}; \quad f'''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}.$$

$$f(2) = -2, \quad f'(2) = 1;$$

$$f''(2) = -2, \quad f'''(2) = 6.$$

$$f(x) = -2 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

10.3. Розвинути за степенями x функцію $f(x) = e^x \ln(x+1)$ до члена, який містить x^3 включно.

Розв'язання. [7.7.8.]

[Записуємо формули Тейлора — Маклорена 3-го порядку для функцій $f(x) = e^x$ та $f(x) = \ln(x+1)$.]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \\ &= x + x^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

10.4. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 10^{-4} за допомогою Тейлорової формули.

Розв'язання. [7.7.8.]

[Перетворюємо підкореневий вираз — шукаємо найближчий повний куб.]

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27 \left(1 + \frac{1}{9}\right)} = 3 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}}.$$

[Записуємо Тейлорову формулу для функції $f(x) = (1+x)^{1/3}$ і залишковий член у Лагранжовій формі.]

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{3} - k + 1\right)}_{k \text{ множників}} \frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3^{n+1}} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}, \xi \in \left(0; \frac{1}{9}\right).$$

[Підбираємо такий порядок формули Тейлора, щоб залишковий член за модулем не перевищував заданої похибки.]

$$|3R_1(x)| = \frac{2}{3 \cdot 2!} (1 + \xi)^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{9}\right)^2 < \frac{1}{3^5} > 10^{-4};$$

$$|3R_2(x)| = \frac{2 \cdot 5}{3^2 \cdot 3!} (1 + \xi)^{-\frac{8}{3}} \left(\frac{1}{9}\right)^3 < \frac{5}{3^9} > 10^{-4};$$

$$|3R_3(x)| = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^3 \cdot 4!} (1 + \xi)^{-\frac{11}{3}} \left(\frac{1}{9}\right)^4 < \frac{10}{3^{12}} < 10^{-4} \Rightarrow n = 3.$$

[Обчислюємо шукане значення за формулою Тейлора 3-го порядку, беручи в проміжних обчисленнях один запасний десятковий знак після коми.]

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{30} &\approx 3 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \right) \approx \\ &\approx 3(1 + 0,03703 - 0,00137 + 0,00008) = 3 \cdot 1,03574 = 3,10722. \\ \sqrt[3]{30} &= 3,1072 \pm 10^{-4}. \end{aligned}$$

10.5. Обчислити $e^{0,1}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. [7.7.8.]

[Записуємо формулу Тейлора — Маклорена для e^x із залишковим членом у Лагранжовій формі.]

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \xi < \frac{1}{10}.$$

[Визначаємо потрібний порядок Тейлорової формули, оцінюючи модуль залишкового члена.]

$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < \underbrace{\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}}_{\text{для зручності підсилюємо нерівність}} < 0,001.$$

$$n = 1 : \frac{1}{100} > 0,001;$$

$$n = 2 : \frac{1}{3000} < 0,001.$$

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} = 1,0000 + 0,1000 + 0,0050 = 1,105.$$

$$e^{0,1} \approx 1,105 \pm 10^{-3}.$$

- 10.6.** Оцінити похибку, яку допускають, обчислюючи значення $\ln 1,5$ за формулою: $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

Розв'язання. [7.7.8.]

$$n = 4.$$

$$R_4(x) = \frac{4!x^5}{5!(1+\xi)^4}, 0 < \xi < x = 0,5.$$

$$0 < R_4(x) \leq \max_{0 \leq \xi \leq 0,5} \frac{1}{5} \frac{(0,5)^5}{(1+\xi)^4} < \frac{(0,5)^5}{5} < 0,01 = \varepsilon.$$

$$\ln 1,5 \approx 0,5 - \frac{1}{2}(0,5)^2 + \frac{1}{3}(0,5)^3 - \frac{1}{4}(0,5)^4 \approx 0,40.$$

$$\ln 1,5 \approx 0,40 \pm 0,01.$$

- 10.7.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, використовуючи формулу Тейлора.

Розв'язання. [7.7.7.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

- 10.8.** Розвиньте многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.
- 10.9.** Розвиньте многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.
- 10.10.** Функцію $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ розвиньте за степенями x , застосовуючи Тейлорову формулу.
- 10.11.** Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції $y = \frac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

10.12. Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

10.13. Напишіть формулу Тейлора — Маклорена n -го порядку для функції $y = xe^x$ при $x_0 = 0$.

10.14. Напишіть Тейлорову формулу n -го порядку для функції $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

10.15. Знайдіть перші три члени розвинення функції $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ за Тейлоровою формулою при $x_0 = 1$. Обчисліть наближено $f(1,03)$.

10.16. Знайдіть перші три члени розвинення функції

$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$$

за Тейлоровою формулою при $x_0 = 2$. Обчисліть наближено $f(2,02)$ та $(1,97)$.

10.17. Застосовуючи наближену формулу $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, знайдіть $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ й оцініть похибку.

10.18. Обчисліть з абсолютною похибкою, меншою 0,001, наближене значення:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| 1) $\sin 1$; | 2) $\sqrt{e}$; |
| 3) $\ln 1,05$; | 4) $\sqrt[5]{33}$. |

10.19. Знайдіть:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;	2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.
---	---

Відповіді

10.8. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$;

10.9. $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

10.10. $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$.

10.11. $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(\xi-1)^5}, \xi \in (2; x)$.

10.12. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + R_3(x)$.

$$10.13. x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + R_n(x).$$

$$10.14. 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{4n-2}} (x-4)^n + R_n(x).$$

$$10.15. 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + \dots, f(1,03) = 0,82.$$

$$10.16. f(x) \approx 321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + \dots, f(2,02) \approx 343,4, f(1,97) = 289,9.$$

$$10.17. 0,78, \delta < 0,01.$$

$$10.18. 1) 0,842; 2) 1,648; 3) 0,049; 4) 2,012.$$

$$10.19. 1) -\frac{1}{12}; 2) \frac{1}{3}.$$

11. Дослідження функцій за допомогою похідних

Навчальні задачі

11.1. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7; \quad 2) f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4};$$

$$3) f(x) = x^3 \sqrt{(x-1)^2}; \quad 4) f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x.$$

Розв'язання. [7.9.2–7.9.4, 7.11.1.]

1) [Крок 1. Визначаємо область означення.]

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

[Крок 2. Знаходимо критичні точки 1-го порядку: точки, в яких перша похідна функції рівна нулеві, ∞ або не існує [7.9.3].]

$$f'(x) = 12x^2 - 42x + 18 = 12(x-3) \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3.$$

$$f'(x) \neq \infty, \exists f'(x) \quad \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Критичні точки 1-го порядку: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$.

[Крок 3. Визначаємо знак похідної на кожному інтервалі монотонності.]

$$\begin{array}{c} \text{знак } f' \quad + \quad - \quad + \\ \hline \text{поведінка } f \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \frac{1}{2} \quad 3 \quad x \\ \quad \quad \quad \max \quad \min \end{array}$$

[Крок 4. Застосовуємо достатні умови монотонності [7.9.2] й існування точки екстремуму [7.9.4].]

Функція f :

зростає в: $(-\infty; \frac{1}{2}), (3; +\infty)$;

спадає в $(\frac{1}{2}; 3)$.

$x = \frac{1}{2}$ — точка локального максимуму, $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{4}$;

$x = 3$ — точка локального мінімуму, $y_{\min}(3) = -20$.

2) $D(f) = [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

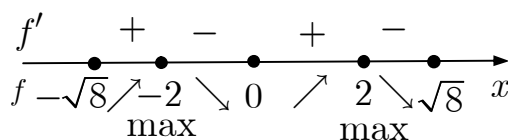
$$f'(x) = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = \frac{2x}{|x|} \frac{4 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow 8 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{8} \notin (-\sqrt{8}; \sqrt{8}).$$

$$\nexists f'(x) \Rightarrow x_5 = 0.$$

Критичні точки 1-го порядку: $x_{1,2} = \pm 2, x_3 = 0$.



$f \nearrow: (-\sqrt{8}; -2), (0; 2)$;

$f \searrow: (-2; 0), (2; \sqrt{8})$;

$x = \pm 2$ — точки локальних максимумів, $y_{\max}(-2) = y_{\max}(2) = 4$;

$x = 0$ — точка локального мінімуму, $y_{\min}(0) = 0$.

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

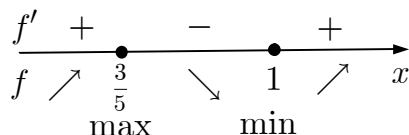
$$f'(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{5}.$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

$$\exists f'(x) \quad \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Критичні точки 1-го порядку: $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = 1$.



$$f \nearrow: \left(-\infty; \frac{3}{5}\right), (1; +\infty);$$

$$f \searrow: \left(\frac{3}{5}; 1\right);$$

$$x = \frac{3}{5} \text{ — точка локального максимуму, } y_{\max}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{9}};$$

$$x = 1 \text{ — точка локального мінімуму, } y_{\min}(1) = 0.$$

$$4) D(f) = (0; +\infty).$$

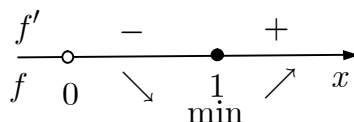
$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1; x_1 = -1 \notin (0; +\infty).$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow x_3 = 0 \notin (0; +\infty).$$

$$\exists f'(x) \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Критична точка 1-го порядку $x = 1$.



$$f \nearrow: (1; +\infty);$$

$$f \searrow: (0; 1);$$

$$x = 1 \text{ — точка локального мінімуму, } y_{\min}(1) = \frac{1}{2}.$$

11.2. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = x^4 - 8x^2 + 3, x \in [-1; 2].$$

Розв'язання. [7.11.3.]

Функція y неперервна на відрізку $[-1; 2]$.

[Крок 1. Знаходимо критичні точки 1-го порядку функції в $(-1; 2)$.]

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4).$$

$$y' = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2;$$

$$y' \neq \infty, x \in (-1; 2).$$

$$x_1, x_3 \notin (-1; 2); x_2 \in (-1; 2).$$

[Крок 2. Обчислюємо значення функції у знайдених критичних точках і на кінцях відрізка.]

$$y(-1) = -4; y(0) = 3; y(2) = -13.$$

[Крок 3. Серед обчислених значень функції вибираємо найбільше та найменше значення функції на відрізку.]

$$\begin{aligned}\max_{[-1,2]} y &= y(0) = 3; \\ \min_{[-1,2]} y &= y(2) = -13.\end{aligned}$$

11.4. Довести нерівність $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, x > 0$.

Розв'язання. [7.9.3, 7.9.4.]

Розгляньмо функцію

$$y(x) = \ln(x+1) - x.$$

І дослідімо її на локальний екстремум.

$$y' = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0 \quad \forall x > 0.$$

Функція спадає на $(0; +\infty)$ і отже, своє найбільше значення вона набуває у точці $x = 0 : y(0) = 0$.

Звідси випливає, що $y(x) < 0$ або

$$\ln(x+1) - x < 0 \quad \forall x > 0.$$

Розгляньмо функцію

$$y(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Дослідімо її на локальний екстремум.

$$y'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0 \quad \forall x > 0.$$

Функція зростає на $(0; +\infty)$ і, отже, своє найменше значення набуває у точці $x = 0 : y(0) = 0$. Звідси випливає, що $y(x) > 0$ або

$$\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0 \quad \forall x > 0.$$

11.4. Знайти інтервали опуклості і точки перегину графіка функції

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Розв'язання. [7.10, 7.11.2.]

[Крок 1. Знаходимо область означення функції.]

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

[Крок 2. Знаходимо критичні точки 2-го порядку функції [7.10.3].]

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f''(x) \neq \infty, \exists f''(x) \quad \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Критичні точки 2-го порядку: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

[Крок 3. Досліджуємо знак другої похідної в кожному інтервалі.]

$$\begin{array}{ccccccc} \text{знак } f'' & + & & - & & + & \\ \text{поведінка } f & \cup & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \cap & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cup & x \\ & & \text{т. пер.} & & \text{т. пер.} & & \end{array}$$

[Крок 4. Висновуємо про поведінку функції в кожному інтервалі [7.10.2, 7.10.4].]

Функція f :

опукла донизу в $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$;

опукла догори в $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегину функції.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

11.5. Покажіть, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає в інтервалі $(-2; 1)$.

11.6. Покажіть, що функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає в інтервалі $(0; 1)$ і спадає в інтервалі $(1; 2)$. Побудуйте графік цієї функції.

11.7. Покажіть, що функція:

1) $y = x^3 + x$ скрізь зростає; 2) $y = \arctg x - x$ скрізь спадає.

11.8. Знайдіть інтервали монотонності і точки екстремумів функції:

1) $y = (x - 2)^5(2x + 1)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(2x - a)(a - x)^2} \quad (a > 0)$;

3) $y = x - e^x$; 4) $y = x^2 e^{-x}$;

5) $y = \frac{x}{\ln x}$; 6) $y = 2x^2 - \ln x$;

7) $y = x - 2 \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$; 8) $y = x + \cos x$.

11.9. Знайдіть найбільше та найменше значення функцій на зазначеному відрізку:

- 1) $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 2];$ 2) $y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4];$
 3) $y = \sqrt{100 - x^2}, [-6; 8];$ 4) $y = \sin 2x - x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

11.10. Доведіть правдивість нерівностей:

- 1) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2);$ 2) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$

11.11. Визначте висоту конуса, вписаного в кулю радіусом R , з найбільшою бічною поверхнею.

11.12. Знайдіть висоту прямого колового конуса, описаного навколо кулі радіусом R , найменшого об'єму.

11.13. Покажіть, що графік функції

- 1) $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь угнутий; 2) $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий.

11.14. Знайдіть інтервали опуклості і точки перегину графіка функції:

- 1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5;$ 2) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50;$
 3) $y = \ln(1 + x^2);$ 4) $y = x^4(12 \ln x - 7);$
 5) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1};$ 6) $y = xe^{2x} + 1.$

Відповіді

11.8. 1) $f \nearrow: \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{11}{18}; +\infty\right), f \searrow: \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{18}\right), x_{\max} = -\frac{1}{2}, x_{\min} = \frac{11}{18};$

2) $f \nearrow: \left(-\infty; \frac{2a}{3}\right), (a; +\infty), f \searrow: \left(\frac{2a}{3}; a\right), x_{\max} = \frac{2a}{3}, x_{\min} = a;$

3) $f \nearrow: (-\infty; 0), f \searrow: (0; +\infty), x_{\max} = 0;$

4) $f \searrow: (-\infty; 0), (2; +\infty), f \nearrow: (0; 2), x_{\max} = 2, x_{\min} = 0;$

5) $f \nearrow: (e; +\infty), f \searrow: (0; 1), (1; e), x_{\min} = e;$

6) $f \searrow: \left(0; \frac{1}{2}\right), f \nearrow: \left(\frac{1}{2}; +\infty\right), x_{\min} = \frac{1}{2};$

7) $f \nearrow: \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right), f \searrow: \left(0; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right), x_{\max} = \frac{5\pi}{3}, x_{\min} = \frac{\pi}{3};$ 8) монотонно зростає.

11.9. 1) $\max_{[-2; 2]} y = 13, \min_{[-2; 2]} y = 4;$ 2) $\max_{[0; 4]} y = 8, \min_{[0; 4]} y = 0;$

3) $\max_{[-6; 8]} y = 10, \min_{[-6; 8]} y = 6;$ 4) $\max_{[-\pi/2; \pi/2]} y = \frac{\pi}{2}, \min_{[-\pi/2; \pi/2]} y = -\frac{\pi}{2}.$

$$11.11. \frac{4R}{3}.$$

$$11.12. 4R.$$

$$11.14. 1) f \cap : \left(-\infty; \frac{5}{3}\right), f \cup : \left(\frac{5}{3}; +\infty\right), x = \frac{5}{3} \text{ — точка перегину};$$

$$2) f \cap : (2; 4), f \cup : (-\infty; 2), (4; +\infty), x = 2, x = 4 \text{ — точки перегину};$$

$$3) f \cap : (-\infty; -1), (1; +\infty), f \cup : (-1; 1), x = \pm 1 \text{ — точки перегину};$$

$$4) f \cap : (0; 1), f \cup : (1; +\infty), x = 1 \text{ — точка перегину};$$

$$5) f \cap : (-1; 1), f \cup : (-\infty; -1), (1; +\infty), x = \pm 1 \text{ — точки перегину};$$

$$6) f \cap : (-\infty; -1), f \cup : (-1; +\infty), x = -1 \text{ — точка перегину}.$$

12. Побудова графіків функцій

Навчальні задачі

$$12.1. \text{ Знайти рівняння асимптот графіка функції } y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4}.$$

Розв'язання. [7.8.2, 7.8.3.]

[Крок 1. Визначаємо область означення.]

Область означення функції $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

[Крок 2. Досліджуємо поведінку функції у граничних точках області означення.]

Дослідімо поведінку функції, коли $x \rightarrow -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty.$$

Пряма $x = -2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.

Дослідімо поведінку функції, коли $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty.$$

Пряма $x = 2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.

Дослідімо поведінку функції, коли $x \rightarrow -\infty$, шукаючи похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2}{x(x^2 - 4)} = 1,$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 2 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 2}{x^2 - 4} \right) = 0.$$

Так само, $k_+ = 1, b_+ = 0$.

Отже, $y = x$ є похилою (двобічною) асимптотою графіка функції.

12.2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^3}{3 - x^2};$$

$$2) y = (x + 1)^{2/3} - (x + 2)^{2/3};$$

$$3) y = \frac{e^{x+2}}{x + 2};$$

$$4) y = x + \operatorname{arctg} x.$$

Розв'язання. [7.11.4.]

1) **[Крок 1. Знаходимо область означення функції.]**

$$D(y) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

[Крок 2. Встановлюємо можливі симетрії графіка функції.]

Оскільки $D(y)$ симетрична щодо 0 і

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1 + (-x)^2} = -\frac{x^3}{1 + x^2} = -f(x),$$

то функція непарна і її графік симетричний щодо початку координат.

[Крок 3. Визначаємо можливі точки розриву функції і асимптоти графіка функції.]

Дослідімо поведінку функції на межах області означення — в околах точок $x = \pm\sqrt{3}$ та $\pm\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} &= -\infty. \end{aligned}$$

Точки $x = \pm\sqrt{3}$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного.

Прямі $x = -\sqrt{3}$ та $x = \sqrt{3}$ — двобічні вертикальні асимптоти.

Шукаємо похилі асимптоти $y = kx + b$:

$$k_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = -1;$$

$$b_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{3 - x^2} = 0.$$

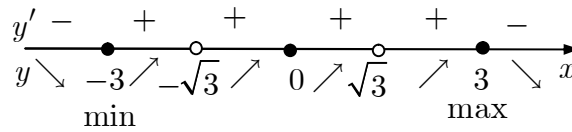
Пряма $y = -x$ — двобічна похила асимптота.

[Крок 4. За допомогою першої похідної функції визначаємо інтервали монотонності і точки екстремуму.]

$$y' = \frac{3x^2(3 - x^2) + 2x^4}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2(9 - x^2)}{(3 - x^2)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(9 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 3;$$

$$y' = \infty \Rightarrow (3 - x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_{4,5} = \pm\sqrt{3} \notin D(y).$$



$$y_{\max}(3) = -\frac{9}{2}, y_{\min}(-3) = \frac{9}{2}.$$

[Крок 5. За допомогою другої похідної функції визначаємо інтервали опуклості функції і точки перегину.]

$$y'' = \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2)^2 - (9x^2 - x^4)2(3 - x^2)(-2x)}{(3 - x^2)^4} = \frac{6x(9 + x^2)}{(3 - x^2)^3}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x(9 + x^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;$$

$$y'' = \infty \Rightarrow (3 - x^2)^3 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \notin D(y).$$

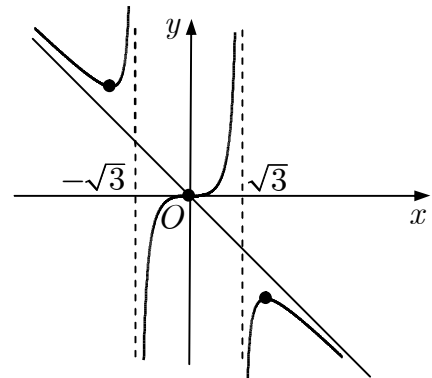
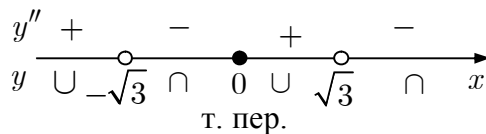


Рис. до зад. 12.2.1)

Точка $x = 0$ — точка перегину, $y(0) = 0$.

[Крок 6. Знаходимо можливі точки перетину графіка функції з осями координат.]

$$x = 0 \Rightarrow y = 0; y = 0 \Rightarrow x = 0.$$

[Крок 7. Будуємо графік функції $y = f(x)$.]

2) 1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Оскільки $D(y)$ симетрична щодо 0 і

$$f(-x) = (-x + 1)^{2/3} - (-x + 2)^{2/3} \neq \pm f(x),$$

то функція f загального вигляду.

3. Функція f неперервна і вертикальних асимптот графік функції не має.

Досліджуємо графік функції на похилу асимптоту $y = kx + b$:

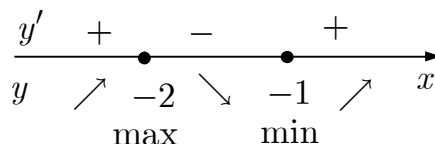
$$\begin{aligned} k_{\pm} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}}{x} = 0; \\ b_{\pm} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2 - (x+2)^2}{(x+1)^{4/3} + (x+1)^{2/3}(x+2)^{2/3} + (x+2)^{4/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{3x^{4/3}} = 0; \end{aligned}$$

Пряма $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

$$4. y' = \frac{2}{3} \left(\frac{(x+2)^{1/3} - (x+1)^{1/3}}{(x+1)^{1/3}(x+2)^{1/3}} \right).$$

$$y' = 0 \Rightarrow (x+2)^{1/3} = (x+1)^{1/3} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$y' = \infty \Rightarrow (x+1)^{1/3}(x+2)^{1/3} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = -2.$$

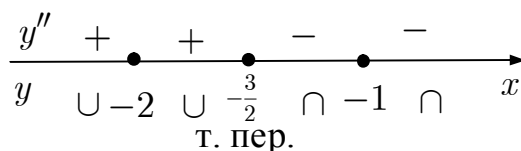


$$y_{\max}(-2) = 1, y_{\min}(-1) = -1.$$

$$5. y'' = -\frac{2}{9} \left(\frac{(x+2)^{4/3} - (x+1)^{4/3}}{(x+1)^{4/3}(x+2)^{4/3}} \right).$$

$$y'' = 0 \Rightarrow (x+2)^{4/3} = (x+1)^{4/3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x+1, \\ x+2 = -x-1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}.$$

$$y'' = \infty \Rightarrow (x+1)^{4/3}(x+2)^{4/3} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1, x_3 = -2.$$



$$y\left(-\frac{3}{2}\right) = 0.$$

$$6. y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 - \sqrt[3]{4} \approx -0,58.$$

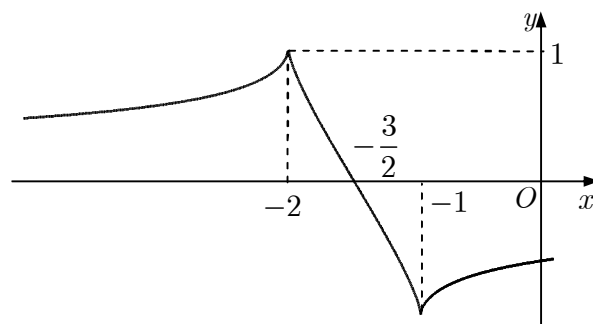


Рис. до зад. 12.1.2)

$$3) 1. D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

2. Оскільки область означення $D(y)$ не симетрично щодо 0, то функція f загального вигляду.

$$3. x \rightarrow -\infty : y = kx + b :$$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = 0;$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+2}}{x+2} = 0.$$

$$x \rightarrow +\infty : y = kx + b :$$

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} \stackrel{[2.6.4]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2}}{2} = +\infty.$$

$y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{e^{x+2}}{x+2} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{e^{x+2}}{x+2} = +\infty.$$

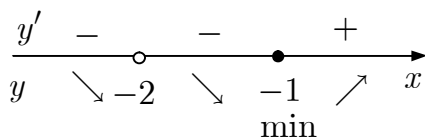
Точка $x = 2$ є точкою розриву 2-го роду, нескінченного.

Пряма $x = -2$ — вертикальна асимптота.

$$4. y' = \frac{e^{x+2}(x+1)}{(x+2)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow e^{x+2}(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1;$$

$$y' = \infty \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2 \notin D(y).$$



$$y_{\min}(-1) = e \approx 2,71.$$

$$5. y'' = \frac{e^{x+2}(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^3}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^{x+2}(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$y'' = \infty \Rightarrow (x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \notin D(y).$$

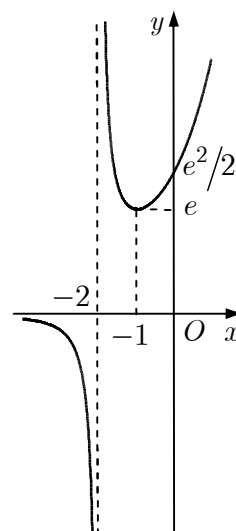
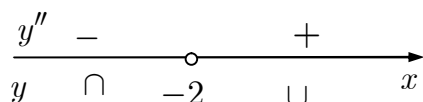


Рис. до зад. 12.2.3)

$$6. y \neq 0; x = 0 \Rightarrow y = \frac{e^2}{2}.$$

$$4) 1. D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2. Оскільки $D(y)$ симетрична щодо 0 і

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg} x = -f(x),$$

то функція f непарна і її графік симетричний щодо початку координат.

3. Функція неперервна і вертикальних асимптот графік функції не має.

$x \rightarrow -\infty : y = kx + b :$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

$y = x - \frac{\pi}{2}$ — ліва похила асимптота.

$y = x + \frac{\pi}{2}$ — права похила асимптота.

4. $y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \nearrow$ на $\mathbb{R}$.

5. $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

$$y'' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;$$

$$y'' = \infty \Rightarrow (1+x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\begin{array}{c} y'' \quad + \qquad \qquad \qquad - \\ y \quad \cup \qquad \qquad \qquad \cap \end{array} \quad x$$

т. пер.

$$y(0) = 0.$$

6. $y = 0 \Rightarrow x = 0.$

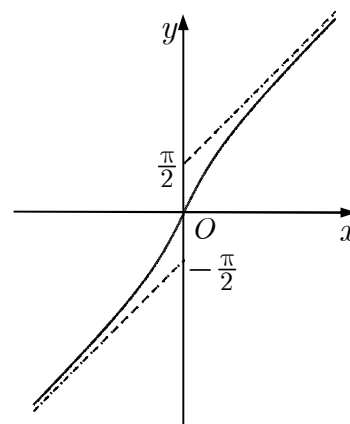


Рис. до зад. 12.2.4)

12.3. Дослідити астроїду, задану рівняннями $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ і побудувати її.

Розв'язання. ^①

Функції $\cos^3 t$ та $\sin^3 t$ означенні для будь-яких значень t . Але оскільки ці функції періодичні з періодом 2π , досить розглянути проміжок $t \in [0; 2\pi)$.

Оскільки $x \in [-a; a]$ та $y \in [-a; a]$, то крива асимптот не має.

Знайдімо

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Звідси критичні точки 1-го порядку:

$$y'_x(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \pi;$$

$$y'_x(t) = \infty \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2}, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Знайдімо

$$y''_{x^2}(t) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

Знайдімо критичні точки 2-го порядку:

$$y''_{x^2}(t) \neq 0;$$

$$y''_{x^2}(t) = \infty \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Побудуймо таблицю значень змінних t, x та y , а також знаків першої та другої похідних.

t	0	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	t	π	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
x	a		0		x	$-a$		0	
y'	0	—	∞	+	y'	0	—	∞	+
y''	∞	+	∞	+	y''	∞	—	∞	—
y	0	$\searrow \cup$	$y_{\max} = a$	$\nearrow \cup$	y	0	$\searrow \cap$	$y_{\min} = -a$	$\nearrow \cap$

На підставі дослідження будуймо астроїду.

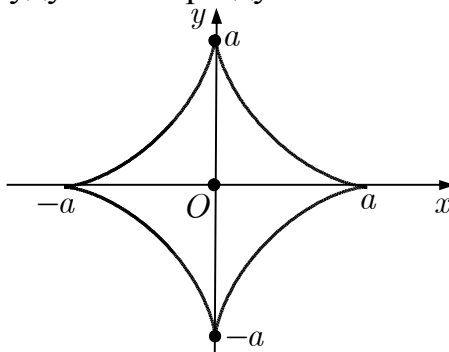


Рис. до зад. 12.3

Коментар. ① Дослідження кривої, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T,$$

де функції φ та ψ двічі диференційовні, проводять за схемою:

1. Встановлюють можливі симетрії кривої.
2. Визначають асимптоти кривої. А, саме, шукають такі значення t :
або $x \rightarrow \infty$, або $y \rightarrow \infty$, або $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.
3. За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності і точки екстремуму.
4. За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину.
5. Знаходять можливі точки перетину кривої з осями координат.
6. Будують криву за встановленою інформацією.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

12.4. Перевірте, що пряма $y = 2x + 1$ є асимптотою лінії $y = 2x + 1 + \frac{1}{x^3}$.

12.5. Знайдіть асимптоти графіка функції:

1) $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1};$

2) $y = \ln \frac{x + 1}{x - 2};$

- 3) $y = xe^x$; 4) $y = xe^{2/x} + 1$;
 5) $y = x \operatorname{arctg} 2x$. 6) $y = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;
 7) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$; 8) $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$.

12.6. Повністю дослідіть функцію і побудуйте її графік:

- 1) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 2) $y = e^{-x^2}$;
 3) $y = \frac{\ln x}{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

12.7. Повністю дослідіть функцію і побудуйте її графік:

- 1) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; 2) $y = \frac{1}{1 - x^2}$;
 3) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$; 4) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$;
 5) $y = xe^{-x}$; 6) $y = x^2e^{-x}$;
 7) $y = \frac{e^{-1/x}}{x}$; 8) $y = (2x - 1)e^{2/x}$;
 9) $y = \frac{1}{x \ln x}$; 10) $y = x^2 \ln x$;
 11) $y = x + \sin x$; 12) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

12.8. Побудуйте циклоїду, задану рівняннями:

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

Відповіді

- 12.5.** 1) $x = -1$ — вертикальна асимптота, $y = x + 2$ — похила асимптота;
 2) $x = -1$ — ліва вертикальна асимптота, $x = 2$ — права вертикальна асимптота;
 3) $y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота;
 4) $x = 0$ — права вертикальна асимптота, $y = x + 3$ — похила асимптота;
 5) $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ — ліва похила асимптота, $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ — права похила асимптота;
 6) $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$ — ліва і праві похилі асимптоти; 7) $y = x - \frac{1}{3}$ — похила асимптота;

8) $x = -\frac{1}{e}$ — права вертикальна асимптота, $y = x + \frac{1}{e}$ — права похила асимптота.

12.6. 1) рис. до зад. 12.6.1); 2)) рис. до зад. 12.6.2); 3)) рис. до зад. 12.6.3); 4) рис. до зад. 12.6.4).

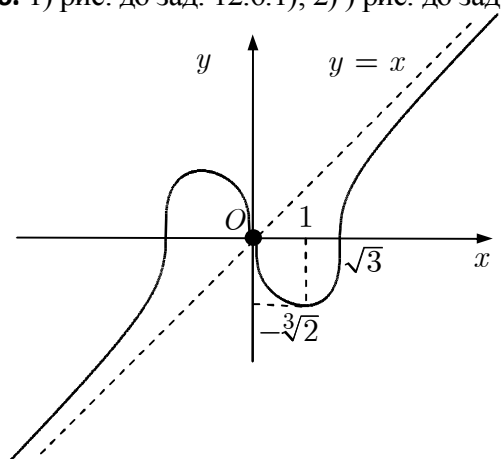


Рис. до зад. 12.6.1)

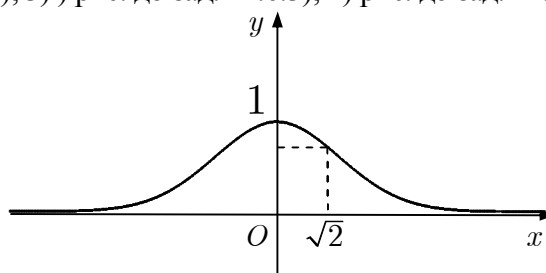


Рис. до зад. 12.6.2)

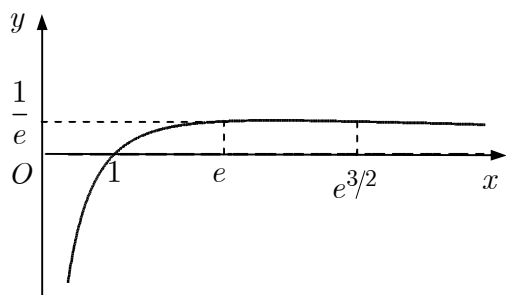


Рис. до зад. 12.6.3)

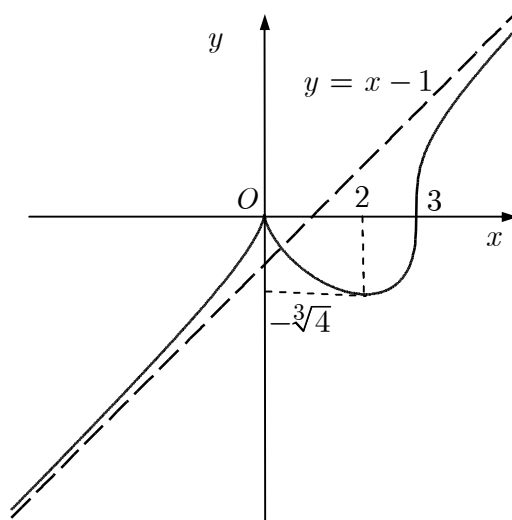


Рис. до зад. 12.6.4)

Відповіді до задач **12.7** та **12.8** див. на ст. 191.

Модуль 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

13. Інтегрування внесенням під знак диференціала

Навчальні задачі

13.1. Знайти:

1) $\int x^3 dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$;

4) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}}$;

7) $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$.

Розв'язання. [8.2, 8.1.5.]^①

1) [У формулі [8.2.2] покладаємо $\alpha = 3$]:

$$\int x^3 dx \stackrel{[8.2.2]}{\underset{\alpha=3}{=}} = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$$

[Перевіряємо диференціюванням правильність інтегрування.]

$$\left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx \stackrel{[8.2.2]}{\underset{\alpha=-1/2}{=}} = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$

3) $\int \frac{dx}{x^2 + 3} \stackrel{[8.2.15]}{\underset{a=\sqrt{3}}{=}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

4) $\int \frac{dx}{x^2 - 4} \stackrel{[8.2.16]}{\underset{a=2}{=}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} \stackrel{[8.2.14]}{\underset{a=\sqrt{5}}{=}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} \stackrel{[8.2.16]}{\underset{a=2}{=}} = \ln \left| x + \sqrt{2 + x^2} \right| + C.$

$$7) \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \underset{u=\sin x}{=} \int \underset{u}{\frac{du}{u}} \overset{[8.2.1]}{=} \ln|u| \overset{[8.1.5]}{=} \ln|\sin x| + C.$$

цей крок виконують усно

Коментар. ① Для знаходження первісних функцій використовують основну таблицю інтегралів та правила інтегрування.

Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням:

$$(F(x) + C)' = f(x).$$

13.2. Знайти безпосереднім інтегруванням:

$$1) \int \frac{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}{x^3} dx; \quad 2) \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$3) \int \frac{1}{x^4 + x^2} dx; \quad 4) \int a^x e^x dx;$$

$$5) \int (\arcsin x + \arccos x) dx; \quad 6) \int \frac{dx}{4 + 5x^2};$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}.$$

Розв'язання. [8.2, 8.1.5.]^①

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}{x^3} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + 3x^{-5/2} - 2x^{-3} \right) dx \overset{[8.2.1, 8.2.5]}{=} \\ &= \int \frac{dx}{x} + 3 \int x^{-5/2} dx - 2 \int x^{-3} dx \overset{[8.2.1, 8.2.2]}{=} \\ &= \ln|x| + 3 \frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1} - 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \\ &= \ln|x| + 3 \frac{x^{-3/2}}{-3/2} - 2 \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln|x| - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \overset{[8.1.5]}{=} \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx \overset{[8.1.5, 8.2.7]}{=} \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{1}{x^4 + x^2} dx &= \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^4 + x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \overset{[8.1.5]}{=} \\ &= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \overset{[8.2.2, 8.2.15]}{=} \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{x}{1} + C = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$4) \int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx \stackrel{[8.2.4]}{=} \frac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C.$$

$$5) \int (\arcsin x + \arccos x) dx = \int \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} x + C.$$

$$6) \int \frac{dx}{4 + 5x^2} \stackrel{[8.1.5]}{=} \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 + 4/5} \stackrel{[8.2.15]}{=} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} x \right) + C = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{2} + C.$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}} \stackrel{[8.1.5]}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{3/2 - x^2}} \stackrel{[8.2.14]}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} x + C.$$

Коментар. ① Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності та інваріантності невизначеного інтеграла.

Інтегруючи алгебричну суму функцій, дістають кілька довільних сталих, але в результаті пишуть лише одну сталу — їхню алгебричну суму.

13.3. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

$$1) \int (2x + 1)^{10} dx;$$

$$2) \int \sqrt[3]{(5x + 2)^5} dx;$$

$$3) \int (x^2 + 4)^6 2x dx;$$

$$4) \int \sin^4 x \cos x dx;$$

$$5) \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1 + x^2} dx;$$

$$6) \int \frac{dx}{x \ln^3 x};$$

$$7) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$8) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$9) \int \frac{\sin x}{\sqrt{3 - \cos x}} dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{2x + 7};$$

$$11) \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx;$$

$$12) \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

Розв'язання. [8.3.2, 8.3.3, 8.2.1, 8.2.2.]

$$\begin{aligned} 1) \int (2x + 1)^{10} dx &= \left| dx = \frac{1}{2} d(2x + 1) \right| = \int (2x + 1)^{10} \cdot \frac{1}{2} d(2x + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \int (2x + 1)^{10} d(2x + 1) = \frac{1}{2} \frac{(2x + 1)^{11}}{11} + C. \end{aligned}$$

- 2) $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5} dx = \left| dx = \frac{1}{5} d(5x+2) \right| = \frac{1}{5} \int (5x+2)^{5/3} d(5x+2) =$
 $= \frac{1}{5} \frac{(5x+2)^{8/3}}{8/3} + C = \frac{3}{40} \sqrt[3]{(5x+2)^8} + C.$
- 3) $\int \underbrace{(x^2+4)^6}_{u^6} \underbrace{2x}_{u'} dx = \left| d(x^2+4) = 2x dx \right|$
 $= \int (x^2+4)^6 d(x^2+4) = \frac{(x^2+4)^7}{7} + C.$
- 4) $\int \sin^4 x \cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| =$
 $= \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$
- 5) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx = \left| d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{x^2+1} \right| =$
 $= \int \operatorname{arctg}^3 x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$
- 6) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} =$
 $= \int \ln^{-3} x d(\ln x) = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + C = -\frac{1}{2 \ln^2 x} + C.$
- 7) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| x dx = -\frac{1}{2} d(1-x^2) \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$
 $= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$
- 8) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \right| =$
 $= \int \arcsin x d \arcsin x = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$
- 9) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}} dx = \left| d(3-\cos x) = \sin x dx \right| =$
 $= \int \frac{d(3-\cos x)}{\sqrt{3-\cos x}} = 2\sqrt{3-\cos x} + C.$
- 10) $\int \frac{dx}{2x+7} = \left| d(2x+7) = 2dx \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+7)}{2x+7} = \frac{1}{2} \ln |2x+7| + C.$

$$11) \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1) + C.$$

$$12) \int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

13.4. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

$$1) \int e^{5x+1} dx; \quad 2) \int e^{2x^2+1} x dx;$$

$$3) \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad 4) \int \frac{2^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

Розв'язання. [8.3.2, 8.3.3, 8.2.3, 8.2.4.]

$$1) \int e^{5x+1} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x+1} d(5x + 1) = \frac{1}{5} e^{5x+1} + C.$$

$$2) \int e^{2x^2+1} x dx = \frac{1}{4} \int e^{2x^2+1} d(2x^2 + 1) = \frac{1}{4} e^{2x^2+1} + C.$$

$$3) \int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

$$4) \int \frac{2^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x} = \int 2^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2} + C.$$

13.5. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

$$1) \int \sin 3x dx; \quad 2) \int \cos x^2 \cdot x dx;$$

$$3) \int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}; \quad 4) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}.$$

Розв'язання. [8.3.2, 8.3.3, 8.2.5–8.2.8.]

$$1) \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

$$2) \int \cos x^2 \cdot x dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \sin x^2 + C.$$

$$3) \int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \int \frac{d(e^x)}{\cos^2 e^x} = \operatorname{tg} e^x + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\sin^2(\ln x)} = -\operatorname{ctg}(\ln x) + C.$$

13.6. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 25}; \quad 2) \int \frac{dx}{2x^2 + 3};$$

$$3) \int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 1};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x}}.$$

Розв'язання. [8.3.2, 8.3.3, 8.2.14, 8.2.16.]

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 25} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{3} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{2x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 3/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} x + C.$$

$$3) \int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x})}{e^{4x} + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{2x} + C.$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x^2 + 4x + 4)}} = \\ &= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{4 - (x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{2} + C. \end{aligned}$$

13.7. Знайти інтеграл внесенням під знак диференціала:

$$1) \int \frac{dx}{7 - 9x^2};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{23x^2 - 14}};$$

$$3) \int \frac{x^3}{1 - x^8} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x - 1}}.$$

Розв'язання. [8.3.2, 8.3.3, 8.2.13, 8.2.15.]

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{7 - 9x^2} &= -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - 7/9} = \\ &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}} \ln \left| \frac{x - \frac{\sqrt{7}}{3}}{x + \frac{\sqrt{7}}{3}} \right| + C = -\frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \left| \frac{3x - \sqrt{7}}{3x + \sqrt{7}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{\sqrt{23x^2 - 14}} &= \frac{1}{\sqrt{23}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 14/23}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{23}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 14/23} \right| + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{x^3}{1 - x^8} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{x^8 - 1} = -\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} \right| + C.$$

$$\begin{aligned}
 4) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x - 1}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2x + 1) - 1 - \frac{1}{3}}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 - \frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - \frac{1}{3}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

13.8. Знайдіть безпосереднім інтегруванням:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x} \right) dx;$ | 2) $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} - 7\sqrt[4]{x^3} \right) dx;$ |
| 3) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 - 9}} dx;$ | 4) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx;$ |
| 5) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx;$ | 6) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$ |
| 7) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx;$ | 8) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx;$ |
| 9) $\int \frac{x^4}{1-x^2} dx;$ | 10) $\int \frac{x^6}{x^2 - 1} dx.$ |

13.9. Знайдіть, користуючись інваріантністю формул інтегрування:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $\int \sin x d(\sin x);$ | 2) $\int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x);$ |
| 3) $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2};$ | 4) $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x};$ |
| 5) $\int e^{\sin x} d(\sin x);$ | 6) $\int \frac{d(e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$ |

13.10. Знайдіть внесенням під знак диференціала:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\int (x+1)^{15} dx;$ | 2) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5};$ |
| 3) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx;$ | 4) $\int \sqrt{8-2x} dx;$ |

5) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1}dx;$

6) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$

7) $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2}dx;$

8) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4 + x^5}};$

9) $\int \sin^3 x \cos x dx;$

10) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x};$

11) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$

12) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1 + x^2};$

13) $\int \cos(1 - 2x)dx;$

14) $\int \sin(2x - 3)dx;$

15) $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2};$

16) $\int e^{\sin x} \cos x dx;$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}};$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}};$

19) $\int \frac{dx}{1 + 9x^2};$

20) $\int \frac{dx}{2x^2 + 9};$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}};$

22) $\int \frac{x dx}{x^4 + 1};$

23) $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

24) $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx;$

25) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3};$

26) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3};$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x + 9x^2}};$

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}.$

13.11. Знайдіть таку функцію f , що:

1) $f'(x) = x^2 + 4x + 1, f(-1) = 1;$

2) $f'(x) = \sin x + \cos x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

Відповіді

13.8. 1) $x^3 - \ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$; 2) $x^4 - \frac{1}{x} - 4\sqrt[4]{x^7} + C$; 3) $\ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 3}}{x + \sqrt{x^2 - 3}} \right| + C$;

4) $\ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + C$; 5) $x + \cos x + C$; 6) $C - \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$; 7) $3x - \frac{2 \cdot 1,5^x}{\ln 1,5} + C$;

8) $\left(\frac{a}{b}\right)^x \ln \frac{a}{b} - 2x + \left(\frac{b}{a}\right)^x \ln \frac{b}{a} + C$; 9) $-x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$;

10) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.

13.10. 1) $\frac{(x+1)^{16}}{16} + C$; 2) $C - \frac{1}{8(2x-3)^4}$; 3) $C - \frac{5}{33}(8-3x)^{11/5}$; 4) $C - \frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$;

5) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$; 6) $\sqrt{x^2+1} + C$; 7) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C$; 8) $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C$;

9) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$; 10) $\frac{1}{\cos x} + C$; 11) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C$; 12) $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$; 13) $C - \frac{1}{2}\sin(1-2x)$;

14) $C - \frac{1}{2}\cos(2x-3)$; 15) $C - e^{1/x}$; 16) $e^{\sin x} + C$; 17) $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$; 18) $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x}{2} + C$;

19) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$; 20) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3}x + C$; 21) $\frac{1}{2}\ln \left(x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \right) + C$;

22) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$; 23) $C - 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$; 24) $C - \frac{1}{9}(\sqrt{1-9x^2} + \arccos^3 3x)$;

25) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$; 26) $\frac{1}{4}\ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$; 27) $\frac{1}{3}\ln(3x+1 + \sqrt{9x^2+6x+8}) + C$;

28) $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C$.

13.11. 1) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x + \frac{1}{3}$; 2) $f(x) = \sin x - \cos x + 1$.

14. Методи замінювання змінної і інтегрування частинами

14.1. Знайти замінюванням змінної інтеграл:

1) $\int x\sqrt[3]{x+1}dx$;

2) $\int x(3x-10)^{20}dx$;

3) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

Розв'язання. [8.3.1.]

1) $\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^3, \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2dt \end{array} \right| = \int (t^3 - 1)t \cdot 3t^2dt =$

$$= 3 \int (t^3 - 1)t^3 dt = 3 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt \right) = 3 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C =$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \left| t = \sqrt[3]{x+1} \right| = \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$$

$$\begin{aligned} 2) \int x(3x-10)^{20} dx &= \left| \begin{array}{l} 3x-10=t \\ x=\frac{t+10}{3} \\ dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{t+10}{3} t^{20} \cdot \frac{1}{3} dt = \\ &= \frac{1}{9} \int (t^{21} + 10t^{20}) dt = \frac{1}{9} \left(\frac{t^{22}}{22} + \frac{10t^{21}}{21} \right) + C = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{(3x-10)^{22}}{22} + \frac{10}{21} (3x-10)^{21} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-e^x}, \\ x = \ln(1-t^2) \\ dx = -\frac{2t dt}{1-t^2} \end{array} \right| = -2 \int \frac{(1-t^2)^3}{t} \cdot \frac{t dt}{1-t^2} = \\ &= -2 \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = -2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) = \\ &= -\frac{2}{5} \sqrt{(1-e^x)^5} + \frac{4}{3} \sqrt{(1-e^x)^3} - 2\sqrt{1-e^x} + C. \end{aligned}$$

Коментар. ① Рекомендації щодо вибору заміни змінної буде подано для основних класів функцій.

② Не забувайте переходити у відповіді до «старої» змінної.

14.2. Знайти інтегруванням частинами інтеграл:

$$1) \int (3x-1)e^{2x} dx;$$

$$2) \int (x^2 - x) \sin 3x dx.$$

Розв'язання. [8.3.4, 8.3.5.]^①

$$\begin{aligned} 1) \int (3x-1)e^{2x} dx &= \stackrel{\textcircled{2}}{\left| \begin{array}{l} u = 3x-1 \rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right|} = \\ &= (3x-1) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{3}{2}e^{2x} dx = \frac{3x-1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C. \\ &\quad \int u dv = uv - \int v du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \int (x^2 - x) \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - x \rightarrow du = (2x - 1)dx \\ dv = \sin 3x dx \rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{3} (x^2 - x) \cos 3x + \frac{1}{3} \int (2x - 1) \cos 3x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = 2x - 1 \rightarrow du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx \rightarrow v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{3} (x^2 - x) \cos 3x + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (2x - 1) \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x dx \right) = \\
&= -\frac{1}{3} (x^2 - x) \cos 3x + \frac{1}{9} (2x - 1) \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C = \\
&= \frac{\sin 3x}{3} \frac{2x - 1}{3} - \frac{\cos 3x}{3} \left(x^2 - x - \frac{2}{9} \right) + C.
\end{aligned}$$

Коментар. ① Метою методу інтегрування частинами є перейти від «складного» інтеграла до простішого («нескладнішого»).

Щоб обчислити інтеграли вигляду $\int P_n(x) \left\{ \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x} \right\} dx$, $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx$, де $P_n(x)$

— многочлен степеня n , $\alpha \in \mathbb{R}$, треба брати

$$\boxed{u = P_n(x)}.$$

② Покладімо $u = 3x - 1$, $dv = e^{2x} dx$. Від u до du переходять диференціюванням, а від dv до v — інтегруванням:

$$du = (3x - 1)' dx = 3dx; \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

(при цьому можна вважати, що $C = 0$).

14.3. Знайти:

$$1) \int \ln x dx;$$

$$2) \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$3) \int \arcsin x dx.$$

Розв'язання. [8.3.4, 8.3.5.]^①

$$\begin{aligned}
1) \int \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = \\
&= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int x \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \arcsin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right| = \\
 &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| d(1-x^2) = -2x dx \right| \\
 &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

Коментар. ① Щоб обчислити інтеграли вигляду $\int P_n(x) \ln x dx$ або $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$, де $P_n(x)$ — многочлен степеня n , arctg — одна з арк-функцій: $\arcsin$, $\arccos$, arctg чи $\operatorname{arccotg}$, треба брати:

$$\boxed{u = \ln x} \text{ або } \boxed{u = \operatorname{arctg} x}.$$

14.4. Знайти:

$$1) \int e^{3x} \cos 2x dx;$$

$$2) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Розв'язання. [8.3.4, 8.3.5.]

$$\begin{aligned}
 1) I &= \int e^{3x} \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{3x} \rightarrow du = 3e^{3x} dx \\ dv = \cos 2x \rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{3x} - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{3x} \rightarrow du = 3e^{3x} dx \\ dv = \sin 2x \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{4} e^{3x} (2 \sin 2x + 3 \cos 2x) - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x dx.
 \end{aligned}$$

[Записуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.]

$$I = \frac{1}{4} e^{3x} (2 \sin 2x + 3 \cos 2x) - \frac{9}{4} I;$$

$$I = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \sin 2x + 3 \cos 2x).$$

$$\begin{aligned} 2) \quad I &= \overset{\textcircled{2}}{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx} = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right| = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &\quad \text{перетворюємо інтеграл} \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

[Записуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.]

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Коментар. ① Інтеграли вигляду $\int e^{ax} \left\{ \begin{array}{l} \sin bx \\ \cos bx \end{array} \right\} dx$, $\int \left\{ \begin{array}{l} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{array} \right\} dx$ та ін., двічі

інтегрують частинами, двічі вибираючи за u функцію того самого типу (чи $e^{\alpha x}$, чи тригонометричну функції — все одно), і одержують рівняння щодо шуканого інтеграла.

② Інтеграли вигляду $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ один раз інтегрують частинами, перетворюють одержаний інтеграл і дістають рівняння щодо шуканого інтеграла.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

14.5. Застосовуючи заміну змінної, знайдіть:

1) $\int x(5x - 1)^{19} dx;$

2) $\int \frac{x dx}{(2x + 1)^7};$

3) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}};$

4) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x + 1}};$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}};$

6) $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

14.6. Знайдіть, інтегруючи частинами:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $\int x \sin 2x dx;$ | 2) $\int (9x - 3) \cos 3x dx;$ |
| 3) $\int x 3^x dx;$ | 4) $\int x e^{-x} dx;$ |
| 5) $\int \arccos(2x) dx;$ | 6) $\int x \operatorname{arctg} x dx;$ |
| 7) $\int x^2 \ln(1 + x) dx;$ | 8) $\int \ln(x^2 + 1) dx;$ |
| 9) $\int (x^2 - 2x + 3) \sin x dx;$ | 10) $\int x^2 e^{-x} dx;$ |
| 11) $\int (\arcsin x)^2 dx;$ | 12) $\int \ln^2 x dx;$ |
| 13) $\int e^{-2x} \cos 5x dx;$ | 14) $\int \sin \ln x dx;$ |
| 15) $\int e^{\sin x} \sin 2x dx;$ | 16) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$ |

Відповіді

- 14.5.** 1) $\frac{1}{25} \left(\frac{(5x-1)^{21}}{21} + \frac{(5x-1)^{20}}{20} \right) + C;$ 3) $2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C;$
- 4) $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3} - 3(x+1)^{1/3} + 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x+1}| + C;$ 5) $\ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C;$
- 6) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.$
- 14.6.** 1) $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} \cos 2x + C;$ 2) $(3x-1) \sin 3x + \cos 3x + C;$ 3) $\frac{3^x}{\ln^2 3} (x \ln 3 - 1) + C;$
- 4) $C - e^{-x}(x+1);$ 5) $x \arccos 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C;$ 6) $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C;$
- 7) $\frac{(x^3+1) \ln(1+x)}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C;$ 8) $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C;$
- 9) $-(x-1)^2 \cos x - 2(x-1) \sin x + C;$ 10) $C - e^x(2+2x+x^2);$
- 11) $2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + x \arcsin^2 x + C;$ 12) $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C;$
- 13) $\frac{e^{-2x}}{29} (5 \sin 5x - 2 \cos 5x) + C;$ 14) $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C;$
- 15) $2e^{\sin x} (\sin x - 1) + C;$ 16) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C.$

15. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Навчальні задачі

15.1. Зінтегрувати елементарні дроби:

$$1) \int \frac{2dx}{x-1};$$

$$2) \int \frac{3dx}{(x-2)^3};$$

$$3) \int \frac{x+5}{x^2+2x+5} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{(x^2+9)^3};$$

$$5) \int \frac{2x+3}{(x^2+6x+13)^2}.$$

Розв'язання. [8.4.]

$$1) \int \frac{2dx}{x-1} = 2 \ln|x-1| + C.$$

$$2) \int \frac{3dx}{(x-2)^3} = 3 \int (x-2)^{-3} d(x-2) = -\frac{3}{2(x-2)^2} + C.$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{x+5}{x^2+2x+5} dx &= \left| \begin{array}{l} d(x^2+2x+5) = (2x+2)dx \\ x+5 = \frac{1}{2}(2x+2) + 4 \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + 4}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 4 \int \frac{dx}{x^2+2x+5} \\ &= \left| \begin{array}{l} x^2+2x+5 = \\ = (x+1)^2 + 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

4) [Застосовуємо рекурентну формулу [8.4.4].]

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right), n \in \mathbb{N} \\ \int \frac{dx}{(x^2+9)^3} &= \left| \begin{array}{l} a=3; \\ n=3 \end{array} \right| = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 9} \left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + (2 \cdot 3 - 3) \int \frac{dx}{(x^2+9)^2} \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} a=3; \\ n=2 \end{array} \right| = \frac{1}{36} \left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 9} \left(\frac{x}{x^2+9} + (2 \cdot 2 - 3) \int \frac{dx}{x^2+9} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{36} \frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{216} \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{648} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+6x+13)^2} &= \left| \begin{array}{l} d(x^2+6x+13) = 2x+6 \\ 2x+3 = (2x+6) - 3 \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2} - 3 \int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2} = \\
&\quad \int \frac{f'(t)dt}{f^2(t)} = -\frac{1}{f} + C \quad x^2+6x+13=(x+3)^2+4 \\
&= -\frac{1}{x^2+6x+13} - 3 \int \frac{d(x+3)}{((x+3)^2+4)^2} = \\
&= -\frac{1}{x^2+6x+13} - 3 \left(\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 4} \left(\frac{x+3}{(x+3)^2+4} + (2 \cdot 2 - 3) \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4} \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{x^2+6x+13} - \frac{3}{8} \frac{x+3}{(x+3)^2+4} - \frac{3}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.
\end{aligned}$$

15.2. Вилучити цілу частину дробу $\frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$.

Розв'язання. [5.6.6.]

[Вилучають цілу частину діленням многочленів у стовпчик. Ділити припиняють тоді, коли степінь остачі стане меншим за степінь дільника.]

$$\begin{array}{r}
x^5 + x^2 - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x + 1 \\ x^3 - x^2 + 2 \end{array} \right. \\
\hline
-x^4 - x^3 + x^2 - 1 \\
-x^4 - x^3 - x^2 \\
\hline
2x^2 - 1 \\
-2x^2 - 2x + 2 \\
\hline
-2x - 3
\end{array}$$

[Записуємо відповідь.]

$$\frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = x^3 - x^2 + 2 + \frac{-2x - 3}{x^2 + x + 1}.$$

15.3. Розкласти правильні дробу на елементарні:

$$1) \frac{3x+1}{(x-2)(x+1)^3};$$

$$2) \frac{x^2-3}{(x-1)(x^2+x+1)};$$

$$3) \frac{2x-1}{(x^2+1)^2 x^2}.$$

Розв'язання. [8.4.6.]

$$1) \frac{3x+1}{(x-2)(x+1)^3} = \underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\text{відповідає } (x-2)} + \underbrace{\frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}}_{\text{відповідає } (x+1)^3}.$$

$$2) \frac{x^2-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\text{відповідає } (x-1)} + \underbrace{\frac{Mx+N}{x^2+x+1}}_{\text{відповідає } (x^2+x+1)}.$$

$$3) \frac{2x-1}{(x^2+1)^2 x^2} = \underbrace{\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}}_{\text{відповідає } x^2} + \underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}}_{\text{відповідає } (x^2+1)^2}.$$

15.4. Знайти коефіцієнти розкладу дробів на елементарні:

$$1) \frac{6x^3 - 11x^2 + 10x - 9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}; \quad 2) \frac{4x}{(x-1)^2(x+3)};$$

$$3) \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}.$$

Розв'язання. [8.4.6, 8.4.7, 8.4.9, 5.6.2.]

[Розкладаємо правильний дріб на суму елементарних дробів.]

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 10x - 9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

[Зводимо розкладені дробу до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники дробів в обох частинах рівності (знаменники у них рівні).]

$$6x^3 - 11x^2 + 10x - 9 \equiv$$

$$\equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x-1)(x-2)(Cx+D).$$

[Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях [5.6.2]^①.]:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 6 = A + B + C \\ x^2 & -11 = -2A - B - 3C + D \\ x^1 & 10 = A + B + 2C - 3D \\ x^0 & -9 = A - B + 2D \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 3, \\ C = 1, \\ D = -1. \end{cases} \quad \text{②}$$

[Записуємо відповідь.]

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 10x - 9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

2) [Розкладаємо правильний дріб на суму елементарних дробів.]

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

[Коефіцієнти над степенями лінійних многочленів знаходимо методом викреслювання (домноження).]

$$B \stackrel{[8.4.8]}{=} \frac{4x}{\cancel{(x-1)}^2(x+3)} \Big|_{x=1} = 1.$$

$$C \stackrel{[8.4.8]}{=} \frac{4x}{(x-1)^2 \cancel{(x+3)}} \Big|_{x=-3} = -\frac{3}{4};$$

$$A \stackrel{[8.4.8]}{=} \frac{1}{1!} \left(\frac{4x}{x+3} \right)' \Big|_{x=1} = \frac{4(x+3) - 4x}{(x+3)^2} \Big|_{x=1} = \frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+3}.$$

3) [Розкладаємо дріб на елементарні перетворюючи його (метод перетворення).]

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Коментар. ① Два многочлена того самого степеня тотожно рівні, якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.

② Знаходження коефіцієнтів можна дещо спростити, підставляючи у тотожність зручні значення: перші два «зручних» значення — дійсні корені знаменника. (метод зручних значень).

Підставляємо в тотожність значення:

$$x = 1 \Rightarrow -4 = -2A \Rightarrow A = 2;$$

$$x = 2 \Rightarrow 15 = 5B \Rightarrow B = 3;$$

$$x = 0 \Rightarrow -9 = -2A - B + 2D \Rightarrow D = -1.$$

Оскільки визначення коефіцієнту C потребує ще однієї рівності, прирівнюємо коефіцієнти в обох частинах тотожності при x^3 :

$$6 = A + B + C \Rightarrow C = 1.$$

15.5. Знайти:

$$1) \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx;$$

$$2) \int \frac{2x + 3}{x^2 - 7x + 12} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{1-x^4};$$

$$4) \int \frac{x^4}{8+x^3} dx.$$

Розв'язання. [8.4.10.]

1) Підінтегральна функція є неправильним дробом.

[Крок 1. Вилучаємо цілу частину неправильного дробу.]

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

[Крок 2. Правильний дріб розкладаємо на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.]

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1).$$

$$\frac{2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1 - x}{x^2 + 1};$$

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

[Крок 3. Інтегруємо суму цілої частини дробу і елементарних дробів.]

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctg x + C_1;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \int (x + 1) dx + \int \frac{dx}{x - 1} - \\ &- \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| + \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

2) 1. $\frac{2x + 3}{x^2 - 7x + 12}$ — дріб правильний.

2. $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$

$$\frac{2x + 3}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 4}.$$

$$A = \frac{2x + 3}{\cancel{(x - 3)}(x - 4)} \Big|_{x=3} = -9;$$

$$B = \frac{2x + 3}{(x - 3)\cancel{(x - 4)}} \Big|_{x=4} = 11.$$

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 7x + 12} = \frac{-9}{x - 3} + \frac{11}{x - 4}.$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{2x + 3}{x^2 - 7x + 12} &= -9 \int \frac{dx}{x - 3} + 11 \int \frac{dx}{x - 4} = \\ &= -9 \ln|x - 3| + 11 \ln|x - 4| + C. \end{aligned}$$

3) 1. $\frac{1}{1-x^4}$ — дріб правильний.

2. $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$.

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

$$A = \frac{-1}{(\cancel{x-1})(x+1)(x^2+1)} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{4};$$

$$B = \frac{-1}{(x-1)(\cancel{x+1})(x^2+1)} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{4}.$$

$$x^3 \mid A+B+M=0 \Rightarrow M=0;$$

$$x=0: 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + N \Rightarrow N = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{1-x^4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{dx}{1-x^4} &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

4) 1. $\frac{x^4}{8+x^3}$ — неправильний дріб.

$$\frac{x^4}{x^3+8} = x - \frac{8x}{x^3+8}.$$

2. $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$.

$$\begin{aligned} \frac{8x}{(x+2)(x^2-2x+4)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+4} = \\ &= \frac{A(x^2-2x+4) + (Mx+N)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}. \end{aligned}$$

$$8x = A(x^2-2x+4) + (Mx+N)(x+2).$$

$$\begin{array}{l|l} x = -2 & -16 = 12A \Rightarrow A = -\frac{4}{3}; \\ x^2 & 0 = A + M \Rightarrow M = \frac{4}{3}; \\ x^0 & 0 = 4A + 2N \Rightarrow N = \frac{8}{3}. \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x^3 + 8} = x - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} \right).$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{x^4 dx}{x^3 + 8} &= \int x dx + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{4}{3} \int \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} dx \equiv \\ &= \int \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2 - 2x + 4) = 2x - 2, \\ x + 2 = \frac{1}{2}(2x - 2) + 3 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 4) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_1. \\ \equiv \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} \ln(x+2) - \frac{2}{3} \ln(x^2 - 2x + 4) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

15.6. Розкладіть на суму елементарних раціональний дріб:

1) $\frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)};$

2) $\frac{5x^2 - 25x + 26}{(x-1)(x-2)(x-3)};$

3) $\frac{3x^3 - 10x^2 - 11x + 21}{x^2 - 5x + 4};$

4) $\frac{x^4 - x^3 - 9x^2 - 10x - 14}{x^2 - 2x - 8};$

5) $\frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)};$

6) $\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2(x-2)^2};$

7) $\frac{x^2 + 1}{x^3 + 1};$

8) $\frac{3x - 7}{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$

15.7. Знайдіть:

1) $\int \frac{4dx}{x+5};$

2) $\int \frac{3dx}{4x+1};$

3) $\int \frac{3dx}{(x-2)^4};$

4) $\int \frac{7dx}{(x-2)^3};$

5) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5};$

6) $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5};$

7) $\int \frac{x dx}{(x^2 - 4)^2};$

8) $\int \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 13};$

9) $\int \frac{x dx}{(x + 1)(2x + 1)};$

10) $\int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2};$

11) $\int \frac{x dx}{x^2 - 5x + 4};$

12) $\int \frac{4x - 3}{x^2 - 2x + 6} dx.$

15.8. Знайдіть:

1) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x - 1)(x + 3)(x - 4)} dx;$

2) $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x};$

3) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx;$

4) $\int \frac{(2x^2 - 5)dx}{x^4 - 5x^2 + 6};$

5) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4};$

6) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx;$

7) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x - 2)^3(x - 5)} dx;$

8) $\int \frac{(7x^3 - 9)dx}{x^4 - 5x^3 + 6x^2};$

9) $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)};$

10) $\int \frac{dx}{1 + x^3};$

11) $\int \frac{(2x^2 - 3x - 3)dx}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)};$

12) $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx;$

13) $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx;$

14) $\int \frac{(5x^2 - 12)dx}{(x^2 - 6x + 13)^2};$

15) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^4};$

16) $\int \frac{x^2 - x}{(x + 1)^9} dx;$

17) $\int \frac{dx}{x^4 - 4x^2 + 3};$

18) $\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2}.$

Відповіді

15.6. 1) $\frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}$; 2) $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x-3}$; 3) $3x + 5 - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$;

4) $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-4}$; 5) $\frac{13}{(x-4)^3} - \frac{3}{(x-4)^2} + \frac{2}{x-4} - \frac{2}{x-2}$;

6) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{2(x-2)^2} + \frac{3}{4(x-2)}$; 7) $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1} \right)$; 8) $-\frac{2}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+4}$.

15.7. 1) $4 \ln|x+5| + C$; 2) $\frac{3}{4} \ln|4x+1| + C$; 3) $C - \frac{1}{(x-2)^3}$; 4) $-\frac{7}{2(x-2)^2} + C$;

5) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$; 7) $-\frac{1}{2(x^2-4)} + C$; 8) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2+3}{2} + C$;

9) $\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} + C$; 10) $\frac{1}{5} \ln((x-2)^2 \sqrt{2x+1}) + C$; 11) $\frac{1}{2} \ln|x^2-5x+4| + \frac{5}{6} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C$;

12) $2 \ln(x^2-2x+6) + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{5}} + C$.

15.8. 1) $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C$; 2) $\frac{3}{11} \ln|3x+1| + \frac{2}{33} \ln|2x-3| - \frac{1}{3} \ln|x| + C$;

3) $\frac{x}{4} + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| + C$;

4) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C$; 5) $\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C$;

6) $x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + C$; 7) $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C$;

8) $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + 20 \ln|x-3| - \frac{47}{4} \ln|x-2| + C$;

9) $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$; 10) $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

11) $\ln \frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$;

12) $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2+2x+2) - 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C$;

13) $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$;

14) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C$; 15) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} x + C$;

16) $-\frac{1}{6(x+1)^6} + \frac{3}{7(x+1)^7} - \frac{1}{4(x+1)^8} + C$; 17) $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$;

18) $\frac{3}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.

16. Інтегрування тригонометричних виразів

Навчальні задачі

16.1. Знайти:

$$1) \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 5};$$

$$2) \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x};$$

$$3) \int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

Розв'язання. [8.5.1–8.5.4.]

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 5} &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3-3t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{15}} \left(t + \frac{1}{2}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{15}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x} &= \left| \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \right|^{[8.5.2]} = \\ &= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1 - \cos^2 x) d(\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \int d(\cos x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx &= \left| \frac{(-\cos x)^5}{\sin^4 x} = -\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \right|^{[8.5.3]} = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x dx}{\sin^4 x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x; dt = \cos x dx; \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x)}{\sin^4 x} = \\ &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x} - 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} + \int d(\sin x) = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{(-\sin x)^2 + 3(-\sin x)(-\cos x) + (-\cos x)^2} \right| \stackrel{[8.5.4]}{=} \\
&= \left| \frac{1}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x} \right| \\
&= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1} = \\
&= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\left(\operatorname{tg} x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{5}} \right| + C.
\end{aligned}$$

16.2. Знайти:

1) $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx;$

2) $\int \frac{dx}{\sin^7 x};$

3) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx;$

4) $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$

5) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

Розв'язання. [8.5.]

$$\begin{aligned}
1) \int \frac{1}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx \stackrel{[8.3.4]}{=} \\
&= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \rightarrow du = \cos x dx \\ dv = \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} \rightarrow v = \frac{1}{2 \cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C.
\end{aligned}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sin^7 x} \stackrel{[8.5.1]}{=} \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)^6 dt}{64t^7} = \dots$$

$$3) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx \stackrel{[8.5.4]}{=} \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\sin^2 x} = - \int \operatorname{ctg}^4 x d(\operatorname{ctg} x) = - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C.$$

$$4) \int \operatorname{tg}^4 x dx \stackrel{[8.5.8]}{=} \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\
 &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \int \operatorname{ctg}^3 x dx &\stackrel{[8.5.9]}{=} \int \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg}^2 x) dx = \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\
 &= - \int \operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg} x dx = - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \\
 &= - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x| + C.
 \end{aligned}$$

16.3. Знайти:

$$1) \int \sin 6x \cos 7x dx;$$

$$2) \int \cos^4 3x dx.$$

Розв'язання. [8.5.7, 8.5.10.]

$$1) \int \sin 6x \cos 7x dx \stackrel{[8.5.10]}{=} \frac{1}{2} \int (-\sin x + \sin 13x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos 13x \right) + C.$$

$$\begin{aligned}
 2) \int \cos^4 3x dx &\stackrel{[8.5.7]}{=} \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 6x + \cos^2 6x) dx = \\
 &= \int \left(\frac{1 + \cos 12x}{8} + \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C.
 \end{aligned}$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

16.4. Знайдіть:

$$1) \int \cos 3x \cos x dx;$$

$$2) \int \sin 5x \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$3) \int \sin \frac{3}{4} x \cos \frac{x}{4} dx;$$

$$4) \int \cos^4 \frac{x}{2} dx.$$

16.5. Знайдіть:

$$1) \int \sin^3 x dx;$$

$$2) \int \cos^5 x dx;$$

$$3) \int \sin^3 x \cos^2 x dx;$$

$$4) \int \sin^2 x \cos^5 x dx;$$

$$5) \int \sin^2 x \cos^2 x dx;$$

$$6) \int \sin^2 x \cos^4 x;$$

7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$

8) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx;$

9) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx;$

10) $\int \operatorname{tg}^5 x dx;$

11) $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x};$

12) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x};$

13) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x};$

14) $\int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x};$

15) $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x};$

16) $\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x};$

17) $\int \operatorname{sh}^3 x dx;$

18) $\int \operatorname{ch}^3 x dx;$

19) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$

20) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$

Відповіді

16.4. 1) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$; 2) $-\frac{1}{11} \sin \frac{11}{2} x + \frac{1}{9} \sin \frac{9}{2} x + C$; 3) $-\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x + C$;

4) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C.$

16.5. 1) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$; 2) $\sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$;

3) $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$; 4) $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C$;

5) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$; 6) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$; 7) $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$;

8) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{2} x + C$; 9) $x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$;

10) $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C$; 11) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$; 12) $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C$;

13) $-\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C$; 14) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right) + C$; 15) $\frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{7}} \right| + C$;

16) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x) + C$; 17) $\frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C$; 18) $\operatorname{sh} x + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x + C$;

19) $C - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2x) + C$; 20) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$

17. Інтегрування ірраціональних виразів

Навчальні задачі

17.1. Зінтегрувати, використовуючи відповідну заміну змінної:

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}; & 2) \int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \frac{dx}{2x+1}; \\ 3) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}; & 4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}. \end{array}$$

Розв'язання. [8.6.]

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} & \stackrel{[8.6.4]}{=} \left| \begin{array}{l} x+1 = t^6, \\ x = t^6 - 1, \\ dx = 6t^5 \end{array} \right| = 6 \int \frac{(t^6 - 1)t^5 dt}{t^3 - t^2} = \\ & = 6 \int \frac{t^3(t^6 - 1)}{t - 1} dt = 6 \int (t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3) dt = \\ & = 6 \left(\frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_{t=\sqrt[6]{x+1}} + C. \\ 2) \int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \frac{dx}{2x+1} & \stackrel{[8.6.4]}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{2x-1}{2x+1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \frac{2t dt}{(1-t^2)^2}; 2x+1 = \frac{2}{1-t^2} \end{array} \right| = \\ & = \int \frac{t \cdot 2t dt}{\frac{2}{1-t^2} (1-t^2)^2} = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int \left(\frac{1}{1-t^2} - 1 \right) dt = \\ & = -t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}} \right| + C. \\ 3) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}} & \stackrel{[8.6.1]}{=} \left| \begin{array}{l} 3x^2+6x+4 \stackrel{[5.5.3]}{=} \\ = 3 \left(x^2 + 2x + \frac{4}{3} \right) = 3 \left((x+1)^2 + \frac{1}{3} \right) \end{array} \right| = \\ & = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{3}} \right| + C. \\ 4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}} & \stackrel{[8.6.3]}{=} \left| t = \frac{1}{x}; x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2}} = \\
&= -\arcsin \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = -\arcsin \frac{2t+1}{\sqrt{5}} + C = -\arcsin \frac{2+x}{\sqrt{5x}} + C.
\end{aligned}$$

17.2. Використовуючи тригонометричні підстановки, знайти:

$$\begin{array}{ll}
1) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}; & 2) \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.
\end{array}$$

Розв'язання. [8.6.6.]

$$\begin{aligned}
1) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} &= \left| x = 3 \operatorname{tg} t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \right| = \\
&= \int \frac{3dt}{\cos^2 t \cdot 9 \operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{3}{\cos t}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{9} \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9 \sin t} + C = \\
&= -\frac{1}{9} \frac{1}{\cos t} \frac{1}{\operatorname{tg} t} + C = -\frac{1}{3x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{9}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} &= \left| x = 2 \sin t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; dx = 2 \cos t dt; \sin t = \frac{x}{2}; \right| \\
&= \int \frac{2 \cos t dt}{8 \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t + C = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{4} \frac{x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

17.3. Знайти, використовуючи теорему Чебишова:

$$\begin{array}{ll}
1) \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}; & 2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx; \\
3) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}. &
\end{array}$$

Розв'язання. [8.6.5.]

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})^3} &= \int x^{-1}(1 + x^{1/3})^{-3} dx = \left| \begin{array}{l} m = -1, n = \frac{1}{3}, p = -3 \Rightarrow \\ k = \text{НСК}(1, 3) = 3; \\ \boxed{x = t^3}; dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \\
 &\quad \text{записуємо підінтегральний вираз} \\
 &\quad \text{як диференціальний біном} \\
 &\quad \text{визначаємо випадок} \\
 &= \int \frac{1}{t^3} (1 + t)^{-3} 3t^2 dt = 3 \int \frac{dt}{t(1 + t)^3} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \frac{1 + t - t}{t(1 + t)^3} = -\frac{1}{(1 + t)^3} + \frac{1}{t(1 + t)^2} = \dots = \\ = \frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{(1 + t)^2} - \frac{1}{(1 + t)^3} \end{array} \right| = \\
 &= 3 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{(1 + t)^2} - \frac{1}{(1 + t)^3} \right) dt = \\
 &= 3 \ln|t| - 3 \ln|1 + t| + \frac{3}{1 + t} + \frac{3}{2(1 + t)^2} + C = \\
 &= 3 \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} \right| + \frac{3}{1 + \sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2(\sqrt[3]{x} + 1)^2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{1/3} dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}; \\ \frac{m + 1}{n} = 2 \Rightarrow \boxed{1 + x^{1/4} = t^3}; t = (1 + x^{1/4})^{1/3}; \\ \frac{1}{4} x^{-3/4} dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \\
 &= \int x^{1/4} (1 + x^{1/4})^{1/3} x^{-3/4} dx = \int (t^3 - 1)t \cdot 12t^2 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \\
 &= 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} - 3 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + C.
 \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} = \int x^0 (1 + x^4)^{-1/4} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4}; \\ \frac{m+1}{n} + p = 0 \Rightarrow \boxed{x^{-4} + 1 = t^4}; \\ x = \frac{1}{(t^4 - 1)^{1/4}}; dx = -\frac{t^3 dt}{(t^4 - 1)^{5/4}} \end{array} \right| = \int (x^{-4} + 1)^{-1/4} x^{-1} dx = \\
&= -\int \frac{(t^4 - 1)^{1/4}}{t} \frac{t^3 dt}{(t^4 - 1)^{5/4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \\
&= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} + 1}{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} - 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^{-4} + 1} + C.
\end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

17.4. Знайдіть:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx;$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}};$

4) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3} + 1} dx;$

5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \frac{dx}{x};$

6) $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3} dx;$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+13x+8x^2}};$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{11+9x-7x^2}};$

9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}};$

10) $\int \frac{x+8}{\sqrt{3x^2+x+9}} dx;$

11) $\int \frac{x dx}{\sqrt{8-3x-2x^2}};$

12) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}} dx;$

13) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}};$

14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}};$

15) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx;$

16) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2-1}};$

17) $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^4 dx;$

18) $\int x^{-1}(1 + x^{1/3})^{-3} dx;$

19) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}};$

20) $\int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} dx;$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}};$

22) $\int \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x^5} dx;$

23) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

24) $\int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx.$

Відповіді

17.4. 1) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C;$

2) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3\ln(1 + \sqrt[12]{x}) + \frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x} - 1}{\sqrt{7}} + C;$

3) $\sqrt{t} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{t} + 3\sqrt[6]{t} + 3\ln(\sqrt[6]{t} - 1) + C \Big|_{t=2x-1};$

4) $\frac{3}{7}\sqrt[6]{t^7} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{t^5} + \sqrt{t} - 3\sqrt[6]{t} + 3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{t} + C \Big|_{t=2x-3};$

5) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$ 6) $(5-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C;$

7) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x + \frac{13}{16} + \sqrt{x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{5}{8}}\right| + C;$ 8) $\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{14x-9}{\sqrt{389}} + C;$

9) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - \frac{5}{4\sqrt{2}}\ln\left|x + \frac{5}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}\right| + C;$

10) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2 + x + 9} + \frac{47}{6\sqrt{3}}\ln\left|x + \frac{1}{6} + \sqrt{x^2 + \frac{x}{3} + 3}\right| + C;$

11) $-\frac{1}{2}\sqrt{8-3x-2x^2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{73}} + C;$

12) $-\sqrt{1-13x-5x^2} - \frac{19}{2\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x+13}{\sqrt{189}} + C;$

13) $C - \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|;$ 14) $\arccos\frac{1}{x\sqrt{2}} + C;$

15) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C;$

- 16) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C;$
- 17) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5} + C;$
- 18) $3\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right) + C;$
- 19) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1}+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}} + C;$
- 20) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C;$ 21) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C;$
- 22) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + C;$ 23) $\frac{3}{7}(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C;$
- 24) $\frac{12\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}}{13} - \frac{18\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}}{5} + \frac{36\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}}{7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$

12.7. 1) $y_{\max}(1) = \frac{1}{2}, y_{\min}(-1) = -\frac{1}{2}, \left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), x = 0$ та $x = \sqrt{3}$ — точки перегину,

$y = 0$ — асимптота; 2) $y_{\min}(0) = 1, x = \pm 1, y = 0$ — асимптоти;

3) $y_{\max}(0) = 2, y_{\min}(\pm 1) = \sqrt[3]{4};$

4) $y_{\max}(0) = 0, y_{\min}(2) = \sqrt[3]{16}, x = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегину, $x = \sqrt[3]{4}, y = x$ — асимптоти;

5) $y_{\max}(1) = \frac{1}{e}, x = 2$ — точка перегину, $y = 0$ — асимптота;

6) $y_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}, y_{\min}(0) = 0, x = 2 \pm \sqrt{2}$ — точки перегину, $y = 0$ — асимптота;

7) $y_{\max}(1) = \frac{1}{e}, x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегину, $x = 0$ — ліва асимптота, $y = 0$ — асимптота;

8) $x = 1$ — точка перегину, $x = 0$ — права асимптота, $y = 2x + 3$ — асимптота.

9) $y_{\max}\left(\frac{1}{e}\right) = -e, x = 1$ — асимптота, $x = 0$ та $y = 0$ — праві асимптоти;

10) $y_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}, x = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ — точка перегину;

11) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, — точки перегину;

12) $y_{\max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1, y_{\min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}, x = 0$ — точка перегину, $y = x \pm \pi$ — асимптоти.

12.8. Графік повторюється з періодом $T = 2\pi, y_{\max}(\pi a) = 2a, y_{\min}(0) = y_{\min}(2\pi a) = 0.$

Додаток

Грецька абетка

Α α — альфа	Ν ν — ню
Β β — бета	Ξ ξ — ксі
Γ γ — гамма	Ο ο — омікрон
Δ δ — дельта	Π π — пі
Ε ε — епсилон	Ρ ρ — ро
Ζ ζ — дзета	Σ σ — сигма
Η η — ета	Τ τ — тау
Θ θ — тета	Υ υ — іпсилон
Ι ι — йота	Φ φ — фі
Κ κ — каппа	Χ χ — хі
Λ λ — лямбда	Ψ ψ — псі
Μ μ — мю	Ω ω — омега

Модуль 0. АДАПТАЦІЙНИЙ КУРС ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1. Дії з числами

Навчальні задачі

1.1. Вилучити цілу частину дробу $\frac{35}{8}$.

Розв'язання. [4.11.2, 4.9.9.]

[Задача рівносильна діленню з остачею 35 на 8.]

$$\begin{array}{r} 35 \\ 8 \overline{) 35} \\ \underline{32} \\ 3 \end{array} \Leftrightarrow \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8} \Leftrightarrow 35 = 8 \cdot 4 + 3.$$

1.2. Для чисел 12 та 18 знайти:

1) дільники;

2) найбільший спільний дільник;

3) кратні (перших три);

4) найменше спільне кратне.

Розв'язання. [4.11.1, 4.11.9, 4.11.10.]

[Розкладаємо числа на прості дільники, використовуючи ознаки подільності [4.11.4].]

$$\begin{array}{r} 12 \\ 2 \overline{) 12} \\ \underline{6} \\ 6 \\ 2 \overline{) 6} \\ \underline{4} \\ 2 \\ 2 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow 12 = 2^2 \cdot 3;$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 2 \overline{) 18} \\ \underline{16} \\ 2 \\ 3 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow 18 = 2 \cdot 3^2$$

Дільниками числа 12 є: 1, 2, 3, 6, 12.

Дільниками числа 18 є: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

$$\text{НСД}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Числами, які кратні 12 є: 12, 24, 36,

Числами, які кратні 18 є: 18, 36, 54,

$$\text{НСК}(12, 18) = 36.$$

1.3. Звести до спільного знаменника дробу:

1) $\frac{2}{3}$ та $\frac{4}{5}$;

2) $\frac{5}{6}$ та $\frac{2}{9}$.

Розв'язання. [4.11.10.]

[Для того, щоб звести дробу до спільного знаменника, знаходять найменше спільне кратне знаменників.]

1. НСК(3, 5) = 15.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}; \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}.$$

2. НСК(6, 9) = 18.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}; \quad \frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{18}.$$

1.4. Для дробів $\frac{3}{5}$ та $\frac{2}{7}$ знайти:

1) суму;

2) різницю;

3) добуток;

4) частку.

Розв'язання. [4.9.10.]

[Для того, щоб додати або відняти дроби, зводимо їх до найменшого спільного знаменника.]

1. $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35}.$

2. $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}.$

3. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}.$

4. $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}.$

1.5. Знайти невідомі члени пропорції:

1) $\frac{x}{10} = \frac{2}{5};$

2) $\frac{8}{y} = \frac{4}{7}.$

Розв'язання. [4.10.5.]

1. $x = \frac{10 \cdot 2}{5} = 4.$

2. $y = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14.$

1.6. Знайти 40% від 70 грн.

Розв'язання. [4.10.1, 4.10.2.]

Нехай шукане число x . Тоді

70 гривням відповідає 100%,

x гривням відповідає 40%.

[Складаємо пропорцію.]

$$\frac{70}{x} = \frac{100}{40}.$$

40% від 70 грн становлять $\frac{70 \cdot 40}{100} = 28$ грн.

1.7. Знайти число, якщо 15% його становлять 135.

Розв'язання. [4.10.1, 4.10.2.]

Нехай x — шукане число. Тоді

x відповідає 100%,

135 відповідає 15%.

$$\frac{x \cdot 15}{100} = 135 \Leftrightarrow x = \frac{100 \cdot 135}{15} = 900.$$

1.8. Виконати дії:

1) $x^3 \cdot x^5$;

2) $\frac{x^5}{x^3}$;

3) $(x^3)^5$;

4) x^0 .

Розв'язання. [5.3.1.]

1. $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$.

2. $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$.

3. $(x^3)^5 = x^{3 \cdot 5} = x^{15}$.

4. $x^0 = 1$.

1.9. Обчислити $\frac{2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{10} \cdot 3^{15}}$.

Розв'язання. [5.3.5.]

$$\frac{2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{10} \cdot 3^{15}} = \frac{2^{12-10}}{3^{15-12}} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}.$$

Задачі для самостійної роботи

1.10. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел:

1) 120 та 144;

2) 275 та 180.

1.11. Знайдіть найменше спільне кратне чисел:

1) 70 та 112;

2) 74 та 111.

$$\begin{aligned} 1) & \left(1\frac{1}{3} - 3\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{12}{29}; & 2) & \left(-3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3}\right) : \frac{11}{6}; \\ 3) & \frac{\left(13,75 + 9\frac{1}{6}\right) \cdot 1,2}{\left(10,3 - 8\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}} + \frac{\left(6,8 - 3\frac{3}{5}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}\right) \cdot 56} - 27\frac{1}{6}; \\ 4) & \left(\frac{1}{4} - \frac{1/4 + 1/9}{1/9}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{7/15}{2/5 - 1/6}\right); \end{aligned}$$

1) 1 до 4; 2) 3 до 5;
3) 5 до 2; 4) 3,2 до 1,28.

1) 4% від 75; 2) 15% від 84 кг;
3) 160% від 82 грн; 4) 45% від 140 грн.

1) 40% його дорівнюють 12; 2) 1,25% його дорівнюють 55;
3) 0,8% його дорівнюють 1,84; 4) 7% його дорівнюють 182.

1) число 30 у відношення 1 : 9; 2) число 44 у відношенні 4 : 7;
3) число 48 у відношенні 3 : 5; 4) число 72 у відношенні 5 : 7.

- 1) $(x^7 \cdot x^9)^2$;
- 2) $x^7 \cdot (x^9)^2$;
- 3) $\left(\frac{x^2}{x^9}\right)^3$;
- 4) $\left(\frac{x}{x^6}\right)^{-7}$;
- 5) $\left(\frac{x^3 \cdot x^4}{x^5}\right)^{-6}$;
- 6) $\left(\frac{x^4}{x^{-3}}\right)^{-8}$.

1.18. Знайдіть значення числових виразів:

$$1) \frac{26^9}{13^8 \cdot 8^3};$$

$$2) \frac{9^6 \cdot 4^3}{27^4 \cdot 2^5};$$

$$3) \frac{3^5 \cdot 5^7}{15^7 \cdot 2^8} \cdot \frac{22^9 \cdot 3^{12}}{11^8 \cdot 9^4};$$

$$4) \frac{34^{10}}{2^{11} \cdot 17^9} : \frac{7^6 \cdot 2^7}{14^8};$$

Відповіді

1.10. 1) 24; 2) 5.

1.11. 1) 560; 2) 222.

1.12. 1) -1 ; 2) 1 ; 3) 1 ; 4) $-\frac{9}{8}$.

1.13. 1) 25%; 2) 60%; 3) 250%; 4) 250%.

1.14. 1) 3; 2) 4; 3) 131,2; 4) 63.

1.15. 1) 30; 2) 4400; 3) 230; 4) 2600.

1.16. 1) 3 та 27; 2) 16 та 28; 3) 18 та 30; 4) 30 та 42.

1.17. 1) x^{32} ; 2) x^{25} ; 3) x^{-21} ; 4) x^{35} ; 5) x^{-12} ; 6) x^{-56} .

1.18. 1) 13; 2) 2; 3) 198; 4) 833.

2. Модуль

Навчальні задачі

2.1.1. Розв'яжіть рівняння $|x| = 3$.

Розв'язання. [5.14.1, 5.14.4.]

I спосіб (аналітичний).

$$|x| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 3.$$

II спосіб (геометричний).

Геометрично співвідношення $|x| = 3$ означає, що віддалі від точки x до початку координат дорівнює 3, тобто $x = 3$ або $x = -3$ (рис. 1).

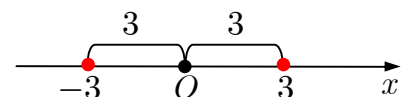


Рис. 1 до зад. 2.1.1

III спосіб (графічний).

[Знаходимо точки перетину графіка $y = |x|$ і прямої $y = 3$.]

Розв'язками рівняння $|x| = 3$ є числа $x = \pm 3$ (рис. 2).

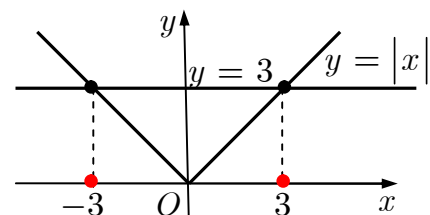


Рис. 2 до зад. 2.1.1

2.1.2. Розв'яжіть нерівність $|x + 1| < 2$.

Розв'язання. [5.14.4.]

I спосіб (аналітичний).

$$|x + 1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 2, \\ x + 1 > -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > -3, \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3; 1).$$

II спосіб (геометричний).

Геометрично нерівність $|x + 1| < 2$ означає, що віддаль від точки x до точки -1 менша за 2 (рис. 1).

Отже, $x \in (-3; 1)$.

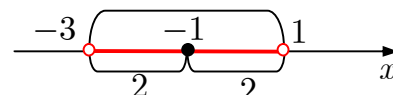


Рис. 1 до зад. 2.1.2

III спосіб (графічний).

[Будуємо графік $y = |x + 1|$ і пряму $y = 2$.]

Розв'язком нерівності $|x + 1| < 2$ є проекція на вісь Ox частини графіка $y = |x + 1|$, яка розташована нижче за пряму $y = 2$ (рис. 2).

Отже, $x \in (-3; 1)$.

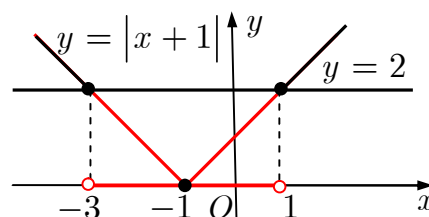


Рис. 2 до зад. 2.1.2

2.1.3. Розв'яжіть нерівність $|x + 1| \geq 2$.

Розв'язання. [5.14.4.]

I спосіб (аналітичний).

$$|x + 1| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 2, \\ x + 1 \leq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -3, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty).$$

II спосіб (геометричний).

Геометрично нерівність $|x + 1| \geq 2$ означає, що віддаль від точки x до точки -1 не менша за 2 (рис. 1). Отже, $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

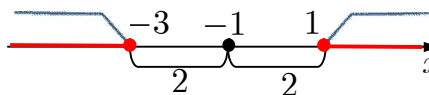


Рис. 1 до зад. 2.1.3

III спосіб (графічний).

[Будуємо графік $y = |x + 1|$ і пряму $y = 2$.]

Розв'язком нерівності $|x + 1| \geq 2$ є проекція на вісь Ox частини графіка $y = |x + 1|$, яка розташована не нижче за пряму $y = 2$ (рис. 2).

Отже, $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

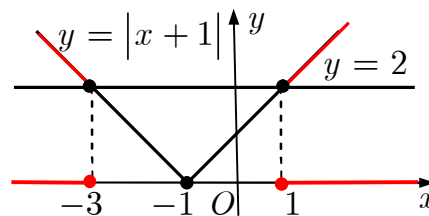


Рис. 2 до зад. 2.1.3

2.2. Розкрити модуль у виразі $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Розв'язання. [5.14.1.]

Коренями виразів, які стоять під знаком модуля, є числа $x_1 = -2, x_2 = 2$.

Вони розбивають числову вісь на 3 області: I, II, III.

[Вказуємо знаки виразів $x + 2$ та $x - 2$ в кожній з цих областей і звільняємось від знака модуля.]

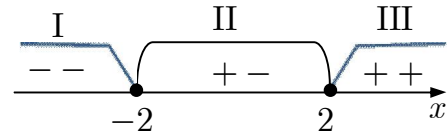


Рис. до зад. 2.2

I. $x < -2, y = -(x + 2) - (x - 2) = -x - 2 - x + 2 = -2x.$

II. $-2 \leq x \leq 2, y = (x + 2) - (x - 2) = x + 2 - x + 2 = 4.$

III. $x > 2, y = (x + 2) + (x - 2) = x + 2 + x - 2 = 2x.$

Задачі для самостійної роботи

2.3. Визначити довжину $|AB|$ відрізка, заданого точками:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $A(3)$ та $B(11)$; | 2) $A(5)$ та $B(2)$; |
| 3) $A(-1)$ та $B(3)$; | 4) $A(-5)$ та $B(-3)$. |

2.4. На числовій прямій позначте множину точок, віддаль від яких до точки $M(1)$ числової прямої:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) дорівнює 2; | 2) менше 2; |
| 3) більше 2; | 4) не більше 3; |
| 5) не менше 3. | |

2.5. Позначте на числовій осі числа, модуль яких дорівнює:

- | | |
|-------|-------|
| 1) 3; | 2) 5. |
|-------|-------|

2.6. Запишіть за допомогою модуля твердження:

- 1) «віддаль від точки x до точки 5 дорівнює 2»;
- 2) «віддаль від точки y до точки -3 дорівнює 1».

2.7. Запишіть без знака модуля вираз:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1) $ x - 2 , x \in (-\infty; 2);$ | 2) $ x - 2 , x \in (2; +\infty);$ |
| 3) $ x + 2 - x - 4 x - 3 , x \in (2; 3);$ | |
| 4) $ x - 1 - 3 x - 5 , x \in [1; 5).$ | |

2.8. Розкрийте модуль у виразі:

- | | |
|---------------------|-----------------|
| 1) $ x - 3 ;$ | 2) $ x + 4 ;$ |
| 3) $ x + x - 1 ;$ | 4) $ x - 1 .$ |

2.9. Знайдіть всі значення x , для яких правдива рівність:

1) $|x| = 2$;

2) $|x| = -3$;

3) $|x| = x$;

4) $|x| = -x$;

5) $\frac{|x|}{x} = 1$;

6) $|x + 2| + |x - 2| = 0$.

2.10. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x - 1| = 2$;

2) $|x + 3| = 1$;

3) $|x - 1| + |x - 5| = 3$;

4) $|x + 1| = |x - 5|$.

2.11. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x| \geq 1$;

2) $|x| \geq -2$;

3) $1 < |x| < 3$;

4) $|x - 1| < 3$;

5) $|x - 2| \geq 1$;

6) $|x| + |x - 1| \leq 1$.

2.12. Схарактеризуйте геометрично розташування точок, координати яких справджують такі нерівності:

1) $|x| < 1$;

2) $|x| \leq 2$;

3) $|x| \geq 2$;

4) $|x| > 3$;

5) $|x + 2| < 1$;

6) $|x - 3| \leq 2$;

7) $|x - 3| \geq 2$;

8) $|x + 3| > 2$.

2.13. Запишіть за допомогою знака модуля нерівність:

1) $-7 < a < 7$;

2) $-1,5 \leq a \leq 1,5$;

3) $a < -2$ або $a > 2$;

4) $a \leq -5$ або $a \geq 5$;

5) $2 < x < 6$;

6) $-4 \leq x \leq 2$;

7) $x \leq 2$ або $x \geq 6$;

8) $x < -4$ або $x > 2$.

Відповіді

2.3. 1) 8; 2) 3; 3) 4; 4) 2.

2.6. 1) $|x - 5| = 2$; 2) $|y + 3| = 1$.

2.7. 1) $2 - x$; 2) $x - 2$; 3) $6x - 14$; 4) $4x - 16$.

$$2.8. 1) \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ 3-x, & x < 3; \end{cases} 2) \begin{cases} x+4, & x \geq -4, \\ -x-4, & x < -4; \end{cases} 3) \begin{cases} 1-2x, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-1, & x > 1; \end{cases} 4) \begin{cases} -x-1, & x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x < 0, \\ -x+1, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & x \geq 1. \end{cases}$$

2.9. 1) $\{-2; 2\}$; 2) $\emptyset$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$; 5) $(0; +\infty)$; 6) $\emptyset$.

2.10. 1) $\{-1; 3\}$; 2) $\{-4; -2\}$; 3) $\emptyset$; 4) $\{2\}$.

2.11. 1) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $(-3; -1) \cup (1; 3)$; 4) $(-2; 4)$; 5) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; 6) $[0; 1]$.

2.13. 1) $|a| < 7$; 2) $|a| \leq 1,5$; 3) $|a| > 2$; 4) $|a| \geq 5$; 5) $|x-4| < 2$; 6) $|x+1| \leq 3$;

7) $|x-4| \geq 2$; 8) $|x+1| > 3$.

3. Факторіали. Біноміальні коефіцієнти

Навчальні задачі

3.1. Обчислити:

1) $4!$;

2) C_5^0 ;

3) C_5^1 ;

4) C_5^2 .

Розв'язання. [4.15.1, 4.15.3.]

1. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

2. $C_5^0 = \frac{5!}{0!5!} = 1$.

3. $C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$.

4. $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{1 \cdot 2 \cdot 3!} = 10$.

3.2. Скоротити дріб:

1) $\frac{(n+2)!}{n!}$;

2) $\frac{k!}{(k-3)!}$.

Розв'язання. [4.15.1.]

1. $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

2. $\frac{k!}{(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{(k-3)!} = k(k-1)(k-2)$.

3.3. Піднести до квадрату:

1) $(x-2)^2$;

2) $(2a+3)^2$.

Розв'язання. [4.16.4.]

$$1. (x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$$

$$2. (2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9.$$

3.4. Піднести до кубу:

$$1) (x + 2)^3;$$

$$2) (2a - 3)^3.$$

Розв'язання. [4.16.4.]

$$1. (x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

$$2. (2a - 3)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 3^2 - 3^3 = 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27.$$

3.5. Розкласти за формулою різниці квадратів:

$$1) a^2 - 4b^2;$$

$$2) 4a^{10} - 1.$$

Розв'язання. [4.16.5.]

$$1. a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a - 2b)(a + 2b).$$

$$2. 4a^{10} - 1 = (2a^5)^2 - 1^2 = (2a^5 - 1)(2a^5 + 1).$$

3.6. Розкласти за формулою різниці (суми) кубів:

$$1) 27 - a^3;$$

$$2) a^6 + 125.$$

Розв'язання. [4.16.5.]

$$1. 27 - a^3 = 3^3 - a^3 = (3 - a)(9 + 3a + a^2).$$

$$2. a^6 + 125 = (a^2)^3 + 5^3 = (a^2 + 5)(a^4 - 5a^2 + 25).$$

Задачі для самостійної роботи

3.7. Спростіть вирази:

$$1) \frac{n! + (n + 1)!}{(n + 2)!};$$

$$2) \frac{(n + 1)! - n!}{(n + 1)! + n!};$$

$$3) \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n + 1)!};$$

$$4) \frac{1}{(2n - 1)!} - \frac{4n^2}{(2n + 1)!}.$$

3.8. Розкрийте дужки:

$$1) (x + 3ay)^2;$$

$$2) (x + 3y)^3;$$

$$3) (2a - b)^3;$$

$$4) (2a + b)^3.$$

Відповіді

$$\mathbf{3.7.} \ 1) \frac{1}{n + 1}; \ 2) \frac{n}{n + 2}; \ 3) \frac{n}{(n + 1)!}; \ 4) \frac{2n}{(2n + 1)!}.$$

- 3.8. 1) $x^2 + 6axy + 9a^2y^2$; 2) $x^2 + 6xy + 9y^2$; 3) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$;
4) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$.

4. Прогресії

Навчальні задачі

- 4.1. Арифметичну прогресію задано формулою n -го члена $a_n = 37 - 3n$.
З'ясувати, чи є членом цієї послідовності число: 19; -7 .

Розв'язання. [6.1.2.]

[Якщо число x є членом заданої прогресії, то існує таке натуральне число n , що $x = 37 - 3n$.]

$$19 = 37 - 3n \Leftrightarrow 3n = 18 \Leftrightarrow n = 6 \in \mathbb{N};$$

$$-7 = 37 - 3n \Leftrightarrow 3n = 44 \Leftrightarrow n = \frac{44}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Число 19 є членом арифметичної прогресії, а число -7 — ні.

- 4.2. Знайти двадцятий член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 1, d = 5$.

Розв'язання. [6.1.2.]

$$a_{20} = 1 + 5(20 - 1) = 96.$$

- 4.3. Знайти суму ста перших парних натуральних чисел.

Розв'язання. [6.1.2.]

Послідовність $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ — арифметична прогресія з різницею $d = 2$.

$$S_{100} = 2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200 = \frac{2 + 200}{2} \cdot 100 = 10100.$$

- 4.4. Визначити, скільки треба взяти членів арифметичної прогресії з $a_1 = 6$ і $d = 2$, щоб їх сума дорівнювала 168.

Розв'язання. [6.1.2.]

$$168 = \frac{6 + 2(n - 1)}{2} n \Leftrightarrow 168 = 2n + n^2 \Rightarrow n = 12.$$

- 4.5. Знайти перший член і знаменник геометричної прогресії, якщо її сума $S_n = 10(2^n - 1)$.

Розв'язання. [6.1.3.]

Нехай b_1 — перший член заданої прогресії, q — її знаменник. Тоді

$$b_1 = S_1 = 10 \cdot (2 - 1) = 10;$$

$$b_1 + b_2 = S_2 = 10 \cdot (2^2 - 1) = 30.$$

Отже, $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Перший член $b_1 = 10$, знаменник прогресії $q = 2$.

4.6. Подати нескінченний десятковий дріб $0,2(54)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. [4.6.3, 4.6.1.]

Маємо:

$$0,2(54) = 0,2545454... = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + 0,000054 +$$

Вираз $0,054 + 0,00054 + 0,000054 +$ можна розглядати як суму нескінченної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 0,054$ і знаменником $q = 0,01$. Тоді

$$\begin{aligned} 0,054 + 0,00054 + 0,000054 + ... &= 0,054(1 + 0,01 + 0,01^2 + ...) \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{0,054}{1 - 0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{3}{55}. \end{aligned}$$

Отже,

$$0,2(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}.$$

Коментар. $\textcircled{1}$ Суму нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником q знаходять за формулою

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Задачі для самостійної роботи

4.7. З'ясуйте, чи є арифметичною прогресією послідовність, якщо так — укажіть її різницю:

1) $3, -6, 12, -24$;

2) $4, 8, 12, 16$;

3) $5, 10, 5, 10$;

4) $42, 39, 36, 33$.

4.8. 1. Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 4$, різниця $d = 0,4$. Знайдіть: a_3, a_{11} .

2. Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 17$, різниця $d = -2$. Знайдіть: a_4, a_{15} .

4.9. Між числами -7 та 2 вставте:

1) два числа так, щоб вийшло чотири послідовних члени арифметичної прогресії;

2) три числа так, щоб вийшло п'ять послідовних члени арифметичної прогресії.

4.10. В арифметичній прогресії знайдіть:

- 1) a_{23} , якщо $a_{10} = 25, a_{30} = 95$; 2) $a_2 + a_9$, якщо $a_5 + a_6 = 18$.

4.11. Знайдіть суму:

- 1) семи перших членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, якщо $a_1 = 9, a_7 = 15$;
2) шести перших членів арифметичної прогресії $\{a_n\}$, якщо $a_1 = 19, a_6 = 14$;
3) дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, перший член якої $a_1 = -6$, різниця $d = 4$;
4) двадцяти перших членів арифметичної прогресії: $-8, -6, -4, \dots$;
5) тридцяти двох перших членів арифметичної прогресії, яку задано формулою n -го члена $a_n = -4n + 1$;
6) двадцяти шести перших членів арифметичної прогресії, яку задано формулою n -го члена $a_n = 5n - 2$.

4.12. Знайдіть суму всіх:

- 1) непарних чисел від 1 до 135 включно;
2) двозначних чисел від 10 до 100.

4.13. Укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:

- 1) 2, 6, 18, 36; 2) 4, 8, 16, 32;
3) 10, 20, 30, 40; 4) 81, 27, 9, 3;
5) 2, -2, 2, -2; 6) -9, -9, -9, -9.

4.14. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

- 1) $b_6 = 8, q = -4$; 2) $b_8 = 16, q = \frac{3}{4}$.

4.15. Знайдіть вказані члени геометричної прогресії, якщо:

- 1) $y_1 = 64, q = -\frac{1}{2}, y_6, y_{10}$; 2) $y_1 = 9, q = -1, y_{21}, y_{50}$.

4.16. Знайдіть:

- 1) знаменник і п'ятий член геометричної прогресії $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \dots$;
2) знаменник і шостий член геометричної прогресії 18, 12, 8,

4.17. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, якщо:

1) $b_1 = \frac{1}{2}, b_8 = 64$;

2) $b_6 = 75, b_8 = 27$.

4.18. Знайдіть перший член геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо:

1) $b_4 = \frac{1}{98}, q = \frac{2}{7}$;

2) $b_6 = 100, b_9 = 100000$.

4.19. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії $\{b_n\}$, зі знаменником q , якщо:

1) $b_1 = 0,6; q = 2, n = 5$;

2) $b_1 = -4, q = -1, n = 10$;

3) $b_1 = -9; q = \sqrt{3}, n = 6$;

4) $b_1 = 8, q = -\frac{1}{2}, n = 4$.

4.20. Запишіть звичайним дробом нескінченний десятковий періодичний дріб:

1) $0,(1)$;

2) $0,2(6)$;

3) $0,(24)$;

4) $1,(18)$.

Відповіді

4.7. 1), 3), 6) ні; 2) $d = 4$; 4) $d = -3$; 5) $d = -2$.

4.8. 1) $a_3 = 4,8; a_{11} = 8$; 2) $a_4 = 11, a_{15} = -11$.

4.9. 1) $-4, -1$; 2) $-\frac{19}{4}, -\frac{10}{4}, -\frac{1}{4}$.

4.10. 1) $a_{23} = 70,5$; 2) $a_2 + a_9 = 18$.

4.11. 1) 84; 2) 99; 3) 192; 4) 220; 5) -2080 ; 6) 1703. **4.12.** 1) 4624; 2) 4905.

4.13. 1), 3) ні; 2) $b_1 = 4, q = 2$; 4) $b_1 = 81, q = \frac{1}{3}$; 5) $b_1 = 2, q = -1$; 6) $b_1 = -9, q = 1$.

4.14. 1) $b_7 = -32$; 2) $b_7 = \frac{64}{3}$.

4.15. 1) $y_6 = -2, y_{10} = -\frac{1}{8}$; 2) $y_{21} = 9, y_{50} = -9$.

4.16. 1) $q = 6, b_5 = 6$; 2) $q = \frac{2}{3}, b_6 = \frac{64}{27}$.

4.17. 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ або $-\frac{3}{5}$. **4.18.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001.

4.19. 1) $S_5 = 18,6$; 2) $S_{10} = 0$; 3) $S_6 = -\frac{234}{\sqrt{3}-1}$; 4) $S_4 = 5$.

4.20. 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{8}{33}$; 4) $\frac{13}{11}$.

5. Лінійна функція

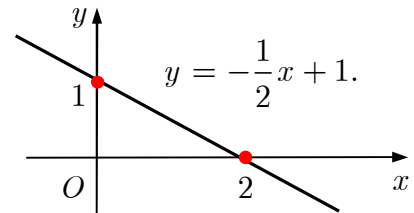
Навчальні задачі

5.1. Зобразити графік функції $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Розв'язання. [5.4.2.]^①

[Знаходимо точки перетину прямої з осями координат і заповнюємо таблицю^②.]

x	0	2
y	1	0



[Зображуємо пряму.]

Рис. до зад 5.1

Коментар. ① Оскільки графіком лінійної функції є пряма, то, для того щоб зобразити її, достатньо вибрати будь-які дві різні точки на цій прямій. Скажімо, точки перетину прямої з осями координат $A(0; y_1), B(x_2; 0)$. Для цього покладають, спершу $x = 0$ і знаходять y_1 , потім — $y = 0$ і знаходять x_2 з лінійного рівняння.

② Покладаючи $x = 0$, маємо $y_1 = 1$.

Покладаючи $y = 0$, маємо $0 = -\frac{1}{2}x_2 + 1 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

5.2. Розв'язати рівняння $2x - 4 = 0$.

Розв'язання. [5.4.3.]

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2.$$

$$x = 2.$$

5.3.1. Розв'язати нерівність $2x > 8$.

Розв'язання. [5.4.3.]

$$2x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{2} \Leftrightarrow x > 4.$$

$$x \in (4; +\infty).$$

5.3.2. Розв'язати нерівність $-3x \geq 15$.

Розв'язання. [5.4.3.]

$$-3x \geq 15 \Leftrightarrow x \leq \frac{15}{-3} \Leftrightarrow x \leq -5.$$

$$x \in (-\infty; -5].$$

Задачі для самостійної роботи**5.4.** Побудуйте графік функції:

1) $y = x + 1$;

2) $y = 3$;

3) $x = -2$;

4) $y = -2x - 4$;

5) $y = |x + 2|$;

6) $y = |x| + 2$;

7) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

5.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x = 75$;

2) $9x = 0$;

3) $\frac{x}{3} = 8$;

4) $3x - 5 = 16$;

5) $1 - 2x = 15$;

6) $\frac{2x + 1}{5} = \frac{x - 4}{7}$.

5.6. Розв'яжіть нерівності:

1) $2x > 22$;

2) $7x \leq 21$;

3) $-3x > 15$;

4) $\frac{x - 1}{2} < 2$;

5.7. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x + 1| = 4$;

2) $|5x + 2| = -2$;

3) $2x + |x - 3| = 8$;

4) $5x + |x| = -48$;

5) $|x + 1| = |x - 5|$;

6) $|x - 1| + |x + 2| = 3$;

7) $|x| + |x - 1| = 0$;

8) $|x| + |x - 1| = x$.

5.8. Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x - 3| < 2$;

2) $|3x + 2| > 3$;

3) $|x + 1| > -x$;

4) $|2x - 5| \leq x$;

5) $|x| + |x - 1| \leq 1$;

6) $|x| - |x - 1| < 2$.

Відповіді**5.5.** 1) 25; 2) 0; 3) 24; 4) 7; 5) -7; 6) -3.**5.6.** 1) $(11; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3]$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; 5)$.

5.7. 1) $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; 2) $\emptyset$; 3) $\left\{\frac{11}{3}\right\}$; 4) $\{2\}$; 5) $\emptyset$; 6) $[-2; 1]$.

5.8. 1) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{5}{3}; 5\right]$; 5) $[0; 1]$; 6) $\mathbb{R}$.

6. Квадратична функція

Навчальні задачі

6.1.1. Розв'язати рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Розв'язання. [5.5.7.]

[Крок 1. Виписуємо коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.]

$$a = 1, b = -3, c = -4.$$

[Крок 2. Знаходимо дискримінант квадратного рівняння.]

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25.$$

[Крок 3. Аналізуємо наявність чи відсутність коренів. Якщо корені є, знаходимо їх за формулою [5.5.4.]

Оскільки дискримінант $D > 0$, то квадратне рівняння має два різних корені:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = 4, \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = -1. \end{cases}$$

$$x_1 = 4, x_2 = -1.$$

6.1.2. Розв'язати рівняння $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Розв'язання. [5.5.7.]

$$a = 9, b = -12, c = 4.$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Оскільки дискримінант $D = 0$, то квадратне рівняння має два рівні корені [один двократний корінь]:

$$x_1 = x_2 = \frac{12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3}.$$

6.1.3. Розв'язати рівняння $x^2 - x + 1 = 0$.

Розв'язання. [5.5.7.]

$$a = 1, b = -1, c = 1.$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

Оскільки дискримінант $D < 0$, то квадратне рівняння не має дійсних коренів. Розв'язків немає.

6.2.1. Розв'язати за допомогою теореми Вієта квадратне рівняння

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Розв'язання. [5.5.6.]

[Записуємо співвідношення теореми Вієта і підбираємо розв'язки системи.]

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3.$$

6.2.2. Розв'язати за допомогою теореми Вієта квадратне рівняння

$$x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Розв'язання. [5.5.6.]

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -6; \\ x_1 \cdot x_2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$

$$x_1 = -1, x_2 = -5.$$

6.2.3. Розв'язати за допомогою теореми Вієта квадратне рівняння

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Розв'язання. [5.5.6.]

[Ділимо рівняння на старший коефіцієнт.]

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2}; \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}.$$

6.3. Розкласти на множники тричлен $16x^2 + 15x - 1$.

Розв'язання. [5.5.5.]

[Крок 1. Знаходимо корені квадратного рівняння.]

$$a = 16, b = 15, c = -1.$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-1) = 225 + 64 = 289 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{32} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{16}, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

[Крок 2. Розкладаємо многочлен на множники.]

$$16x^2 + 15x - 1 = 16 \left(x - \frac{1}{16} \right) (x + 1) = (16x - 1)(x + 1).$$

6.4. Скоротити дріб $\frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 5x + 4}$.

Розв'язання. [5.5.5.]

[Розкладаємо многочлени в чисельнику і знаменнику дроби на множники.]

$$2x^2 + 7x - 4 = 0.$$

$$a = 2, b = 7, c = -4.$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 4).$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

$$a = 1, b = 5, c = 4.$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4).$$

[Підставляємо розкладені многочлени і скорочуємо дріб.]

$$\frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \cancel{(x + 4)}}{(x + 1) \cancel{(x + 4)}} = \frac{2x - 1}{x + 1}.$$

6.5.1. Вилучити повний квадрат з многочлена $x^2 - 4x + 5$.

Розв'язання. [5.5.3.]

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 2^2 + 5 = (x - 2)^2 + 1.$$

6.5.2. Вилучіть повний квадрат з многочлена $-2x^2 - 9x + 5$.

Розв'язання. [5.5.3.]

$$\begin{aligned}
 -2x^2 - 9x + 5 &= -2 \left(x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{5}{2} \right) = \\
 &= -2 \left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{9}{4}x + \frac{9^2}{4^2} \right) - \frac{5}{2} - \frac{81}{16} \right) = -2 \left(x + \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{121}{8}.
 \end{aligned}$$

6.6.1. Розв'язати нерівність $x^2 - 6x + 8 < 0$.

Розв'язання. [5.5.7.]

[Крок 1. Знаходимо корені квадратного тричлена.]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

[Крок 2. Наносимо на числову вісь знайдені корені і вилучаємо їх.]

[Крок 3. Визначаємо знак многочлена в кожному з інтервалів, на які розбивають корені рівняння числову вісь, проводячи хвилясту криву.]^①

[Крок 4. Записуємо відповідь.]^②

$x \in (2; 4)$.

Коментар. ① «Змійку» запускають праворуч від найбільшого кореня:

1) **зверху**, якщо старший коефіцієнт многочлена додатний;

2) **знизу**, якщо старший коефіцієнт многочлена від'ємний.

② На тих проміжках, де крива проходить:

1) **вище** числової прямої, виконано нерівність $f(x) > 0$;

2) **нижче** числової прямої, виконано нерівність $f(x) < 0$.

Оскільки нерівності строгі, то точки $x = 2$ та $x = 4$ не включаємо у відповідь.

6.6.2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Розв'язання. [5.5.7.]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

[Оскільки нерівності нестрогі, то точки $x = 1$ та $x = 3$ включаємо у відповідь].

$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

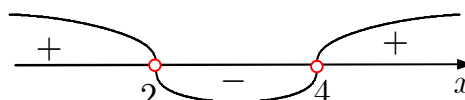


Рис. до зад 6.6.1



Рис. до зад 6.6.2

6.7. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції

$$y = x^2 + 4x + 5.$$

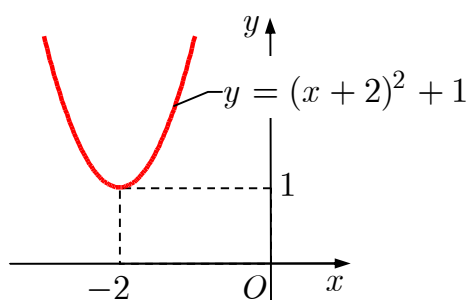
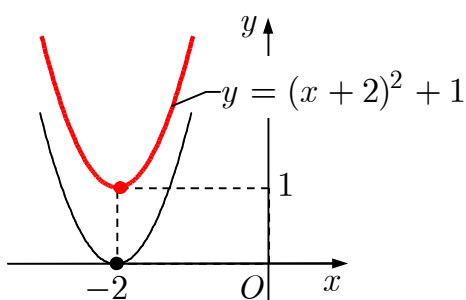
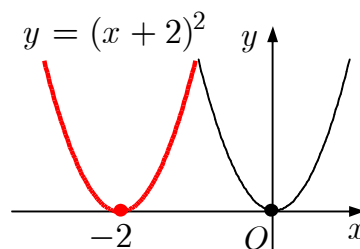
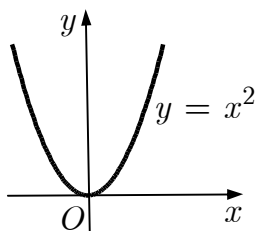
Розв'язання. [5.5.7, 5.15.1, 5.15.2.]

[Перетворюємо квадратичну функцію, вилучаючи повний квадрат.]

$$y = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1.$$

Графік заданої функції дістанемо з графіка функції $y = x^2$ перенесенням ліворуч на 2 вздовж осі Ox і на 1 вгору вздовж осі Oy :

$$y = x^2 \rightarrow y = (x + 2)^2 \rightarrow y = (x + 2)^2 + 1.$$



6.8. Знайти множину значень функції $y = x^2 + 4x + 5$.

Розв'язання. [5.5.1]

[Вилучаємо повний квадрат у квадратичного многочлені.]

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1.$$

Для всіх x правдиві нерівності:

$$(x + 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + 1 \geq 1.$$

Множина значень функції $E(y) = [1; +\infty)$.

Задачі для самостійної роботи

6.9. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$;

2) $-x^2 - 5x = 0$;

3) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

4) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

5) $x^2 + 4x + 5 = 0$;

6) $2x^2 + x - 3 = 0$;

7) $x^2 - 5|x| - 24 = 0$;

8) $x^2 + |x + 1| = 1 - 2x$.

6.10. Розкладіть многочлен на множники:

1) $x^2 - 5x + 6$;

2) $x^2 + 8x + 15$;

3) $6x^2 - 5x - 6$;

4) $10x^2 - 17x + 3$;

5) $5x^2 + 23x - 10$;

6) $7x^2 - 8x + 1$.

6.11. Вилучіть повний квадрат двочлена:

1) $x^2 - 4xy + 4y^2$;

2) $x^2 + 2x - 10$;

3) $x^2 - 4x + 9$;

4) $2x^2 + 4x + 9$;

5) $4x^2 - 3x + 6$;

6) $2x^2 + 3x - 1$.

6.12. Розв'яжіть нерівності:

1) $x^2 \leq 4$;

2) $x^2 > 16$;

3) $(x - 1)^2 > 0$;

4) $(x + 2)^2 \leq 0$;

5) $(x - 1)(x - 4) > 0$;

6) $(x + 3)(5 - x) \geq 0$;

7) $x^2 - |x| - 2 \geq 0$;

8) $x^2 - 3|x| + 2 < 0$;

9) $|x^2 - 3x| < 2$;

10) $|2x^2 - 12x + 13| \geq 3$.

6.13. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2 - 4}{7a + 14}$;

2) $\frac{y^2 - 49}{y^2 + 5y - 14}$;

3) $\frac{7 + 6c - c^2}{21 - 3c}$;

4) $\frac{5a - a^2}{5 + 34a - 7a^2}$.

6.14. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = x^2 - 2x + 2$;

2) $y = -x^2 - 6x + 5$.

6.15. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = -2x^2$;

2) $y = x^2 - 4$;

3) $y = -(x - 1)^2$;

4) $y = x^2 + 6x$;

5) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

6) $y = |x^2 - 2x - 8|$;

Відповіді

6.9. 1) ± 3 ; 2) $0; -5$; 3) $2; 4$; 4) 2 ; 5) $\emptyset$; 6) $-\frac{3}{2}; 1$; 7) $\{-8; 8\}$; 8) $\{-2; 0\}$.

6.10. 1) $(x-2)(x-3)$; 2) $(x+3)(x+5)$; 3) $6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$; 4) $10\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$;
5) $5\left(x+5\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)$; 6) $7\left(x-1\right)\left(x-\frac{1}{7}\right)$.

6.11. 1) $(x-2y)^2$; 2) $(x+1)^2-11$; 3) $(x-2)^2+5$; 4) $2(x+1)^2+7$; 5) $4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{87}{16}$;
6) $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$.

6.12. 1) $[-2; 2]$; 2) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; 3) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; 4) $\{-2\}$; 5) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$; 6) $[-3; 5]$;
7) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 8) $(-2; -1) \cup (1; 2)$; 9) $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$;
10) $(-\infty; 1] \cup (2; 4] \cup (5; +\infty)$.

6.13. 1) $\frac{a-2}{7}$; 2) $\frac{y-7}{y-2}$; 3) $\frac{c+1}{3}$; 4) $\frac{a}{7a+1}$. **6.14.** 1) $E(y) = [1; +\infty)$; 2) $E(y) = (-\infty; 14]$.

7. Многочлени

Навчальні задачі

7.1.1. Розділити многочлени у стовп-

чик $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Розв'язання.

[Ділити многочлени припиняють тоді, коли степінь остачі стане меншим за степінь дільника.]

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - x - 1 \Big| x - 2 \\ - x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x^2 - x - 1 \\ - 3x^2 - 6x \\ \hline 5x - 1 \\ - 5x - 10 \\ \hline 9 \end{array}$$

[Записуємо відповідь.]

7.1.2. Розділити многочлени у стовп-

чик $\frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} x^5 + x^2 - 1 \Big| x^2 + x + 1 \\ - x^5 + x^4 + x^3 \\ \hline -x^4 - x^3 + x^2 - 1 \\ - -x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 1 \\ - 2x^2 + 2x + 2 \\ \hline -2x - 3 \end{array}$$

$$\frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = x^3 - x^2 + 2 + \frac{-2x - 3}{x^2 + x + 1}.$$

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} =$$

$$= x^2 + 3x + 5 + \frac{9}{x - 2}.$$

Задачі для самостійної роботи

7.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) x^4 - 26x^2 + 25 = 0; & 2) x^4 - 4x^2 - 5 = 0; \\ 3) x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0; & 4) 4x^3 - 13x + 6 = 0. \end{array}$$

7.3. Розв'яжіть нерівності:

$$\begin{array}{ll} 1) (x + 4)^5(x - 1)^4(x - 2)^7 < 0; & 2) (x + 7)^4(x + 6)^5(x - 9)^3 \leq 0; \\ 3) x^4(x + 6)^5(x - 9)^3 \geq 0; & 4) (x + 4)^5(x - 3)^4(x - 2)^7 > 0. \end{array}$$

7.4. Розділіть многочлен на многочлен у стовпчик:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{2x^3 - 5x^2 - 14x + 8}{x - 2}; & 2) \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x - 3}; \\ 3) \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 4}{x^2 - 4x + 4}; & 4) \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 - x + 1}. \end{array}$$

Відповіді

7.2. 1) $\pm 1; \pm 5$; 2) $\pm\sqrt{5}$; 3) $-4; 1; 2$; 4) $-2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$.

7.3. 1) $(-4; 1) \cup (1; 2)$; 2) $\{-7\} \cup [-6; 9]$; 3) $(-\infty; -6] \cup \{0\} \cup [9; +\infty)$;
4) $(-\infty; -4) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

7.4. 1) $2x - x - 16 - \frac{24}{x - 2}$; 2) $2x^2 + 3x - 2 + \frac{2}{x - 3}$; 3) $x^2 + x - 1$;

4) $x^2 + 2x + 4 + \frac{4x - 2}{x^2 - x + 1}$.

8. Степенева функція

Навчальні задачі

8.1. Записати у вигляді степеня (з дробовим або від'ємним показником):

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{a^3}; & 2) \sqrt[3]{a}; \end{array}$$

3) $\sqrt[3]{a^2}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$.

Розв'язання. [5.3.1, 5.3.5.]

1. $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$.

2. $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$.

3. $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$.

4. $\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{1}{a^{5/4}} = a^{-5/4}$.

8.2. Виконати дії:

1) $\sqrt[3]{x^6}$;

2) $\sqrt{x^6}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $\sqrt[3]{x^6} = x^{6/3} = x^2$.

2. $\sqrt{x^6} = |x^{6/2}| = |x^3|$.

8.3. Обчислити:

1) $\sqrt[5]{4^{10}}$;

2) $\sqrt{\frac{4}{25}}$;

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $\sqrt[5]{4^{10}} = 4^{10/5} = 4^2 = 16$.

2. $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

3. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

8.4. Винести множник з під кореня:

1) $\sqrt[5]{2^7}$;

2) $\sqrt{24}$;

3) $\sqrt[4]{2500}$;

4) $\sqrt[3]{a^{11}b^4}$.

Розв'язання. [5.3.6.]

1. $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$.

2. $\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

$$3. \sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 4} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{4} = 5\sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$4. \sqrt[3]{a^{11}b^4} = \sqrt[3]{a^9a^2b^3b} = \sqrt[3]{a^9b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b} = a^3b\sqrt[3]{a^2b}.$$

8.5. Внести множник під корінь:

$$1) 3\sqrt[3]{6};$$

$$2) a^2\sqrt[5]{b}.$$

Розв'язання. [5.3.6.]

$$1. 3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}.$$

$$2. a^2\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}b}.$$

8.6. Спростити вираз:

$$1) 4 \cdot 81^{1/4} + 2^0;$$

$$2) \sqrt[3]{81} - \sqrt{49}\sqrt[3]{24};$$

$$3) \sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3};$$

$$4) \frac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}}.$$

Розв'язання. [5.3.1, 5.3.5, 5.3.6.]

$$1. 4 \cdot 81^{1/4} + 2^0 = 4 \cdot \sqrt[4]{81} + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13.$$

$$2. \sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} - 7\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \\ = 3\sqrt[3]{3} - 7 \cdot 2\sqrt[3]{3} = -11\sqrt[3]{3}.$$

$$3. \sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3} = \sqrt[4]{27a \cdot 3a^3} = \sqrt[4]{3^4a^4} = 3a.$$

$$4. \frac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}} = \sqrt[5]{\frac{192t}{6t^{11}}} = \sqrt[5]{\frac{32}{t^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{t^{10}}} = \frac{2}{t^2}.$$

8.7. Спростити вираз:

$$1) \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}};$$

$$2) \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}.$$

Розв'язання. [4.16.4, 4.16.5, 5.3.6.]

$$1. \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \\ = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2.$$

$$2. \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{(1 - \sqrt{6})^2} = |1 - \sqrt{6}| = \\ = -(1 - \sqrt{6}) = \sqrt{6} - 1.$$

8.8. Розкласти за формулою різниці квадратів:

$$1) x - y;$$

$$2) \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Розв'язання. [4.16.5.]

$$1. x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$2. \sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt[4]{x})^2 - (\sqrt[4]{y})^2 = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}).$$

8.9. Розкласти за формулою різниці (суми) кубів:

1) $x + y$;

2) $1 - \sqrt{a}$.

Розв'язання. [4.16.5.]

1. $x + y = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$.

2. $1 - \sqrt{a} = 1^3 - (\sqrt[6]{a})^3 = (1 - \sqrt[6]{a})(1 + \sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a})$.

8.10.1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x - 6} = \sqrt{9 - 2x}$.

Розв'язання. [5.3.8.]

I спосіб (з перевіркою знайдених коренів).

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - 6} = \sqrt{9 - 2x}; \quad (\sqrt{3x - 6})^2 &= (\sqrt{9 - 2x})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x - 6 &= 9 - 2x \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Перевірка.

Для $x = 3$: $\sqrt{3 \cdot 3 - 6} = \sqrt{3}$; $\sqrt{9 - 2 \cdot 3} = \sqrt{3}$.

$x = 3$ — корінь рівняння.

II спосіб (еквівалентних перетворень).

$$\sqrt{3x - 6} = \sqrt{9 - 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 \geq 0, \\ 3x - 6 = 9 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$x = 3$.

8.10.2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x + 11} = 1 - x$.

Розв'язання. [5.3.8.]

I спосіб (з перевіркою знайдених коренів).

$$\sqrt{x + 11} = 1 - x; \quad (\sqrt{x + 11})^2 = (1 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 11 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

Перевірка.

Для $x = -2$: $\sqrt{-2 + 11} = \sqrt{9} = 3$; $1 - (-2) = 3$.

$x = -2$ — корінь рівняння.

Для $x = 5$: $\sqrt{5 + 11} = \sqrt{16} = 4$; $1 - 5 = -4$.

$x = 5$ не є коренем рівняння.

Отже, $x = -2$.

II спосіб (еквівалентних перетворень).

$$\sqrt{x + 11} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x + 11 \geq 0, \\ (\sqrt{x + 11})^2 = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x + 11 = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x = 5, \Leftrightarrow x = -2. \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = -2.$$

8.11.1. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-1} > 2$.

Розв'язання. [5.3.8.]

$$\sqrt{2x-1} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ (\sqrt{2x-1})^2 > 1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ 2x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$x \in (1; +\infty).$$

8.11.2. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+1} \leq 3$.

Розв'язання. [5.3.8.]

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} \leq 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ (\sqrt{2x+1})^2 \leq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ 2x+1 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; 4\right].$$

8.11.3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6} < -2$.

Розв'язання. [5.3.8.]

Оскільки $\sqrt{x+6} \geq 0$, то початкова нерівність розв'язків не має.

$$x \in \emptyset.$$

8.11.4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-2} \geq -1$.

Розв'язання. [5.3.8.]

Оскільки $\sqrt{x-2} \geq 0$, то початкова нерівність правдива для всіх x з області означення функції $f(x) = \sqrt{x-2}$.

$$D(f) : x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$x \in [2; +\infty).$$

8.12. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції

$$y = \frac{3x+1}{x-1}.$$

Розв'язання. [5.3.3, 5.15.]

[Перетворюємо дробово-лінійну функцію, вилучаючи цілу частину дробу.]

$$y = \frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{3(x - 1) + 2}{x - 1} = 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

Графік заданої функції дістанемо з графіка функції $y = \frac{1}{x}$ розтягуванням у 2 рази вздовж осі Oy , перенесенням на 1 у напрямі осі Ox і на 3 у напрямі осі Oy :

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{2}{x} \rightarrow y = \frac{2}{x - 1} \rightarrow y = 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

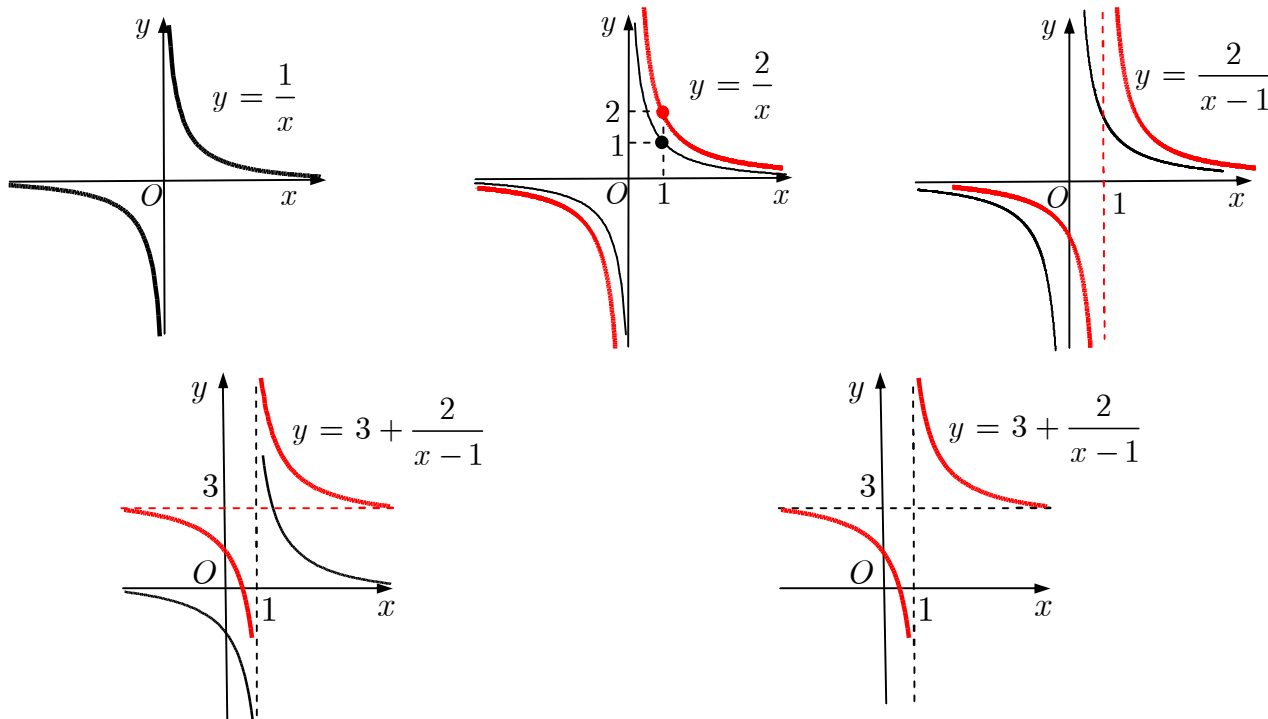


Рис. до зад. 8.12

Задачі для самостійної роботи

8.13. Запишіть у вигляді степеня (з дробовим або від'ємним показником):

1) $\frac{1}{x}$;

2) $\frac{1}{3(x-1)^3}$;

3) $\sqrt[5]{b^4}$;

4) $\frac{1}{\sqrt[11]{c^2}}$.

8.14. Запишіть у вигляді степеня з основою x :

1) $\left(\frac{x^2}{x^9}\right)^3$;

2) $\left(\frac{x}{x^6}\right)^{-7}$;

$$3) \left(\frac{x^3 \cdot x^4}{x^5} \right)^{-6};$$

$$4) \left(\frac{x^4}{x^{-3}} \right)^{-8};$$

$$5) x^{1/8} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x^5};$$

$$6) x^{8/9} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{x^7};$$

$$7) \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}};$$

$$8) \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^{-11}}}.$$

8.15. Знайдіть значення числових виразів:

$$1) \sqrt{20} \cdot \sqrt{5};$$

$$2) \sqrt[3]{135} \cdot \sqrt[3]{25};$$

$$3) \frac{\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}};$$

$$4) \sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}.$$

8.16. Спростіть (всі змінні вважайте додатними):

$$1) \sqrt[4]{x^2};$$

$$2) \sqrt[4]{b^8};$$

$$3) \sqrt{a^2 b^4};$$

$$4) \sqrt{\frac{49a^4}{169b^2}}.$$

8.17. Перетворіть заданий вираз до вигляду $\sqrt[n]{A}$:

$$1) \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2};$$

$$2) \sqrt[4]{3b^3} \cdot \sqrt{3b};$$

$$3) \sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[6]{4ab};$$

$$4) \sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a};$$

$$5) \sqrt[12]{a^2 b^3} : \sqrt[6]{ab^4};$$

$$6) \sqrt{\sqrt[3]{x}};$$

$$7) \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2m^4 n^8}};$$

$$8) \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}.$$

8.18. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{125};$$

$$2) \sqrt[3]{54};$$

$$3) \sqrt{a^5 b};$$

$$4) \sqrt[3]{x^{14}}.$$

8.19. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 2\sqrt{5};$$

$$2) 5\sqrt[3]{2};$$

$$3) 3\sqrt[3]{4};$$

$$4) x^2 \sqrt[5]{y}.$$

8.20. Спростіть вирази:

1) $\sqrt{(-41)^2};$

2) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2};$

3) $(1 - \sqrt{6})^2(1 + \sqrt{6})^2;$

4) $\left(\sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}}\right)^2.$

8.21. Виконайте дії:

1) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy};$

2) $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b});$

3) $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}};$

4) $\frac{x - 4y}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}};$

5) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y);$

6) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b});$

7) $\frac{m - n}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}};$

8) $\frac{k + l}{\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{l}}.$

8.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x - 1} = 2;$

2) $\sqrt{-x} = -2;$

3) $\sqrt[3]{x} = 2;$

4) $2\sqrt[3]{x^3} + 3\sqrt{x^2} = 5;$

5) $\sqrt{x} = \sqrt{2 - x};$

6) $\sqrt{x^2 - 11} = \sqrt{1 - x};$

7) $\sqrt{x} = -x;$

8) $\sqrt{x + 3} = 2x + 5;$

9) $(x^2 - 9)\sqrt{2 - x} = 0;$

10) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0.$

8.23. Розв'яжіть нерівності:

1) $\sqrt{x} \geq 0;$

2) $\sqrt{x} > -1;$

3) $\sqrt{x + 4} \geq 5;$

4) $\sqrt{x - 1} < 3;$

5) $(x - 6)\sqrt{x} \geq 0;$

6) $(x + 1)\sqrt{x - 3} \leq 0;$

7) $\sqrt{x} < x - 6;$

8) $\sqrt{x} > x - 2.$

8.24. Знайдіть область означення функції:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{9 - x^2};$

2) $y = \sqrt{x^2 + x}.$

8.25. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = 2x^3;$

2) $y = -x^3;$

3) $y = (x - 1)^3 + 2$;

4) $y = (x + 2)^2 - 1$;

5) $y = -\sqrt{x}$;

6) $y = \sqrt{-x}$;

7) $y = \sqrt{2 - x}$;

8) $y = -\sqrt{x + 1}$;

9) $y = \sqrt[3]{x + 1}$;

10) $y = \sqrt[3]{1 - x}$;

11) $y = |x^3|$;

12) $y = \sqrt{|x|}$.

Відповіді

8.13. 1) x^{-1} ; 2) $\frac{1}{3}(x - 1)^{-3}$; 3) $b^{4/5}$; 4) $c^{-2/11}$; 8) $a^{-4/5}$.

8.14. 1) x^{-21} ; 2) x^{35} ; 3) x^{-12} ; 4) x^{-56} ; 5) $x, x \geq 0$; 6) x^2 ; 7) $x^{1/2}$; 8) $x^{3/4}$.

8.15. 1) 10; 2) 15; 3) 3; 4) 12.

8.16. 1) $\sqrt{x}$; 2) b^2 ; 3) ab^2 ; 4) $\frac{7a^2}{13b}$.

8.17. 1) $\sqrt[4]{8}$; 2) $\sqrt[4]{27b^5}$; 3) $\sqrt[6]{4a^3b^3}$; 4) $\sqrt[4]{a}$; 5) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; 6) $\sqrt[6]{x}$; 7) $\sqrt[3]{2mn^2}$; 8) $\sqrt[10]{8}$.

8.18. 1) $5\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt[3]{2}$; 3) $a^2\sqrt{ab}$; 4) $x^4\sqrt[3]{x^2}$.

8.19. 1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt[3]{250}$; 3) $\sqrt[3]{108}$; 4) $\sqrt[5]{x^{10}y}$.

8.20. 1) 41; 2) $\sqrt{5} - 2$; 3) 25; 4) 22.

8.21. 1) $x + y$; 2) $a^2 - b$; 3) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; 4) $\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$; 5) $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$; 6) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$;
7) $\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}$; 8) $\sqrt[3]{k^2} - \sqrt[3]{kl} + \sqrt[3]{l^2}$.

8.22. 1) 5; 2) $\emptyset$; 3) 8; 4) $\{-5; 1\}$; 5) 1; 6) -4; 7) 0; 8) -2; 9) $\{-3; 2\}$; 10) 16.

8.23. 1) $[0; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $[21; +\infty)$; 4) $[1; 10)$; 5) $\{0\} \cup [6; +\infty)$;
6) $\{-1; 3\}$; 7) $(9; +\infty)$; 8) $[0; 4)$.

8.24. 1) $D(y) = [0; 3]$; 2) $D(y) = (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

9. Показникова та логарифмічна функції**Навчальні задачі****9.1.** Обчислити:

1) $\log_2 8$;

2) $\log_2 \frac{1}{2}$;

3) $\log_{1/2} 1$;

4) $\log_{1/2} \sqrt{2}$;

5) $5^{\log_5 3}$;

6) $10^{\log_{100} 16}$;

7) $\log_3 15 - \log_3 5$;

8) $\log_6 2 + \log_6 3$;

9) $7^{\frac{1}{\log_5 7}}$;

10) $\log_2 \log_3 \sqrt{3\sqrt{3}}$.

Розв'язання. [5.7.1, 5.7.5.]

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$.

2. $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$.

3. $\log_{1/2} 1 = 0$.

4. $\log_{1/2} \sqrt{2} = \log_{2^{-1}} 2^{1/2} = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2}$.

5. $5^{\log_5 3} = 3$.

6. $10^{\log_{100} 16} = 10^{\frac{1}{2} \log_{10} 16} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.

7. $\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = \log_3 3 = 1$.

8. $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$.

9. $7^{\frac{1}{\log_5 7}} = 7^{\log_7 5} = 5$.

$$10. \log_2 \log_3 \sqrt{3\sqrt{3}} = \log_2 \log_3 \left(3^{1+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \log_3 3^{\frac{3}{4}} = \log_2 \frac{3}{4} =$$

$$= \log_2 3 - \log_2 4 = \log_2 3 - 2.$$

9.2. Злогарифмувати $\lg \frac{3a^2 \sqrt[3]{b}}{c^4(a+b)}$, де $a > 0, b > 0, c > 0$.

Розв'язання. [5.7.5.]

$$\lg \frac{3a^2 \sqrt[3]{b}}{c^4(a+b)} = \lg \left(3a^2 \sqrt[3]{b} \right) - \lg \left(c^4(a+b) \right) =$$

$$= \lg 3 + \lg a^2 + \lg b^{1/3} - \lg c^4 - \lg(a+b) =$$

$$= \lg 3 + 2 \lg a + \frac{1}{3} \lg b - 4 \lg c - \lg(a+b).$$

9.3. Зпотенціювати $2^{\log_2 a + 2 \log_2 b - 3 \log_2 c}$.

Розв'язання. [5.7.5.]

$$2^{\log_2 a + 2\log_2 b - 3\log_2 c} = 2^{\log_2 a + \log_2 b^2 - \log_2 c^3} = 2^{\log_2 ab^2 - \log_2 c^3} = 2^{\log_2 \frac{ab^2}{c^3}} = \frac{ab^2}{c^3}.$$

9.4.1. Розв'язати рівняння $7^x = 5$.

Розв'язання. [5.7.8.]

$$7^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_7 5.$$

$$x = \log_7 5.$$

9.4.2. Розв'язати рівняння $6^{x+2} = 6^{x^2}$.

Розв'язання.

$$6^{x+2} = 6^{x^2} \Leftrightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

9.5.1. Розв'язати рівняння $\log_3 x = 2$.

Розв'язання. [5.7.9.]

$$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9.$$

$$x = 9.$$

9.5.2. Розв'язати рівняння $\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 7x - 7, \\ 7x - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 6 \Leftrightarrow x = 6, \\ x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x = 6.$$

9.6.1. Розв'язати нерівність $2^x < 5$.

Розв'язання. [5.7.8.]

$$2^x < 5 \Leftrightarrow x < \log_2 5.$$

$$x \in (-\infty; \log_2 5).$$

9.6.2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$.

Розв'язання. [5.7.8.]

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq \log_{1/2} 4 \Leftrightarrow x \geq -2 \log_2 2 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

$$x \in [-2; +\infty).$$

9.6.3. Розв'язати нерівність $3^x \leq 0$.

Розв'язання. [5.7.8.]

Оскільки $3^x > 0$ для будь-якого x , то нерівність не має розв'язків.

Отже, $x \in \emptyset$.

9.6.4. Розв'язати нерівність $2^x > -2$.

Розв'язання. [5.7.8.]

Оскільки $2^x > 0$ для будь-якого x , то нерівність правдива для будь-якого x .

Отже, $x \in (-\infty; +\infty)$.

9.7.1. Розв'язати нерівність $\log_2 x > -2$.

Розв'язання. [5.7.9.]

$$\log_2 x > -2 \Leftrightarrow x > 2^{-2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

$$x \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

9.7.2. Розв'язати нерівність $\log_3 x \leq 2$.

Розв'язання. [5.7.9.]

$$\log_3 x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \leq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 9.$$

$$x \in (0; 9].$$

9.7.3. Розв'язати нерівність $\log_{1/2} x > -2$.

Розв'язання. [5.7.9.]

$$\log_{1/2} x > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

$$x \in (0; 4).$$

9.8. Знайти область означення функції $f(x) = \ln(3 - x)$.

Розв'язання. [5.7.3.]

Функція $f(x)$ означена, якщо $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

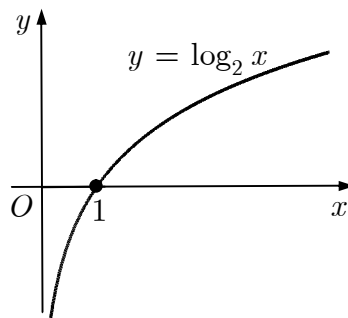
Область означення функції $D(f) = (-\infty; 3)$.

9.10. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = |\log_2 x|$.

Розв'язання. [5.7.3, 5.15.8.]

Графік функції $y = |\log_2 x|$ дістанемо з графіка функції $y = \log_2 x$ так:

- 1) будуємо графік функції $y = \log_2 x$;
- 2) не змінюємо частину графіка, яка розташована над віссю Ox ;
- 3) дзеркально відбиваємо щодо осі Ox частину графіка, яка розташована під віссю Ox .



$$y = \log_2 x \rightarrow y = |\log_2 x|.$$

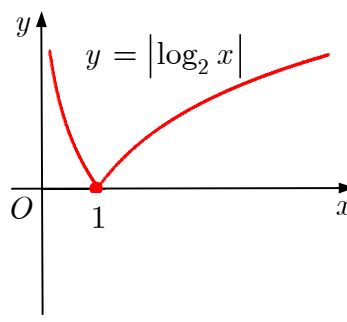
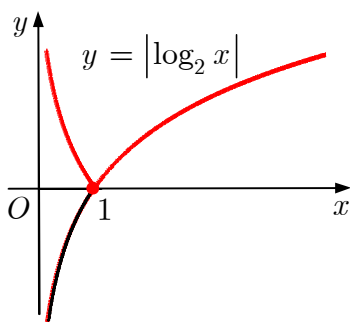


Рис. до зад. 9.10

Задачі для самостійної роботи

9.11. Знайдіть логарифм:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $\log_2 2$; | 2) $\log_2 1$; |
| 3) $\log_2 4$; | 4) $\log_2 64$; |
| 5) $\log_2 \frac{1}{8}$; | 6) $\log_2 \sqrt[3]{2}$. |

9.12. Обчисліть:

- | | |
|---|----------------------------|
| 1) $\log_4 8$; | 2) $\log_{1/3} 27$; |
| 3) $\frac{\log_{\sqrt[3]{7}} 81}{\log_{49} \sqrt{3}}$; | 4) $3^{\log_3 7}$; |
| 5) $9^{\log_3 6-1}$; | 6) $\log_4 2 + \log_4 8$; |

- 7) $\log_3 2 - \log_3 54$; 8) $\log_3 8 + 3 \log_3 \frac{9}{2}$;
 9) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$; 10) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;
 11) $6^{\frac{2}{\log_5 6}}$; 12) $64^{\frac{1}{3 \log_{27} 8}}$;
 13) $\log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8)$.

9.13. Спростіть:

- 1) $\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2 \log_2^2 7}{\log_2 14 + 2 \log_2 7}$;
 2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{18} 19 \cdot \log_{19} 20 \cdot \log_{20} 21$;
 3) $\sqrt{13}^{\log_{13}(27-10\sqrt{2})} + \sqrt{5}^{\log_5(11+6\sqrt{2})}$; 4) $\log_6^2 7 + \frac{\log_8 7}{\log_8 6} - \frac{\log_6 7}{\log_{42} 6}$;

9.14. Злогарифмуйте вираз:

- 1) $\log_2(16a^2b^3)$; 2) $\log_2 \left(\frac{1}{8} a \sqrt{b^7} \right)$;
 3) $\log_2(48a\sqrt{a} \cdot b^4)$; 4) $\log_2 \frac{b^3}{4a^5}$.

9.15. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2^x = 1$; 2) $5^x = 0$;
 3) $2^x = 5$; 4) $4^{2x-3} = 0,5$;
 5) $4^{x^2} = 4^{x+2}$; 6) $2^x + 2^{x+5} = 264$;
 7) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$; 8) $7^{2x+1} + 4 \cdot 21^x - 3^{2x+1} = 0$.

9.16. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_2 x = 5$; 2) $\log_2(2x - 1) = 4$;
 3) $\log_9(x^2 - 5) = \log_9(1 - x)$; 4) $\log_3 \log_2 \log_{1/3}(x - 1) = 0$;
 5) $\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 = 0$; 6) $x^{5x-1} = 1$.

9.17. Розв'яжіть нерівність:

1) $5^{x-1} < 25;$

2) $6^{2x} \leq \frac{1}{36};$

3) $3^x \geq 9;$

4) $2^x > 64;$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} < 27;$

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geq 4;$

7) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0;$

8) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \geq 0.$

9.18. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_5(3 - 8x) > 0;$

2) $\log_{1/2}(7 - 3x) \geq 0;$

3) $\log_2(x - 3) \leq 3;$

4) $\log_{1/5}(3 - 2x) > -1;$

5) $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3);$

6) $\log_{1/7}(4x - 3) \geq \log_{1/7}(x + 3);$

7) $\lg^2 x - 4 \lg x + 3 > 0;$

8) $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 \leq 0.$

9.19. Знайдіть область означення функції:

1) $y = \frac{1}{\log_5(x - 6)};$

2) $y = \frac{1}{\log_3(x + 4)}.$

9.20. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1;$

2) $y = \log_2(x + 1);$

3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1};$

4) $y = \log_{1/3}(2x - 3);$

5) $y = 2^{|x|};$

6) $y = 1 - \log_3 x;$

7) $y = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|;$

8) $y = \log_2(|x| - 1);$

9) $y = 3^{\log_3 x};$

10) $y = |\log_2(x - 1)|;$

11) $y = 3^{\log_3 |x|};$

12) $y = \log_2 |x - 1|.$

Відповіді

9.11. 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 6; 5) -3; 6) $\frac{1}{3}$.

9.12. 1) $\frac{3}{2}$; 2) -3; 3) 48; 4) 7; 5) 4; 6) 2; 7) -3; 8) 6; 9) 3; 10) $-\frac{1}{3}$; 11) 25; 12) 9; 13) 0.

9.13. 1) 1; 2) 1; 3) $\log_2 21$; 4) 1; 5) 8; 6) -4; 7) 0; 8) 0.

9.14. 1) $4 + 2\log_2 a + 3\log_2 b$; 3) $-3 + \log_2 a + \frac{7}{2}\log_2 b$; 5) $4 + \log_2 3 + \frac{3}{2}\log_2 a + 4\log_2 b$;
7) $3\log_2 b - 5\log_2 a - 2$.

9.15. 1) 0; 3) $\log_2 5$; 5) $\{-1; 2\}$; 7) 1.

9.16. 1) 32; 2) $\frac{17}{2}$; 3) -3; 4) $\frac{10}{9}$; 5) $\left\{\frac{1}{2}; 8\right\}$; 6) $\left\{\frac{1}{5}; 1\right\}$.

9.17. 1) $(-\infty; 3)$; 2) $(-\infty; -1]$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $(6; +\infty)$; 5) $(-1; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0)$; 7) $(1; 2)$;
8) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

9.18. 1) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; 2) $\left[2; \frac{7}{3}\right]$; 3) $(3; 11]$; 4) $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$; 5) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 6) $\left(\frac{3}{4}; 2\right]$;

7) $(-\infty; 0) \cup (1000; +\infty)$; 8) $[3; 9]$.

9.19. 1) $(6; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $D(y) = (-4; -3) \cup (-3; +\infty)$.

10. Тригонометричні та обернені тригонометричні функції**Навчальні задачі**

10.1. Визначити знак $\sin 2$, $\cos 2$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{ctg} 2$.

Розв'язання. [5.8.2–5.8.6, 5.10.7.]

Оскільки $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то точка P_2 одиничного кола лежить у 2-й чверті.

$$\sin 2 > 0, \cos 2 < 0,$$

$$\operatorname{tg} 2 = \frac{\sin 2}{\cos 2} < 0, \operatorname{ctg} 2 = \frac{\cos 2}{\sin 2} < 0.$$

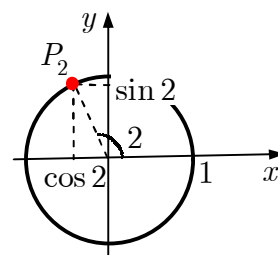


Рис. до зад 10.1

10.2. Знайти $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. [5.10.5, 5.8.6, 5.10.7.]

Точка P_α одиничного кола лежить у 3-чверті, отже $\cos \alpha < 0$ і

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{4}.$$

10.3. Зведіть до функції гострого кута:

1) $\sin \frac{17\pi}{3}$;

2) $\cos 735^\circ$;

3) $\operatorname{tg}(-1759^\circ)$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4}$.

5) $\cos \frac{2\pi}{3}$;

6) $\sin \frac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. [5.10.3, 5.2.5.]

1. $\sin \frac{17\pi}{3} = \sin \left(3 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos 735^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$.

3. $\operatorname{tg}(-1759^\circ) = \operatorname{tg}(41^\circ - 10 \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} 41^\circ$.

4. $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{ctg} \left(2 \cdot \pi - \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1$.

5. $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

6. $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

10.4. Спростити вираз
$$\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}.$$

Розв'язання. [5.10.3.]

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{(-\operatorname{tg} \alpha)(-\cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha (-\operatorname{tg} \alpha)(-\operatorname{ctg} \alpha)} = 1.$$

10.5. Спростити вираз:

1) $\frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$; 2) $\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

Розв'язання. [5.10.7.]

1.
$$\frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2 \sin(32^\circ + 28^\circ)}{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} =$$
$$= 2 \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$2. \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha.$$

10.6. Подати $\cos x \cos 3x$ як суму тригонометричних функцій.

Розв'язання. [5.10.10.]

$$\begin{aligned} \cos x \cos 3x &= \frac{1}{2} (\cos(x + 3x) + \cos(x - 3x)) = \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos(-2x) = \\ &= \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x. \end{aligned}$$

10.7.1. Перетворити вираз $\sin x + \cos x$, уводячи допоміжний кут.

Розв'язання. [5.10.12.]

I спосіб (перетворення у синус суми).

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{1^2 + 1^2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

II спосіб (перетворення у косинус різниці).

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{1^2 + 1^2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

10.7.2. Перетворити вираз $\sin x - 3 \cos x$, у синус різниці, вводячи допоміжний кут.

Розв'язання. [5.10.12.]

[Крок 1. Визначаємо амплітуду.]

$$A = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

[Крок 2. Множимо і ділимо вираз на амплітуду, перетворюємо його.]

$$\sin x - 3 \cos x = \sqrt{10} \left(\frac{\sin x - 3 \cos x}{\sqrt{10}} \right) = \sqrt{10} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \cos x \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

[Крок 3. Визначаємо допоміжний кут із системи.]^①

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \\ \sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

[Крок 4. Записуємо перетворену формулу.]

$$\sin x - 3 \cos x = \sqrt{10} \sin \left(x - \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

Коментар. ① Оскільки $\cos \varphi > 0$ та $\sin \varphi > 0$, то кут φ лежить у першій чверті.

10.8. Обчислити:

$$1) \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right);$$

$$2) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{2});$$

$$3) \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$4) \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right);$$

$$5) \arcsin(\sin 3);$$

$$6) \arccos(\cos 4).$$

Розв'язання. [5.9.10.]

$$1. \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$2. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

$$3. \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{8}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$4. \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right) = -\frac{\pi}{5}, \text{ оскільки } \left(-\frac{\pi}{5} \right) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$5. \arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3, \text{ оскільки } \pi - 3 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$6. \arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4, \text{ оскільки } 2\pi - 4 \in [0; \pi].$$

10.9. Знайти $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{3}{5} \right)$.

Розв'язання. [5.9.5.]

Нехай $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$.

Розглянемо прямокутний трикутник з гіпотенузою $c = 5$ і катетом $a = 3$, який лежить проти кута α .

За Піфагоровою теоремою маємо

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

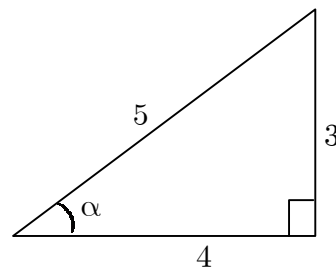


Рис. до зад 10.9

10.10.1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. [5.11.1.]

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.10.2. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Розв'язання. [5.11.1.]

$$\sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.10.3. Розв'язати рівняння $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Розв'язання. [5.11.1.]

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

10.11.1. Розв'язати рівняння $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. [5.11.2.]

$$\begin{aligned} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow x = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n \Leftrightarrow x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.11.2. Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. [5.11.2.]

$$\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.11.3. Розв'язати рівняння $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Розв'язання. [5.11.2.]

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + \pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.12. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання. [5.11.3.]

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.13. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Розв'язання. [5.11.4.]

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x = -1 &\Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10.14. Розв'язати нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. [5.11.1.]^①

[Розв'язуємо нерівність, будуючи графіки $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$.] $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

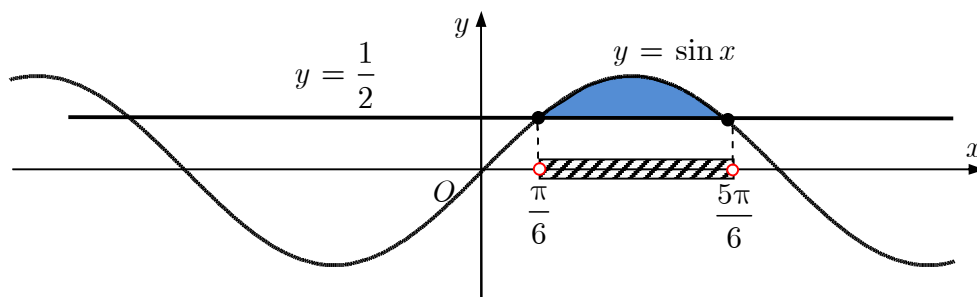


Рис. до зад 10.14

Нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ правдива для $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Ураховуючи періодичність синуса, маємо

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Коментар. ① Задачу можна розв'язати за допомогою графіка $y = \sin x$ або на одиничному колі.

10.15. Розв'язати нерівність $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. [5.11.2.]^①

[Розв'язуємо нерівність за допомогою одиничного кола.]

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Нерівність $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ правдива для $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Ураховуючи періодичність косинуса, маємо

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

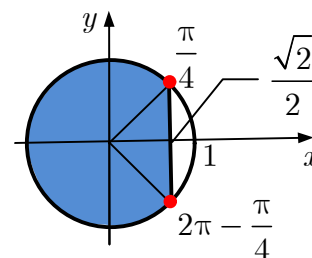


Рис. до зад 10.15

10.16. Знайти область означення функції $f(x) = \arcsin \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. [5.9.6, 5.11.3.]

Функція $f(x)$ означена, якщо $|\operatorname{tg} x| \leq 1$ і $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$|\operatorname{tg} x| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1, \\ \operatorname{tg} x \geq -1. \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$D(f) : x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

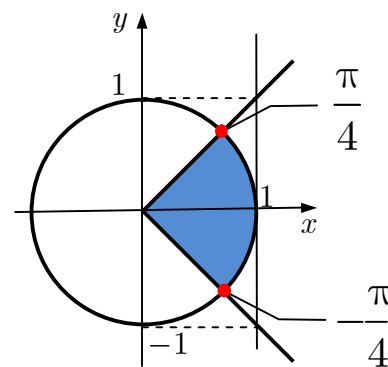


Рис. до зад. 10.16

10.17. Знайти множину значень функції $y = 11 \cos x$.

Розв'язання. [5.8.8.]

Для всіх x правдиві нерівності

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -11 \leq 11 \cos x \leq 11.$$

Множина значень функції $E(y) = [-11; 11]$.

10.18.1. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = 3 \sin 2x$.

Розв'язання. [5.8.7, 5.15.3, 5.15.4.]

Графік заданої функції дістанемо з графіка функції $y = \sin x$ стисканням у 2 рази вздовж осі Ox і розтягуванням у 3 рази вздовж осі Oy .

$$y = \sin x \rightarrow y = \sin 2x \rightarrow y = 3 \sin 2x.$$

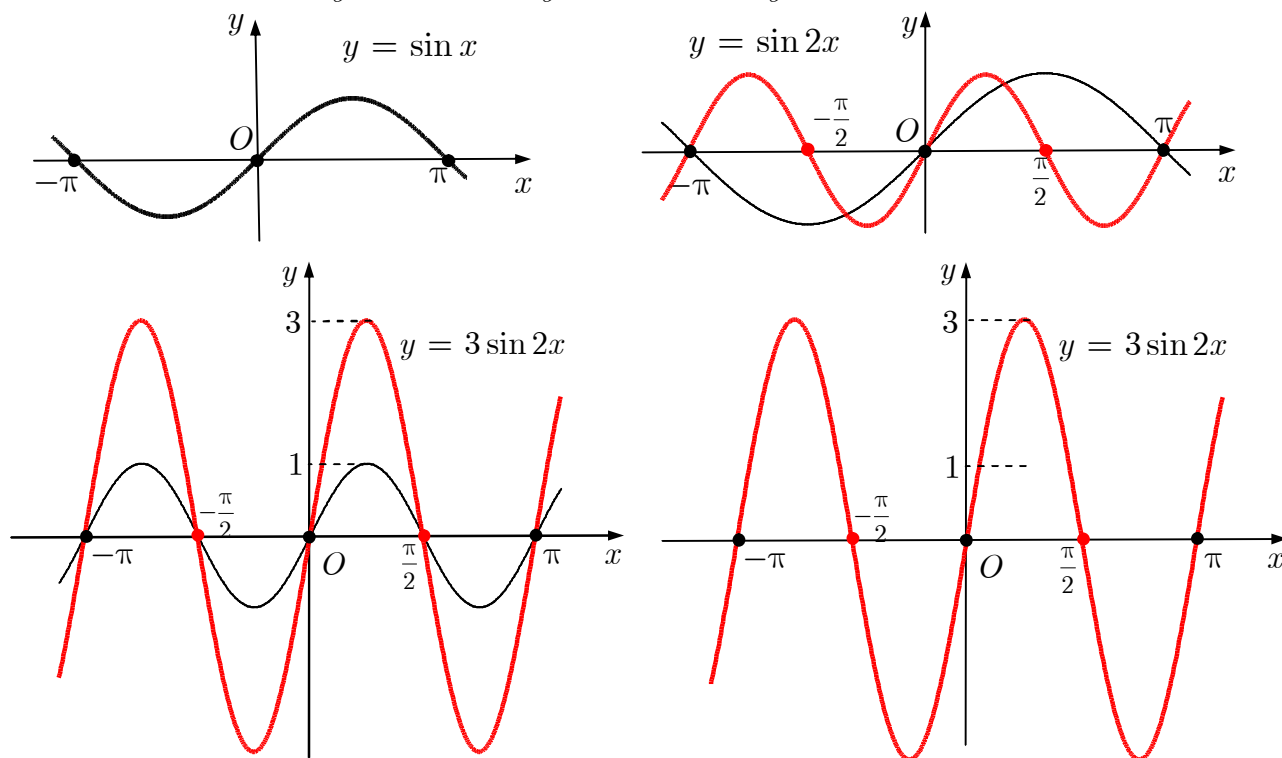


Рис. до зад. 10.18.1

10.18.2. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Розв'язання. [5.8.9, 5.15.1, 5.15.3.]

[Перетворюємо аргумент функції, щоб дізнатись про «справжній» зсув.]

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Графік заданої функції дістанемо з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ розтяганням у 2 рази вздовж осі Ox і перенесенням на $\frac{\pi}{2}$ вздовж осі Ox .

$$y = \operatorname{tg} x \rightarrow y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \rightarrow y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

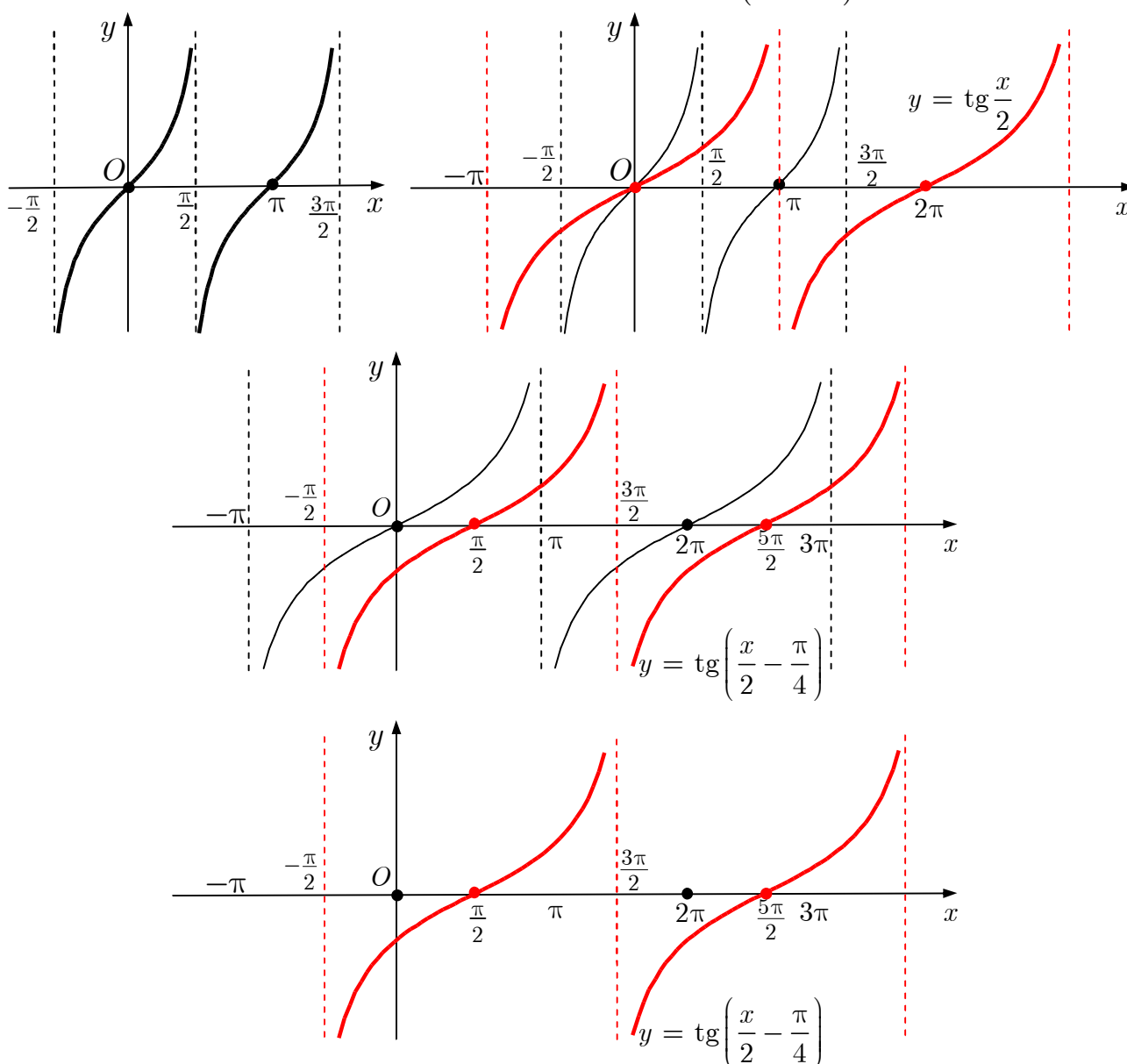


Рис. до зад. 10.18.2

10.18.3. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік функції $y = -\arcsin|x|$.

Розв'язання. [5.9.1, 5.15.5, 5.15.7.]

Графік функції $y = \arcsin|x|$ дістанемо з графіка функції $y = \arcsin x$ так:

1) будуємо частину графіка $y = \arcsin x, x \geq 0$;

2) доповнюємо побудовану криву її дзеркальним відбитком щодо осі Oy .

Графік функції $y = -\arcsin|x|$ дістанемо з графіка функції $y = \arcsin|x|$ дзеркальним відбиттям щодо осі Ox .

$$y = \arcsin x, x \geq 0 \rightarrow y = \arcsin|x| \rightarrow y = -\arcsin|x|.$$

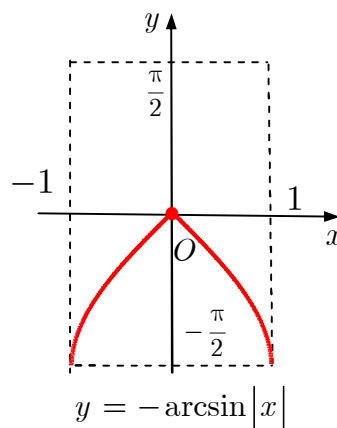
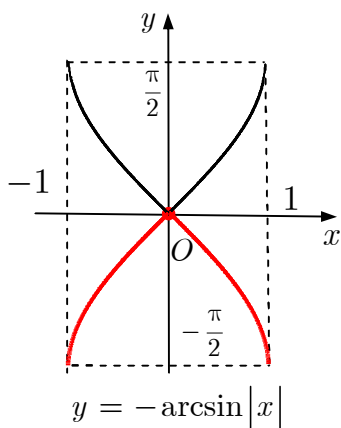
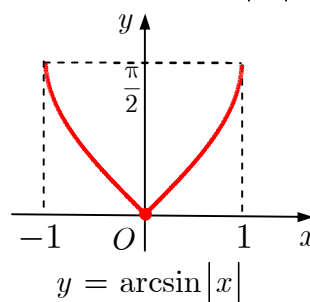
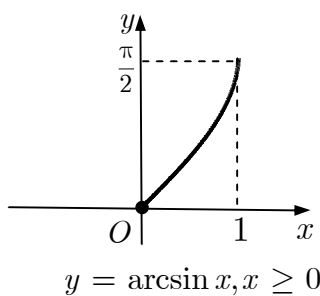


Рис. до зад. 10.18.3

Задачі для самостійної роботи

10.19. Виразіть у радіанах кут:

1) 20° ;

2) 45° ;

3) 135° ;

4) 240° .

10.20. Виразіть у градусах кут:

1) $\frac{\pi}{18}$;

2) $\frac{\pi}{4}$;

3) $\frac{2\pi}{3}$;

4) $\frac{7\pi}{6}$.

10.21. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right);$

2) $\cos(2\pi - t);$

3) $\sin(\pi - t);$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right);$

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right);$

6) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha);$

7) $\frac{\sin(\pi - t) \cos(2\pi - t)}{\operatorname{tg}(\pi - t) \cos(\pi - t)}.$

10.22. Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\cos \frac{5\pi}{3};$

2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right);$

3) $\sin(-7\pi) + 2 \cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4};$

4) $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ.$

10.23. Спростіть:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta;$

2) $\sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta);$

3) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \cos \alpha;$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right);$

5) $\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta;$

6) $\sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta).$

10.24. Обчисліть:

1) $\cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8};$

2) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4};$

3) $\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 73^\circ;$

4) $\frac{\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 20^\circ}.$

10.25. Спростіть:

1) $\frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{1 - 2 \cos^2 \alpha};$

2) $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t;$

3) $\cos^2 t - \cos 2t;$

4) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ};$

5) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ};$

6) $\frac{\sin t}{2 \cos^2 \frac{t}{2}};$

$$7) \frac{\cos t}{\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}};$$

$$8) \sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{2} \sin x, x \in [0; 2\pi]; \quad 9) \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x \in (-\pi; \pi).$$

10.26. Обчисліть:

$$1) 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ;$$

$$2) \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$$

$$3) 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8};$$

$$4) \frac{10 \sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}.$$

10.27. Перетворіть на добуток:

$$1) \sin 3t - \sin t;$$

$$2) \cos 6t + \cos 4t.$$

10.28. Перетворіть на суму:

$$1) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta);$$

$$2) \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right);$$

$$3) \sin \beta \cos(\alpha + \beta).$$

10.29. Перетворіть вираз до вигляду $A \sin(\omega t + \varphi)$, $A > 0$:

$$1) \sin 5x - \cos 5x;$$

$$2) \sqrt{3} \sin x + \cos x;$$

$$3) 12 \cos x - 5 \sin x;$$

$$4) -\sin x - \cos x.$$

10.30. Знайдіть значення інших тригонометричних функцій кута α , якщо:

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$2) \sin \alpha = -\frac{1}{8}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

$$3) \cos \alpha = -\frac{2}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$4) \cos \alpha = \frac{4}{5}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$6) \operatorname{ctg} \alpha = 3, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

10.31. Обчисліть:

$$1) \arcsin\left(2 \cos \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$2) \arccos\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right);$$

$$3) \operatorname{arctg}\left(2 \cos \frac{7\pi}{6}\right);$$

$$4) \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}\right).$$

10.32. Обчисліть:

1) $\sin \left(\arcsin \frac{2}{5} \right);$

2) $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right);$

3) $\sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right);$

4) $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) \right);$

5) $\operatorname{tg} \left(\arccos \left(-\frac{5}{13} \right) \right);$

6) $\operatorname{tg}(\arcsin 0, 6).$

10.33. Обчисліть:

1) $\arcsin(\sin 1, 2\pi);$

2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3, 3\pi);$

3) $\arcsin \sin 6;$

4) $\arccos \cos 11.$

10.34. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x = 0;$

2) $\cos \frac{x}{4} = 0;$

3) $\sin \frac{\pi x}{2} = 1;$

4) $\cos 2x = -1;$

5) $\sin x = \frac{1}{3};$

6) $\operatorname{tg} x = 5;$

7) $\cos \left(5x - \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

8) $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) = -1.$

10.35. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > 0;$

2) $\cos 3x \geq 0;$

3) $\operatorname{tg} 3x < 0;$

4) $\sin x \geq \frac{1}{2};$

5) $\cos x < \frac{1}{9};$

6) $\operatorname{tg} 4x \geq 3;$

7) $\operatorname{ctg} 3x < -4;$

8) $\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{4}{5};$

9) $\cos \frac{x + \pi}{4} \geq \frac{7}{8}.$

10.36. Знайдіть область означення функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \arcsin(5x - 1); & 2) y = \arccos\left(\frac{x - 5}{6}\right); \\ 3) y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right); & 4) y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right). \end{array}$$

10.37. Знайдіть множину значень функції:

$$\begin{array}{ll} 3) y = 5 - \sin 5x; & 4) y = 6 + 2 \cos x; \\ 5) y = \arccos|x|; & 6) y = \arcsin|x|; \\ 7) y = 5^{\sin x}; & 8) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}. \end{array}$$

10.38. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right); & 2) y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1; \\ 3) y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right); & 4) y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1; \\ 5) y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right); & 6) y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \\ 7) y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right); & 8) y = \sin|x|; \\ 9) y = |\cos x|; & 10) y = |\sin x|. \end{array}$$

10.39. За допомогою елементарних перетворень побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{ll} 1) y = 2 \arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{2}; & 2) y = \frac{1}{2} \arccos(x + 2) - \frac{\pi}{4}; \\ 3) y = 3 \operatorname{arctg}(x - 1) + \frac{\pi}{2}; & 4) y = \frac{1}{3} \operatorname{arcctg}(x + 3); \\ 5) y = \sin(\arcsin x); & 6) y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x); \\ 7) y = \arccos(\cos x); & 8) y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x). \end{array}$$

Відповіді

10.19. 1) $\frac{\pi}{9}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$.

10.20. 1) 10° ; 2) 45° ; 3) 120° ; 4) 210° .

10.21. 1) $\cos t$; 2) $\cos t$; 3) $\sin t$; 4) $-\sin t$; 5) $\operatorname{ctg} t$; 6) $-\operatorname{ctg} \alpha$; 7) $\cos t$.

10.22. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{4}$.

10.23. 1) $\sin \beta \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha \cos \beta$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$; 4) $\frac{1}{2} \cos \alpha$; 5) $\sin \alpha \sin \beta$; 6) $\sin \beta \cos \alpha$;

10.24. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1.

10.25. 1) 1; 2) $\sin t$; 3) $\sin^2 t$; 4) $2 \cos 20^\circ$; 5) $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$; 6) $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$; 7) $\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}$;

8) $\sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{2} \sin x, x \in [0; 2\pi]$; 9) $\begin{cases} 2\sqrt{\cos x} \sin x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]. \end{cases}$

10.26. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $5 \operatorname{tg} 40^\circ$. **10.27.** 1) $2 \cos 2t \sin t$; 2) $2 \cos t \cos 5t$.

10.28. 1) $\frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta)$; 3) $\frac{1}{2}(\sin(\alpha + 2\beta) - \sin \alpha)$;

10.29. 1) $\sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$; 3) $13 \sin\left(-x + \operatorname{arctg} \frac{12}{5}\right)$; 4) $\sqrt{2} \sin\left(-x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10.30. 1) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

2) $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3\sqrt{7}}, \operatorname{ctg} \alpha = 3\sqrt{7}$;

3) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{21}}$; 4) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$;

5) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}$; 6) $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

10.31. 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$.

10.32. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{12}{13}$; 5) $-\frac{12}{5}$; 6) $\frac{3}{4}$.

10.33. 1) $-0, 2\pi$; 3) $0, 3\pi$; 5) $6 - 2\pi$; 7) $4\pi - 11$.

10.34. 1) $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}$;

4) $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $x_1 = \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, x_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$6) x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 7) x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, x_2 = \frac{7\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z};$$

$$8) x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$10.35. 1) x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}; 2) x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$3) x \in \left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{6}; \frac{\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z}; 4) x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$5) x \in \left(\arccos \frac{1}{9} + 2\pi n; 2\pi - \arccos \frac{1}{9} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$6) x \in \left[\frac{1}{4} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \right], n \in \mathbb{Z}; 7) x \in \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$8) x \in \left(-\frac{4\pi}{3} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} + 4\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2 \arcsin \frac{4}{5} + 4\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$9) x \in \left[-\pi - 4 \arccos \frac{7}{8} + 8\pi n; -\pi + 4 \arccos \frac{7}{8} + 8\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

$$10.36. 1) D(y) = \left[0; \frac{2}{5} \right]; 2) D(y) = [-1; 11]; 3) x \neq \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) x \neq -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$10.37. 1) E(y) = [4; 6]; 2) E(y) = [4; 8]; 3) E(y) = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]; 4) E(y) = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]; 5) E(y) = \left[\frac{1}{5}; 5 \right];$$

$$6) y = \left[\frac{1}{3}; 3 \right].$$

11. Парність, непарність, періодичність функцій

Навчальні задачі

11.1.1. Дослідити на парність (непарність) функцію $y = 3x^7 - 2x^3 + \sin x$.

Розв'язання. [5.2.2, 5.2.3.]

[Крок 1. Випишуємо область означення функції і перевіряємо її на симетричність щодо точки 0.]

Область означення $D(y) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною щодо точки 0.

[Крок 2. Знаходимо $y(-x)$.]

$$y(-x) = 3(-x)^7 - 2(-x)^3 + \sin(-x) = -3x^7 + 2x^3 - \sin x.$$

[Крок 3. Порівнюємо $y(-x)$ з $y(x)$.]

$$y(-x) = -y(x).$$

[Крок 4. Висновуємо про функцію y .]

Функція y є непарною.

11.1.2. Дослідити на парність (непарність) функцію $y = \frac{\cos x}{x^2 - 25}$.

Розв'язання. [5.2.2, 5.2.3.]

Область означення $D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$ є симетричною щодо точки 0.

$$y(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2 - 25} = \frac{\cos x}{x^2 - 25}.$$

$$y(-x) = y(x).$$

Функція y є парною.

11.1.3. Дослідити на парність (непарність) функцію $y = \frac{x^2}{x - 1}$.

Розв'язання. [5.2.2–5.2.4.]

Область означення $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ не є симетричною щодо точки 0.

Функція y ні є парною, ні є непарною (загального вигляду).

11.1.4. Дослідити на парність (непарність) функцію $y = 2^x$.

Розв'язання. [5.2.2–5.2.4.]

Область означення $D(y) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною щодо точки 0.

$$y(-x) = 2^{-x}.$$

$$y(-x) \neq y(x), y(-x) \neq -y(x).$$

Функція y ні є парною, ні є непарною.

11.2.1. З'ясувати, чи є функція $f(x) = \cos^2 2x$ періодичною і визначити найменший період T .

Розв'язання. [5.2.5, 5.8.8.]

Оскільки $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$, то період заданої функції збігається з періодом функції $\cos 4x$.

Функція $\cos x$ періодична з найменшим періодом 2π . Отже, найменший період T функції $\cos 4x$ дорівнює $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Функція $f(x)$ є періодичною; найменший період функції $T = \frac{\pi}{2}$.

11.2.2. З'ясувати, чи є функція $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ періодичною і визначити найменший період T .

Розв'язання. [2.2.5, 5.8.8, 5.2.4.]

Найменший період функції $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ дорівнює $T_1 = 2\pi$, а найменший період функції $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$ дорівнює $T_2 = 3\pi$.

Найменшим періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ є «найменше спільне кратне» чисел 2π та 3π — число $T = 6\pi$.

Функція $f(x)$ є періодичною; найменший період функції $T = 6\pi$.

Задачі для самостійної роботи

11.3. З'ясувати, чи функція f є парна, непарна чи загального вигляду, якщо:

1) $f(x) = e^{x^2} \cos x$;

2) $f(x) = x^2 - 8x + 20$;

3) $f(x) = \arcsin(x + 1)$;

4) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$;

5) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

6) $y = \frac{1}{1-x^4}, x \in (-1; 1)$;

7) $y = \frac{2 \sin x}{5x}$;

8) $y = |x + 3| - |x - 3|$;

9) $y = x^2, x \in (-\infty; 1]$;

10) $y = \sin x, x \in [0; \pi]$.

11.4. З'ясувати, чи є функція f періодичною, і в разі періодичності визначити найменший період T :

1) $f(x) = 3 \sin 4x$;

2) $f(x) = \sin^2 3x$;

3) $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$;

4) $f(x) = x^2$;

5) $f(x) = \sin x + \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$;

6) $f(x) = 3 \sin x - 5 \cos \pi x$;

7) $f(x) = 5$;

8) $f(x) = \{x\}$.

Відповіді

11.3. 1) парна; 2) загального вигляду; 3) загального вигляду; 4) непарна; 5) непарна; 6) парна; 7) парна; 8) непарна; 9) загального вигляду; 10) загального вигляду.

11.4. 1) $T = \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 4π ; 4) неперіодична; 5) періодична, $T_{\min} = 2\pi$; 6) неперіодична; 7) періодична з будь-яким періодом; 8) періодична, $T_{\min} = 1$.

Список використаної і рекомендованої літератури

Підручники і посібники

1. *Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1* / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 400 с. — ISBN 966-06-0229-4.
2. *Вся высшая математика: учеб.* / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 1. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 336 с. — ISBN 978-5-354-01237-4.
3. *Вся высшая математика: учеб.* / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 2. — М.: Эдиториал УРСС, 2007. — 192 с. — ISBN 978-5-382-00208-8.
4. *Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб.* / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К.: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.
5. *Жевняк Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление* / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1992. — 384 с.
6. *Жевняк Р. М. Высшая математика: учеб. пособие Ч.2.* / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 224 с.
7. *Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 1* / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN: 966-575-055-0.
8. *Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс* / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
9. *Шипачев В. С. Курс высшей математики* / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.
10. *Крамор В. С. Алгебра и начала анализа (система проведения занятий на подготовительных отделениях вузов).* — М.: Высш. шк., 1981. — 336 с.
11. *Математика. Практична підготовка до ЗНО* / О. М. Роганін, О. Ю. Максименко, О. О. Тарасенко, В. І. Вербицький. — Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2009. — 480 с. ISBN 978-611-03-0018-6.
12. *Нелін Є. П. Алгебра в таблицах.* — Х.: Світ дитинства, 2002. — 116 с. ISBN 966-544-165-5.
13. *Роганін О. М. Алгебра і початки аналізу в таблицях і схемах.* — Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. — 112 с. ISBN 978-966-404-545-9.
14. *Титаренко О. М., Роганін О. М. Математика. Самовчитель майбутнього студента.* — Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2007. — 448 с. ISBN 978-966-404-411-7.

Задачники і розв'язники

15. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. — 448 с. — ISBN 5-8114-0107-8.
16. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів: навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — К.: ЦУЛ, 2010. — 417 с. — ISBN 978-966-364-991-7.
17. *Вища математика: збірник задач: Навч. посібник* /В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. — К.: А. С. К., 2005. — 480 с.
18. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч. 1. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов — К.: Книги України ЛТД, 2009. — 578 с. — ISBN 978-966-2331-03-5.
19. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч.2. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — К. : Книги України ЛТД, 2010. — 470 с. — ISBN 978-966-2331-05-9.
20. *Клепко В. Ю.* Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібн. / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — К.: ЦУЛ, 2009. — 592 с. — ISBN 978-966-364-928-3.
21. *Сборник задач по математике для вузов. В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие* / Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др. Под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1993. — 480 с. — ISBN 5-02-014433-9.
22. *Сборник задач по курсу высшей математики* / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
23. *Титаренко О. М.* Математика. 6611 задач: від найпростіших до олімпіадних. — Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2011. — 480 с. ISBN 978-617-030-179-6.