Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

РЯДИ. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПРАКТИКУМ

Київ — 2013

Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. (II курс III семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 160 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 4 від 18.12.2008)

Навчальне видання

Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум

для студентів II курсу технічних спеціальностей

Укладачі: *Алєксєєва Ірина Віталіївна*, канд. фіз-мат. наук, доц.
Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Федорова Лідія Борисівна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *О. І. Клесов*, д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти: *С. В. Єфіменко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Передмова

Практикум з вищої математики «Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення» є складовою **навчального комплекту** з вищої математики, який містить: конспект лекцій, практикум, збірник індивідуальних домашніх завдань, збірник контрольних та тестових завдань.

Практикум складено на основі багаторічного досвіду викладання математики в НТУУ «КПІ», його зміст відповідає навчальним програмам з вищої математики всіх технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» денної та заочної форм навчання і містить такі розділи дисципліни «Вища математика»:

— числові ряди;
— функціональні ряди;
— ряди й інтеграл Фур'є;
— основні елементарні функції комплексної змінної;
— диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної;
— розвинення функцій комплексної змінної у ряди Тейлора й Лорана;
— лишки функцій в ізольованих особливих точках і застосування лишків до обчислення інтегралів;
— основи операційного числення та застосування його до розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь.

Практикум містить розгорнутий довідковий матеріал, широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання і сприяють розвиткові практичних навичок і є зразком належного оформлення задач для самостійної роботи, певну кількість задач для самостійної роботи в аудиторії та домашнього завдання.

Метою практикуму є:

- допомогти опанувати студентам основ математичного аналізу;
- розвинути логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використанням конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них подано у списку рекомендованої літератури.

У практичній частині використано такі позначення:

[A.B.C] — посилання на клітинку **C**, у якій уміщено теоретичний факт або формулу, таблиці **A.B.** з теми **A;**

①,②,③,... — посилання у навчальній задачі на коментар, який уміщено після її розв'язання.

Розділ 12. РЯДИ

12.1. Числові ряди

❶ ***Числовий ряд.*** Нехай задано числову послідовність $\{a_n\}$. *Числовим рядом (рядом)* називають вираз

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ — *члени ряду*; $a_n = f(n)$ — n*-й член ряду*;

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ — n*-та часткова сума ряду*;

$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ — n*-й залишок числового ряду*.

❷ ***Збіжність числового ряду***. Числовий ряд називають ***збіжним***, якщо послідовність часткових сум $\{S_n\}$ збігається до деякого числа S, яке називають ***сумою ряду***, і пишуть

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Якщо не існує скінченної границі послідовності $\{S_n\}$, то ряд називають ***розбіжним***.

❸ ***Ознаки збіжності рядів.***

① ***Необхідна умова збіжності ряду.*** Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достатня ознака розбіжності ряду. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

② ***Критерій збіжності ряду.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний тоді й лише тоді, коли збіжний довільний його залишок.

❹ ***Властивості збіжних рядів.***

① Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до суми S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, де $c \in \mathbb{R}$, збігається до суми cS.

② Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються до сум S_1 та S_2, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ збігаються до сум $S_1 \pm S_2$.

③ Переставляння, відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність).

12.2. Ряди з додатними членами

❶ ***Перша ознака порівняння (у формі нерівності).*** Якщо задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з невід'ємними членами і для всіх n виконано нерівність $0 \le a_n \le b_n$, то: 1) зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	❷ ***Друга ознака порівняння (гранична).*** Якщо задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з додатними членами і існує скінченна, відмінна від нуля, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.
Для ***порівняння*** часто використовують ряди:	
❸ ***геометричний*** ряд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} - \begin{cases} \text{збіжний}, & \lvert q \rvert < 1, \\ \text{розбіжний}, & \lvert q \rvert \ge 1 \end{cases}$
❹ ***гармонічний*** ряд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} -$ розбіжний
❺ ряд ***Діріхле*** (***узагальнений гармонічний***)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{збіжний}, & \alpha > 1, \\ \text{розбіжний}, & \alpha \le 1 \end{cases}$
❻ ***Д'Аламберова ознака.*** Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то: 1) для $L < 1$ ряд збігається; 2) для $L > 1$ ряд розбігається*; 3) для $L = 1$ ряд потребує додаткового дослідження**.	❼ ***Радикальна ознака Коші***. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, то: 1) для $L < 1$ ряд збігається; 2) для $L > 1$ ряд розбігається; 3) для $L = 1$ ряд потребує додаткового дослідження.

* Із розбіжності ряду за ознакою д'Аламбера (або радикальною ознакою Коші) випливає, що загальний член ряду не прямує до нуля.

** Приміром, за достатньою ознакою розбіжності, за ознаками порівняння.

❽ ***Інтегральна ознака Коші.*** Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мають вигляд $a_n = f(n)$, починаючи з $n = k \in \mathbb{N}$, де $f(x)$ — неперервна невід'ємна спадна функція на проміжку $[k;+\infty)$.	Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається (розбігається) тоді й лише тоді, коли збігається (розбігається) інтеграл $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)dx.$

12.3. Знакозмінні ряди і ряди з комплексними членами

❶ ***Знакозмінний ряд.*** Числовий ряд, який містить нескінченну кількість додатних і нескінченну кількість від'ємних членів, називають *знакозмінним*.	***Знакопочережний ряд.*** Числовий ряд, знаки членів якого строго чергуються, називають *знакопочережним*.
❷ ***Абсолютна та умовна збіжність ряду.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ та *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ розбігається[*].	❸ ***Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.*** Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$, утворений з модулів членів знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
❹ ***Лейбніцова ознака.*** Нехай задано знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0,\ (n \in \mathbb{N})$. Якщо: 1) $a_n \geq a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то цей ряд збігається. Сума його не перевищує першого члена ($S \leq a_1$) і $\lvert R_n \rvert \leq a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$	❺ ***Властивості знакозмінних рядів.*** ① Абсолютно збіжні ряди з сумами S_1 та S_2 можна додавати (віднімати), дістаючи ряд із сумою $S_1 + S_2$ $(S_1 - S_2)$. ② ***Теорема Діріхле.*** Абсолютно збіжний ряд за будь-якого переставлення його членів залишається абсолютно збіжним, і його сума не змінюється. ③ ***Теорема Рімана.*** Переставленням членів умовно збіжного ряду можна одержати ряд з будь-якою заданою сумою або розбіжний ряд.

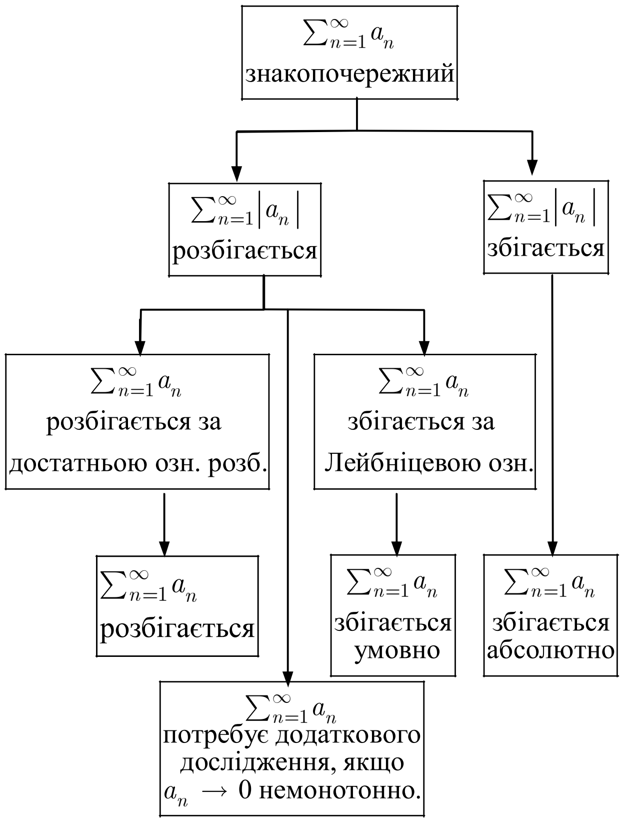
[*] Щоб встановити абсолютну збіжність ряду використовують усі ознаки збіжності додатних рядів для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$.

❻ ***Схема дослідження знакопочережного ряду на збіжність.***

① Досліджують ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютну збіжність, вивчаючи ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$.

② Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$ збігається, то висновують: **ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно.** Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$ розбігається, то застосовують до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Лейбніцову ознаку або достатню ознаку розбіжності.

③ Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то висновують: **ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно.** Інакше — **ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.**



❼ ***Ряд з комплексними членами.*** *Рядом з комплексними членами* називають числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

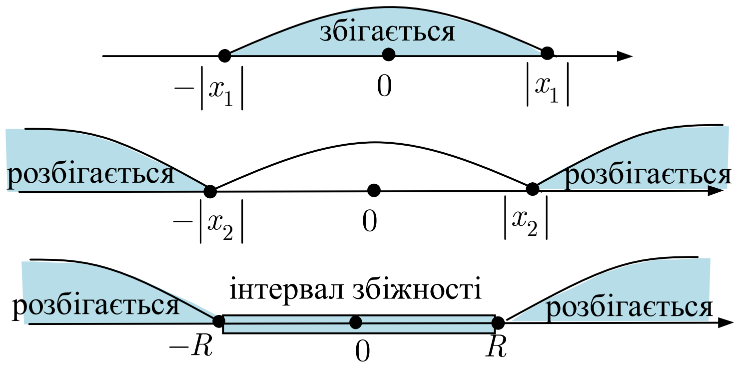
де $x_n, y_n \in \mathbb{R}, i^2 = -1$.

❽ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається до числа $S = X + iY$ тоді й лише тоді, коли ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ збігаються відповідно до чисел X та Y.
Якщо ряд, утворений з модулів членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left| z_n \right|$ збігається, то збігається, причому абсолютно, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

12.4. Функціональні ряди

❶ ***Функціональні ряди.*** *Функціональним* рядом називають ряд вигляду $$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=$$ $$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$ де $u_n(x)$ — функції, означені на деякій множині X. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають *збіжним* у точці x_0, якщо для $x_0\in X$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ збігається.	Множину $D\subset X$ значень $x\in X$, для яких функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається, називають *областю збіжності* ряду. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|u_n(x)\right\|$. Область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|u_n(x)\right\|$ називають *областю абсолютної збіжності* ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.
❷ ***Рівномірна збіжність функціонального ряду.*** Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* на множині D, якщо $$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N\Rightarrow$$ $$\Rightarrow\left\|S(x)-S_n(x)\right\|=\left\|R_n(x)\right\|<\varepsilon$$ $$\forall x\in D$$	❸ ***Ознака Веєрштраса.*** Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається на множині D абсолютно і рівномірно, якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, a_n>0$, такий, що $$\left\|u_n(x)\right\|\le a_n\ \ \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in D.$$ Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називають *мажорантою* функціонального ряду.
❹ ***Властивості рівномірно збіжних рядів.*** ① Якщо члени ряду неперервні функції і ряд на множині D збігається рівномірно, то сума ряду неперервна на цій множині. ② Якщо функціональний ряд з неперервними членами рівномірно збігається на відрізку $[a;b]$, то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку.	③ Якщо функціональний ряд з неперервно диференційовними членами збігається на відрізку $[a;b]$, а ряд, утворений з похідних його членів, рівномірно збігається на $[a;b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати в точках відрізку.

12.5. Степеневі ряди

❶ ***Степеневий ряд.*** *Степеневим рядом* за степенями $(x - x_0)$ (*степеневим рядом* з центром у точці x_0) називають функціональний ряд вигляду $$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$	
❷ ***Теорема Абеля.*** Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається в точці $x_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається в кожній точці x, для якої $\lvert x \rvert < \lvert x_1 \rvert$; якщо степеневий ряд розбігається в точці x_2, то він розбігається скрізь, де $\lvert x \rvert > \lvert x_2 \rvert$.	***Наслідок.*** Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно збігається в деякому інтервалі $(-R; R)$, який називають ***інтервалом збіжності***, число R — ***радіусом збіжності***.[*]
	
❸ ***Інтервал збіжності*** степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$	$\lvert x - x_0 \rvert < R \Leftrightarrow (x_0 - R; x_0 + R)$
❹ ***Круг збіжності*** степеневого ряду з комплексними членами $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$	$\lvert z - z_0 \rvert < R$
❺ ***Формула Коші — Адамара***	$R = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\rvert = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\lvert c_n \rvert}}$

[*] На межах інтервалу збіжності, в точках $x = \pm R$, ряд може збігатися, а може й розбігатися.

❻ ***Схема знаходження області збіжності степеневого ряду.*** ① Знаходять інтервал збіжності $$\left\|x - x_0\right\| < R$$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ одним із способів: а) застосовують ознаку д'Аламбера або радикальну ознаку Коші до ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \left\|c_n (x - x_0)^n\right\|$; б) використовують формулу Коші — Адамара [12.5.4]. ② Досліджують збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності за допомогою інших ознак. ③ Записують відповідь.	❼ ***Властивості степеневих рядів***. ① Сума $S(x)$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ є неперервною функцією в інтервалі збіжності $(-R; R)$. ② Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, з радіусами збіжності R_1 та R_2 можна почленно додавати і віднімати. Радіус збіжності суми і різниці рядів не менше, ніж найменше з чисел R_1 та R_2. ③ Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати: $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1},$$ $$x \in (-R; R).$$ ④ Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, який міститься всередині інтервалу збіжності: $$\int_{\alpha}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right\|_{\alpha}^{x},$$ $$-R < \alpha < x < R$$

12.6. Розвинення функцій у степеневі ряди (Тейлорові ряди)

❶ ***Тейлорів ряд.*** Нехай функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні всіх порядків. Степеневий ряд:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

називають *Тейлоровим рядом* функції $f(x)$ із центром у точці x_0.

Частковою сумою Тейлорового ряду є *Тейлорів многочлен*:

$$\tilde{P}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Leftrightarrow f(x)=\tilde{P}_n(x)+R_n(x),$$

де $R_n(x)$ — залишок ряду.

Якщо функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$, то кажуть, що вона *розвивається* за степенями $(x-x_0)$.

❷ ***Критерій збіжності Тейлорового ряду.*** Тейлорів ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

збігається до функції $f(x)$ в інтервалі збіжності I тоді й лише тоді, коли в цьому інтервалі функція $f(x)$ має похідні всіх порядків та

$$\forall x\in I:\ \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

❸ ***Теорема єдиності.*** Якщо функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

в околі точки x_0, то це розвинення єдине і одержаний ряд є Тейлоровим рядом функції $f(x)$ із центром у точці x_0.

❹ ***Достатня умова збіжності Тейлорового ряду.*** Якщо функція і її похідні будь-якого порядку обмежені в околі точки x_0 однією і тією самою сталою K, то Тейлорів ряд функції $f(x)$ збігається до функції $f(x)$ для будь-якого x з цього околу.

12.7. Тейлорові розвинення деяких елементарних функцій з центром у точці $x = 0$

❶ $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
❷ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
❸ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
❹ $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
❺ $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
❻ $(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$, $\quad \lvert x \rvert < 1$
❼ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $\quad \lvert x \rvert < 1$
❽ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $\quad \lvert x \rvert < 1$
❾ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\quad x \in (-1;1]$.
❿ $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\quad x \in [-1;1]$

12.8. Ряди Фур'є

❶ ***Тригонометричний ряд Фур'є.*** *Тригонометричним рядом Фур'є* T-періодичної, інтегровної функції $f(x)$ на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ називають ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(n\omega_1 x)+b_n\sin(n\omega_1 x)\big),\quad \omega_1=\frac{2\pi}{T},$$

коефіцієнти якого визначають за формулами:

$$a_0=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)dx;\ a_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos(n\omega_1 x)dx;\ b_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin(n\omega_1 x)dx$$

❷ ***Теорема Діріхле.*** Якщо T-періодична функція $f(x)$ справджує *умови Діріхле* на відрізку $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, тобто функція $f(x)$ на цьому відрізку:

1) кусково-неперервна;
2) кусково-монотонна;
3) обмежена,

то її ряд Фур'є збігається в кожній точці відрізку.
Його сума:

1) $S(x)=f(x)$, якщо $x\in\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)$ і є точкою неперервності функції $f(x)$;

2) $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, якщо $x\in\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)$ і є точкою розриву функції $f(x)$;

3) $S\left(-\frac{T}{2}\right)=S\left(\frac{T}{2}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{T}{2}+0\right)+f\left(\frac{T}{2}-0\right)\right).$$

❸ ***Деякі властивості функцій.***

① Функцію $f(x)$, означену на необмеженій множині D, називають T-*періодичною*, якщо існує число $T\neq 0$ таке, що для кожного $x\in D$: $x+T\in D$ і

$$f(x+T)=f(x).$$

Число T називають *періодом* функції f.

② Функцію $f(x), x\in D(f)$, називають *обмеженою*, якщо

$$\exists C>0:\left|f(x)\right|\le C\ \ \forall x\in D(f)$$

③ *Кусково-неперервність* функції на відрізку означає наявність у функції скінченної кількості точок розриву 1-го роду.

④ *Кусково-мотонність* функції на відрізку означає, що цей відрізок можна розбити на скінченну кількість інтервалів монотонності функції.

12.9. Різні форми ряду Фур'є

❶ Ряд Фур'є для T -***періодичної*** функції $f,\ x \in \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right], \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)\big),$$ $$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)dx;\ a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega_1 x)dx;\ b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega_1 x)dx$$
❷ Ряд Фур'є для T -періодичної ***парної*** * функції f:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 x),$$ $$a_0 = 2\cdot\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2} f(x)dx;\ a_n = 2\cdot\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2} f(x)\cos(n\omega_1 x)dx;\ b_n = 0$$
❸ Ряд Фур'є для T -періодичної ***непарної*** ** функції f:
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x),$$ $$a_0 = a_n = 0;\ \ b_n = 2\cdot\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2} f(x)\sin(n\omega_1 x)dx$$
❹ Ряд Фур'є для T -періодичної функції, графік якої ***симетричний щодо точки*** $A(0;c)$
$$f(x) \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x)$$ $$a_0 = 2c; a_n = 0; b_n = 2\cdot\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2} [f(x)-c]\sin(n\omega_1 x)dx,\ n \in \mathbb{N}$$

---

* Графік парної функції симетричний щодо осі Oy.

** Графік непарної функції симетричний щодо точки $A(0;0)$

❺ ***Комплексна*** форма ряду Фур'є для T -періодичної функції f, $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_1 x},$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx, n \in \mathbb{Z}$$

❻ ***Алгоритм розвинення функції в ряд Фур'є****.*[*] ① Якщо функція задана аналітично, будують її графік. Якщо функцію задано графічно, знаходять її аналітичний вигляд. ② Обґрунтовують можливість розвинення функції в ряд Фур'є на вказаному проміжку (перевіряють умови теореми Діріхле). ③ Будують графік суми ряду Фур'є $y = S(x)$ (графічне розвинення).	④ Визначають період розвинення T і основну частоту ω_1. ⑤ Записують ряд Фур'є з невизначеними коефіцієнтами (враховують симетрію графіка $y = S(x)$). ⑥ Записують формули для коефіцієнтів ряду Фур'є і обчислюють їх. ⑦ Записують відповідь згідно з теоремою Діріхле

Частотні спектри періодичних сигналів[**]

❼ ***Амплітудний*** частотний спектр періодичного сигналу	***дійсний***: $A_n = \begin{cases} \lvert a_0 \rvert / 2, & n = 0, \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ***комплексний***: $C_n = \lvert c_n \rvert, n \in \mathbb{Z}$ $A_0 = C_0, A_n = 2C_n.$
❽ ***Фазовий*** частотний спектр періодичного сигналу	$\varphi_n = -\arg c_n, n \in \mathbb{Z},$ $\arg z \in (-\pi; \pi]$

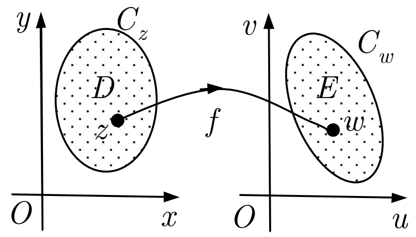
❾ $\displaystyle\int e^{ax} \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} \mp b \begin{Bmatrix} \cos bx \\ \sin bx \end{Bmatrix} \right)$

[*] Щоб розвинути в ряд Фур'є неперіодичну функцію $f(x), [-l; l]$, будують її періодичне продовження з періодом $2l$ на всю числову вісь. Побудована періодична функція збігається з $f(x)$ в інтервалі $(-l; l)$.

[**] Для дійсного сигналу амплітудний спектр є парною функцією, а фазовий — непарною функцією. Періодичні сигнали мають дискретні спектри.

Розділ 13. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

13.1. Основні поняття про функції комплексної змінної

❶ ***Область.*** Зв'язну відкриту множину точок комплексної площини називають *областю*.	Область називають *однозв'язною*, якщо її межа є зв'язною множиною, інакше область називають *багатозв'язною*.
❷ ***Відкритий круг*** радіусом R з центром у точці z_0	$\left\lvert z - z_0 \right\rvert < R$
❸ ***Межа множини.*** Точку z називають ***межовою*** точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки, які належать множині D, так і точки, які їй не належать.	Сукупність межових точок множини називають ***межею*** множини D і позначають ∂D.
❹ ***Комплексна функція.*** Якщо кожному комплексному числу z, що належить області D, відповідає одне або кілька комплексних чисел $w \in E$, то кажуть, що в області D означено *комплексну функцію* $$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$ $$w \in E, z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}$$	 $$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z),$$ $$v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$$
Якщо кожному z відповідає одне значення w, то функцію називають *однозначною*, інакше — *багатозначною*.	
❺ ***Границя функції.*** Комплексне число A називають *границею функції* $w = f(z)$ в точці z_0 (коли $z \to z_0$), якщо для будь-якого ε-околу точки A можна вказати проколений δ-окіл точки z_0, такий що, коли $z \in U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, то $f(z) \in U_\varepsilon(A)$ і позначають $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.*	❻ ***Неперервність функції.*** Нехай функція $w = f(z)$ означена в точці $z = z_0$ і в деякому її околі. Функцію $w = f(z)$ називають *неперервною в точці* z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функція $f(z)$ *неперервна в області* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

* Границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не залежить від способу прямування точки z до точки z_0.

Теореми про арифметичні дії над границями правдиві і для функцій комплексної змінної.

13.2. Основні елементарні функції комплексної змінної

❶ ***Показникова*** функція	$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
❷ ***Тригонометричні*** функції	
① $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; ② $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$;	③ $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$; ④ $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$
❸ ***Гіперболічні*** функції	
① $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$; ② $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$;	③ $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$; ④ $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$
❹ ***Логарифмічна*** функція*	$\operatorname{Ln} z = \ln\lvert z\rvert + i\operatorname{Arg} z$
	$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi ki,$ $\arg z \in (-\pi;\pi], k \in \mathbb{Z}$
❺ ***Головне*** значення логарифма	$\ln z = \ln\lvert z\rvert + i\arg z$
❻ ***Узагальнені показникова*** і ***степенева*** функції	$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}, a \neq 0, \quad z^\alpha = e^{\alpha\operatorname{Ln} z}$
❼ ***Арксинус***	$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$
❽ ***Арккосинус***	$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
❾ ***Арктангенс***	$\operatorname{Arctg} z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i - z}{i + z}$
❿ ***Арккотангенс***	$\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z - i}{z + i}$
⓫ ***Ареасинус***	$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
⓬ ***Ареакосинус***	$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
⓭ ***Ареатангенс***	$\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1 + z}{1 - z}$
⓮ ***Ареакотангенс***	$\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z + 1}{z - 1}$

* Областю означення логарифмічної функції є $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

13.3. Властивості основних елементарних функцій

❶ ***Властивості показникової функції****	
① $\left\lvert e^z \right\rvert = e^x, \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k;$	② $e^{z+2\pi k i} = e^z, k \in \mathbb{Z};$ ③ $e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1, e^{\pm\pi i/2} = \pm i$
❷ Властивості логарифмічної функції	
① $\operatorname{Re}\operatorname{Ln} z = \ln\lvert z \rvert, \operatorname{Im}\operatorname{Ln} z = \operatorname{Arg} z;$	② $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}$
❸ ***Властивості тригонометричних функцій*****	
① $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y,$ $\operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y;$ ② $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y,$ $\operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y;$	③ $\cos(z + 2\pi k) = \cos z;$ ④ $\sin(z + 2\pi k) = \sin z;$ ⑤ $\operatorname{tg}(z + \pi k) = \operatorname{tg} z;$ ⑥ $\operatorname{ctg}(z + \pi k) = \operatorname{ctg} z$ $k \in \mathbb{Z}$
❹ ***Властивості гіперболічних функцій***	
① $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y,$ $\operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y;$ ② $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y,$ $\operatorname{Im}\operatorname{ch} z = -\operatorname{sh} x \sin y;$	③ $\operatorname{ch}(z + 2\pi k i) = \operatorname{ch} z;$ ④ $\operatorname{sh}(z + 2\pi k i) = \operatorname{sh} z;$ ⑤ $\operatorname{th}(z + \pi k i) = \operatorname{th} z;$ ⑥ $\operatorname{cth}(z + \pi k i) = \operatorname{cth} z$ $k \in \mathbb{Z}$
❺ ***Співвідношення*** між тригонометричними і гіперболічними функціями	
① $\cos iz = \operatorname{ch} z, \operatorname{ch} iz = \cos z;$ ② $\sin iz = i \operatorname{sh} z, \operatorname{sh} iz = i \sin z;$	③ $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z, \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z;$ ④ $\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z, \operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z$

[*] Функція $e^z, z \in \mathbb{C},$ періодична з періодом $2\pi i$.

[**] Функції $\sin z$ та $\cos z$ є необмеженими на комплексній площині.

13.4. Диференціювання функцій комплексної змінної

❶ ***Похідна функції*** $f(z)$ в точці z_0	$f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$
❷ ***Диференційовність функції.*** Якщо існує $f'(z_0)$, то функцію $f(z)$ називають *диференційовною* в точці z_0.	
❸ ***Критерій диференційовності.*** Функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$, тоді й лише тоді, коли функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні і	справджують *умови Коші — Рімана* $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$
❹ Формули для ***похідної*** функції	$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$
❺ ***Аналітичність функції***. Функцію $w = f(z)$ називають *аналітичною в точці* z_0, якщо вона диференційовна як у точці z_0, так і в деякому околі цієї точки.	Однозначну функцію, диференційовну в кожній точці області D, називають *аналітичною* в цій *області*.
❻ ***Правильна і особлива точка функції.*** Точку в якій функція аналітична називають *правильною* точкою функції. Якщо функція аналітична у проколеному околі точки, а в самій точці не аналітична або не визначена, то таку точку називають *особливою* точкою функції. Однозначні елементарні функції комплексної змінної аналітичні скрізь, де вони означені.	❼ ***Властивості аналітичних функцій.*** Якщо функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ аналітичні в області D, то їхні алгебрична сума $f_1(z) \pm f_2(z)$ і добуток $f_1(z)f_2(z)$ також аналітичні в цій області, а частка $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналітична в області D, за винятком тих точок, у яких знаменник дорівнює нулеві.
❽ ***Гармонічність*** функції $f(x,y)$	$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
❾ ***Необхідна умова аналітичності функції.*** Дійсна та уявна частина аналітичної функції $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є гармонічними функціями.	$\Delta u = 0,$ $\Delta v = 0$

13.5. Інтегрування функцій комплексної змінної

❶ ***Інтеграл*** від неперервної однозначної функції комплексної змінної $f(z)$ уздовж кусково-гладкої дуги L	$$\int\limits_L f(z)dz = \lim_{\substack{\max\lvert\Delta z_k\rvert\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$
❷ ***Зв'язок*** інтеграла від функції комплексної змінної з ***криволінійним*** інтегралом 2-го роду	$$\int\limits_L f(z)dz =$$ $$= \int\limits_L [u(x,y)+iv(x,y)](dx+idy)$$
❸ ***Зв'язок*** інтеграла від функції комплексної змінної з ***визначеним*** інтегралом	$L : s = s(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_1; t_2]$: $$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(s(t))s'(t)dt$$
❹ ***Теорема Коші для однозв'язної області.*** Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то $$\oint\limits_L f(z)dz = 0,$$ де L — довільний кусково-гладкий замкнений контур, що лежить в області D.	❺ ***Теорема Коші для багатозв'язної області.*** Якщо функція $f(z)$ аналітична у скінченній замкненій області D, обмеженій кусково-гладкими контурами $L_0, L_1, ..., L_n$, то $$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz,$$ де всі контури обходять проти годинникової стрілки.
❻ ***Формула Коші*** для аналітичної функції $f(z)$ (точка z_0 лежить усередині контуру L)	$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$
❼ ***Формула Коші*** для похідної $f^{(n)}(z)$ (точка z_0 лежить усередині контуру L), $n \in \mathbb{N}$	$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$
❽ ***Теорема Ньютона — Лейбніца.*** Якщо дуга L, з початком у точці z_1 і кінцем у точці z_2, лежить в області аналітичності D функції $f(z)$, то правдива *формула Ньютона — Лейбніца*:	$$\int\limits_L f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$ де $F(z)$ — *первісна* для функції $f(z)$, тобто $$F'(z) = f(z), z \in D$$
❾ ***Параметричні*** рівняння ***кола*** радіусом R з центром у точці z_0	$$z = z_0 + Re^{it}, t \in [0; 2\pi]$$

13.6. Розвинення функцій в Тейлорові й Лоранові ряди

<table>
<tr><td>❶ Теорема Тейлора. Будь-яку функцію $f(z)$, аналітичну в крузі
$$\left|z-z_0\right| < R, 0 < R \le \infty,$$
можна розвинути в цьому крузі у збіжний до неї</td><td>Тейлорів ряд:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❷ Теорема Лорана. Будь-яку функцію $f(z)$, аналітичну в кільці
$$r < \left|z-z_0\right| < R, 0 \le r < R \le \infty$$
можна розвинути в цьому кільці у збіжний до неї Лоранів ряд:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n}_{\text{головна частина}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильна частина}},$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\left|z-z_0\right|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R$$</td></tr>
<tr><td>❸ Теорема єдиності. Розвинення функцій в Тейлорів або Лоранів ряд єдині (для Лоранового ряду — в певному кільці)*</td><td>❹ Властивість Тейлорових (Лоранових) рядів. Ряди Тейлора і Лорана в області їхньої збіжності можна почленно диференціювати і інтегрувати.</td></tr>
<tr><td colspan="2">❺ Основні розвинення в Тейлорів ряд в околі точки $z_0 = 0$</td></tr>
<tr><td>① $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}$</td><td>④ $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \left|z\right| < 1$</td></tr>
<tr><td>② $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z \in \mathbb{C}$</td><td>⑤ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ \left|z\right| < 1$</td></tr>
<tr><td>③ $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z \in \mathbb{C}$</td><td>⑥ $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,\ \left|z\right| < 1$</td></tr>
</table>

* Це означає, що яким би чином не розвивати $f(z)$ у Тейлорів або Лоранів ряд, то цей ряд буде тим самим.

13.7. Класифікація ізольованих особливих точок функції

❶ ***Ізольована особлива точка.*** Точку z_0 називають *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо $f(z)$ аналітична в деякому околі цієї точки, за винятком самої точки z_0.

❷ ***Нуль функції.*** Точку z_0 називають *нулем* n-го порядку аналітичної функції $f(z)$, якщо

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Тип особливої точки	**Границя функції в точці z_0**	**Головна частина ряду Лорана**
❸ ***Усувна***	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C \neq \infty$	відсутня
❹ ***Полюс порядку*** $m \in \mathbb{N}$	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$	містить скінченну кількість доданків: $\underbrace{\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{головна частина}}, c_{-m} \neq 0$
❺ ***Істотно особлива точка***	$\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$	містить нескінченну кількість доданків: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{головна частина}}$

❻ Точка z_0 є полюсом порядку m для функції $f(z)$, якщо для функції $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ точка z_0 є нулем порядку m.

❼ Характер нескінченно віддаленої особливої точки $z = \infty$ функції $f(z)$ визначають, досліджуючи точку $\zeta = 0$ функції $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

13.8. Обчислення лишку функції в ізольованих особливих точках функції

❶ ***Лишок.*** *Лишком* аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називають комплексне число $$\operatorname{res} f(z_0) = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L:\lvert z-z_0 \rvert = r} f(z)dz,$$ де контур обходиться у додатному напрямі і лежить в області аналітичності функції $f(z)$ — кільці $0 < \lvert z - z_0 \rvert < R$.	
❷ z_0 ***— скінченна точка***[*]	$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$
❸ $z_0 = \infty$	$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}$
❹ z_0 — ***усувна точка***	$\operatorname{res} f(z_0) = 0$
❺ z_0 — ***полюс порядку*** m	$\operatorname{res} f(z_0) = = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big(f(z)(z-z_0)^m \Big)$
❻ z_0 — ***простий полюс*** $(m = 1)$	$\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)$
❼ z_0 — ***простий полюс*** функції $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0$	$\operatorname{res} f(z_0) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

[*] c_{-1} — коефіцієнт ряду Лорана при степеню $\dfrac{1}{z - z_0}$.

13.9. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

❶ ***Теорема Коші про лишки.*** Якщо функція $f(z)$ аналітична на межі L області D і скрізь усередині області, за винятком скінченної кількості особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$, то:	$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$$
❷ Якщо $Q_n(x) \neq 0,\ x \in (-\infty, +\infty),\ n \geq m+2$, то* $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{z=z_k,\\ \operatorname{Im} z_k>0}}{\operatorname{res}} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$$	
❸ Якщо $n > m, t > 0$, то $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} e^{itx} dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{z=z_k,\\ \operatorname{Im} z_k>0}}{\operatorname{res}} \left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} e^{itz}\right)$$	
❹ Якщо $n > m, t > 0$, то $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \begin{Bmatrix} \cos tx \\ \sin tx \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{Bmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} e^{itx} dx$$	
❺ $$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \left| \begin{matrix} e^{ix} = z, dx = \dfrac{dz}{iz}, \\ \cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}, \\ \sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}, \\ \lvert z \rvert = 1, 0 \leq x \leq 2\pi \end{matrix} \right| = \oint\limits_{\lvert z \rvert = 1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$	

* Лишки обчислюють за особливими точками підінтегральної функції, які лежать у верхній півплощині.

Розділ 14. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

14.1. Перетворення Фур'є

❶ ***Теорема Фур'є.*** Якщо функція $f(x)$ справджує умови Діріхле на кожному скінченному відрізку (кусково-неперервна, кусково-монотонна, обмежена) і є абсолютно інтегровною, то її можна зобразити інтегралом Фур'є $I(x)$ в одній з можливих форм.

Причому:

1) $f(x) = I(x)$, якщо x — точка неперервності;

2) $I(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, якщо x — точка розриву.

❷ ***Дійсна*** форма інтеграла Фур'є:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} (A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)d\omega,$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt,\ \ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

❸ ***Комплексна*** форма інтеграла Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega,\ \ F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

❹ ***Перетвір Фур'є***[*] функції f $(f(x) \to F(\omega))$

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

❺ ***Косинус-перетворення Фур'є*** (парної) функції $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} F_c(\omega)\cos(x\omega)d\omega,\ \ F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

---

[*] Якщо $f(x)$ — парна функція, то її перетвір Фур'є $F(\omega)$ є дійсною функцією (отже, буде парною функцією).

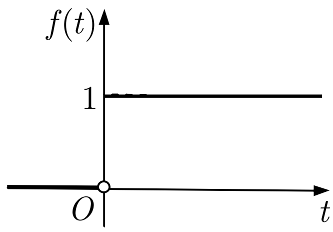
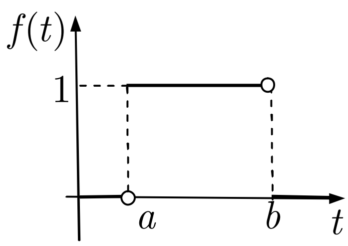
Якщо $f(x)$ — непарна функція, то її перетвір Фур'є $F(\omega)$ є суто уявною функцією (і непарною).

<table>
<tr><td colspan="2">❻ Синус-перетворення Фур'є (непарної) функції $f(x)$:</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin(x\omega)d\omega,\quad F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)dx$$</td></tr>
<tr><td>❼ Схема зображення функції інтегралом Фур'є.
① Якщо функцію задано аналітично, будують її графік. Якщо ж функцію задано графічно, знаходять її аналітичний вигляд.
② Обґрунтовують можливість зображення функції інтегралом Фур'є (перевіряють умови теореми Фур'є).
③ Будують графік інтеграла Фур'є (графічне зображення).</td><td>④ Записують інтеграл Фур'є з невизначеними коефіцієнтами (враховують симетрію графіка $y=f(x)$).
⑤ Записують формули для $A(\omega)$ та $B(\omega)$ або для $F(\omega)$ і обчислюють коефіцієнти.
⑥ Записують відповідь згідно з теоремою Фур'є.</td></tr>
<tr><td>❽ Амплітудний частотний спектр неперіодичної функції</td><td>$S(\omega)=\left|F(\omega)\right|$</td></tr>
<tr><td>❾ Фазовий частотний спектр неперіодичної функції</td><td>$\varphi(\omega)=-\arg F(\omega)$,
$\arg z\in(-\pi;\pi]$</td></tr>
</table>

14.2. Деякі властивості перетворення Фур'є

❶ $\alpha f(x)+\beta g(x)\to\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)$	❷ $f(ax)\to\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
❸ $f(x-a)\to e^{-i\omega a}F(\omega)$	❹ $f^{(n)}(x)\to(i\omega)^nF(\omega)$
❺ $e^{-a\lvert x\rvert}\to\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$	❻ $\begin{cases}1, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}\to\dfrac{2\sin a\omega}{\omega}$

14.3. Перетворення Лапласа

❶ ***Оригінал.*** *Оригіналом* називають будь-яку комплекснозначну функцію $f(t),\ t \in (-\infty;+\infty)$, яка справджує умови: 1) $f(t)=0$ при $t<0, f(0)=f(+0)$; 2) існують сталі $s \geq 0$ та $M>0$, такі що $$\left\|f(t)\right\| \leq Me^{st}, t>0,$$ 3) на будь-якому відрізку $[0;T]$ функція $f(t)$ може мати лише скінченну кількість точок розриву 1-го роду.	❷ ***Зображення.*** *Зображенням* оригінала $f(t)$ називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, яку означують рівністю $$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$$ Перехід від оригіналу до зображення називають *перетворенням Лапласа* і позначають $$f(t)\to F(p) \text{ або } f(t) \risingdotseq F(p).$$
❸ ***Властивості зображення.*** ① Функція $F(p) \leftarrow f(t)$ є аналітичною в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, де $s_0=\inf s$ — *показник росту* функції $f(t)$.	② Якщо точка p прямує до нескінченності так, що $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то $$\lim_{s\to+\infty} F(p)=0.$$
❹ ***Функція Гевісайда***[*] $$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$	
❺ ***Функція-«ножиці»*** $$\eta(t-a)-\eta(t-b)=\begin{cases}0, & t\notin[a;b),\\ 1, & t\in[a;b)\end{cases}$$	

[*] Якщо функція $\varphi(t)$ справджує умови 2) та 3), то функція $\eta(t)\varphi(t)$ справджує всі умови, які накладають на функції-оригінали.

14.4. Властивості перетворення Лапласа

❶ ***Лінійність*** оригіналу та зображення	$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \to \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p)$
❷ ***Подібність*** оригіналу та зображення	$f(\lambda t) \to \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$
❸ ***Запізнення*** оригіналу $\eta(t-a)f(t-a) \to e^{-pa}F(p), a > 0$	❹ ***Зміщення*** зображення $F(p-\alpha) \leftarrow e^{\alpha t} f(t), \alpha \in \mathbb{C}$
❺ ***Диференціювання*** оригіналу $f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)$	❻ ***Диференціювання*** зображення $F^{(n)}(p) \leftarrow (-t)^n f(t)$
❼ ***Інтегрування*** оригіналу $\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}$	❽ ***Інтегрування*** зображення $\int_p^\infty F(q)dq \leftarrow \frac{f(t)}{t}$
❾ ***Зображення*** згортки $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$ функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ (***теорема множення***)	$f_1(t) * f_2(t) \to F_1(p)F_2(p)$ $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
❿ ***Формула Дюамеля***	$pF_1(p)F_2(p) \leftarrow \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau =$ $= f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau)d\tau$
⓫Зображення ***періодичного*** оригіналу (T — період)	$f(t) = f(t \pm T) \to$ $\to \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$

14.5. Таблиця основних перетворень

❶ $1 \to \dfrac{1}{p}$	❷ $e^{\alpha t} \to \dfrac{1}{p-\alpha}$
❸ $t^n \to \dfrac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$	❹ $t^{\mu} \to \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}, \operatorname{Re}\mu > -1$
❺ $\sin\beta t \to \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	❻ $\cos\beta t \to \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
❼ $\operatorname{sh}\beta t \to \dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$	❽ $\operatorname{ch}\beta t \to \dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
❾ $t\sin\omega t \to \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$	❿ $t\cos\omega t \to \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

14.6. Знаходження оригіналу за зображенням

❶ ***Схема знаходження оригіналу за допомогою таблиці зображень.***

① Зображення розкладають на суму елементарних дробів.

② Використовують властивість лінійності й подібності.

③ Оригінали для елементарних дробів знаходять за формулами таблиці зображень і властивостями перетворення Лапласа.

❷ ***Перша теорема розвинення.*** Якщо функція $F(p)$ аналітична в деякому околі ∞ і її розвинення в ряд за степенями $\dfrac{1}{p}$ має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то функція $f(t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{t^n}{n!}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

є оригіналом для зображення $F(p)$.

❸ ***Друга теорема розвинення.*** Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією і має лише скінченну кількість особливих точок $p_1, p_2, ..., p_k$, що лежать у скінченній частині площини, то функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left(e^{p_k t} F(p_k)\right)$$

і є оригіналом для зображення $F(p)$.

Модуль 1. РЯДИ

1. Числові ряди

Навчальні задачі

1.1.1. Задано загальний член ряду $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$. Записати чотири перших члени ряду, десятий член ряду, $(n+1)$-й член ряду і сам ряд.

***Розв'язання*. [12.1.1.]**

[*Знаходимо члени ряду, підставляючи у формулу загального члена ряду їхні номери.***]**

$$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{1^2+1} = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{5}{5} = 1, a_3 = \frac{7}{10}, a_4 = \frac{9}{17},$$

$$a_{10} = \frac{21}{101}, a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+1} = \frac{2n+3}{n^2+2n+2}.$$

Шуканий ряд:

$$\frac{3}{2} + 1 + \frac{7}{10} + \frac{9}{17} + ... + \frac{21}{101} + ... + \frac{2n+1}{n^2+1} + \frac{2n+3}{n^2+2n+2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}.$$

1.1.2. Задано загальний член ряду $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Записати чотири перших члени ряду, десятий член ряду, $(n+1)$-й член ряду і сам ряд.

***Розв'язання*. [12.1.1.]**

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1!} = -\frac{1}{1} = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{24},$$

використовуємо означення факторіала [A.1.4]

$$a_{10} = \frac{1}{10!}, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Шуканий ряд:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + ... + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

1.2. Задано часткову суму ряду $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Записати ряд і знайти його суму.

***Розв'язання*. [12.1.1.]**

З означення часткової суми ряду випливає, що n-й член ряду

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2(n-1)+1} =$$

$$= \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{2n^2 - n - 2n^2 - n + 2n + 1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2-1}.$$

Шуканий ряд:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

то розглядуваний ряд збігається до суми $S = \dfrac{1}{2}$.

1.3.1. Користуючись означенням, дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{90}{4n^2+8n-5}$.

***Розв'язання**. [12.1.2.]*

[***Крок 1.*** *Утворюємо n-ту часткову суму ряду [12.1.1.]*]

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{90}{4k^2+8k-5}.$$

[***Крок 2.*** *Перетворюємо S_n.*]

$$\frac{90}{4k^2+8k-5} = \frac{90}{\left(2k-1\right)\left(2k+5\right)} \overset{①}{=} \frac{15}{2k-1} - \frac{15}{2k+5}.$$

розкладаємо загальний член ряду на суму елементарних дробів

Отже,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{15}{2k-1} - \frac{15}{2k+5} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{15}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{15}{2k+5}.$$

Оскільки,

$$\frac{(2k+5)-(2k-1)}{2} = 3,$$

то відчепімо від першої суми 3 перших доданки, а від другої — 3 останніх:

$$S_n = 15 + 5 + 3 + \sum_{k=4}^{n} \frac{15}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-3} \frac{15}{2k+5} - \frac{15}{2n+1} - \frac{15}{2n+3} - \frac{15}{2n+5}.$$

Замінімо індекс підсумовування у першій сумі $l = k-3, k = l+3$:

$$S_n = 23 + \left(\underbrace{\sum_{l=1}^{n-3} \frac{15}{2l+5} - \sum_{k=1}^{n-3} \frac{15}{2k+5}}_{\text{суми різняться лише позначеням індексу}} \right) - \frac{15}{2n+1} - \frac{15}{2n+3} - \frac{15}{2n+5} =$$

$$= 23 - \left(\frac{15}{2n+1} + \frac{15}{2n+3} + \frac{15}{2n+5} \right).$$

[***Крок 3.*** *Знаходимо* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.]

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(23 - \left(\frac{15}{2n+1} + \frac{15}{2n+3} + \frac{15}{2n+5} \right) \right) = 23.$$

[***Крок 4.*** *Висновуємо про збіжність чи розбіжність ряду.*]

Ряд збігається до суми $S = 23$.

Коментар. ① Для розкладання використовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

1.3.2. Користуючись означенням, дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^{2n}}$.

Розв'язання*. *[12.1.2.]

1. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(-1)^k}{3^{2k}} + \frac{2^k}{3^{2k}} \right)$.

2. $a_n = \frac{(-1)^n}{3^{2n}} + \frac{2^n}{3^{2n}} = \left(-\frac{1}{9} \right)^n + \left(\frac{2}{9} \right)^n$;

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{9} \right)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{9} \right)^k}_{\text{підсумовуємо геометричні прогресії за формулою [A.1.6]}} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{9} \right)^n}{1 + \frac{1}{9}} + \frac{1 - \left(\frac{2}{9} \right)^n}{1 - \frac{2}{9}}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{7} = \frac{153}{70}$.

4. Ряд збігається до суми $S = \frac{153}{70}$.

1.3.3. Користуючись означенням, дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Розв'язання*. *[12.1.2.]

Часткові суми ряду:

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots \Leftrightarrow S_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Оскільки така послідовність границі не має ①, то ряд розбігається.

Коментар. ① Якщо границя послідовності існує, то вона єдина.

1.3.4. Користуючись означенням, дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1}.$$

***Розв'язання**. [12.1.2.]*

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 - k + 1}.$

2. Правдива рівність:

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} = \frac{n - (n-1)}{1 + n(n-1)} = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} n) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(n-1))}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} n)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(n-1))} =$$
$$= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n-1)),$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1} = \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n-1).$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{arctg} k - \operatorname{arctg}(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} k - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}(k-1) =$$
$$= \operatorname{arctg} n + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arctg} k - \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \operatorname{arctg}(k-1)}_{\text{замінімо індекс } l = k-1} - \operatorname{arctg} 0 =$$
$$= \operatorname{arctg} n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arctg} k - \sum_{l=1}^{n-1} \operatorname{arctg} l}_{\substack{\text{суми різняться лише позначенням} \\ \text{індексу підсумовування}}} = \operatorname{arctg} n.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}.$

Ряд збігається до суми $S = \frac{\pi}{2}$.

1.4.1. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \operatorname{tg} \frac{4}{3^n}$ на збіжність за допомогою необхідної ознаки збіжності ряду.

***Розв'язання**. [12.1.3.]*

[***Крок 1.** Записуємо загальний член ряду a_n.*]

$$a_n = 3^n \operatorname{tg} \frac{4}{3^n}.$$

[***Крок 2.** Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.*]

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \operatorname{tg} \frac{4}{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3^n \frac{4}{3^n} = 4 \neq 0.$$

[*Крок 3. Висновуємо: ряд розбігається за достатньою ознакою розбіжності*① *або потребує додаткового дослідження.*]
Ряд розбігається за достатньою ознакою розбіжності.
Коментар. ① Невиконання необхідної ознаки збіжності ряду є достатньою ознакою розбіжності ряду.

1.4.2. Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)\ln\frac{n}{n+1}$ на збіжність за допомогою необхідної ознаки збіжності ряду.

Розв'язання. ***[12.1.3.]***

1. $a_n = (n+3)\ln\dfrac{n}{n+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n+3)\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = -\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n+1} \overset{[\text{A.1.1}]}{=} -1 \neq 0.$

3. Ряд розбігається за достатньою ознакою розбіжності.

1.4.3. Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ на збіжність за допомогою необхідної ознаки збіжності ряду.

Розв'язання. ***[12.1.2, 12.1.3.]***

1. $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0.$

Необхідну умову збіжності ряду виконано. Оскільки вона не є достатньою, дослідімо ряд на збіжність за означенням.

$$S_n = \underbrace{\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}}_{\textit{використовуємо властивість логарифма}} = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1);$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty.$$

3. Ряд розбігається за означенням.

1.4.4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\sqrt{n^3+1}-n)}{\sqrt{n^7+1}}$ на збіжність за допомогою необхідної ознаки збіжності ряду.

Розв'язання. [12.1.3.]

1. $a_n = \dfrac{n(\sqrt{n^3+1}-n)}{\sqrt{n^7+1}}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n^3+1-n^2)}{\sqrt{n^7+1}\left(\sqrt{n^3+1}+n\right)} \overset{[\text{A}.1.1]}{=} 0.$

3. Необхідну ознаку збіжності виконано, але через те, що вона не є достатньою, ряд потребує додаткового дослідження.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

1.5. За заданим загальним членом ряду a_n запишіть чотири перших члени ряду, десятий член ряду, $(n+1)$-й член ряду і сам ряд, якщо:

1) $a_n = \dfrac{n}{2^n(n+1)}$; 2) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

1.6. Запишіть можливу формулу загального члену ряду:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+...$; 2) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+...$;

3) $\cos\alpha+\dfrac{\cos 2\alpha}{8}+\dfrac{\cos 3\alpha}{27}+...$; 4) $\dfrac{1}{2\cdot 2}-\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 8}-...$.

1.7. Задано часткову суму ряду S_n. Запишіть ряд і знайдіть його суму, якщо:

1) $S_n = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5^n-1}{5^n}$; 2) $S_n = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

1.8. Знайдіть n-ту часткову суму і суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+3^n}{15^n}$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n+2}{n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi n!}{720}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}$.

1.9. Дослідіть на розбіжність ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{3n^2+\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{3n+\sqrt[3]{n^2}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{\ln(n+1)}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n+3}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,02}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(e^{1/n^2}-1\right)$.

Відповіді

1.5. 1) $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{3}{32}, a_4 = \frac{1}{20}, a_{10} = \frac{10}{11264}, a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}(n+2)}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$;

2) $a_1 = 3, a_2 = a_3 = \frac{9}{2}, a_4 = \frac{27}{8},\ a_{10} = \frac{729}{44800}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

1.6. 1) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 2) $a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$; 3) $a_n = \frac{\cos \alpha n}{n^3}$; 4) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^n}$.

1.7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

1.8. 1) $S = 1$; 2) $S = \frac{1}{2}$; 3) $S = \frac{11}{18}$; 4) $S = \frac{23}{90}$; 5) $S = \frac{3}{2}$; 6) $S = \frac{3}{4}$; 7) розбігається; 8) розбігається; 9) $S = \sin\frac{\pi}{720} + \sin\frac{\pi}{360} + ... + \sin\frac{\pi}{6}$; 10) $S = 1 - \sqrt{2}$;

11) $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, S = \frac{\pi}{4}$.

1.9. 1)–10) Усі розбігаються.

2. Числові ряди з додатними членами

Навчальні задачі

2.1.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$ за першою ознакою порівняння.

Розв'язання*. *[12.2.1.]

[***Крок 1.*** *Записуємо загальний член ряду* a_n.]

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{n^3} > 0.$$

[***Крок 2.*** *Оцінюємо загальний член ряду* a_n *так, щоб можна було застосувати першу ознаку порівняння* [12.2.1.]]

$$a_n \leq \frac{1}{n^3} = b_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $\alpha = 3 > 1$ [12.2.5.]

[***Крок 3.*** *Висновуємо.*]

За першою ознакою порівняння зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.1.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ за першою ознакою порівняння.

Розв'язання*. *[12.2.1.]

1. $a_n = \dfrac{1}{\ln n} > 0.$

2. $b_n = \dfrac{1}{n} \underset{\textit{оскільки } \ln n < n}{\leq} a_n = \dfrac{1}{\ln n} \ \forall n \geq 2.$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ розбігається як гармонічний.

3. За першою ознакою порівняння з розбіжності ряду $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

2.2.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n}$ за другою ознакою порівняння.

Розв'язання*. *[12.2.2.]

[***Крок 1.*** *Записуємо загальний член ряду* a_n.]

$$a_n = \sin\frac{\pi}{4^n} > 0.$$

[***Крок 2.*** *Вибираємо пробний ряд із загальним членом* b_n, *про збіжність (розбіжність) якого відомо або який легше досліджувати. Обґрунтовуємо правильність вибору, досліджуючи* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ *або використовуючи еквівалентності для вибору* b_n.]

$$a_n = \sin\frac{\pi}{4^n} \underset{\textit{оскільки } \frac{\pi}{4^n}\to 0, n\to\infty}{\overset{[A.1.3]}{\sim}} \frac{\pi}{4^n} = b_n, n \to \infty.$$

Або:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{4^n} : \frac{\pi}{4^n} \overset{[A.1.3]}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4^n} = 1 \notin \{0, \infty\}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається як геометричний зі знаменником $0 < q = \frac{1}{4} < 1$ [12.2.5.]

[***Крок 3.*** *Висновуємо.*]

За другою ознакою порівняння зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.2.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ за другою ознакою порівняння.

***Розв'язання**. [12.2.2.]*

1. $a_n = \underset{\substack{\textit{домножуємо і ділимо} \\ \textit{вираз на спряжений}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} > 0.$

2. За пробний ряд вибираємо ряд із загальним членом $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Справді,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \overset{[1.0.1.]}{=} 1 \notin \{0, \infty\}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається як узагальнений гармонічний з показником $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ [12.2.5.]

3. За другою ознакою порівняння з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.3.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^{n+1}}$ за д'Аламберовою ознакою.

***Розв'язання**. [12.2.6.]*

[***Крок 1.*** Записуємо n-й член ряду a_n і $(n+1)$-й член ряду a_{n+1}.]

$$a_n = n \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^{n+1}} > 0, \quad a_{n+1} = (n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^{n+2}}.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^{n+2}}}{n \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^{n+1}}} \overset{[\text{A}.1.3]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\frac{\pi}{3^{n+2}}}{n\,\frac{\pi}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3} < 1.$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо*.]

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається за д'Аламберовою ознакою.

2.3.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{n+3}$ за д'Аламберовою ознакою.

***Розв'язання**. [12.2.6.]*

1. $a_n = \frac{2^n (n+1)!}{n+3} > 0, a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+2)!}{n+4}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+2)!}{n+4} : \frac{2^n (n+1)!}{n+3} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+2)(n+1)!(n+3)}{2^n (n+1)!(n+4)} = \lim_{n\to\infty} 2(n+2) = \infty > 1.$$

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається за д'Аламберовою ознакою.

2.4.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ за радикальною ознакою Коші.

***Розв'язання**. [12.2.7.]*

[***Крок 1.*** *Записуємо загальний член ряду* a_n.]

$$a_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} > 0.$$

[***Крок 2.*** *Знаходимо* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.]

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \overset{[\mathrm{A}.1.1]}{=} \frac{e}{2} > 1.$$

[***Крок 3.*** *Висновуємо.*]

Ряд розбігається за радикальною ознакою Коші.

2.4.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$ за радикальною ознакою Коші.

Розв'язання. *[12.2.7.]*

1. $a_n = \dfrac{1}{\ln^n(n+1)} > 0.$

2. $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$

3. Ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

2.5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ за інтегральною ознакою Коші.

Розв'язання. *[12.2.8.]*

[***Крок 1.*** *Записуємо загальний член ряду* a_n.]

$$a_n = \frac{1}{n\ln^2 n} > 0.$$

[***Крок 2.*** *Будуємо функцію* $f(x)$ *і перевіряємо її неперервність і монотонність.*]

$$\underbrace{a_n = f(n), n = 2, 3, \ldots}_{\text{замінюємо } n \text{ на } x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}.$$

Функція $f(x)$ — неперервна, спадна для $x \geq 2$.

[***Крок 3.*** *Досліджуємо* $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ *на збіжність.*]

$$\underbrace{\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} =}_{\substack{\text{досліджуємо невластивий}\\ \text{інтеграл на збіжність}\\ \text{за означенням}}} \lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Інтеграл збігається.

[***Крок 4.*** *Висновуємо.*]

Ряд збігається за інтегральною ознакою Коші.

2.6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)\ln(n+2)}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші.

***Розв'язання**. [12.2.2, 12.2.8.]*

[*Застосовуємо другу ознаку порівняння, що дає можливість ефективно*① *використати інтегральну ознаку Коші.*]

1. $a_n = \dfrac{1}{(n-1)\ln(n+2)}$.

2. Застосовуємо другу ознаку порівняння [12.2.2]. Оскільки,

$$a_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n+2)} \overset{②}{\sim} b_n = \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)},$$
$$n \to \infty,$$

то ряди $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

3. Застосовуємо інтегральну ознаку Коші до ряду $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$:

$$b_n = f(n), n = 2, 3, ... \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}.$$

Функція $f(x)$ — неперервна, спадна для $x \geq 2$.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} =$$
$$= \lim_{A\to\infty}\left(\ln\left|\ln(x+2)\right|\right)\Big|_2^A = \lim_{A\to\infty}(\ln\ln(A+2) - \ln\ln 4) = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

4. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ розбігається за інтегральною ознакою Коші.

5. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ розбігається за другою ознакою порівняння.

***Коментар**.* ① Застосування інтегральної ознаки Коші відразу ускладнено тим, що невластивий інтеграл не можна було б дослідити на збіжність за означенням (первісна від підінтегральної функції не виражається через елементарні функції).

② Еквівалентність $a_n \sim b_n, n \to \infty$ означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

2.7. Довести рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!} = 0$.

***Розв'язання**. [12.1.3.]*

1. Загальний член досліджуваної послідовності $a = \dfrac{n^n}{(2n)!}$ розгляньмо як загальний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Для дослідження ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ на збіжність застосуймо д'Аламберову ознаку [12.2.6].

$$a_n=\frac{n^n}{(2n)!};\, a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}:\frac{n^n}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{n^n(2n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{n^n(2n+1)(2n+2)(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2(2n+1)}=0<1.$$

3. За д'Аламберовою ознакою ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ збіжний, отже, за необхідною ознакою збіжності ряду [12.1.3] маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

2.8. Дослідіть на збіжність ряд за першою ознакою порівняння:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n+1}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\sin\left(\frac{2+(-1)^n}{6}\pi\right)$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left|\sin 9^n\right|}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\sqrt[3]{n^4}\right|}{\sqrt[3]{n^4}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\arccos\frac{(-1)^n n}{n+2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2.9. Дослідіть на збіжність ряд за другою ознакою порівняння:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{n^2-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n^2-2}{2n+5-n^5}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\dfrac{n^2+4}{n^2+3}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^4\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^3}}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{2^n+n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+2}{4^n-n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)^2$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\operatorname{tg}^5\dfrac{\pi}{\sqrt{n^3}}$.

2.10. Дослідіть на збіжність ряд за д'Аламберовою ознакою:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^n n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{3^n n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n n!}{(2n)!!}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{\underbrace{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}_{n\text{ множників}}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(n!)^3 2^{3n}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

2.11. Дослідіть на збіжність ряд за радикальною ознакою Коші:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{3n+2}{2n+1}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n\dfrac{\pi}{2n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n\dfrac{n}{n+1}$.

2.12. Дослідіть на збіжність ряд за інтегральною ознакою Коші:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$;

3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n \ln\ln n}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln\left(n+1\right) - \ln n}{\ln^2 n}$.

2.13. Доведіть рівність:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n\,!)^2} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n\,!)^n}{n^{n^2}} = 0$.

2.14. Дослідіть на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\ln(2n+3)}} \arcsin \dfrac{\pi}{4n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,3^n}{(2n-1)!!}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n}{5}\right)^n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{3n-1} \left(\dfrac{2n-1}{2n+5}\right)^{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(\sqrt[3]{n^2}+1)(n\sqrt{n}+3)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+2n)}{n^2-n+1}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}+2}$.

Відповіді

2.8. 1) збіжний; 2) розбіжний; 3) розбіжний; 4) збіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) збіжний; 8) збіжний.

2.9. 1) розбіжний; 2) збіжний; 3) розбіжний; 4) збіжний; 5) збіжний; 6) розбіжний; 7) розбіжний; 8) збіжний; 9) розбіжний; 10) збіжний.

2.10. 1) розбіжний; 2) збіжний; 3) збіжний; 4) збіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) розбіжний; 8) збіжний; 9) розбіжний; 10) збіжний.

2.11. 1) збіжний; 2) розбіжний; 3) розбіжний; 4) збіжний; 5) збіжний; 6) розбіжний.

2.12. 1) розбіжний; 2) розбіжний; 3) розбіжний; 4) збіжний.

2.14. 1) розбіжний; 2) розбіжний; 3) збіжний; 4) збіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) збіжний; 8) збіжний.

3. Знакозмінні ряди

Навчальні задачі

3.1.1. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Розв'язання*. *[12.3.1, 12.3.2.]

[***Крок 1.*** *Досліджуємо знакозмінний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [12.3.1] *на абсолютну збіжність, вивчаючи ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ [12.3.2.] *Виписуємо загальні члени цих рядів* a_n *і* $\left|a_n\right|$.**]**

$$a_n=\frac{\sin n\alpha}{n^2};\ \left|a_n\right|=\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|=\frac{\left|\sin n\alpha\right|}{n^2}.$$

Дослідімо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ за першою ознакою порівняння:

$$b_n=\frac{\left|\sin n\alpha\right|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $2>1$ [12.2.5.]

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ збігається за першою ознакою порівняння.

[***Крок 2.*** *Висновуємо про абсолютну збіжність ряду (якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ *збігається) або продовжуємо дослідження (якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ *розбігається).***]**

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно.

***Коментар*.** ① «Коротка» гілка алгоритму.

3.1.2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}$.

Розв'язання*. *[12.3.6.]

1. $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}, \left|a_n\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}\right|=\frac{1}{n7^n}.$

Дослідімо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ за д'Аламберовою ознакою:

$$\left|a_{n+1}\right|=\frac{1}{(n+1)7^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n7^n}{(n+1)7^{n+1}}=\frac{1}{7}<1.$$

За д'Аламберовою ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ збігається.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно.

3.1.3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$.

Розв'язання*. *[12.3.6.]

1. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}, \left|a_n\right| = \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ розбігається як узагальнений гармонічний з показником $\dfrac{1}{3} < 1$ [12.2.2.]

2. Дослідімо знакопочережний ряд за Лейбніцовою ознакою [12.3.3.]:

$$\left|a_n\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \left|a_{n+1}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}, n = 1, 2...$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$ збігається за Лейбніцовою ознакою.

3. **[***Висновуємо.***]** Ряд збігається умовно.

***Коментар*.** ① «Довга» гілка алгоритму.

3.1.4. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання*. *[12.3.6.]

1. $a_n = (-1)^n\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}, \ \left|a_n\right| = \left|(-1)^n\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right| = \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ розбігається за радикальною ознакою Коші (зад. **2.4.1**).

2. З розбіжності за ознакою Коші випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty \neq 0.$$

Необхідна ознака збіжності ряду [12.1.3] не виконана.

3. Заданий ряд розбіжний.

3.1.5. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n + i\sin n}{n^2}$.

Розв'язання*. *[12.3.8.]

[***Крок 1.*** *Досліджуємо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *на абсолютну збіжність, вивчаючи ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$. *Виписуємо* z_n *і* $\left|z_n\right|$.]

$$z_n = a_n + ib_n = \frac{\cos n + i\sin n}{n^2}.$$

$$\left|z_n\right| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $2 > 1$ [12.1.5.]

[***Крок 2.*** *Висновуємо про абсолютну збіжність ряду (якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$ *збігається) або продовжуємо дослідження (якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$ *розбігається).*]

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n + i\sin n}{n^2}$ збігається абсолютно.

3.1.6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+in}{4n^2+1}$.

Розв'язання*. *[12.3.8.]

[***Крок 1.*** *Досліджуємо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = a_n + ib_n$, *на збіжність, вивчаючи ряди* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ [12.3.8.] *Виписуємо* z_n, a_n, b_n.]

$$z_n = \frac{2+in}{4n^2+1} = \frac{2}{4n^2+1} + i\frac{n}{4n^2+1};$$

$$a_n = \frac{2}{4n^2+1}, b_n = \frac{n}{4n^2+1}.$$

[*Досліджуємо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.]

Дослідімо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за другою ознакою порівняння:

$$a_n = \frac{2}{4n^2+1} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} = c_n, n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $2>1$ [12.2.5]; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається за граничною ознакою порівняння.

[*Досліджуємо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.]

Дослідімо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ за другою ознакою порівняння:

$$b_n = \frac{n}{4n^2+1} \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}, n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ розбігається як гармонічний ряд; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається за другою ознакою порівняння.
Ряд з комплексними членами розбігається, оскільки розбігається ряд, складений з уявних частин його членів.

3.2.1. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^6+1}$. Установити скільки членів ряду, треба взяти, щоб забезпечити точність наближення суми ряду його частковою сумою $\alpha = 10^{-3}$. Обчислити суму ряду з точністю $\beta = 10^{-2}$.

Розв'язання. ①

[***Крок 1.*** Досліджуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.]

$$a_n = \frac{n^2}{n^6+1} > 0.$$

Дослідімо ряд за другою ознакою порівняння [12.2.2]:

$$a_n = \frac{n^2}{n^6+1} \sim \frac{1}{n^4} = b_n, n \to \infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається; за другою ознакою порівняння збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[***Крок 2.*** *Оцінюємо залишок ряду*.] ②

$$f(n) = \frac{n^2}{n^6+1}, n = 1,2,3,\ldots \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x^6+1}.$$

Дослідімо функцію $f(x)$ на монотонність для $x \ge 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(1-2x^6)}{\left(x^6+1\right)^2} < 0, x \ge 1 \Rightarrow f(n) \downarrow n \ge 1.$$

$$R_n \le \int_n^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_n^b \frac{x^2dx}{x^6+1} \le \lim_{b\to\infty}\int_n^b \frac{x^2dx}{x^6} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{3b^3}\right) = \frac{1}{3n^3}.$$

[***Крок 3.*** *Визначаємо скільки членів ряду треба взяти, щоб забезпечити потрібну точність.*]

$$\frac{1}{3n^3} < 0,001 \Rightarrow n > \frac{10}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow n \geq 7.$$

$$\frac{1}{3n^3} < 0,01 \Rightarrow n > \sqrt[3]{\frac{100}{3}} \Rightarrow n \geq 4.$$

[***Крок 4.*** *Обчислюємо суму ряду із заданою точністю, беручи у проміжних обчисленнях хоча б на один знак після коми більше, ніж вимагається.*]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6+1} \approx S_4 \approx 0,500 + 0,061 + 0,012 + 0,004 \approx 0,58.$$

Коментар. ① Для наближеного обчислення суми S збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ покладають

$$S \cong S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

нехтуючи залишком ряду $R_n = S - S_n$. Щоб оцінити похибку наближення, треба оцінити залишок ряду.

② Для збіжних «додатних» рядів, члени яких спадають починаючи з $(n+1)$ правдива така оцінка залишку

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

3.2.2. Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$. Встановити скільки членів ряду, треба взяти, щоб забезпечити точність $\alpha = 10^{-4}$. Обчислити суму ряду з точністю $\beta = 10^{-2}$.

Розв'язання. [12.3.3.]

1. Дослідімо знакопочережний ряд із загальним членом, модуль якого $a_n = \frac{1}{(2n+1)^3}$, на збіжність за допомогою Лейбніцевої ознаки [12.3.3]:

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^3} \geq a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)^3}, n = 1, 2, ...$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0.$$

Ряд збігається за Лейбніцевою ознакою.

2. ① $\left| R_n \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^3}$.

3. $\dfrac{1}{(2n+3)^3} < 0,0001 \Rightarrow n \geq 10;$

$$\frac{1}{(2n+3)^3} < 0,01 \Rightarrow n \geq 1.$$

4. $S \approx S_1 = 0,04.$

Коментар. ① Для збіжних знакопочережних рядів правдива оцінка

$$\left|R_n\right| \leq \left|a_{n+1}\right|.$$

3.2.3. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$. Обчислити суму ряду з точністю $\beta = 10^{-3}$.

Розв'язання.

1. Ряд збігається за д'Аламберовою ознакою.

2. $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+2)!} + \ldots =$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right)}_{\text{геометричний ряд}}.$$

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}.^{①}$$

3. $\dfrac{1}{n \cdot n!} < 0,001 \Rightarrow n \geq 6.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!} \approx S_6 = 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{6!} \approx 1,718.$

Коментар. ① Для рядів з додатними членами не існує загальних формул оцінки залишку ряду.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

3.3. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+3}{n^2+4};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)};$

4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln\ln n};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{2n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{(2n)!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{2^n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^2}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\dfrac{3^n n!}{\left(2n+2\right)!!}$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{(2n-1)\pi}{4}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(2+i)^n}{3^n}$; 16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{3^n}+\dfrac{(-1)^n i}{n^2}\right]$.

3.4. Знайдіть наближено (з точністю $0,01$) суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

3.5. Визначіть, скільки треба взяти членів ряду, щоб з точністю до $0,001$ обчислити суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$.

Відповіді

3.3. 1) збіжний абсолютно; 2) збіжний умовно; 3) збіжний умовно ;4) збіжний умовно; 5) розбіжний; 6) збіжний абсолютно; 7) розбіжний; 8) розбіжний; 9) збіжний умовно; 10) збіжний абсолютно; 11) збіжний абсолютно; 12) збіжний абсолютно; 13) розбіжний; 14) розбіжний; 15) збіжний абсолютно; 16) збіжний.

3.4. 1) $0,28$; 2) $0,62$.

3.5. 1) 3 члени; 2) 7 членів.

4. Функціональні ряди

Навчальні задачі

4.1.1. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

***Розв'язання**. [12.4.1.]*

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення ряду.*]

Область означення ряду — множина $\mathbb{R}$.

[***Крок 2.*** *Досліджуємо ряд на абсолютну збіжність.*]

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| x^{n-1} \right|$ — геометричний. Для $\left| x \right| < 1$ він збігається, а для $\left| x \right| \geq 1$ — розбігається.

[***Крок 3.*** *Досліджуємо ряд на збіжність у межових точках області абсолютної збіжності.*]

При $x = \pm 1$ ряди $1 + 1 + 1 + \ldots$ та $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ — розбігаються.

[***Крок 4.*** *Записуємо відповідь.*]

Область абсолютної збіжності ряду: $(-1; 1)$.

4.1.2. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

***Розв'язання**. [12.4.1.]*

1. Область означення ряду: проміжок $(0; +\infty)$.
2. Досліджуємо ряд на абсолютну збіжність за ознакою Коші:

$$\left| a_n \right| = \left| \ln^n x \right|;$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| a_n \right|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \ln x \right|^n} = \left| \ln x \right|.$$

Ряд збігатиметься для всіх x, для яких:

$$\left| \ln x \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Rightarrow \frac{1}{e} < x < e.$$

І розбігатиметься для всіх x таких, що

$$\left| \ln x \right| > 1 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{e} \right) \cup \left(e; +\infty \right).$$

3. Для $x = \dfrac{1}{e}$ ряд $-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ — розбігається.

Для $x = e$ ряд $1 + 1 + 1 + \ldots$ — розбігається.

4. Область абсолютної збіжності ряду: $\left(\dfrac{1}{e}; e \right)$.

4.1.3. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

Розв'язання*. *[12.4.1.]
1. Область означення ряду: $\mathbb{R}$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ узагальнений гармонічний [12.3.5.] Він збігається для $x > 1$ і розбігається для $x \le 1$.

3. Для $x \in (0;1]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ збігається умовно за Лейбніцовою ознакою:

$$a_n = \frac{1}{n^x}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x} = 0, \quad \frac{1}{n^x} > \frac{1}{(n+1)^x}.$$

Область збіжності ряду: $(0;+\infty)$.

4.1.4. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k 2^{kx}$.

Розв'язання*. *[12.4.1.]
1. Область означення ряду — множина $\mathbb{R}$.
2. Досліджуємо ряд за ознакою Коші:

$$\left|a_k\right| = a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k 2^{kx};$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k 2^{kx}} = 2^x.$$

Ряд збігається для таких x, що $2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Ряд розбігається для таких x, що $2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

3. Для $x = 0$ маємо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$.

Загальний член прямує до числа e [A.1.1], а отже, він розбігається за достатньою ознакою розбіжності ряду.
4. Область збіжності ряду: $\left(-\infty;0\right)$.

4.2. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+x^2}$ збігається рівномірно за ознакою Веєрштраса.

Розв'язання*. *[12.4.3.]
[*Будуємо збіжну мажоранту для функціонального ряду.***]**

Для всіх значень x маємо

$$\frac{1}{n^3+x^2} \le \frac{1}{n^3}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ є мажорантою [12.4.3] заданого ряду.

Мажоранта збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $3>1$ [12.2.5.]

За ознакою Веєрштраса ряд збігається рівномірно на всій числовій осі $(-\infty;+\infty)$.

4.3. Показати, що функція $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ неперервна на всій числовій осі і що ряд можна інтегрувати на будь-якому відрізку $[0;x]$.

Розв'язання*. *[12.4.5.]

$$\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Для всіх x за мажоранту [12.4.3] заданого функціонального ряду можна взяти збіжний числовий ряд із загальним членом $\frac{1}{n^4}$. Отже, заданий функціональний ряд збігається рівномірно на всій числовій осі.

Оскільки члени ряду неперервні на всій осі функції, отже, $f(x)$ неперервна на всій осі [12.4.5.]

Завдяки рівномірній збіжності, ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому інтервалі [12.4.5]:

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n^4}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x \frac{\sin nt}{n^4}dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int\limits_0^x \sin nt dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\left.\frac{-\cos nt}{n}\right|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^5}.$$

4.4. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x(1-x)^n,\ 0\le x\le 1.$

***Розв'язання*.**

Нехай $S(x)$ — сума заданого ряду. $S(0)=S(1)=0$. Для фіксованого $x\in(0;1)$ заданий ряд

$$S(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$$

є геометричним зі знаменником $1-x$, тобто

$$S(x)=x\frac{1}{1-(1-x)}=1,\ 0<x<1.$$

Отже,

$$S(x)\overset{①}{=}\begin{cases}0, & x=0, x=1,\\ 1, & 0<x<1.\end{cases}$$

Коментар. ① Хоча кожна з функцій $u_n(x)=x(1-x)^n\in C_{[0;1]}$, сума ряду $S(x)$ виявилась розривною.

4.5. Дослідити властивості суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}$.

***Розв'язання**. [12.4.5.]*

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n:\left|\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}.$$

Мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збігається, отже розглядуваний ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ за ознакою Веєрштраса [12.4.3.].

1. Сума ряду $S(x)$ — функція неперервна [12.4.5].

2. Ряд його можна інтегрувати почленно на довільному проміжку [12.4.5]:

$$\int\limits_0^x S(t)dt=\int\limits_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n\pi t}{2^n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x\frac{\sin 2^n\pi t}{2^n}dt=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n\pi t}{4^n\pi}\Bigg|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2^n\pi x}{4^n\pi}.$$

3. Утворімо ряд з похідних: $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2^n\pi x$. Оскільки він розбігається (не виконується необхідна ознака збіжності ряду), то вихідний ряд не можна почленно диференціювати [12.4.5.]

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

4.6. Знайдіть область збіжності функціонального ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sqrt{x-1}e^{-\frac{n}{x}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x-e}}\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x^2)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

4.7. Знайдіть область рівномірної збіжності функціонального ряду:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}}$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+\cos nx}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

4.8. Доведіть, що ряд збігається рівномірно у зазначеному проміжку:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$, $x\in[0;+\infty)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $x\in[0;+\infty)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $x\in[0;+\infty)$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{\sqrt{n^3+1}}$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin x+\cos x)^n}{2^n}$, $x\in(-\infty;+\infty)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^2+\sqrt[3]{n^5}}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

4.9. Доведіть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ рівномірно збіжний на всій числовій осі, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ хоча і скрізь збіжний, але нерівномірно.

4.10. З'ясуйте чи можна почленно диференціювати та інтегрувати ряд в області його збіжності:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^5}$.

Відповіді

4.6. 1) $[1;+\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$; 4) $(-\sqrt{3};-1)\cup(1;\sqrt{3})$; 5) $(-2;2)$; 6) $(-1;1)$; 7) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 8) $(-\infty;0)$; 9) $[0;+\infty)$; 10) $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; 11) $\left(\dfrac{1}{e};e\right)$;

12) $\left[-\dfrac{\pi}{6}+\pi k;\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right], k\in\mathbb{Z}$.

4.7. 1) $\mathbb{R}$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $\mathbb{R}$.

4.10. 1) можна; 2) можна.

5. Степеневі ряди

Навчальні задачі

5.1.1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(x-2)^n}{n^2}$.

***Розв'язання**. [12.5.6.]*

[***Крок 1.*** *Досліджуємо степеневий ряд на абсолютну збіжність за д'Аламберовою ознакою.*]

$$\left|u_n(x)\right|=\frac{3^n\left|x-2\right|^n}{n^2};\quad \left|u_{n+1}(x)\right|=\frac{3^{n+1}\left|x-2\right|^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)^2}=3\left|x-2\right|.$$

Ряд збігається абсолютно для всіх x, для яких

$$3\left|x-2\right|<1\Rightarrow\left|x-2\right|<\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right).$$

[***Крок 2.*** *Досліджуємо ряд на кінцях інтервалу збіжності.*]

Для $x=\dfrac{5}{3}$ маємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Він абсолютно збіжний (ряд з модулів — узагальнений гармонічний ряд з показником $2>1$ [12.2.5.]

Для $x=\dfrac{7}{3}$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, який збігається.

[***Крок 3.*** *Записуємо відповідь.*]

Область абсолютної збіжності: $\left[\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right]$.

5.1.2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n\,!}x^{3n}$.

***Розв'язання**. [12.5.6.]*

1. Дослідімо степеневий ряд на абсолютну збіжність за д'Аламберовою ознакою:

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{n^n}{n\,!}\left|x\right|^{3n};\left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,!}\left|x\right|^{3n+3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|x\right|^3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n\,!}\cdot\frac{n\,!}{n^n} =$$

$$= \left|x\right|^3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left|x\right|^3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left|x\right|^3.$$

Ряд збігається абсолютно для всіх x таких, що

$$e\left|x\right|^3 < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{e}};\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right).$$

2. Для $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n\,!}e^n$.

За Стірлінґовою формулою [А.1.7] маємо:

$$\frac{n^n}{n\,!\,e^n} \sim \frac{e^n n^n}{n^n e^n\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0, n \to \infty.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ — розбігається як узагальнений гармонічний з показником $\dfrac{1}{2} < 1$ [12.2.5], то за ознакою порівняння розбігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{e^n n\,!}$.

Для $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ дістаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$. Дослідімо послідовність $a_n = \dfrac{n^n}{e^n n!}$ на монотонність:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(n+1\right)^{n+1}}{e^{n+1}\left(n+1\right)!}\cdot\frac{e^n n!}{n^n} = \frac{\left(n+1\right)^n}{en^n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

оскільки послідовність $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно зростає і за теоремою Веєрштраса $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n = e$.

Отже, $a_{n+1} < a_n, n \in \mathbb{N}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$ збігається умовно за Лейбніцевою ознакою [12.3.3].

3. Область збіжності ряду: $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$.

5.1.3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}$.

***Розв'язання**. [12.5.6.]*

1. Дослідімо степеневий ряд на абсолютну збіжність за радикальною ознакою Коші [12.2.7]:

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{\left|x-1\right|^n}{2^n n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|u_n(x)\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|x-1\right|}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{\left|x-1\right|}{2}.$$

Ряд збігається абсолютно для всіх x таких, що

$$\frac{\left|x-1\right|}{2} < 1; \ \left|x-1\right| < 2 \Leftrightarrow x \in (-1;3).$$

2. Для $x = 3$ дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається як гармонічний [12.2.5.]

Для $x = -1$ дістаємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — розбігається.

$$\frac{1}{n} \to 0, n \to \infty; \ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ збігається умовно за Лейбніцовою ознакою [12.3.3.]

3. Область збіжності ряду: $[-1;3)$.

5.1.4. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

***Розв'язання**. [12.5.6.]*

1. Досліджуємо степеневий ряд на абсолютну збіжність за д'Аламберовою ознакою [12.2.6]:

$$\left|u_n(x)\right| = n!\left|x\right|^n; \ \left|u_{n+1}(x)\right| = (n+1)!\left|x\right|^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|x\right| \frac{(n+1)n!}{n!} = \begin{cases} \infty, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2. Ряд збігається в точці $x = 0$.

5.1.5. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+n^2)(x-1)^n}$.

Розв'язання.

Ряд зводиться до степеневого заміною $y=\frac{1}{x-1}, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+n^2)}y^n,\ y\neq 0.$$

1. Досліджуємо степеневий ряд на абсолютну збіжність за д'Аламберовою ознакою [12.2.6]:

$$\left|u_n(y)\right|=\frac{n\left|y\right|^n}{n^2+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)}\right|=\left|y\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{n}=\left|y\right|.$$

Ряд збігається абсолютно для всіх y таких, що

$$\left|y\right|<1\Leftrightarrow y\in(-1;1).$$

2. Для $y=1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ розбігається, оскільки

$$a_n=\frac{n}{1+n^2}\sim\frac{1}{n}, n\to\infty.$$

Для $y=-1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ збігається умовно за Лейбніцовою ознакою (ряд з модулів розбігається).

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+n^2)}y^n$ збігається абсолютно всередині $(-1;0)\cup(0;1)$ та умовно в точці $y=-1$.

4. Область збіжності ряду: $(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$.

5.2.1 Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$ і вказати його область збіжності.

***Розв'язання*. [12.5.7.]**

Ряд збігається абсолютно для $\left|x\right|<1$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n-8\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+5\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2f_1(x)-8f_2(x)+5f_3(x).$$

$$f_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\overset{[12.7.7]}{=}\frac{1}{1-x},\left|x\right|<1.$$

$$\int_0^x f_2(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},\left|x\right|<1.$$

$$f_2(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$\int_0^x\left(\int_0^{\tau}f_1(t)dt\right)d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x},\left|x\right|<1.$$

$$f_1(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},\left|x\right|<1.$$

Отже,

$$S(x)=\frac{4}{(1-x)^3}-\frac{8}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-x}=\frac{5x^2-2x+1}{(1-x)^3},\left|x\right|<1.$$

5.2.2 Знайдіть суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}$ і вкажіть його область збіжності.

***Розв'язання**. [12.5.7.]*

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}.$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{4n+3}\right)'}{(4n-1)(4n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{4n-1}=-x^2+x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1},$$
$$\left|x\right|<1;S(0)=0.$$

$$\left(G(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^{4n-1}\right)'}{4n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{4k+2}=\frac{x^2}{1-x^4},$$
$$\left|x\right|<1;G(0)=0.$$

$$G(x)=\int_0^x\frac{t^2dt}{1-t^4}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

$$S(x)=\int_0^x\left(\frac{t^3}{4}\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{t^3}{2}\operatorname{arctg}t\right)dt-\frac{x^3}{3}=$$
$$=\frac{(x^4-1)}{16}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-2\operatorname{arctg}x\right)-\frac{x^3}{4}.$$

Отже,

$$S(x)\overset{①}{=}\frac{(x^4-1)}{16}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-2\operatorname{arctg}x\right)-\frac{x^3}{4},\left|x\right|<1.$$

Коментар. ① Можна показати за означенням, що в точці $x=1$ ряд збігається до $S=-\dfrac{1}{4}$, а в точці $x=-1$ до $S=\dfrac{1}{4}$. Отже, повна відповідь така:

$$S(x)=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{4}, & x=\mp 1,\\ \dfrac{(x^4-1)}{16}\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2\operatorname{arctg}x\right)-\dfrac{x^3}{4}, & \left|x\right|<1.\end{cases}$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

5.3. Знайдіть область збіжності ряду:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}x^n$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{n}3^n}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}5^n}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{4^n n\ln^2 n}$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n-1}}{3^n}$;

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!}x^n$;

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)\,!!}{(2n+1)\,!!}x^n$;

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\,!(x-2)^n$;

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$;

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

5.4. Знайдіть круг збіжності ряду:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^{2n}}{n^2}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+i}\right)^n(z-i)^n$.

5.5. Знайдіть суму ряду і вкажіть його область збіжності:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n;$ 2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{2n+1};$ 4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}.$

Відповіді

5.3. 1) ряд збігається абсолютно при $\left|x+1\right|\le 2;$ 2) ряд збігається абсолютно при $\left|x\right|<4;$
3) ряд збігається абсолютно при $\left|x-1\right|<3$ і умовно в точці $x=-2;$
4) ряд збігається абсолютно при $\left|x+2\right|<5$ і умовно в точці $x=-7;$
5) ряд збігається абсолютно при $\left|x\right|\le 2;$ 6) ряд збігається абсолютно при $\left|x+2\right|<\sqrt{3};$
7) ряд збігається абсолютно при $\left|x\right|<4;$
8) ряд збігається абсолютно при $\left|x\right|<1$ і умовно при $x=-1;$
9) ряд збігається тільки в точці $x=2;$ 10) ряд збігається абсолютно для $x\in\mathbb{R};$
11) ряд збігається абсолютно для $\left|x\right|<\dfrac{1}{e};$ 12) ряд збігається абсолютно для $\left|x\right|\le 1$.

5.4. 1) $\left|z+2i\right|<1;$ 2) $\left|z-i\right|<3$.

5.5. 1) $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}, \left|x\right|<1;$ 2) $f(x)=\dfrac{2x}{(1-x)^3}, \left|x\right|<1;$
3) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x-x^2, \left|x\right|\le 1;$ 4) $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x, \left|x\right|<1.$

6. Тейлорові ряди

Навчальні задачі

6.1.1. Розвинути в Тейлорів ряд за степенями x функцію $f(x)=2^x$.

***Розв'язання**. [12.6.3, 12.7.1.]* ①
[*Перетворюємо функцію і використовуємо табличне розвинення.***]**

$$2^x = e^{x\ln 2} \overset{[12.7.1]}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n, x\in\mathbb{R}.$$

***Коментар**.* ① Можливість «формального» розвинення функцій у Тейлорів ряд ґрунтується на теоремі єдиності [12.6.3.]

6.1.2. Розвинути в Тейлорів ряд за степенями x функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}$.

Розв'язання. ***[12.6.3, 12.7.8.]***

$$\frac{1}{1+2x^2} \overset{[12.7.8]}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}, \left|x\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6.1.3. Розвинути в Тейлорів ряд за степенями x функцію $f(x) = \sqrt[3]{27+x^2}$.

Розв'язання. ***[12.6.3, 12.7.6.]***

$$\sqrt[3]{27+x^2} = 3\left(1+\frac{x^2}{27}\right)^{1/3} \underset{\alpha=\frac{1}{3}}{\overset{[12.7.6]}{=}}$$

$$= 3\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}\frac{x^2}{27} + \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{27}\right)^2 + \ldots + \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{x^2}{27}\right)^n + \ldots\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{1!\,3^3}x^2 + \frac{1\cdot 2}{2!\,3^7}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (4-3n)}{n!\,3^{4n-1}}x^{2n} + \ldots,$$

$$\left|\frac{x^2}{27}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|x\right| < \sqrt{27}.$$

6.1.4. Розвинути в Тейлорів ряд за степенями x функцію $f(x) = \sin^3 2x$.

Розв'язання. ***[12.6.3, 12.7.2.]***

$$\sin^3 2x = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x \overset{[12.7.2]}{=}$$

$$= -\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4^n-36^n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

6.1.5. Розвинути в Тейлорів ряд за степенями x функцію $f(x) = \arcsin x$.

Розв'язання. ***[12.6.3, 12.7.6, 12.7.7.]***

[*Виражаємо функцію $f(x)$ через інтеграл або похідну від функції, яку можна розвинути в Тейлорів ряд.***]**

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

[*Розвиваємо функцію* $f(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ *у Тейлорів ряд* [12.7.6.] *і інтегруємо його всередині інтервалу збіжності.*]

$$\int_0^x\left(1-\frac{-\frac{1}{2}}{1!}t^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^4+...+(-1)^n\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}t^{2n}+...\right)dt=$$

$$=x+\frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\frac{x^5}{5}+...+\frac{1\cdot 3\cdot ...(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot ...(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\overset{[\text{A.1.5}]}{=}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\left|x\right|<1.$$

6.1.6. Розвинути в Тейлорів ряд за степенями x функцію $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

***Розв'язання**. [12.6.3, 12.7.8.]*

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'.$$

[*Розвиваємо функцію* $-\dfrac{1}{1+x}$ *у Тейлорів ряд* [12.7.8.] *і диференціюємо його всередині інтервалу збіжності.*]

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\left(-\frac{1}{1+x}\right)'\underset{[12.5.7]}{\overset{[12.7.8]}{=}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^n\right)'=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1},\left|x\right|<1.$$

6.2.1. Розвинути в ряд за степенями $(x+2)$ функцію $f(x)=e^x$ і вказати область збіжності одержаного розвинення.

***Розв'язання**. [12.6.3, 12.7.1.]*

$$e^x=e^{-2}\cdot e^{x+2}\overset{[12.7.1]}{=}e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!},x\in\mathbb{R}.$$

6.2.2. Розвинути в ряд за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ функцію $f(x)=\sin x$ і вказати область збіжності одержаного розвинення.

***Розв'язання**. [12.6.3, 12.7.2, 12.7.3.]*

$$\sin x=\sin\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\underset{\text{використовуємо формулу синуса суми}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n},x\in\mathbb{R}.$$

6.2.3. Розвинути в ряд за степенями $(x-1)$ функцію $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ і вказати область збіжності одержаного розвинення.

***Розв'язання*. [12.6.3, 12.7.8.]**

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}\overset{[12.7.8]}{=}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n,\ \ \left|x-1\right|<3.$$

6.2.4. Розвинути в ряд за степенями $(x-2)$ функцію $f(x)=\ln(1+3x)$ і вказати область збіжності одержаного розвинення.

***Розв'язання*. [12.6.3, 12.7.9.]**

$$\ln(1+3x)=\ln(7+3(x-2))=\underbrace{\ln 7\left(1+\frac{3}{7}(x-2)\right)}_{\textit{використовуємо властивість логарифма}}=$$

$$\overset{[1.7.9]}{=}\ln 7+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}(x-2)^{n+1},\ \ \left|x-2\right|<\frac{7}{3}.$$

6.3.1. Обчислити $\sqrt[4]{e}$ з точністю до $\varepsilon=10^{-5}$.

***Розв'язання*. [12.6.1, 12.7.1.]**[①]

Підставляючи в розвинення функції $f(x)=e^x$ у ряд Тейлора — Маклорена [12.7.1] $x=\dfrac{1}{4}$, одержимо ряд:

$$\sqrt[4]{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n n!}.$$

Оцінюємо похибку наближення суми ряду $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ його частковою сумою S_n:

$$\left|R_n(x)\right|<\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+2)!}+\ldots=$$

$$=\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{\left|x\right|}{n+2}+\frac{\left|x\right|^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\underbrace{\left(1+\frac{\left|x\right|}{n+1}+\frac{\left|x\right|^2}{(n+1)^2}+\ldots\right)}_{\textit{геометричний ряд}}\overset{[12.2.3]}{=}\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{\left|x\right|}{n+1}}=\frac{\left|x\right|^{n+1}}{n!}\frac{1}{n+1-\left|x\right|}.$$

[*Визначаємо скільки треба взяти членів ряду, щоб забезпечити задану точність наближення.***]**

$$\left|R_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{1}{n!\,4^n\left(n+1-\frac{1}{4}\right)} < 10^{-5} \Rightarrow n \geq 4.$$

$$\sqrt[4]{e} \approx \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{4^n n!} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384} + \frac{1}{6144} \approx$$

$$\approx 1,000000 + 0,250000 + 0,031250 + 0,002604 + 0,000162 \approx 1,28403.$$

Коментар. ① Для наближеного обчислення використаємо відповідний Тейлорів ряд.

6.3.2. Обчислити $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$.

***Розв'язання**. [12.7.2, 12.5.7, 12.6.1.]*①

[*Розвиваємо підінтегральну функцію у степеневий ряд, який збігається для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.***]**

$$\frac{\sin x}{x} \overset{[12.7.2]}{=} \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

[*Інтегруючи розвинення, дістаємо знакопочережний ряд.***]**

$$\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int\limits_0^2 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

[*Оцінимо похибку наближення суми знакопочережного ряду його частковою сумою.***]**

$$\left|R_n\right| \overset{[12.3.3]}{<} \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!}.$$

[*Визначаємо скільки членів ряду треба взяти, щоб одержати потрібну точність.***]**

$$\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!} < 0,001 \Rightarrow n \geq 3.$$

$$\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} = 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} + \frac{32}{5\cdot 5!} - \frac{128}{7\cdot 7!} \approx 1,605.$$

Коментар. ① Первісна для функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не виражається в елементарних функціях. Можливість зінтегрувати степеневе розвинення для функції $f(x)$ дозволяє подолати цю складність. Наближене обчислення такого інтеграла виявляється не складніше, ніж наближене обчислення значень синуса.

6.4. Знайти перших чотири члени розвинення в Тейлорів ряд розв'язку задачі Коші: $y' = y^2 + e^x - 2, y(0) = 2.$

***Розв'язання*. [12.6.1.]**

Оскільки початкову умову задано в точці $x = 0,$ то розвинення розв'язку шукатимемо за степенями x:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

[*Значення $y'(0)$ знаходимо підставляючи в диференціальне початкову умову: $x = 0, y = 2.$***]**

$$y'(0) = 3.$$

[*Диференціюємо диференціальне рівняння за змінною x, пам'ятаючи, що $y = y(x)$, і підставляємо початкові умови: $x = 0, y = 2, y' = 3.$***]**

$$y''(x) = 2yy' + e^x; \;\; y''(0) = 13.$$

$$y'''(x) = 2(y')^2 + 2yy'' + e^x; \;\; y'''(0) = 71.$$

Шукане розвинення:

$$y(x) = 2 + 3x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{71}{6}x^3 + \ldots.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

6.5. Розвиньте в Тейлорів ряд за степенями $(x - x_0)$ функцію $f(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = -2;$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, x_0 = -1;$

3) $f(x) = \sqrt{x^3}, x_0 = 1;$ 4) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4;$

5) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$ 6) $f(x) = \ln(x+2), x_0 = -1;$

7) $f(x) = \cos x, x_0 = \dfrac{\pi}{4};$ 8) $f(x) = 2^x, x_0 = 3;$

9) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}, x_0 = 0;$ 10) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)^2}, x_0 = 0;$

11) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2), x_0 = 0;$ 12) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), x_0 = 0.$

6.6. Користуючись Тейлоровим рядом, обчисліть з точністю до 10^{-4}:

1) $\sqrt[3]{150};$ 2) $\sqrt[10]{1027};$

3) $\sin 0,5$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

6.7. Обчисліть з точністю до 10^{-3}:

1) $\int\limits_0^{1/3} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 2) $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$;

3) $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+x)dx}{x}$; 4) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2} dx$.

6.8. Знайдіть розвинення у степеневий ряд (до вказаного степеня) розв'язку задачі Коші:

1) $y' = x^2 - y^2, y(1) = 2$, до $(x-1)^2$;

2) $y' = y + xe^y, y(0) = 0$, до x^4;

3) $y'' = xy^2 - y', y(0) = 2, y'(0) = 1$, до x^4;

4) $y'' = yy' - x^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$, до x^3.

6.9. Знайдіть похідні вказаного порядку від функції $f(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{5x+3}, f^{(6)}(1)$; 2) $f(x) = x\sin x, f^{(99)}(0)$.

6.10. Покажіть, що ланцюгову лінію $y = \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $\left(a = \dfrac{H}{q}, H\right.$ — горизонтальний натяг нитки, q — вага одиниці довжини нитки) можна замінити параболою, якщо x мале порівняно з a. Записати рівняння цієї параболи.

Відповіді

6.5. 1) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{2^{n+1}}, \left|x+2\right| < 2$;2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{n-1}}{2^n}, \left|x+1\right| < 2$;

3)

$$1+\frac{\frac{3}{2}}{1!}(x-1)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(x-1)^n+\ldots, \left|x-1\right|<1;$$

4) $$2\left[1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{(x-4)}{4}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{(x-4)^2}{4^2}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{2!}\frac{(x-4)^n}{4^n}+\ldots\right];$$

$\left|x-4\right| < 4$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}, x\in(0;2]$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^n, x\in(-2;0]$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\right], x\in\mathbb{R}$;

8) $8\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln^n 2}{n!}(x-3)^n, x\in\mathbb{R}$; 9) $-\dfrac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}}x^n, \left|x\right|<1$;

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+3)x^n, \left|x\right|<1$; 13) $\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+2^{-n})\dfrac{x^n}{n}, x\in[-1;1)$;

14) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \left|x\right|<1$.

6.6. 1) $5,3133$; 2) $2,0006$; 3) $0,4794$; 4) $0,8187$.

6.7. 1) $0,333$; 2) $0,310$; 3) $0,098$; 4) $0,245$.

6.8. 1) $y=2-3(x-1)+7(x-1)^2+\ldots$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{6}+\ldots$;

3) $y=2+x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{1}{8}x^4+\ldots$; 4) $y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{2x^3}{3!}+\ldots$

6.9. 1) $-\dfrac{5625}{256}$; 2) 0.

7. Ряди Фур'є (дійсна форма)

Навчальні задачі

7.1. Побудувати графік суми ряду Фур'є функції $y=x+1,\ x\in[0,2]$.

***Розв'язання**. [12.8.2.]*

Періодично продовжуємо функцію з періодом 2 і враховуємо теорему Діріхле①

$$S(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(0;2),\\ \dfrac{3}{2}, & x=2k, k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$
$$T=2.$$

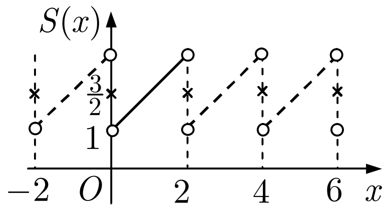


Рис. до зад. 7.1

***Коментар**.* ① Графік суми ряду Фур'є може відрізняється від графіка заданої функції на заданому проміжку значеннями в точках розриву 1-го роду і на кінцях проміжку.

7.2. Продовжити графічно: а) парним, б) непарним чином та в) періодично з періодом $l=\dfrac{\pi}{3}$ функцію $f(x)=\sin 2x-1, x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$.

***Розв'язання**①.*

[*Графічно продовжуємо функцію.*]

Парне продовження — рис. 1; непарне продовження — рис. 2; періодичне продовження — рис. 3.

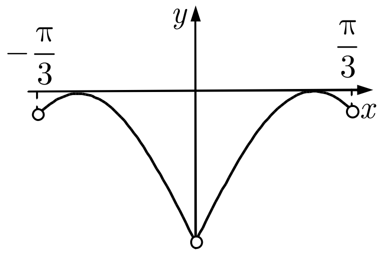


Рис. 1 до зад. 7.2

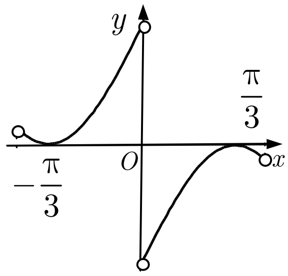


Рис. 2 до зад. 7.2

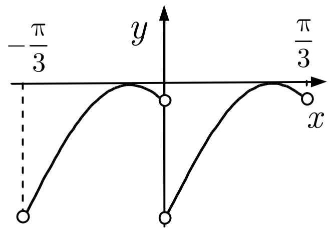


Рис. 3 до зад 7.2

Коментар. ① Графік парної функції симетричний щодо осі Oy; графік непарної симетричний щодо початку координат.

7.3. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$ з періодом π.

Розв'язання. ***[12.9.6.]***

[**Крок 1.** *Від аналітичного задання функції переходимо до графічного.*]. Рис. 1.

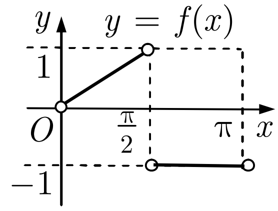


Рис. 1 до зад. 7.3

[**Крок 2.** *Перевіряємо умову Діріхле* [12.8.2] *для функції на заданому проміжку.*] Функція f в інтервалі $(0;\pi)$:

1) кусково-неперервна;
2) обмежена;
3) кусково-монотонна.

[**Крок 3.** *Будуємо графічне розвинення функції f у ряд Фур'є — графік суми ряду Фур'є, враховуючи теорему Діріхле.*] Рис. 2.①

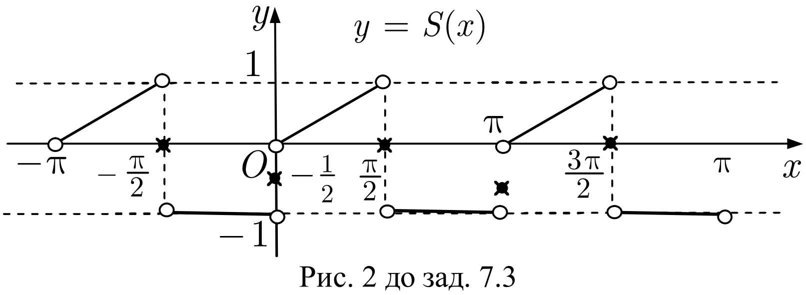


Рис. 2 до зад. 7.3

[**Крок 4.** *Визначаємо за графіком $S(x)$ період розвинення і основну частоту.*].

$T = \pi$; $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2$.

[**Крок 5.** *Записуємо ряд Фур'є з невизначеними коефіцієнтами, підставляючи частоту і враховуючи можливу симетрію графіка $S(x)$.*]②

$$f(x) \overset{[12.9.1]}{\sim} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx.$$

[***Крок 6.*** *Записуємо формули для коефіцієнтів Фур'є і обчислюємо їх.*]

$$a_0 \overset{[12.9.1]}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} xdx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(-1)dx = -\frac{1}{2}.$$

$$a_n \overset{[12.9.1]}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nxdx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} x\cos 2nxdx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos 2nxdx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\ (n = 1, 2...);$$

$$b_n \overset{[12.9.1]}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nxdx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} x\sin 2nxdx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2nxdx = -\frac{1}{\pi n}\ (n = 1, 2, ...).$$

[***Крок 7.*** *Записуємо відповідь, враховуючи теорему Діріхле.*]

$$S(x) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\cos 2nx - \frac{1}{\pi n}\sin 2nx.$$

$$S(x) \overset{[12.8.2]}{=} \begin{cases} f(x), & \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, x = \pi, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad T = \pi.$$

Коментар. ① Будуємо в точках $x \in (a, b)$ неперервності функції $f(x)$ графік $S(x) = f(x)$. Далі продовжуємо побудовану функцію з періодом $(b - a)$, і доозначуємо $S(x)$ в точках розриву (рис. 3 до зад 7.3) за формулою:

$$S(x) = \frac{S(x - 0) + S(x + 0)}{2}.$$

Якщо $S(x_0 - 0) = S(x_0 + 0)$ і раніше $S(x)$ була неозначена в точці x_0, то $S(x_0) = S(x_0 + 0)$, тобто в точці x_0 сума $S(x)$ стає неперервною функцією (рис. 4 до зад 7.3).

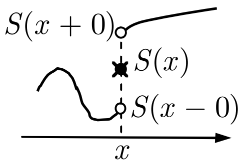


Рис. 3 до зад. 7.3

Рис. 4 до зад. 7.3

② **1.** Якщо графік $y = S(x)$ симетричний щодо осі Oy, тоді усі $b_n = 0$:

$$f(x) \overset{[12.9.2]}{\sim} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 x).$$

2. Якщо графік $y = S(x)$ симетричний щодо точки $A(0; c)$, тоді $\frac{a_0}{2} = c, a_n = 0$:

$$f(x) \overset{[12.9.4]}{\sim} c + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x).$$

І, зокрема, якщо $c = 0$, то:

$$f(x) \overset{[12.9.3]}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x).$$

3. У загальному випадку маємо розвинення:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x).$$

7.4. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \cos 2x, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Розв'язання*. *[12.9.2.]

1. [*Будуємо графік функції $y = f(x)$.*] Рис. 1.

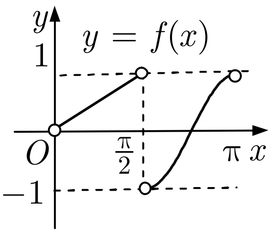


Рис. 1 до зад. 7.4

2. Функція $f(x)$ справджує умови Діріхле на $(0; \pi)$.

3. [*Функцію $f(x)$, яку задано на $(0; b)$, спершу продовжують (графічно) парним чином на $(-b; 0]$ — симетрично щодо Oy.*] Рис. 2.

[*Для допоміжної функції $f_{п}(x)$ на $(-b; b)$ будують графік суми ряду Фур'є $y = S(x)$.*] Рис. 3.

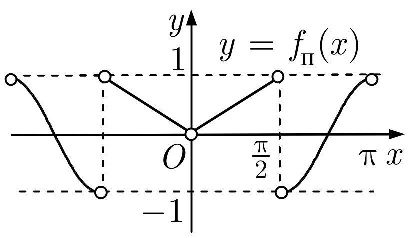


Рис. 2 до зад. 7.4

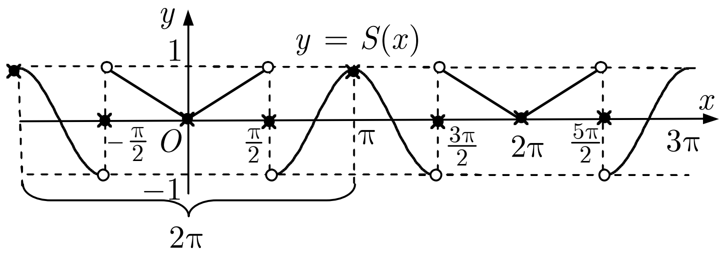


Рис. 3 до зад. 7.4

4. Період розвинення $T = 2\pi$; основна частота $\omega_1 = 1$.

5. $f(x) \overset{[12.9.2]}{\sim} \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$

6. $a_0 \overset{[12.9.2]}{=} \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx;\ \ a_n \overset{[12.9.2]}{=} \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nxdx.$

[*Обчислюємо коефіцієнти.***]**

$$a_0 = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} xdx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos 2xdx = \frac{2}{\pi^2}x^2\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi}\sin 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \underbrace{\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} x\cos nxdx}_{I_1} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos 2x\cos nxdx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}I_1 + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos(n-2)dx}_{I_2} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos(n+2)dx}_{I_3}.$$

Інтеграл I_2 потребує окремого обчислення при $n = 2$. Отже,

$$I_1 = \left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\sin\frac{\pi n}{2}}{2n} + \frac{\cos\frac{\pi n}{2} - 1}{n^2};$$

$$I_3 = \frac{1}{n+2}\sin(n+2)x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{\sin(\frac{\pi n}{2} + \pi)}{n+2} = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n+2}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

$$I_2 = \frac{1}{n-2}\sin(n-2)x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{\sin(\frac{\pi n}{2} - \pi)}{n-2} = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n-2}\ (n = 1, 3, 4, \ldots);$$

$$n = 2 : I_2 = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right)\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi} + \frac{4(\cos\frac{\pi n}{2} - 1)}{\pi^2 n^2} =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left[\frac{n^2-2}{n^2-4}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right)\right],$$

$$n = 1, 3, 4, 5, \ldots$$

$$a_2 = -\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{2}.$$

7. $$S(x) = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2 - 4}{2\pi^2}\cos 2x + \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty}\left[\frac{(n^2-2)\sin\frac{\pi n}{2}}{n(n^2-4)} + \frac{\cos\frac{\pi n}{2} - 1}{\pi n^2}\right]\cos nx.$$

$$S(x) \overset{[12.8.2]}{=} \begin{cases} f(x), & \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \\ f(-x), & \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ 0, & x = 0, x = \pm\frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = \pm\pi, \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

7.5. Розвинути в ряд Фур'є функцію f (рис. 1) за синусами.

***Розв'язання**. [12.9.3.]*

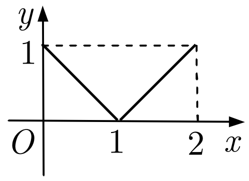


Рис. 1 до зад. 7.5

1. [*Від графічного задання функції $y = f(x)$ переходимо до аналітичного.*]

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, x \in [0, 1], \\ x - 1, x \in [1, 2]. \end{cases}$$

2. Функція $y = f(x)$ справджує умови Діріхле [12.8.2] на проміжку $(0; 2)$.

3. [*Функцію $f(x)$ яку задано на $(0; b)$ спершу продовжимо (графічно) непарним чином на $(-b; 0]$ — симетрично щодо точки O.*]
[*Для допоміжної функції $f_н(x)$ на $(-b, b)$ будуємо графік $y = S(x)$.*] Рис. 2.

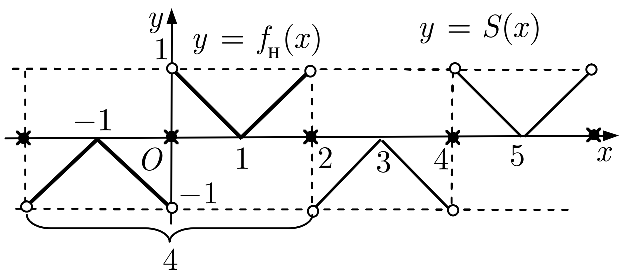


Рис. 2 до зад. 7.5

4. $T = 4; \omega_1 = \frac{\pi}{2}.$

5. $$f(x) \overset{[12.9.3]}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx\pi}{2}.$$

6. $b_n \overset{[12.9.3]}{=} \int\limits_0^1 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_1^2 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$

$$= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} - \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

7. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} - \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\sin\frac{\pi n x}{2}.$

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0;1)\cup(1;2), \\ -f(-x), & x \in (-2;-1)\cup(-1;0), \\ 0 & x = 0, \pm 2, \end{cases} \quad T = 4.$$

7.6. Розвинути в ряд Фур'є на $(-2,2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно на рис. 1 до зад. 7.6.

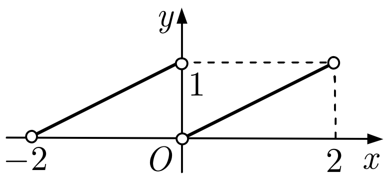


Рис. 1 до зад. 7.6

***Розв'язання*. [12.9.4.]**

1. $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{2}, x \in (-2,0), \\ \frac{x}{2}, x \in (0,2). \end{cases}$

2. Функція $f(x)$ на інтервалі $(-2,2)$:
1) має лише один розрив 1-го роду в точці $x = 0$ (кусково-неперервна);
2) обмежена;
3) кусково-монотонна. Отже, функція справджує умови Діріхле [12.8.2].
3. Рис. 2.

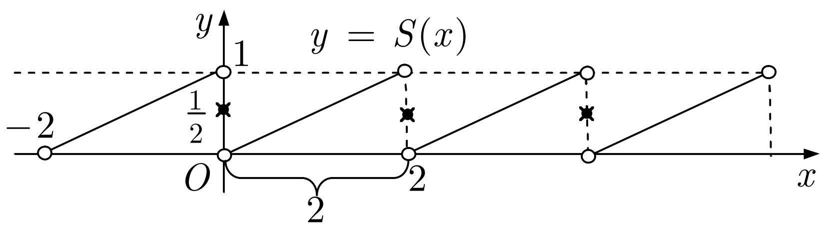


Рис. 2 до зад. 7.6

4. $T = 2; \omega_1 = \pi.$

5. **[***Графік функції симетричний щодо точки* $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$*, яка лежить на осі* Oy.**]** ①

$$f(x) \overset{[12.9.4]}{\sim} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x.$$

6. $b_n \overset{[12.9.4]}{=} 2\int\limits_0^1 \frac{x}{2}\sin\pi n x\,dx = \int\limits_0^1 x\sin\pi n x\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}, n \in \mathbb{N}.$

7. $S(x)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx.$

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-2,0)\cup(0,2),\\ \dfrac{1}{2}, & x=-2, x=0, x=2, \end{cases} \quad T=2.$$

Коментар. ① Для функції, графік якої симетричний щодо точки $A(0;c)$:

$$\frac{a_0}{2}=c,\ a_n=0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

7.8. Розвиньте в ряд Фур'є функцію $f(x)$ періоду $T=2\pi$:

1) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x\le\pi; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0<x<\pi; \end{cases}$

3) $f(x)=2x-3, x\in[-\pi;\pi];$ 4) $f(x)=5x+2, x\in[-\pi;\pi];$

5) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le\pi; \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x<\pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pi; \end{cases}$

7) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}, x\in(-\pi;\pi);$ 8) $f(x)=\cos\dfrac{x}{3}, x\in(-\pi;\pi);$

9) $f(x)=|x|, x\in[-\pi;\pi];$ 10) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, x\in(0;2\pi).$

7.9. Розвиньте в ряд Фур'є функцію $f(x)$ періоду T:

1) $f(x)=|x|-5, x\in(-2;2), T=4;$

2) $f(x)=3-|x|, x\in(-5;5), T=10;$

3) $f(x)=5x-1, x\in(-5;5), T=10;$

4) $f(x)=2x-3, x\in(-3;3), T=6.$

7.10. Розвиньте в ряд Фур'є періодичну функцію:

1) $f(x)=|\sin x|;$ 2) $f(x)=|\cos x|;$

3) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

4) $f(x) = \arcsin(\sin x)$;

5) рис. 1;

6) рис. 2.

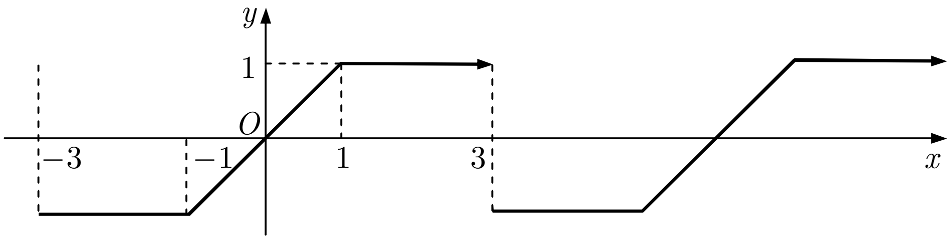


Рис. 1 до зад. 7.10

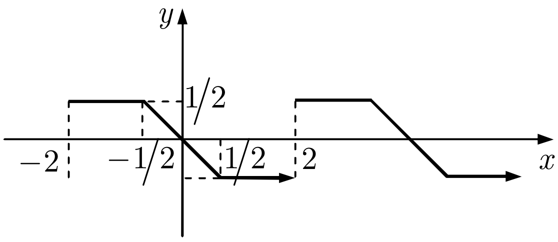


Рис. 2 до зад. 7.10

7.11. Розвиньте функцію $f(x)$ у ряд Фур'є за косинусами:

1) $f(x) = 1 - x, x \in [0;1]$;

2) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, x \in (0;\pi)$;

3) $f(x) = \sin x, x \in (0;\pi)$;

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

7.12. Розвиньте функцію $f(x)$ у ряд Фур'є за синусами:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \dfrac{\pi}{8} x(\pi - x), x \in (0;\pi)$;

3) $f(x) = \cos 2x, x \in (0;\pi)$;

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

7.13. Користуючись розвиненням у ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi;\pi)$ функції $f(x) = x^2$, знайдіть суми рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

7.14. Виходячи з розвинення в ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi;\pi)$ функції $y=x$, почленним інтегруванням дістаньте розвинення в ряд Фур'є функцій $f(x)=x^2, f(x)=x^3$.

Відповіді

7.8. 1) $S(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\sin nx, S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi;0)\cup(0;\pi),\\ \dfrac{1}{4}, & x=0, x=\pm\pi,\end{cases} T=2\pi;$

2) $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{2n}\sin nx; S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi;0)\cup(0;\pi),\\ 0, & x=0, x=\pm\pi,\end{cases} T=2\pi;$

3) $S(x)=-3+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}, S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi;\pi),\\ -3, & x=\pm\pi,\end{cases} T=2\pi;$

4) $S(x)=2+10\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi;\pi)\\ 2, & x=\pm\pi,\end{cases} T=2\pi;$

5) $f(x)\sim\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1};$

6) $f(x)\sim\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos nx+\dfrac{\pi}{n}(-1)^n\sin nx\right);$ 7) $f(x)\sim\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\sin nx}{4n^2-1};$

8) $f(x)\sim\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\dfrac{3}{2}+3\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{9n^2-1}\right];$ 9) $f(x)\sim\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2};$ 10) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}.$

7.9. 1) $f(x)\sim-4-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2};$

2) $f(x)\sim\dfrac{1}{2}+\dfrac{20}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\dfrac{\pi x}{5};$

3) $f(x)\sim-1+\dfrac{50}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{5};$ 4) $f(x)\sim-3+\dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{3}.$

7.10. 1) $f(x)\sim\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1};$ 2) $f(x)\sim\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx;$

3) $f(x)\sim\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}\cos nx;$ 4) $f(x)\sim\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x;$

5) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{9}{\pi^2n^2}\sin\dfrac{\pi n}{3}-\dfrac{3(-1)^n}{\pi n}\right)\sin\dfrac{\pi nx}{3};$ 6) $f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\pi n}-\dfrac{4}{\pi^2n^2}\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\sin\dfrac{\pi nx}{2}.$

7.11. 1) $f(x)\sim\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2};$ 2) $f(x)\sim\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2};$

3) $f(x) \sim \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$; 4) $f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}\cos nx.$

7.12. 1) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{4}{\pi^2 n^2}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\sin\dfrac{\pi n x}{2}$; 2) $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$;

3) $f(x) \sim \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-1)}{(2k-3)(2k+1)}\sin(2k-1)x$; 4) $f(x) \sim \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1-\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)\sin nx.$

7.13. 1) $\dfrac{\pi^2}{6}$; 2) $\dfrac{\pi^2}{12}$. **7.14.** $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}, x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2},$

$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{12}{n^3} - \dfrac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx, x \in (-\pi;\pi).$

8. Комплексна форма ряду Фур'є

Навчальні задачі

8.1. Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ періоду $T = 2$.

***Розв'язання.* [12.9.5.]**

Функція справджує умови Діріхле на проміжку $(-1;1)$.

$$S(-1) = S(0) = S(1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

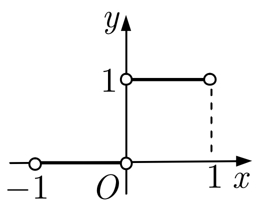


Рис. 1 до зад. 8.1

$T = 2, \omega_1 = \pi.$

$$S(x) \overset{[12.9.5]}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x}.$$

$$c_n \overset{[12.9.6]}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx = -\frac{1}{2in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_0^1 = -\frac{e^{-i\pi n}-1}{2i\pi n} = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}i, n \neq 0.$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}e^{in\pi x} = \begin{cases} f(x), & x \in (-1;0)\cup(0;1), \\ \dfrac{1}{2}, & x = -1, 0, 1, \end{cases} \quad T = 2.$$

8.2. Знайти амплітудний і фазовий частотний спектр послідовності прямокутних імпульсів з амплітудою A, тривалістю τ та періодом повторювання $T = 2\tau$ (меандр) (рис. 1).

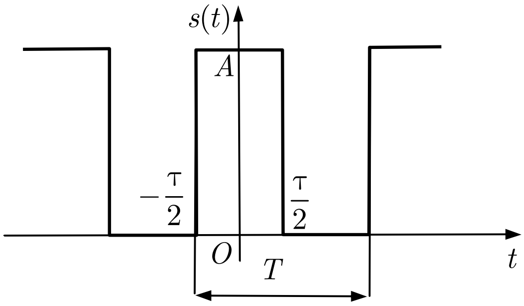


Рис. 1 до зад. 8.2

Розв'язання. [12.9.9, 12.9.10.]

Для послідовності прямокутних імпульсів (рис. 1 до зад 8.2) виконано умови теореми Діріхле.

$$c_n \overset{[12.9.6]}{=} \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-i\pi nt/\tau}dt =$$

$$= -\frac{A}{i2\pi n}\left(e^{-i\pi n/2} - e^{i\pi n/2}\right) =$$

$$= \frac{A}{\pi n}\frac{e^{i\pi n/2} - e^{-i\pi n/2}}{2i} = \frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

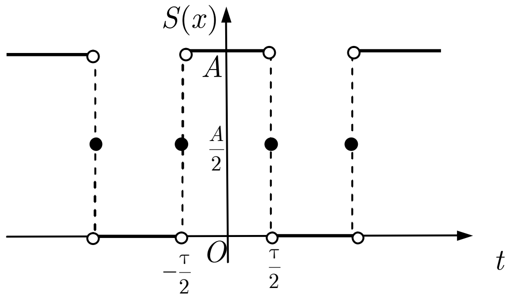


Рис. 2 до зад. 8.2

Амплітудний спектр (рис. 3)

$$C_n \overset{[12.9.9]}{=} \left|\frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right|, n \in \mathbb{Z}.$$

Фазовий спектр (рис. 4)

$$\varphi_n \overset{[12.9.10]}{=} \begin{cases} -\pi, & \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right) > 0, \\ 0, & \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right) \le 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n.$$

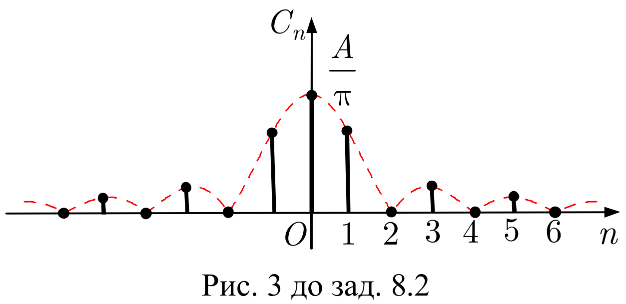


Рис. 3 до зад. 8.2

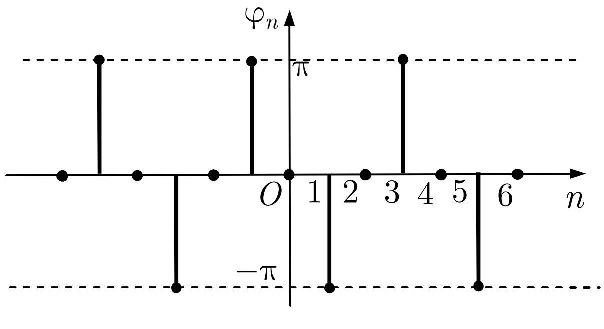


Рис. 4 до зад. 8.2

Коментар. ① Послідовність прямокутних імпульсів погано підходить для зображення рядом Фур'є — вона містить стрибки, а сума будь-якої кількості гармонік із довільними амплітудами завжди буде неперервною функцією. Тому поведінка ряду Фур'є в околах розривів є особливо цікавою. На рис. 5 видно, що в околі точки розриву підсумовування ряду Фур'є дає похилу ділянку, причому крутизна нахилу зростає з кількістю доданків. У точках розриву ряд Фур'є збігається до півсуми лівої та правої граничних значень. На прилеглих до розриву ділянках сума ряду Фур'є дає помітні пульсації, причому амплітуда пульсацій не зменшується зі зростанням кількості доданків — пульсації лише стискаються вздовж горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище, притаманне рядам Фур'є для будь-яких сигналів із розривами 1-го роду називають ***Ґібсовим ефектом***.

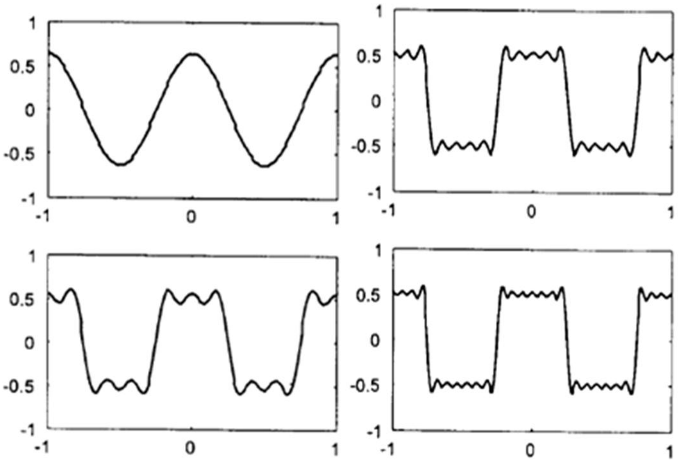


Рис. 5 до зад. 8.2. Проміжні стадії підсумовування ряду Фур'є для меандру

8.3. Знайти амплітудний і фазовий частотний спектр послідовності симетричних трикутних імпульсів (рис. 1).

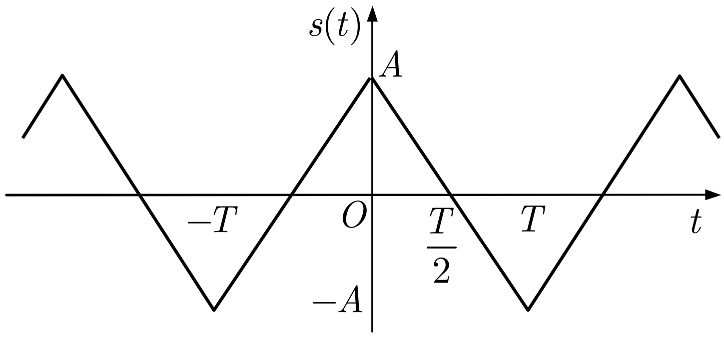


Рис. 1 до зад. 8.3

***Розв'язання**. [12.9.9, 12.9.10.]*

$$s(t) = A\left(1 - 4\frac{\left|t - kT\right|}{T}\right), \left(k - \frac{1}{2}\right)T \le t < \left(k + \frac{1}{2}\right)T.$$

Оскільки сигнал функція парна, то ряд Фур'є міститиме лише косинуси:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi^2 n^2}(1 - (-1)^n)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8A}{\pi^2 (2m-1)^2}\cos\left((2m-1)\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Амплітудний спектр①

$$C_n \overset{[12.9.9]}{=} \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \dfrac{4}{\pi^2(2m-1)^2}, & n = 2m-1, \end{cases} m \in \mathbb{N},$$
$$C_0 = 0, C_{-n} = C_n.$$

$$\varphi_n \overset{[12.9.10]}{=} 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Коментар. ① Завдяки неперервності сигналу відсутній Ґібсів ефект.

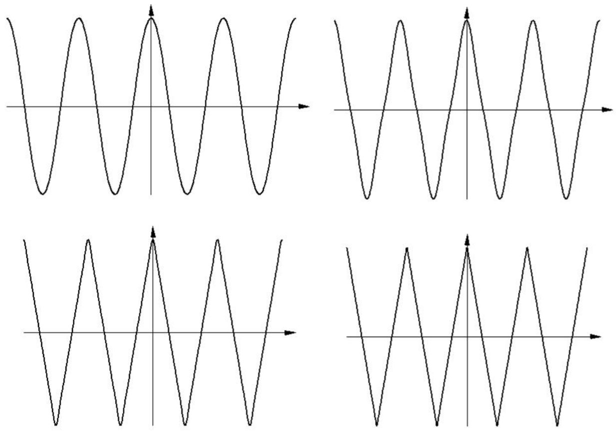


Рис. 2 до зад. 8.3

У прямокутного й пилкуватого періодичного сигналів амплітуди гармонік із зростанням їхніх номерів спадають пропорційно n.

У трикутного періодичного сигналу амплітуди гармонік спадають пропорційно n^2. Це прояв закономірності, що швидкість спадання спектра залежить від гладкості сигналу. Прямокутний і пилкуватий сигнали мають розриви 1-го роду (стрибки), а трикутний сигнал є неперервною функцією (але його перша похідна має розриви).

Правдиве **правило**: якщо N — номер останньої неперервної похідної сигналу, то спектр цього сигналу спадатиме зі швидкістю $\dfrac{1}{n^{N+2}}$.

Граничним випадком є гармонічний сигнал, диференціювати який без втрати неперервності можна нескінченно.

Часто функція f, яку задану на проміжку $[0, l]$ і яку треба розвинути в ряд Фур'є не тільки неперервна, але й диференційовна. Постає питання, якому розвиненню надати перевагу — за косинусами або за синусами? Якій ряд «краще», швидше збігатиметься?

Характер збіжності ряду Фур'є визначений властивостями заданої функції в точках $x = 0$ та $x = l$.

Якщо функція $f(x)$ в цих точках відмінна від нуля, то періодичне її продовження за принципом непарної функції призведе до розривів у двох точках $x = 0$ та $x = l$. Ці розриви легко ліквідуються, якщо функцію продовжити парним чином. Саме з цієї причини розвинення в ряд за косинусами має кращі властивості збіжності ніж за синусами. Коефіцієнти ряду за косинусами спадають зі швидкістю $\dfrac{1}{n^2}$, а коефіцієнти ряду синусів — лише зі швидкістю $\dfrac{1}{n}$.

Якщо ж $f(0) = f(l) = 0$, то розвинення в ряд за синусами дає кращу збіжність, аніж розвинення в ряд за косинусами. Причина полягає в тому, що розвинення функції $f(x)$ за принципом непарної функції забезпечує неперервність як функції, так і її першої похідної, тоді як періодичне продовження за принципом парної функції призводить до розриву першої похідної в точках $x = 0$ та $x = \pi$. Коефіцієнти ряду за синусами спадають із швидкістю $\dfrac{1}{n^3}$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

8.4. Розвиньте періодичну функцію $f(x)$, яка задана на своєму інтервалі-періоді, в ряд Фур'є в комплексній формі:

1) $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in (-\pi;\pi)$;
2) $f(x) = \operatorname{sh} x, x \in (-\pi;\pi)$;
3) $f(x) = e^{|x|}, x \in (-1;1)$;
4) $f(x) = e^{x} - 1, x \in (-2;2)$;
5) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \le \pi; \end{cases}$
6) $f(x) = e^{2x}, x \in \left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Відповіді

8.4. 1) $\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}e^{inx}$; 2) $\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n in}{1+n^2}e^{inx}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n e-1}{1+n^2\pi^2}e^{in\pi x}$;

4) $\dfrac{\operatorname{sh}2}{2} - 1 + \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n \operatorname{sh}2\cdot(2+in\pi)}{4+n^2\pi^2}e^{in\pi x/2}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{2\pi}\dfrac{1-in}{1+n^2}e^{inx}$; 6) $\operatorname{sh}1\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1+i\pi n}{1+\pi^2 n^2}e^{2i\pi nx}$.

Модуль 2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

9. Елементарні функції комплексної змінної

Навчальні задачі

9.1.1. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множину точок, що справджують умову $\left|z-1\right|=3$.

Розв'язання.

$\left\{z\in\mathbb{C}\mid\left|z-1\right|=3\right\}$ — множина точок, віддалених від точки $z=1$ на віддаль 3 — коло з центром у точці $z=1$ і радіусом 3.

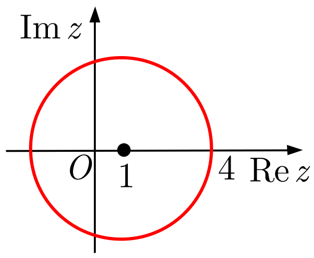


Рис. до зад. 9.1.1

9.1.2. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множину точок, що справджують умову $\left|z+i\right|=\left|z-i\right|$.

Розв'язання. *[Б.3.3.]*

$\left\{z\in\mathbb{C}\mid\left|z+i\right|=\left|z-i\right|\right\}$ — множина точок рівновіддалених від точок $z_1=-i$ та $z_2=i$ — пряма, яка перпендикулярна до відрізка z_1z_2 і проходить через його середину①.

Коментар. ① Розв'яжемо задачу аналітично. Нехай

$$z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}.$$

$$\left|z+i\right|=\left|x+i(y+1)\right|=\sqrt{x^2+(y+1)^2};$$

$$\left|z-i\right|=\left|x+i(y-1)\right|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

$$\left|z+i\right|=\left|z-i\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow y=0.$$

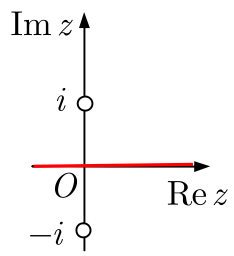


Рис. до зад. 9.1.2

9.1.3. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множину точок, що справджують умову $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання. *[Б.3.4.]*

Промінь, що виходить з точки $z=1$ і утворює кут $\dfrac{\pi}{3}$ з додатною піввіссю дійсної осі.

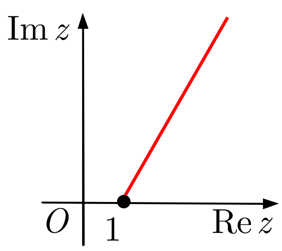


Рис. до зад. 9.1.3

9.1.4. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умову: $0 \le \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z < 2$.

Розв'язання*. *[Б.1.1.]

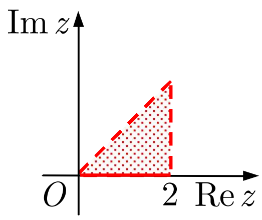


Рис. до зад. 9.1.4

9.2.1. Знайти тригонометричну форму числа $-1 - i\sqrt{3}$.

Розв'язання*. *[Б.3.1.]

[*Записуємо число* $z = -1 - i\sqrt{3}$ *у тригонометричній формі.*]:

$$\operatorname{Re} z = -1 < 0, \operatorname{Im} z = -\sqrt{3} < 0;$$

$$|z| \overset{[\text{Б.3.3}]}{=} \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\arg z \overset{[\text{Б.2.3}]}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

9.2.2. Знайти тригонометричну форму числа $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2 - 2i}\right)^{10}$.

Розв'язання*. *[Б.3.1.]

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}, z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 2 - 2i.$$

[*Знаходимо тригонометричні форми чисел* z_1 *та* z_2*.*]

$$\operatorname{Re} z_1 = 1 > 0, \operatorname{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0;$$

$$|z_1| \overset{[\text{Б.3.3}]}{=} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \ \ \arg z_1 \overset{[\text{Б.2.3}]}{=} \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\operatorname{Re} z_2 = 2 >, \operatorname{Im} z_2 = -2 < 0;$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \ \ \arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4};$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} \overset{[Б.3.7]}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{10} \overset{[Б.3.8]}{=}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos\frac{70\pi}{12} + i\sin\frac{70\pi}{12}\right) = \frac{1}{32}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

9.3. Знайти всі значення $\sqrt[5]{i}$ і зобразити їх на комплексній площині.

Розв'язання*. *[Б.3.10.]

$$\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 1 > 0.$$

$$\left|z\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1;\ \arg z = \frac{\pi}{2}.$$

$$\omega_k \overset{[Б.3.10]}{=} \sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10};\ \ \omega_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};$$

$$\omega_2 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10};\ \omega_3 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10};$$

$$\omega_4 = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}.$$

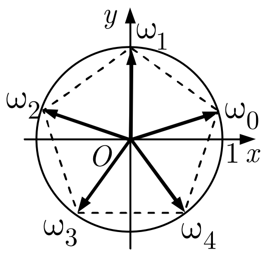


Рис. до зад. 9.3

9.4.1. Записати в алгебричній формі $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$.

Розв'язання*. *[13.2.1.]

$$e^{-2+\frac{\pi}{3}i} \overset{[13.5.1]}{=} e^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2e^2} + i\frac{\sqrt{3}}{2e^2}.$$

9.4.2. Записати в алгебричній формі $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3i\right)$.

Розв'язання*. *[13.3.5.]

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3i\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos 3i + \sin\frac{\pi}{3}\sin 3i \overset{[13.3.5]}{=} \frac{1}{2}\operatorname{ch} 3 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} 3.$$

9.4.3. Записати в алгебричній формі $\operatorname{ch}(1+2i)$.

Розв'язання*. *[13.2.3, 13.2.1.]

$$\operatorname{ch}(1+2i) \overset{[13.2.3]}{=} \frac{e^{1+2i}+e^{-1-2i}}{2} \overset{[13.2.1]}{=} \frac{e(\cos 2+i\sin 2)}{2}+\frac{\cos 2-i\sin 2}{2e} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)\cos 2 + i\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin 2 = \operatorname{ch}1\cos 2 + i\operatorname{sh}1\sin 2.$$

9.4.4. Записати в алгебричній формі $\operatorname{Ln} i$.

Розв'язання*. *[13.2.4.]

$$\operatorname{Ln} i \overset{[13.2.4]}{=} \ln\left|i\right| + i(\arg i + 2\pi k) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) =$$

$$= i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}.$$

9.4.5. Записати в алгебричній формі 1^i.

Розв'язання*. *[13.2.6.]

$$1^i \overset{[13.2.6]}{=} e^{i\operatorname{Ln}1} \overset{[13.2.4]}{=} e^{i(\ln\left|1\right|+i(\arg 1+2\pi k))} \overset{[13.2.1]}{=} e^{-2\pi k}, k\in\mathbb{Z}.$$

9.4.6. Записати в алгебричній формі $i^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання*. *[13.2.6.]

$$i^{\sqrt{2}} \overset{[13.2.6]}{=} e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln} i} \overset{[13.2.4]}{=} e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} \overset{[13.2.1]}{=}$$

$$= \cos\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) + i\sin\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}.$$

9.4.7. Записати в алгебричній формі $\operatorname{Arctg}(1+i)$.

Розв'язання*. *[13.2.9.]

$$\operatorname{Arctg}(1+i) \overset{[13.2.9]}{=} -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i}{2-i} =$$

$$= -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) \overset{[13.2.4]}{=} -\frac{i}{2}\left(-\ln\sqrt{5}+(2k+1)\pi i - i\operatorname{arctg}2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2 + \frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{i}{2}\ln\sqrt{5}, k\in\mathbb{Z}.$$

9.4.8. Записати в алгебричній формі $\operatorname{Arcsin} i$.

Розв'язання*. *[13.2.7.]

$$\operatorname{Arcsin} i \overset{[13.2.7]}{=} -i\operatorname{Ln}(i^2+\sqrt{1-i^2}) = -i\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2}).$$

Враховуючи, що $\sqrt{2}$ двозначний, маємо дві серії значень арксинуса:

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2}) =$$
$$= -i(\ln(\sqrt{2}-1) + i2\pi k) = 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}-1);$$
$$\operatorname{Arcsin} i = -i\operatorname{Ln}(-1-\sqrt{2}) =$$
$$= -i(\ln(\sqrt{2}+1) + i(\pi + 2\pi k)) = \pi + 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}+1), k \in \mathbb{Z}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

9.5. Зобразіть множини точок на комплексній площині:

1) $\left|z-1-i\right| = 2;$ 2) $\left|z-2+i\right| = 3;$

3) $\left|z-i\right| < 3;$ 4) $\left|z+i\right| \geq 1;$

5) $1 \leq \left|z-1-i\right| \leq 3;$ 6) $0 < \left|z-2+i\right| < 1;$

7) $\left|z+1\right| + \left|z-2\right| = 5;$ 8) $\left|z-1\right| + \left|z-3\right| < 3;$

9) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 5;$ 10) $0 < \operatorname{Im} z < 1;$

11) $-\dfrac{\pi}{3} \leq \arg z < \dfrac{\pi}{6};$ 12) $-\dfrac{\pi}{4} < \arg(z+i) \leq \dfrac{\pi}{2}.$

13) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1;$ 14) $\left|z-1\right| < \left|z-i\right|;$

15) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} < -\dfrac{1}{2};$ 16) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\dfrac{1}{\bar{z}} + \operatorname{Im}\dfrac{1}{\bar{z}} < \dfrac{1}{2};$

17) $\left|z\right| > 2 + \operatorname{Im} z;$ 18) $\left|z\right| - \operatorname{Re} z \leq 0.$

9.6. Знайдіть алгебричну форму числа:

1) $(-\sqrt{3}-i)^5;$ 2) $(-2+2i)^6;$

3) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40};$ 4) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6};$

5) $i^1 \cdot i^2 \cdot \ldots \cdot i^{99} \cdot i^{100};$ 6) $\dfrac{1}{i^{21}} - \dfrac{1}{i^{31}} - \dfrac{1}{i^{41}}.$

9.7. Знайдіть всі значення кореня і зобразіть їх на комплексній площині:

1) $\sqrt[3]{1};$ 2) $\sqrt[3]{27i};$

3) $\sqrt[5]{-2+2i};$ 4) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}.$

9.8. Запишіть в алгебричній чи тригонометричній формі комплексні числа:

1) $e^{-i\pi/6}$; 2) e^{-1+2i};

3) $\sin(1+3i)$; 4) $\cos 3i$;

5) $\mathrm{Ln}(2-3i)$; 6) $\mathrm{Ln}(1+7i)$;

7) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; 8) $(-3-4i)^i$;

9) $\mathrm{Arcsin}\, 2$; 10) $\mathrm{Arccos}\, i$;

11) $\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{2}i$; 12) $\mathrm{Arctg}\,\dfrac{i}{3}$.

13) $\dfrac{\cos i - i\sin i}{\sin i - i\cos i}$; 14) $(\ln i)^i$.

9.9. Розв'яжіть рівняння:

1) $e^z + i = 0$; 2) $4\cos z + 5 = 0$;

3) $\sin z = \pi i$; 4) $\sin z = 2$;

5) $z^2 + i = 0$; 6) $z^4 - 16 = 0$.

Відповіді

9.5. 1) Коло з центром у точці $1+i$ радіусом 2; 2) коло з центром у точці $2-i$ радіусом 3;
3) внутрішність круга з центром у точці i радіусом 3;
4) зовнішність круга (разом з колом) з центром у точці $-i$ радіусом 1;
5) кільце (разом з обома колами) з центром у точці $1+i$ радіусами 1 та 3;
6) відкрите кільце з центром у точці $2-i$ радіусами 0 та 1;
7) еліпс з фокусами на дійсній осі; 8) внутрішність еліпса з фокусами на дійній осі;
9) вертикальна смуга; 10) горизонтальна смуга; 11) кут з вершиною у полюсі;
12) кут з вершиною у точці $-i$; 13) права півплощина разом з уявною віссю;
14) частина площини нижче прямої $y = x$; 15) внутрішність кола $x^2 + (y-1)^2 = 1$;
16) область, що міститься між колами $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ та $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$;
17) зовнішність параболи $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$; 18) дійсна додатна піввісь, включаючи і точку $O(0;0)$.

9.6. 1) $16\sqrt{3} - 16i$; 2) $512i$; 3) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 5) -1; 6) $-i$.

9.7. 1) $1, -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right), 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right), -3i$;

3) $\sqrt[10]{8}\left(\cos\dfrac{3\pi + 8\pi k}{20} + i\sin\dfrac{3\pi + 8\pi k}{20}\right), k = \overline{0,4}$;

4) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi+3\pi k}{6}+i\sin\frac{-\pi+3\pi k}{6}\right), k=\overline{0,3}.$

9.8. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; 2) $e^{-1}(\cos 2+i\sin 2)$; 3) $\sin 1\operatorname{ch} 3+i\cos 1\operatorname{sh} 3$; 4) $\operatorname{ch} 3$;

5) $\frac{1}{2}\ln 13-i\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi ki, k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{1}{2}\ln 50+i(\operatorname{arctg} 7+2\pi k), k\in\mathbb{Z}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}, k\in\mathbb{Z}$; 8) $e^{\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-2\pi k}(\cos\ln 5+i\sin\ln 5), k\in\mathbb{Z}$;

9) $\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln(2\pm\sqrt{3}), k\in\mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi}{2}+\pi k-i\ln(\sqrt{2}\pm 1), k\in\mathbb{Z}$; 11) $i\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$;

12) $\pi k+\frac{i}{2}\ln 2$; 13) $i(\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}1)^2$; 14) $e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cos\ln\frac{\pi}{2}+i\sin\ln\frac{\pi}{2}\right)$.

9.9. 1) $z_k=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i, k\in\mathbb{Z}$; 2) $z_k=(2k+1)\pi\pm i\ln 2, k\in\mathbb{Z}$;

3) $z_{2k}=2k\pi-i\ln(\sqrt{\pi^2+1}-\pi)$, $z_{2k+1}=(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{\pi^2+1}+\pi), k\in\mathbb{Z}$;

4) $z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}), k\in\mathbb{Z}$; 5) $z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $z_{1,2}=\pm 2, z_{3,4}=\pm 2i$.

10. Диференціювання функцій комплексної змінної

Навчальні задачі

10.1.1. Знайти дійсну та уявну частини функції $f(z)=i\overline{z}^2-z$.

Розв'язання. [13.1.4.]

Покладімо $z=x+iy$.

$$f(z)=i(x-iy)^2-(x+iy)=i(x^2-y^2-2ixy)-(x+iy)=$$
$$=x(2y-1)+i(x^2-y^2-y)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Дійсна частина функції

$$\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=x(2y-1).$$

Уявна частина функції

$$\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)=x^2-y^2-y.$$

10.1.2. Знайти дійсну та уявну частини функції $f(z)=\cos z$.

Розв'язання. [13.1.4.]

Покладімо $z=x+iy$.

$$f(z)=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos iy-\sin x\cdot\sin iy\overset{[13.6.4]}{=}$$
$$=\cos x\cdot\operatorname{ch} y-i\sin x\cdot\operatorname{sh} y=u(x,y)+iv(x,y).$$

Дійсна частина функції

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y.$$

Уявна частина функції

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

10.2. Перевірити що функція $f(z) = \sin 3z$ аналітична і знайти її похідну.

Розв'язання*. *[13.4.3, 13.4.4.]

[*Знаходимо дійсну та уявну частини функції.***]**

Покладімо $z = x + iy$.

$$f(x,y) = \sin 3(x+iy) = \sin 3x \cdot \cos 3iy + \sin 3iy \cdot \cos 3x =$$
$$= \sin 3x \cdot \operatorname{ch} 3y + i \operatorname{sh} 3y \cdot \cos 3x.$$

$$u(x,y) = \sin 3x \cdot \operatorname{ch} 3y, v(x,y) = \operatorname{sh} 3y \cdot \cos 3x.$$

[*Перевіряємо умови Коші — Рімана для функції* $f(z)$.**]**

$$u'_x = 3\cos 3x \cdot \operatorname{ch} 3y, u'_y = 3\sin 3x \cdot \operatorname{sh} 3y;$$

$$v'_x = -3\sin 3x \cdot \operatorname{sh} 3y, v'_y = 3\operatorname{ch} 3y \cdot \cos 3x.$$

$$[13.4.3]\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Умови Коші — Рімана виконано. Отже, функція $f(z)$ аналітична в усіх скінченних точках $\mathbb{C}$-площини.

$$f'(z) \overset{[13.4.4]}{=} 3\cos 3x \cdot \operatorname{ch} 3y - 3i \sin 3x \cdot \operatorname{sh} 3y \overset{[13.3.5]}{=}$$
$$= 3(\cos 3x \cdot \cos 3iy - \sin 3x \cdot \sin 3iy) = 3\cos 3(x+iy) = 3\cos 3z.$$

10.3. Визначити область аналітичності функції $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.

Розв'язання*. *[13.4.5.]

Функції $f_1(z) = 1, f_2(z) = z^2 + 1$ аналітичні на всій комплексній площині, тому їхнє відношення аналітичне скрізь, крім тих точок, у яких знаменник дорівнює нулеві, тобто точок $z_{1,2} = \pm i$.

Отже, областю аналітичності функції $f(z)$ є множина $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

10.4. Перевірити гармонічність функції, і знайти, якщо це можливо, аналітичну функцію $f(z)\left(0 \le \left|z\right| < \infty\right)$ для якої $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Розв'язання*. *[13.4.8.]

[*Перевіряємо гармонічність функції.***]**

Знайдімо частинні похідні і Лапласіан від функції u:

$$u'_x = 3x^2 - 3y^2, u''_{xx} = 6x, u'_y = -6xy, u''_{yy} = -6x;$$

$$\Delta u \overset{[2.7.6]}{=} u''_{xx} + u''_{yy} = 6x - 6x = 0.$$

Функція $u(x,y)$ — гармонічна.

[*Відновлюємо уявну частину функції. Початкову точку вибираємо з області означення підінтегральної функції.*]

$$v(X,Y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(X;Y)} dv + C = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(X;Y)} v'_x dx + v'_y dy + C \overset{[13.4.3]}{=}$$

$$=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(X;Y)} -u'_y dx + u'_x dy + C = \int\limits_{(0;0)}^{(X;Y)} 6xydx + (3x^2-3y^2)dy + C =$$

$$=\int\limits_0^X 6x\cdot 0dx + \int\limits_0^Y (3X^2-3y^2)dy + C = 3X^2Y - Y^3 + C,$$

$$C=\mathrm{const}\,.$$

[*Відновлюємо функцію.*]

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+C)=$$

$$=x^3+3x(iy)^2+3x^2iy+(iy)^3+iC=$$

$$=(x+iy)^3+iC=z^3+iC, C=\mathrm{const}\,.$$

10.5. Відновити аналітичну в околі точки $z_0=\pi$ функцію $f(z)$, якщо її дійсна частина $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ та $f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$.

***Розв'язання**. [13.4.3.]*

[*Використовуємо одну з умов Коші — Рімана.*]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow$$

$$v=\int\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{\substack{\text{відновили уявну частину}\\ \text{з точністю до функції } \varphi(x)}}+\varphi(x).$$

[*Використовуємо другу умову Коші — Рімана.*]

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow\varphi(x)=C=\mathrm{const}\,.$$

$$f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}+iC=$$

$$=\frac{x-iy}{x^2+y^2}+iC=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}+iC=\frac{1}{z}+iC.$$

[*Визначаємо сталу з початкової умови.*]

$$\frac{1}{\pi} = f(\pi) = \frac{1}{\pi} + iC \Leftrightarrow C = 0.$$

Отже, $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

10.6. Знайдіть дійсну та уявну частину функції:

1) $f(z) = i\overline{z} + 2z^2$; 2) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{i} + \dfrac{i}{\overline{z}}$;

3) $f(z) = e^{-z}$; 4) $f(z) = e^{\overline{z}^2}$.

10.7. Визначте функцію $f(z)$ за її відомими дійсною та уявною частинами:

1) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y - 1, v(x,y) = 2xy + 2x$;

2) $u(x,y) = x\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2}, v(x,y) = y\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}$.

10.8. Перевірте, що функція $f(z)$ аналітична і знайдіть її похідну:

1) $f(z) = z^2 + 5z - 7$; 2) $f(z) = e^{3z}$.

3) $f(z) = \operatorname{sh} 3z$; 4) $f(z) = \ln z^2, z \neq 0$.

10.9. Доведіть, що функція $f(z)$ неаналітична в жодній області:

1) $f(z) = \operatorname{Re} z$; 2) $f(z) = |z|$;

3) $f(z) = z^2|z|$; 4) $f(z) = |z|\operatorname{Re}\overline{z}$.

10.10. Знайдіть область аналітичності функції:

1) $f(z) = \operatorname{tg} z$; 2) $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

10.11. Знайдіть аналітичну функцію $f(z)$, перевіряючи на гармонічність дійсну або уявну частину функції, якщо:

1) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3y^2x + 2, f(0) = 2 + i$;

2) $\operatorname{Im} f(z) = 2e^x \cos y, f(0) = 2(1 + i)$;

3) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \ f(1) = 6 + i$;

4) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + xy, f(0) = 0;$

5) $\operatorname{Im} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0;$

6) $\operatorname{Im} f(z) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), f(0) = 0;$

7) $\operatorname{Re} f(z) = 2\sin x \operatorname{ch} y - x, f(0) = 0;$

8) $\operatorname{Im} f(z) = 2(2\operatorname{sh} x \sin y + xy), f(0) = 3.$

Відповіді

10.6. 1) $u = 2x^2 - 2y^2 + y, v = 4xy + x;$ 2) $u = -y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, v = -x + \dfrac{x}{x^2 + y^2};$

3) $u = e^{-x}\cos y, v = -e^{-x}\sin y;$ 4) $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy, v = -e^{x^2-y^2}\sin 2xy.$

10.7. 1) $f(z) = z^2 + 2iz - 1;$ 2) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}.$

10.8. 1) $f'(z) = 2z + 5;$ 2) $f'(z) = 3e^{3z};$ 3) $f'(z) = 3\operatorname{ch} 3z;$ 4) $f'(z) = \dfrac{2}{z}.$

10.10. 1) $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right\}, k \in \mathbb{Z};$ 2) $\mathbb{C} \setminus \{2\pi k\}, k \in \mathbb{Z}.$

10.11. 1) $f(z) = z^3 + 2 + i;$ 2) $f(z) = 2ie^z + 2;$ 3) $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \dfrac{i}{z} + 3i;$

4) $f(z) = \dfrac{2 - i}{2}z^2;$ 5) $f(z) = (2 + i)z^3;$ 6) $f(z) = 2\operatorname{sh} z - z^2;$

7) $f(z) = 2\sin z - z;$ 8) $f(z) = 4\operatorname{ch} z + z^2 - 1.$

11. Інтегрування функцій комплексної змінної

Навчальні задачі

11.1.1. Обчислити $\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz$ уздовж прямої, яка з'єднує точки $z_1 = 0,$ $z_2 = 1 + i.$

Розв'язання. ***[13.5.2.]***

$$z = x + iy, dz = dx + idy, \overline{z} = x - iy;$$

$$1 + i - 2\overline{z} = 1 - 2x + i(1 + 2y).$$

$$\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz =$$

$$= \int\limits_C (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int\limits_C (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$$

Пряма, яка проходить через точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$, має рівняння $y = x, 0 \le x \le 1$, тобто $dy = dx$:

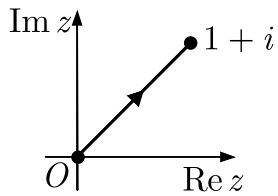


Рис. до зад. 11.1.1

$$\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz = \int\limits_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)]dx +$$

$$+i\int\limits_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)]dx = -2 + 2i.$$

11.1.2. Обчислити $\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz$ уздовж ламаної $z_1 z_3 z_2$, яка з'єднує точки

$z_1 = 0, z_2 = 1 + i, z_3 = 1.$

***Розв'язання**. [13.5.2.]*

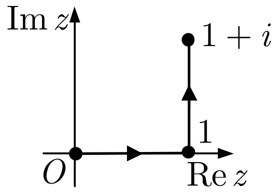


Рис. до зад. 11.1.2

На відрізку $z_1 z_3$: $y = 0, dy = 0, 0 \le x \le 1.$

На відрізку $z_3 z_2$: $x = 1, dx = 0, 0 \le y \le 1.$

$$\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz =$$

$$= \int\limits_{z_1 z_3} (1 + i - 2\overline{z})dz + \int\limits_{z_3 z_2} (1 + i - 2\overline{z})dz =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 - 2x)dx + i\int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 (1 + 2y)dy + i\int\limits_0^1 (1 - 2 \cdot 1)dy = -2.$$

11.1.3. Обчисліть $\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz$ уздовж параболи $y = x^2$, яка з'єднує точки

$z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i.$

***Розв'язання**. [13.5.2.]*

На параболі $y = x^2$ маємо: $dy = 2xdx\ (0 \le x \le 1)$.

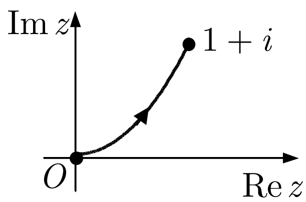


Рис. до зад. 11.1.3

$$\int\limits_C (1 + i - 2\overline{z})dz = \int\limits_0^1 [1 - 2x - (1 + 2x^2)]dx +$$

$$+i\int\limits_0^1 [1 + 2x^2 + (1 - 2x)2x]dx = -2 + \frac{4}{3}i.$$

11.2. Обчислити $\int\limits_C (z^2 + z\overline{z})dz$, де C — дуга кола $\left|z\right| = 1\ (0 \le \arg z \le \pi)$.

***Розв'язання**. [13.5.3.]*

Параметризуймо рівняння дуги кола. Нехай

$$z = e^{i\varphi}, \overline{z} = e^{-i\varphi}, z\overline{z} = 1, dz = ie^{i\varphi}d\varphi.$$

Тоді

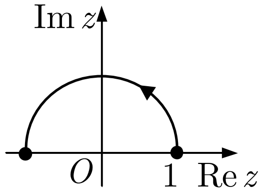


Рис. до зад. 11.2

$$\int_C (z^2 + z\overline{z})dz = \int_0^\pi ie^{i\varphi}(e^{i2\varphi} + 1)d\varphi =$$

$$= i\int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})d\varphi = \left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

11.3. Обчислити $\int_C e^{\overline{z}}dz$, де C — відрізок прямої $y = -x$, яка з'єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = \pi - i\pi$.

***Розв'язання**. [13.5.3.]*

Параметричне рівняння лінії $C: x = t, y = -t, 0 \le t \le \pi$.

$$\int_C e^{\overline{z}}dz = \int_0^\pi e^{t+it}(1-i)dt = (1-i)\int_0^\pi e^{(1+i)t}dt = \frac{1-i}{1+i}e^{(1+i)t}\Bigg|_0^\pi = (e^\pi + 1)i.$$

11.4. Обчислити $\int_{i\pi}^{i2\pi} e^{z/2}dz.$

***Розв'язання**. [13.5.8.]*

Оскільки функція $f(z) = e^{z/2}$ аналітична на всій комплексній площині, то за формулою Ньютона — Лейбніца [13.5.8]:

$$\int_{i\pi}^{i2\pi} e^{z/2}dz = 2\,e^{z/2}\Big|_{i\pi}^{i2\pi} = 2e^{i\pi} - 2e^{i\pi/2} = -2 - 2i.$$

11.5. Обчислити $\oint_L \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz$ уздовж контурів:

1) L_1 — коло $|z| = 1$; 2) L_2 — коло $|z - 2| = 1$;

3) L_3 — коло $|z - 2i| = 1$.

***Розв'язання**. [13.5.4–2.5.7.]*

1. Усередині круга $|z| < 1$ функція $\frac{\cos z}{(z-2)^2}$ аналітична, точка $z_0 = 0$ лежить у цьому крузі. За формулою Коші маємо

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-2)^2}\frac{dz}{z} \overset{[13.5.6]}{=} 2\pi i\left[\frac{\cos z}{(z-2)^2}\right]_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

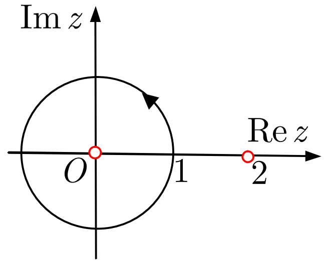


Рис. до зад. 11.5.1.)

2. У крузі $\left|z-2\right| \le 1$ функція $\dfrac{\cos z}{z}$ аналітична, точка $z_1 = 2$ лежить у центрі цього круга. Застосовуючи формулу Коші для похідної одержимо

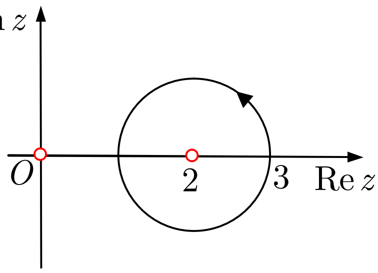


Рис. до зад. 11.5.2)

$$\oint\limits_{\left|z-2\right|=1} \frac{\cos z}{z} \frac{dz}{(z-2)^2} \overset{[13.5.7]}{=} 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z}\right]'_{z=2} =$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{-z\sin z - \cos z}{z^2}\right)_{z=2} = -2\pi i \frac{2\sin 2 + \cos 2}{4} = -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{2}\pi i.$$

3. У крузі $\left|z-2i\right| \le 1$ функція $\dfrac{\cos z}{z(z-2)^2}$ аналітична, тому за теоремою Коші

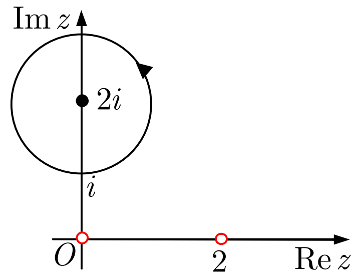


Рис. до зад. 11.5.3)

$$\oint\limits_{\left|z-2i\right|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz \overset{[13.5.4]}{=} 0.$$

11.6. Обчисліть $\displaystyle\oint\limits_{\left|z\right|=3} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz.$

***Розв'язання**. [13.5.5, 13.5.6.]*

У круг $\left|z\right| < 3$ потрапляють дві точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 2$, в яких підінтегральна функція не аналітична.

Побудуємо кола γ_1 та γ_2 із центрами у точках z_1 та z_2 і радіусами такими, щоб вони не перетиналися і повністю лежали всередині круга $\left|z\right| < 3$.

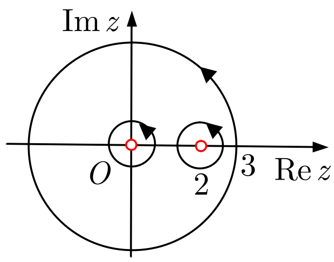


Рис. до зад. 11.6

У тризв'язній області, обмеженій колами $\left|z\right| = 3, \gamma_1$ та γ_2 підінтегральна функція аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\oint\limits_{\left|z\right|=3} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz \overset{[13.5.5]}{=} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz.$$

До кожного з інтегралів у правій частині рівності застосовна формула Коші:

$$\oint\limits_{\left|z\right|=3} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz \overset{[13.5.6]}{=} 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z-2}\right|_{z=0} + 2\pi i \left.\frac{\cos z}{z}\right|_{z=2} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos 2}{2}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

11.7. Обчисліть:

1) $\int\limits_L \operatorname{Im} z dz$ уздовж відрізка дійсної осі від точки $z_0 = 3$ до точки $z_1 = -3$;

2) $\int\limits_L \operatorname{Im} z dz$ уздовж півкола $|z| = 3,\ 0 \le \arg z \le \pi$.

3) $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$ уздовж дуги параболи $y = 2x^2$ від точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 + 2i$;

4) $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$ уздовж відрізка прямої від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$;

5) $\int\limits_L (z + 2\overline{z}) dz$ уздовж дуги кола $|z| = 2, -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$;

6) $\int\limits_L (2z + 1)\overline{z} dz$ уздовж дуги кола $|z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi$;

7) $\int\limits_L \cos \overline{z} dz$, уздовж відрізка прямої від точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = \dfrac{\pi}{2} + i$;

8) $\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, уздовж відрізка прямої від точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 + i$.

11.8. Обчисліть:

1) $\int\limits_0^{2i} (z + 5) \cos z dz$;

2) $\int\limits_1^{i} z \sin z dz$;

3) $\int\limits_0^{\pi i/2} z e^z dz$;

4) $\int\limits_0^{i} (z - i) e^{-z} dz$.

11.9. Обчисліть $\oint\limits_L \dfrac{e^{2z}}{z-\pi i}\,dz$ уздовж:

1) кола $|z| = 4$; 2) кола $|z+i| = 1$.

11.10. Обчисліть:

1) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^3}\,dz$; 2) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\,dz$.

11.11. Обчисліть $\oint\limits_L \dfrac{\operatorname{sh} \pi z}{(z-1)(z^2+4)^2}\,dz$ уздовж контуру:

1) L_1 — коло $|z-1| = \dfrac{1}{3}$; 2) L_2 — коло $|z+2i| = \dfrac{1}{3}$;

3) L_3 — коло $|z-2i| = \dfrac{1}{4}$; 4) L_4 — коло $|z+2| = 1$.

11.12. Обчисліть:

1) $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{dz}{z^2+16}$; 2) $\oint\limits_{|z-2|=1} \dfrac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\,dz$;

3) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$; 4) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$.

Відповіді

11.7. 1) 0; 2) $-\dfrac{9}{2}\pi$; 3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}i$; 4) 0; 5) $8\pi i$; 6) $-4+\pi i$; 7) $\dfrac{\operatorname{ch} 1}{\pi^2+4}(\pi^2-4-4\pi i)$;

8) $\dfrac{1}{4}(e^2-1)(1+i)$.

11.8. 1) $(-2+5i)\operatorname{sh} 2+\operatorname{ch} 2-1$; 2) $\cos 1-\sin 1-ie^{-1}$; 3) $-\dfrac{\pi}{2}+1-i$;

4) $1-\cos 1+i(\sin 1-1)$.

11.9. 1) $2\pi i$; 2) 0. **11.10.** 1) $-\pi i$; 2) $2\pi i$.

11.11. 1) $\dfrac{2\pi \operatorname{sh}\pi}{25}i$; 2) $\dfrac{\pi^2(i+2)}{40}$; 3) $\dfrac{\pi^2(i-2)}{40}$; 4) 0.

11.12. 1) 0; 2) 0; 3) $-\dfrac{\pi i}{45}$; 4) $\dfrac{2}{3}i\pi\operatorname{ch}\pi$.

12. Тейлорові і Лоранові ряди

Навчальні задачі

12.1.1. Розвинути функцію $f(z) = \dfrac{1}{az + b}$ в Тейлорів ряд в околі точки $z = z_0$ $(b + az_0 \neq 0)$.

***Розв'язання**. [13.6.3, 13.6.5.]*

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{a(z-z_0)+b+az_0} =$$

$$= \frac{1}{b+az_0}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{a(z-z_0)}{b+az_0}\right)} \overset{[13.6.5]}{=} \frac{1}{b+az_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{b+az_0}\right)^k (z-z_0)^k,$$

$$\left|-\frac{a(z-z_0)}{b+az_0}\right| < 1 \Rightarrow \left|z-z_0\right| < \left|\frac{b}{a}+z_0\right|.$$

12.1.2. Розвинути функцію $f(z) = e^z$ у Тейлорів ряд в околі точки $z_0 = \dfrac{1}{2}$.

***Розв'язання**. [13.6.3, 13.6.5.]*

$$e^z = e^{z-1/2+1/2} = \sqrt{e}e^{z-1/2} \overset{[13.6.5]}{=} \sqrt{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1/2)^k}{k!}, z \in \mathbb{C}.$$

12.1.3. Розвинути функцію $f(z) = \sin(2z+1)$ у Тейлорів ряд в околі точки $z_0 = -1$.

***Розв'язання**. [13.6.3, 13.6.5.]*

$$\sin(2z+1) = \sin(2(z+1)-1) =$$

$$= \sin 2(z+1)\cos 1 - \sin 1 \cos 2(z+1) \overset{[13.6.5]}{=}$$

$$= \cos 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}(z+1)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sin 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}(z+1)^{2k}}{(2k)!}, z \in \mathbb{C}.$$

12.2.1. Знайти усі Лоранові розвинення функції $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в околі точки $z_0 = 1$.

***Розв'язання**. [13.6.2, 13.6.5.]*

З'ясуймо в яких кільцях функцію

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

можна розвивати в Лоранів ряд.

Функція $f(z)$ аналітична у двох областях.

$\mathrm{I}.\ 0 < \left|z-1\right| < 1.$

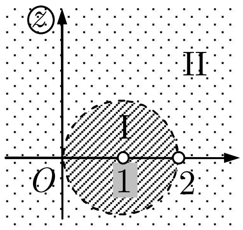


Рис. до зад. 12.2.1

Доданок $-\dfrac{1}{z-1}$ вже розвинутий у Лоранів ряд в околі точки $z=1$.

Функція $\dfrac{1}{z-2}$ аналітична не лише в розглядуваній області, а й у відкритому крузі $\left|z-1\right| < 1$ — для неї Лоранове розвинення переходить у Тейлорове:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k, 0 < \left|z-1\right| < 1.$$

$\mathrm{II}.\left|z-1\right| > 1.$ Тип області вказує на те, що функцію $\dfrac{1}{z-2}$ треба розвивати в Лоранів ряд за від'ємними степенями $(z-1)$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^k}.$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^k} = \frac{2}{z-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^k}, \ \left|z-1\right| > 1.$$

12.2.2. Знайдіть усі Лоранові розвинення функції $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$ в околі точки

$z_0 = i.$

Розв'язання*. *[13.6.2, 13.6.5.]

З'ясуймо в яких кільцях функцію

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right)$$

можна розвивати в Лоранів ряд.

Функція $f(z)$ аналітична у трьох областях.

$\mathrm{I}.\left|z-i\right| < r = \left|0-i\right| = 1.$

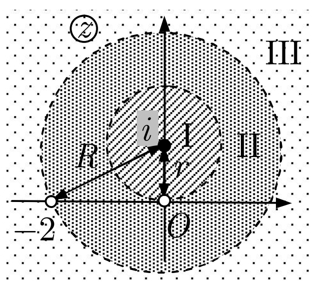


Рис. до зад. 12.2.2

Для функцій $\dfrac{1}{z}$ та $\dfrac{1}{z+2}$ Лоранове розвинення переходить у Тейлорове:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-i)+i}=\frac{1}{i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i}\right)}=-\sum_{k=0}^{\infty}i^{k+1}(z-i)^k;$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-i)+i+2}=\frac{1}{i+2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{i+2}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(i+2)^{k+1}}(z-i)^k.$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}i^{k+1}(z-i)^k-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(i+2)^{k+1}}(z-i)^k=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(i^{k+1}+\frac{(-1)^k}{(i+2)^{k+1}}\right)(z-i)^k.$$

II. $1<\left|z-i\right|<R=\left|2-i\right|=\sqrt{5}.$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-i)+i}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{1-\left(-\frac{i}{z-i}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k\frac{1}{(z-i)^{k+1}}.$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{2}\frac{1}{(z-i)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2(i+2)^{k+1}}(z-i)^k.$$

III. $\left|z-i\right|>\sqrt{5}.$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-i)+i+2}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\left(-\frac{i+2}{z-i}\right)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-i-2\right)^k\frac{1}{(z-i)^{k+1}}.$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{2}\frac{1}{(z-i)^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-i-2\right)^k}{2}\frac{1}{(z-i)^{k+1}}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k+\left(-i-2\right)^k}{2}\frac{1}{(z-i)^{k+1}}.$$

12.2.3. Знайдіть усі Лоранові розвинення функції $f(z)=\sin\frac{z}{z-i}$ в околі точки $z_0=i.$

***Розв'язання**. [13.6.2, 13.6.5.]*

$$\sin\frac{z}{z-i}=\sin\left(1+\frac{i}{z-i}\right)=\sin 1\cos\frac{i}{z-i}+\cos 1\sin\frac{i}{z-i}=$$

$$\overset{[13.6.5]}{=} \sin 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{i}{z-i} \right)^{2k} + \cos 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \left(\frac{i}{z-i} \right)^{2k+1},$$

$$\left| z - i \right| > 0.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

12.3. Розвинути в Тейлорів ряд функцію $f(z)$ за степенями $(z - z_0)$:

1) $f(z) = e^{3z-2}, z_0 = 1;$ 2) $f(z) = z \cos 2z, z_0 = -1;$

3) $f(z) = \sin(z + i), z_0 = i;$ 4) $f(z) = (z+1)\sin 2z, z_0 = -1;$

5) $f(z) = \dfrac{1}{z-3}, z_0 = 0;$ 6) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^3}, z_0 = 0.$

12.4. Розвинути в Лоранів ряд функцію $f(z)$ в області $0 < \left| z - z_0 \right| < \infty$:

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}, z_0 = 0;$ 2) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z+1}, z_0 = -1;$

3) $f(z) = \sin\dfrac{1}{(z-i)^3}, z_0 = i;$ 4) $f(z) = (z+1)\sin\dfrac{1}{z+1}, z_0 = -1;$

5) $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}(z-1)^2, z_0 = 1;$ 6) $f(z) = (z+i)^2 \cos\dfrac{1}{z+i}, z_0 = -i;$

7) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}, z_0 = 0;$ 8) $f(z) = \dfrac{1 - e^{-z^2}}{z^2}, z_0 = 0.$

12.5. Розвинути всі розвинення функції $f(z)$ у Лоранів ряд за степенями $(z - z_0)$:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z-3}, z_0 = 3;$ 2) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^3}, z_0 = -1;$

3) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}, z_0 = 0, z_0 = -2;$

4) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 3z + 2}, z_0 = 1, z_0 = 2;$

5) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}, z_0 = \infty;$ 6) $f(z) = z^3 e^{1/z}.$

12.6. Розвиньте функцію в Лоранів ряд у вказаних кільцях:

$$1)\ f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}, 2<\left|z\right|<3, 3<\left|z\right|<+\infty;$$

$$2)\ f(z)=\frac{1}{z^2+z}, 0<\left|z\right|<1, 1<\left|z\right|<+\infty;$$

$$3)\ f(z)=\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}, 1<\left|z\right|<4, 4<\left|z\right|<+\infty;$$

$$4)\ f(z)=\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \left|z\right|<1, 1<\left|z\right|<2, 2<\left|z\right|<+\infty.$$

Відповіді

12.3. $1)\ e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z-1)^n}{n!}, z\in\mathbb{C};$

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n+1)!}\left[(2n+1)\cos 2-2\sin 2\right](z+1)^{2n+1}-\cos 2-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n!)}\left[2\cos 2+2n\sin 2\right](z+1)^{2n}, z\in\mathbb{C};$$

$$3)\ \operatorname{ch}2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!}+i\operatorname{sh}2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{2n}}{(2n)!}, z\in\mathbb{C};$$

$$4)\ \cos 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}(z+1)^{2n+2}}{(2n+1)!}-\sin 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(z+1)^{2n+1}}{(2n)!}, z\in\mathbb{C};$$

$$5)\ -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, \left|z\right|<3;\ 6)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}n(n-1)z^{n-2}, \left|z\right|<1.$$

12.4. $1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}};\ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}};\ 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-i)^{3(2n+1)}};$

$$4)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}};\ 5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^{n-3}};\ 6)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z+i)^{2n-2}};$$

$$7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!};\ 8)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(n+1)!}.$$

12.5. $1)\ \frac{1}{z-3}, 0<\left|z-3\right|;\ 2)\ \frac{1}{(z+1)^3}, 0<\left|z+1\right|;$

$$3)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{2^{n+2}}, 0<\left|z\right|<2, \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{z^{n+1}}, \left|z\right|>2,$$

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}, 0<\left|z+2\right|<2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}, \left|z+2\right|>2;$

4) $-\frac{2}{z-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n, 0<\left|z-1\right|<1,\ \frac{1}{z-1}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \left|z-1\right|>1,$

$\frac{3}{z-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n, 0<\left|z-2\right|<1, \frac{1}{z-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^{n+1}}, \left|z-2\right|>1;$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}, 0<\left|z\right|$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-3}}, 0<\left|z\right|$.

12.6. 1) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$; 2) $\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$;

3) не розвивається, $\frac{1}{5}\left(\frac{2^2+1}{z^3}-\frac{2^3+2}{z^4}+\frac{2^4-2}{z^5}-\frac{2^5-2}{z^6}+...\right)$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)z^{n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n,\ \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}.$

13. Нулі та ізольовані особливі точки функції

Навчальні задачі

13.1.1. Знайти нулі функції $f(z)=z^2\sin z$ і визначити їхні порядки.

Розв'язання. *[13.7.2.]*

$f(z)=0 \Rightarrow z=0$ або $\sin z=0 \Rightarrow z=\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Дослідімо корінь $z=0$:

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-..., z^2\sin z = z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...\right).$$

Отже, $z=0$ — нуль 3-го порядку, оскільки вираз в дужках $\neq 0$ при $z=0$.

Дослідимо корені $z=\pi k, k\neq 0$:

$$f'(z)=z^2\cos z+2z\sin z;$$

$$f'(\pi k)=(-1)^k\pi^2k^2\neq 0\,(k\neq 0).$$

Отже, $z=\pi k$ — нуль 1-го порядку.

13.1.2. Знайти нулі функції $f(z)=\frac{z^3}{1+z-e^z}$ і визначити їхні порядки.

Розв'язання. *[13.7.2.]*

$f(z)=0 \Rightarrow z=0$. Дослідімо точку $z=0$:

$$\frac{z^3}{1+z-e^z} = -\frac{z^3}{\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right)-1-z} =$$
$$= -\frac{z^3}{z^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\ldots\right)} = -\frac{z}{\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\ldots}.$$

Отже, $z = 0$ — нуль 1-го порядку.

13.2.1. Знайти особливі точки функції $f(z) = \dfrac{1}{1-\sin z}$ і визначити їхній характер.

Розв'язання*. *[13.7.1, 13.7.6.]

$$g(z) = 1-\sin z = 0 \Rightarrow z_k = \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$
$$g'(z) = -\cos z; g'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) = 0;$$
$$g''(z) = \sin z; g''\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) = 1.$$

Отже, z_k — нулі 2-го порядку для $g(z)$ і полюси 2-го порядку для $f(z)$ [13.7.6.]

13.2.2. Знайти особливі точки функції $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ і визначите їхній характер.

Розв'язання*. *[13.7.1, 13.7.3.]

$z^2 = 0 \Rightarrow z_0 = 0.$

$$f(z) = \frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)}{z^2} = \frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots$$

Отже, $z_0 = 0$ — усувна особлива точка для $f(z)$ [13.7.3.]

13.2.3. Знайти особливі точки функції $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$ і визначити їхній характер.

Розв'язання*. *[13.7.1, 13.7.5.]

Дослідімо особливу точку $z_0 = -2$.

$$e^{\frac{1}{z+2}} = 1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2!(z+2)^2} + \ldots.$$

Оскільки головна частина Лоранового розвинення в околі точки $z_0 = -2$ містить нескінченно багато членів, то z_0 — істотно особлива точка.

13.2.4. Знайти особливі точки функції $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$ і визначити їхній характер:

***Розв'язання**. [13.7.1, 13.7.6.]*

[*Особливі точками функції шукаємо серед нулів знаменників.*]

$$e^{-z}=1, z=0 \Rightarrow z_k=2\pi ki, k\in\mathbb{Z}.$$

Отже, $z_k=2\pi ki, k\in\mathbb{Z},$— особливі точки функції $f(z)$.

[*З'ясовуємо їхній характер.*]

I. $z_k=2\pi ki, k\neq 0: g(z)=e^{-z}-1,$

$$g(2\pi ki)=0; g'(z)=-e^{-z}; g'(2\pi ki)=-1\Rightarrow$$

$z_k=2\pi ki, k\neq 0$ прості нулі функції $g(z)\Rightarrow$ прості полюси для $\dfrac{1}{e^{-z}-1}; \dfrac{1}{z^2}$ — аналітична у цих точках $\Rightarrow z_k=2\pi ki,\ k\neq 0$ — прості полюси для $f(z)$.

II. $z_0=0: f(z)=\dfrac{z^2+e^{-z}-1}{z^2(e^{-z}-1)}\overset{[13.6.5]}{=}\dfrac{-z+\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\ldots}{z^2(-z+\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\ldots)}=$

$$=\frac{-z\left(1-\frac{3}{2}z+\frac{1}{3!}z^2-\ldots\right)}{-z^3(1-\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2-\ldots)}=\frac{1-\frac{3}{2}z+\frac{1}{3!}z^2-\ldots}{z^2(1-\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2-\ldots)}.$$

Отже, $z_0=0$ — полюс 2-го порядку [13.7.6].

13.3. Визначити характер особливої точки $z_0=0$ для функції $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z-\sin z}$.

***Розв'язання**. [13.7.1, 13.7.6.]*

Розвиньмо чисельник і знаменник дробу в Тейлорів ряд:

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh} z}{z-\sin z}\overset{[13.6.5]}{=}\frac{z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\ldots}=\frac{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\ldots}{z^2\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots\right)}.$$

Оскільки $z=0$ є нулем 2-го порядку для функції $\dfrac{1}{f(z)}$, то ця точка є полюсом 2-го порядку для функції $f(z)$ [13.7.6.]

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

13.4. Знайдіть нулі функції $f(z)$ і визначте їхній порядок:

1) $f(z) = \cos z$;
2) $f(z) = \operatorname{tg}^3 z$;
3) $f(z) = (z^3 + 1)^2$;
4) $f(z) = \dfrac{(z^2 + 1)(z^2 - 3z + 2)^2}{z + 1}$;
5) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$;
6) $f(z) = \cos z + \operatorname{sh} iz$.

13.5. Знайдіть усі особливі точки функції $f(z)$, вкажіть їхній характер, у разі полюса — його порядок, якщо:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$;
2) $f(z) = \dfrac{z^4}{1 + z^4}$;
3) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}$;
4) $f(z) = \dfrac{2z^2 - 1}{z^5(z^2 + 9)^3}$;
5) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$;
6) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$;
7) $f(z) = \dfrac{z^2}{\sin z}$;
8) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z + \pi)(z^2 - 1)}$;
9) $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - e^{2z})}$;
10) $f(z) = \operatorname{tg} 2z$.

13.6. Визначити характер особливої точки $z_0 = 0$ для функції:

1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$;
2) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$.

Відповіді

13.4. 1) $z_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ — прості нулі; 2) $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, — нулі 3-го порядку;

3) $z_1 = -1, z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — нулі 2-го порядку;

4) $z_1 = i, z_2 = -i$ — прості нулі, $z_3 = 1, z_4 = 2$ — нулі 2-го порядку;

5) $z_n = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$ — нулі 2-го порядку; 6) нулів немає.

13.5. 1) $z_1 = 0, z_1 = 1, z_2 = -1$ — прості полюси; 2) $z_{1,2,3,4} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — прості полюси;

3) $z_1 = 0$ — полюс 3-го порядку, $z_{2,3} = \pm 2i$ — полюси 2-го порядку;

4) $z_1 = 0$ — полюс 5-го порядку, $z_{2,3} = \pm 3i$ — полюси 3-го порядку;
5) $z = 1$ — істотно особлива точка; 6) $z = 0$ — істотно особлива точка;
7) $z_0 = 0$ — усувна особлива точка, $z_{\pm k} = \pi k, k \in \mathbb{N},$ — прості полюси;
8) $z_1 = -\pi$ — усувна особлива точка, $z_{2,3} = \pm 1$ — прості полюси;
9) $z_0 = 0$ — полюс 2-го порядку, $z_{\pm k} = \pi k i, k \in \mathbb{N},$ — полюси 1-го порядку;
10) $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z},$ — прості полюси.

13.6. 1) полюс 1-го порядку; 2) полюс 4-го порядку.

14. Лишки

Навчальні задачі

14.1.1. Знайти лишки функції $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}$ у її особливих точках.

Розв'язання*. *[13.8.1, 13.8.7.]

Знайдімо особливі точки функції $f(z)$:

$$z\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \cos z = 0 \Rightarrow z = 0,\ z = \frac{\pi}{4}, z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Точка $z = 0$ — усувна, оскільки

$$\exists \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{tg} z}{z\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{4}{\pi}.$$

Точки $z = \frac{\pi}{4}, z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — прості полюси, оскільки вони прості нулі функцій $z - \frac{\pi}{4}$ та $\cos z$. Отже:

$$\operatorname{res} f(0) = 0;$$

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) \overset{[13.8.7]}{=} \left.\frac{\operatorname{tg} z}{z\left(z - \frac{\pi}{4}\right)'}\right|_{z=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{\operatorname{tg} z}{z}\right|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi};$$

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \overset{[13.8.7]}{=} \left.\frac{\sin z}{z\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos z\right)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}+\pi k} =$$

$$= -\left.\frac{1}{z\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}\right|_{z=\frac{\pi}{2}+\pi k} = -\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)}, k \in \mathbb{Z}.$$

14.1.2. Знайти лишки функції $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ у її особливих точках.

Розв'язання*. *[13.8.1, 13.8.5, 13.8.6.]

Знайдімо особливі точки функції $f(z)$:

$$z^3(z-1)=0 \Rightarrow z=0, z=1.$$

Точка $z=0$ — полюс 3-го порядку, точка $z=1$— простий полюс. Отже,

$$\operatorname{res} f(1) \overset{[13.8.6]}{=} \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z^3(z-1)}(z-1)=e;$$

$$\operatorname{res} f(0) \overset{[13.8.5]}{=} \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z^3(z-1)}z^3\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}\right)' =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}=-\frac{5}{2}.$$

14.1.3. Знайти лишки функції $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$ у її особливих точках.

Розв'язання*. *[13.8.1, 13.8.6.]

Особливими точки функції $f(z)$:

$$z=0, z=1.$$

Точка $z=1$ — простий полюс, точка $z=0$— істотно особлива точка.

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}(z-1)\right)=-\sin 1.$$

$$f(z)=\sin\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} \overset{[13.6.5]}{=}$$

$$=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\frac{1}{7!\,z^7}+\ldots-\right)\cdot\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=$$

$$=\ldots+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots-\right)+\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{res} f(0)=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots- \overset{[12.7.2]}{=} \sin 1.$$

14.2. Знайти лишок функції $f(z)=\dfrac{1}{z^{10}+1}$ у нескінченно віддаленій точці.

Розв'язання*. *[13.5.3.]

Функція $f(z)$ в околі нескінченності $\left|z\right|>1$ розвивається в Лоранів ряд:

$$\frac{1}{1+z^{10}}=\frac{1}{z^{10}}\frac{1}{1+\frac{1}{z^{10}}} \overset{[13.6.5]}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{10(k+1)}}=\frac{1}{z^{10}}-\frac{1}{z^{20}}+\ldots-.$$

Отже, $c_{-1} = 0$, тобто $\operatorname{res} f(\infty) = (-1)\cdot 0 = 0$.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

14.3. Знайдіть лишки функції $f(z)$ у всіх її особливих точках:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z + \frac{1}{2}}$;

3) $f(z) = \dfrac{2z-5}{z^2 - 2z + 1}$; 4) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$;

5) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$; 6) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$;

7) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z^2}$; 8) $f(z) = z^3\cos\dfrac{1}{z}$;

9) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$; 10) $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$.

14.4. Знайдіть лишок функції $f(z)$ у точці z_0:

1) $f(z) = z^4 e^{1/z}, z_0 = \infty$; 2) $f(z) = z\cos^2\dfrac{\pi}{z}, z_0 = \infty$;

3) $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}, n \in \mathbb{Z}, z_0 = 0$; 4) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{(1-\cos 2z)\sin z}, z_0 = 0$.

Відповіді

14.3. 1) $\operatorname{res} f(0) = 1, \operatorname{res} f(-1) = -\dfrac{1}{2}, \operatorname{res} f(1) = -\dfrac{1}{2}$;

2) $\operatorname{res} f\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{res} f\left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

3) $\operatorname{res} f(1) = 2$; 4) $\operatorname{res} f(0) = -\dfrac{1}{32}, \operatorname{res} f(\pm 2i) = \dfrac{1}{64}$;

5) $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; 6) $\operatorname{res} f(0) = 0, \operatorname{res} f(\pi k) = (-1)^k \pi k$;

7) $\operatorname{res} f(0) = 0$; 8) $\operatorname{res} f(0) = \dfrac{1}{24}$; 9) $\operatorname{res} f(1) = \dfrac{3}{2}$; 10) $\operatorname{res} f(1) = e$.

14.4. 1) $\operatorname{res} f(\infty) = -\dfrac{1}{120}$; 2) $\operatorname{res} f(\infty) = \pi^2$; 3) $\operatorname{res} f(0) = 1$; 4) $\operatorname{res} f(0) = 1$.

15. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Навчальні задачі

15.1.1. Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3}$.

***Розв'язання*. [13.9.1.]**

Особливими точками підінтегральної функції $f(z)=\dfrac{z}{e^z+3}$ є прості полюси

$$z_k = \mathrm{Ln}(-3) \overset{[13.2.4]}{=} \ln 3 + i\pi(2k-1), k\in\mathbb{Z}.$$

Усередину круга $|z+1|<4$ потрапляють точки $z_1=\ln 3-\pi i$ та $z_2=\ln 3+\pi i$.

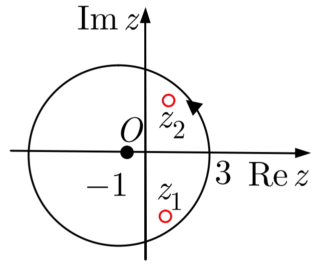


Рис. до зад. 15.1.1

Отже, за теоремою Коші:

$$\oint\limits_{C:|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3} \overset{[13.9.1]}{=} 2\pi i\Big(\operatorname{res} f(\ln 3+\pi i)+\operatorname{res} f(\ln 3-\pi i)\Big)=$$

$$=2\pi i\left(\left.\frac{z}{(e^z+3)'}\right|_{z=\ln 3+\pi i}+\left.\frac{z}{(e^z+3)'}\right|_{z=\ln 3-\pi i}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{\ln 3+\pi i}{e^{\ln 3+\pi i}}+\frac{\ln 3-\pi i}{e^{\ln 3-\pi i}}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{\ln 3+\pi i}{-3}+\frac{\ln 3-\pi i}{-3}\right)=-\frac{4\pi i}{3}\ln 3.$$

15.1.2. Обчислити інтеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$.

***Розв'язання*. [13.9.1.]**

Особливими точками підінтегральної функції $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}$ є нулі знаменника $z_0=0, z_1=i$. Обидві точки потрапляють усередину круга $|z-i|<3$.

Точка $z=0$ — усувна особлива точка, оскільки

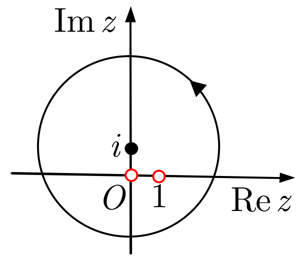


Рис. до зад. 15.1.2

$$\exists \lim_{z\to 0}\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)}=\left|\begin{matrix}e^{z^2}-1\sim z^2,\\ z\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-i}=i.$$

Отже, $\operatorname{res} f(0) = 0$ [13.8.4].

Точка $z = i$ — простий полюс. Отже,

$$\oint\limits_{C:|z-i|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2}\, dz = 2\pi i \big(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(i) \big) =$$

$$= 2\pi i \cdot 0 + 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} = 2\pi i (1 - e^{-1}).$$

15.1.3. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{C:|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z}\, dz.$

***Розв'язання**. [13.9.1.]*

Особливою точкою функції $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$ є $z = 0$ — істотно особлива точка.

Ця точка потрапляє всередину круга $|z| < 1$. Знайдімо $\operatorname{res} f(0)$ за означенням:

$$z^3 \sin \frac{1}{z} \overset{[13.6.5]}{=} z^3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\, z^3} + \frac{1}{5!\, z^5} - \ldots + \right) =$$

$$= z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!\, z^3} - \ldots + \Rightarrow \operatorname{res} f(0) \overset{[13.8.2]}{=} c_{-1} = 0.$$

Отже,

$$\oint\limits_{C:|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

15.2.1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$

***Розв'язання**. [13.9.2.]*

Особливими точками функції

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 13)^2} = \frac{z}{(z + 2 - 3i)^2 (z + 2 + 3i)^2}$$

є точки $z_{1,2} = -2 \pm 3i$ — полюси 2-го порядку, які не лежать на дійсній осі.

Степінь многочлена у знаменнику на 3 більше, ніж степінь многочлена в чисельнику. Отже,

$$I_1 = 2\pi i \operatorname{res} f(-2 + 3i)$$

(лишок береться в точці з додатною уявною частиною).

Знайдімо

$$\operatorname{res} f(-2+3i) \overset{[13.8.5]}{=} \lim_{z \to -2+3i} \left(\frac{z}{(z+2+3i)^2} \right)' =$$
$$= \lim_{z \to -2+3i} \frac{2+3i-z}{(z+2+3i)^3} = \frac{4}{-216i} = \frac{i}{54} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{i}{54} = -\frac{\pi}{27}.$$

15.2.2. Обчислити інтеграли $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}$.

Розв'язання*. *[13.9.3, 13.9.4.]

$$I \overset{[13.9.4]}{=} \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20}.$$

Функція

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20} = \frac{ze^{iz}}{(z+2-4i)(z+2+4i)}$$

має у точках $z_{1,2} = -2 \pm 4i$ — прості полюси. Отже,

$$I = \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20} \overset{[13.9.3]}{=} \operatorname{Im}\Big(2\pi i \operatorname{res} f(-2+4i)\Big)$$

(лишок береться в точці з додатною уявною частиною).
Знайдімо

$$\operatorname{res} f(-2+4i) \overset{[13.8.6]}{=} \lim_{z \to -2+4i} \frac{ze^{iz}}{(z+2+4i)} = \frac{(-2+4i)e^{-4}(\cos 2 - i \sin 2)}{8i}.$$

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20} = 2\pi i \cdot \frac{(-2+4i)e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)}{8i} =$$
$$= \frac{e^{-4}\pi}{4}\Big((-2\cos 2 + 4\sin 2\Big) + i(4\cos 2 + 2\sin 2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{\pi e^{-4}(2\cos 2 + \sin 2)}{2}.$$

15.2.3. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x}$ $(0 < a < 1)$.

Розв'язання*. *[13.9.5.]

Виконаймо заміну змінної:

$$e^{ix} = z, dx = \frac{dz}{iz}, \cos x = \frac{z^2+1}{2z}.$$

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1 + a\,\frac{z^2+1}{2z}\right)} = -2i \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}.$$

Знайдімо особливі точки функції $f(z) = \dfrac{1}{az^2 + 2z + a}$:

$$az^2 + 2z + a = 0;$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Усередину круга $|z| < 1$ потрапляє лише точка $z_1 = \dfrac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$ — полюс 1-го порядку. Отже,

$$\operatorname{res} f\left(\frac{1}{a}\left[\sqrt{1-a^2}-1\right]\right) \overset{[13.8.6]}{=} \lim_{z \to \frac{1}{a}\left[\sqrt{1-a^2}-1\right]} \frac{1}{a\left(z + \frac{\sqrt{1-a^2}+1}{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}.$$

$$I = -2i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

15.3. Обчисліть $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z(z+2)^3}$, якщо контур:

1) $C : |z+5| = 1$; 2) $C : |z| = 1$; 3) $C : |z| = 3$.

15.4. Обчисліть $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$, якщо контур:

1) $C : |z+1| = 1$; 2) $C : |z-1| = 1$; 3) $C : |z| = 3$.

15.5. Обчисліть:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=5} \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}\,dz$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}\,dz$; 4) $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}\,dz$;

5) $\oint\limits_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} dz$;

6) $\oint\limits_{|z|=2} z \sin \frac{1}{z^2}\, dz$;

7) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z} - 1}{z}\, dz$;

8) $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2}\, dz$;

9) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi i z}\, dz$;

10) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh} \frac{z}{3}}\, dz$;

11) $\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z \cos \frac{1}{z-3} + \frac{4 \operatorname{ch} \frac{\pi i z}{2}}{z(z-2)^2} \right) dz$;

12) $\oint\limits_{|z-2|=2} \left(z \sin \frac{i}{z-2} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{2}}{(z-1)^2 (z+1)^2} \right) dz$;

13) $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1}\, dz$;

14) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}$.

15.6. Обчисліть:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2 (x^2 + 15)^2}$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 16)}$;

7) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\, dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\, dx \ (\lambda > 0)$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$;

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$;

11) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t + 4}$; 12) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}$;

13) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{3}\cos t)^2}$; 14) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2}$;

15) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}\,(0 < p < 1)$; 16) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}\,(0 < b < a)$.

Відповіді

15.3. 1) 0; 2) $\frac{\pi i}{4}$; 3) 0. **15.4.** 1) $\frac{3\pi i}{8}$; 2) $-\frac{3\pi i}{8}$; 3) 0.

15.5. 1) $\frac{\pi^2}{4}i$; 2) $-4i$; 3) $\frac{3}{2}\pi i$; 4) $-2i$; 5) $-\frac{2\pi i}{e}$; 6) $2\pi i$; 7) $-\pi i$; 8) 0; 9) 4; 10) -2π; 11) πi; 12) 5π; 13) $\frac{2\pi e^2 i}{3}$; 14) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

15.6. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2a}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{15}\pi}{10800}$; 6) $\frac{3\pi}{100}$; 7) $\frac{\pi}{2e}$; 8) $\frac{\pi}{16}\left(e^{-\lambda} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda}\right)$; 9) $\frac{\pi}{8}\left(\frac{3}{e^9} - \frac{1}{e}\right)$; 10) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{e^2} - \frac{1}{e}\right)$; 11) π; 12) π; 13) $\frac{\pi\sqrt{7}}{4}$; 14) $\frac{2\sqrt{15}\pi}{9}$; 15) $\frac{2\pi}{1-p^2}$; 16) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Модуль 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

16. Інтеграл Фур'є

Навчальні задачі

16.1.1. Зобразити інтегралом Фур'є у комплексній формі центрований прямокутний імпульс $f(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$

Знайти і зобразити його амплітудний та фазовий спектри.

***Розв'язання**. [14.1.7, 14.2.3, 14.2.4.]*

[***Крок 1.** Зображуємо графік функції.*] Рис. 1 до зад. 16.1.1.

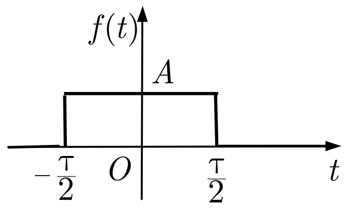


Рис. 1 до зад. 16.1.1

[***Крок 2.** Перевіряємо умови теореми Фур'є* [14.1.1.]]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,dt = A\tau.$$

Функція f — абсолютно інтегровна, кусково-стала — для неї виконано умови теореми Фур'є.

[***Крок 3.** Зображуємо графік інтеграла Фур'є, який відрізняється від графіка функції лише в точках розриву 1-го роду.*] Рис. 2 до зад. 16.2.

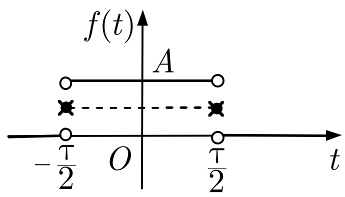


Рис. 2 до зад. 16.2

[***Крок 4.** Записуємо відповідну формулу зображення функції інтегралом Фур'є.*]

$$f(t) \overset{[14.1.3]}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

[***Крок 5.** Записуємо формулу для коефіцієнта інтеграла Фур'є і обчислюємо його.*]

$$F(\omega) \overset{[14.1.3]}{=} A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{i\omega}\left(e^{\tau i\omega/2} - e^{-\tau i\omega/2}\right) = \frac{2A}{\omega} \sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

[***Крок 6.** Записуємо відповідь згідно з теоремою Фур'є.*]

$$\frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} \sin\frac{\omega\tau}{2} e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} A, & |t| < \dfrac{\tau}{2}, \\ \dfrac{A}{2}, & t = \pm\dfrac{\tau}{2}, \\ 0, & |t| > \dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Амплітудний спектр

$$S(\omega) \overset{[14.1.8]}{=} 2A\left|\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|.$$

Фазовий спектр

$$\varphi(\omega) \overset{[14.1.9]}{=} \begin{cases} -\pi, & \sin\dfrac{\omega\tau}{2} < 0, \\ 0, & \sin\dfrac{\omega\tau}{2} \ge 0, \end{cases} \quad \omega \ge 0, \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

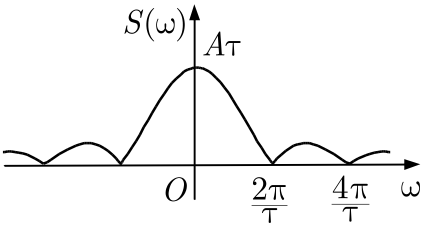


Рис. 3 до зад. 16.1.1

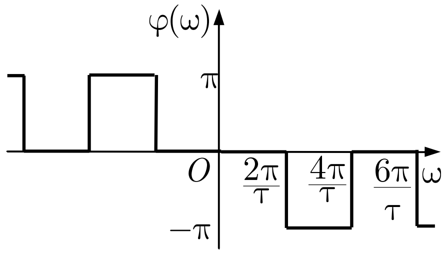


Рис. 4 до зад. 16.1.1

Коментар. ① Оскільки функція f парна, то окрім зображення інтегралом Фур'є можна знайти ще її косинус-перетвір.

$$f(t) \overset{[14.1.5]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega.$$

$$F_c(\omega) \overset{[14.1.5]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\tau/2} A\cos\omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

$$\frac{2A}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega t d\omega = \begin{cases} A, & |t| < \dfrac{\tau}{2}, \\ \dfrac{A}{2}, & t = \pm\dfrac{\tau}{2}, \\ 0, & |t| > \dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

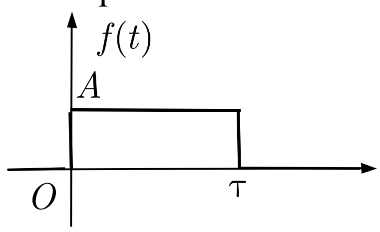
16.1.2. Зобразити інтегралом Фур'є загаяний прямокутний імпульс

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t < 0, t > \tau. \end{cases}$$

Знайти і зобразити його амплітудний та фазовий спектри.

***Розв'язання**. [14.1.8, 14.1.9.]*

1. Рис. 1 до зад. 16.1.2.



2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt = \int_0^{\tau} A dt = A\tau.$

Функція f — абсолютно інтегровна, кусково-стала — для неї виконано умови теореми Фур'є.

Рис. 1 до зад. 16.1.2

3. Рис. 2 до зад. 16.1.2.

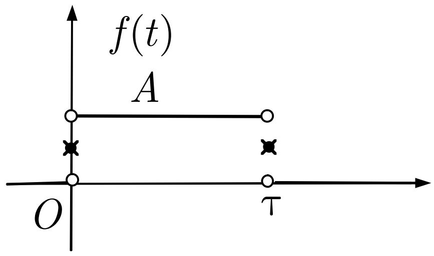


Рис. 2 до зад. 16.1.2

4. $f(t) \overset{[14.1.3]}{=} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$

5. $F(\omega) \overset{[14.1.3]}{=} \displaystyle\int_{0}^{\tau} Ae^{-i\omega t}dt =$

$$= \frac{A}{i\omega}(1 - e^{-i\omega\tau}) = \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}e^{-i\omega\tau/2}.$$

Амплітудний спектр збігається з амплітудним спектром центрованого імпульсу (рис. 3 до зад. 16.1.1).

Фазовий спектр (рис. 3 до зад. 16.1.3)

$$\varphi(\omega) \overset{[\text{Б}.2.3]}{=}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\dfrac{\omega\tau}{2}, & \sin\dfrac{\omega\tau}{2} > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\dfrac{\omega\tau}{2}, & \sin\dfrac{\omega\tau}{2} < 0, \end{array}\right. \quad \omega \ge 0,$$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

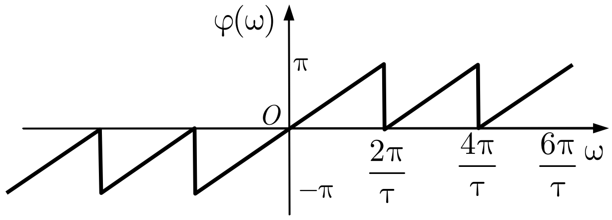


Рис. 3 до зад. 16.1.2

16.2.1. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(t) = Ae^{-at}, t \ge 0$, продовживши її на інтервал $(-\infty;0)$ парним чином.

***Розв'язання*. [14.1.5.]**

1. Графік функції (рис. 1 до зад. 16.2.1) та її парного продовження $\tilde{f}(t)$ (рис. 2 до зад. 16.2.1).

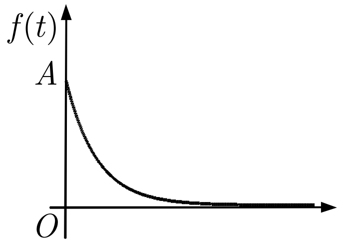


Рис. 1 до зад. 16.2.1

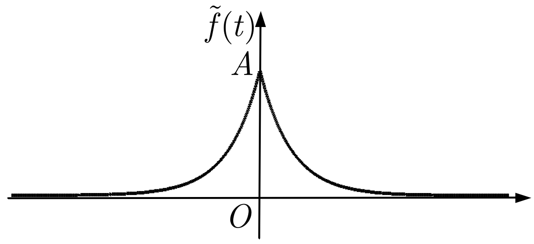


Рис. 2 до зад. 16.2.1

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(t)\right|dt = 2A\int_{0}^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{2A}{a}\lim_{N\to\infty}(1 - e^{-aN}) = \frac{2A}{a}.$

Функція $\tilde{f}(t), t \in \mathbb{R}$, абсолютно інтегровна і справджує умови теореми Фур'є.

4. $f(t) \overset{[14.1.5]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos t\omega d\omega.$

5. $F_c(\omega) \overset{[14.1.5]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} A e^{-at} \cos \omega t dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) dt =$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-t(a-i\omega)}}{i\omega - a} - \frac{e^{-t(a+i\omega)}}{i\omega + a} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{a + i\omega} \right) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Aa}{a^2 + \omega^2}.$$

6. **[***Зображення функції $f(t)$ косинус-інтегралом Фур'є.***]**

$$e^{-at} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Aa}{\omega^2 + a^2} \cos \omega t dt, t \geq 0.$$

16.2.2. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(t) = Ae^{-at}, t \geq 0$, продовживши її на інтервал $(-\infty; 0)$ непарним чином.

***Розв'язання**. [14.1.6.]*

1. Графік функції (рис. 1 до зад. 16.2.1).

2. Функція $\tilde{f}(t), t \in \mathbb{R}$, що є непарним продовженням функції $f(t)$, абсолютно інтегровна і справджує умови теореми Фур'є.

3. [*Графік непарного продовження.*] Рис. до зад. 16.2.2.

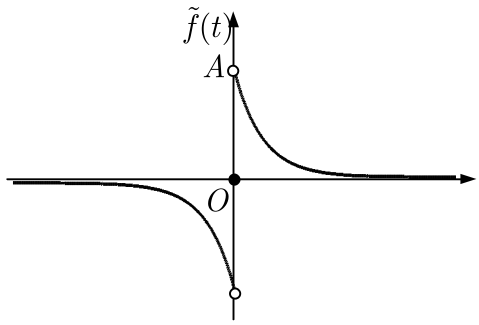


Рис. до зад. 16.2.2

4. $f(t) \overset{[14.1.6]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \sin t\omega d\omega.$

5. $F_s(\omega) \overset{[14.1.6]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} A e^{-at} \sin \omega t dt =$

$$= \frac{A}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) dt = \frac{A}{i\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-t(a-i\omega)}}{i\omega - a} + \frac{e^{-t(a+i\omega)}}{i\omega + a} \right) \Bigg|_0^{\infty} =$$
$$= \frac{A}{i\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - i\omega} - \frac{1}{a + i\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

6. **[***Зображення функції $f(t)$ синус-інтегралом Фур'є.***]**

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{A\omega}{\omega^2 + a^2} \sin \omega t dt = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

16.3. Зобразіть інтегралом Фур'є у дійсній формі функцію:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0,5, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0,5, & x=0, x=1,\\ 0, & x\notin[0;1];\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(0;\pi),\\ 0, & x\notin(0;\pi).\end{cases}$

16.4. Зобразіть інтегралом Фур'є функцію $f(x)$, продовживши її парним і непарним чином:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

16.5. Зобразіть функцію $f(x)$ інтегралом Фур'є в комплексній формі:

1) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases} a>0;$ 2) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax}\sin\alpha x, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$

3) $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b), b>a;$

4) $f(x)=\begin{cases}h\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|<a,\\ 0, & |x|\ge a.\end{cases}$

Відповіді

16.3. 1) $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\cos(x\omega)d\omega=f(x);$ 2) $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(1-2x)}{\omega}d\omega=f(x);$

3) $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\dfrac{\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}\cos(x\omega)+\dfrac{\sin\frac{\pi\omega}{2}-\omega}{1-\omega^2}\sin(x\omega)\right)d\omega=\begin{cases}f(x), & x\ne 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0;\end{cases}$

4) $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\frac{(\pi-2x)\omega}{2}}{1-\omega^2}d\omega=f(x).$

16.4. 1) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\cos(x\omega)d\omega, x\in[0;1)\cup(1;+\infty),$

$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}\sin(x\omega)d\omega, x\in(0;1)\cup(1;+\infty);$

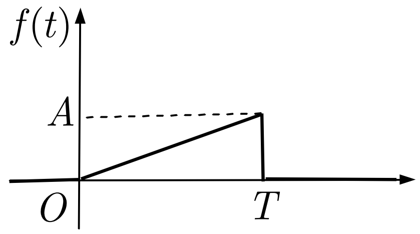
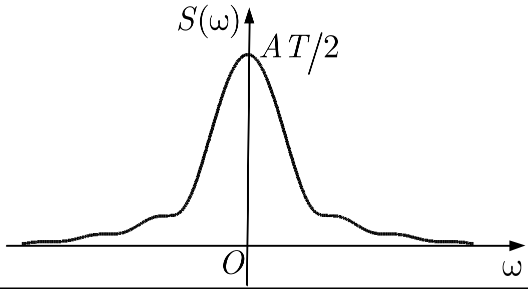
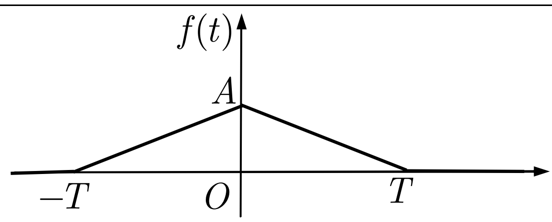
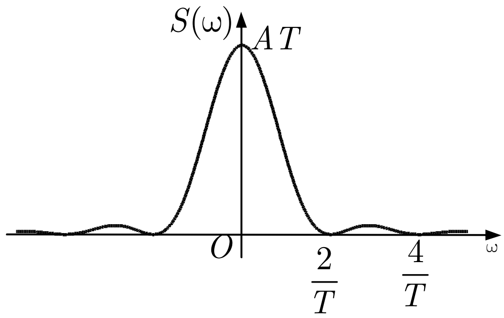
2) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\dfrac{2\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}\cos(x\omega)d\omega, x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$,

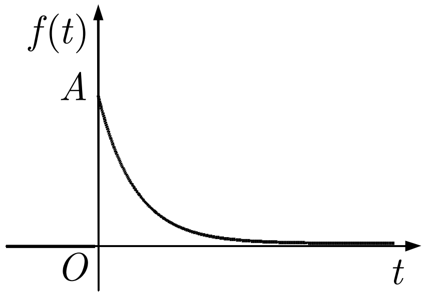
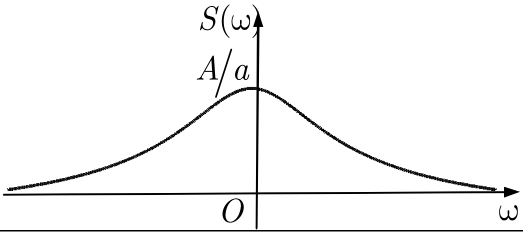
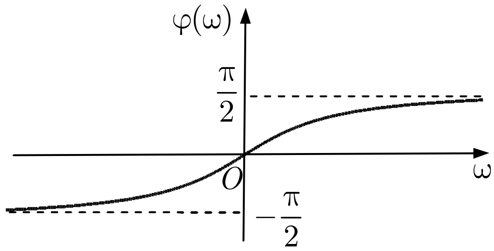
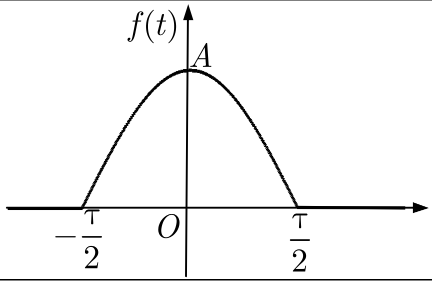
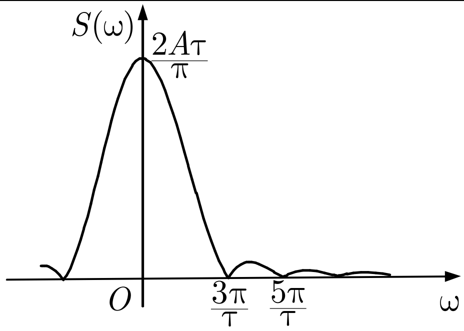
$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\omega-2\omega\cos\omega+\sin\omega}{\omega^2}\sin(x\omega)d\omega, x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$,

16.5. 1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\omega x}d\omega}{a+i\omega}=\begin{cases} f(x), & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0;\end{cases}$ 2) $\dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{i\omega x}d\omega}{(a+i\omega)^2+\alpha^2}=f(x)$;

3) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\dfrac{\omega(b-a)}{2}\dfrac{e^{-i\omega(a+b)/2}}{\omega}e^{i\omega x}d\omega=\begin{cases} f(x), & x\neq a, x\neq b,\\ \dfrac{1}{2}, & x=a, x=b;\end{cases}$ 4) $\dfrac{2h}{\pi a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2\dfrac{\omega a}{2}\dfrac{e^{i\omega x}}{\omega^2}d\omega=f(x)$.

Перетворення і спектри деяких сигналів

Несиметричний трикутний імпульс	
$f(t)=\begin{cases}\dfrac{At}{T}, & 0\le t\le T,\\ 0, & 0<t, t>T;\end{cases}$ $F(\omega)=\dfrac{A}{\omega^2 T}(e^{-i\omega T}-1)-\dfrac{A}{i\omega}e^{-i\omega T}$	
$S(\omega)=$ $=\dfrac{A\sqrt{T^2\omega^2+4\sin^2\dfrac{\omega T}{2}-2T\omega\sin\omega T}}{T\omega^2}$	
Симетричний трикутний імпульс	
$f(t)=\begin{cases}A\left(1-\left\|\dfrac{t}{T}\right\|\right), & \|t\|\le T,\\ 0, & \|t\|>T;\end{cases}$ $F(\omega)=\dfrac{4A}{\omega^2 T}\sin^2\dfrac{\omega T}{2}$	
$S(\omega)=\dfrac{4A}{\omega^2 T}\sin^2\dfrac{\omega T}{2}$; $\varphi(\omega)=0$	

Однобічний експоненційний імпульс	
$f(t)=\begin{cases} Ae^{-at}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$ $F(\omega)=\dfrac{A}{a+i\omega}$	
$S(\omega)=\dfrac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$	
$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{a}$	
Косинусоїдальний імпульс	
$f(t)=\begin{cases} 0, & \lvert t\rvert>\dfrac{\tau}{2},\\ A\cos\dfrac{\pi t}{\tau}, & \lvert t\rvert\le\dfrac{\tau}{2};\end{cases}$ $F(\omega)=\dfrac{2\pi A\tau}{\pi^2-\tau^2\omega^2}\cos\dfrac{\omega\tau}{2}$	
$S(\omega)=\left\lvert\dfrac{2\pi A\tau}{\pi^2-\tau^2\omega^2}\cos\dfrac{\omega\tau}{2}\right\rvert$	

17. Знаходження зображень для перетворення Лапласа

Навчальні задачі

17.1. Користуючись означенням, знайти зображення функції $f(t) = e^{-3t}$.

Розв'язання*. *[14.3.1.]

Для функції $f(t) = e^{-3t}$ маємо $s_0 = -3$. Тому зображення $F(p)$ буде аналітично в півплощині $\operatorname{Re} p > -3$.

$$F(p) \overset{[14.3.1]}{=} \int_0^{+\infty} e^{-3t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+3)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{(p+3)} e^{-(p+3)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p+3} \ (\operatorname{Re} p = s > -3)^{①}.$$

***Коментар*.** ① Функція $F(p) = \dfrac{1}{p+3}$ аналітична при $\operatorname{Re} p > -3$, крім того, вона аналітична скрізь, за винятком точки $p = -3$.

17.2.1. Знайти зображення оригіналу $f(t) = 2\sin t - \cos t$.

Розв'язання*. *[14.4.1.]

[*Використовуємо властивість лінійності* [14.4.1.]**]**

$$f(t) \underset{[14.5.6]}{\overset{[14.5.1]}{\to}} \frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{2-p}{p^2+1}.$$

17.2.2. Знайти зображення оригіналу $f(t) = \sin^2 t$.

Розв'язання*. *[14.4.1.]

$$f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t \underset{[14.5.6]}{\overset{[14.5.1]}{\to}} \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+4} = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

17.3. Знайти зображення диференціального виразу:

$$f(t) = x''(t) - 5x'(t) + x(t), x(0) = 5, x'(0) = 1.$$

Розв'язання*. *[14.4.5.]

Нехай $x(t)$ — оригінал та $x(t) \to X(p)$.

[*Використовуємо властивість диференціювання оригіналу* [14.4.6.]**]**

$$x'(t) \to pX(p) - 5;$$

$$x''(t) \to p^2X(p) - 5p - 1;$$

$$x''(t) - 5x'(t) + x(t) \to p^2X(p) - 5p - 1 - 5(pX(p) - 5) + X(p) =$$

$$= X(p)(p^2 - 5p + 1) + 24 - 5p.$$

17.4. Знайти зображення оригіналу $f(t) = t\sin\omega t$.

Розв'язання*. *[14.4.6.]

[*Використовуємо властивість диференціювання зображення* [14.4.6].**]**

$$\sin\omega t \overset{[14.5.5]}{\to} \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$t\sin\omega t \to -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

17.5. Знайти зображення оригіналу $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau.$

Розв'язання*. *[14.4.6, 14.4.7.]

[*Використовуємо властивість диференціювання зображення* [14.4.6] *та інтегрування оригіналу* [14.4.7].**]**

$$e^{-t} \overset{[14.5.2]}{\to} \frac{1}{p+1}; \quad t^2e^{-t} \to \left(\frac{1}{p+1}\right)'' = \frac{2}{(p+1)^3};$$

$$\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau \to \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p+1)^3} = \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

17.6.1. Знайти зображення оригіналу $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

Розв'язання*. *[14.4.8.]

[*Використовуємо властивість інтегрування зображення* [14.4.8.]**]**

$$1-e^{-t} \underset{[14.5.2]}{\overset{[14.5.1]}{\to}} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1};$$

$$\frac{1-e^{-t}}{t} \overset{[14.4.8]}{\to} \int\limits_p^\infty \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1}\right) dq = \lim_{A\to\infty}\Big(\ln q - \ln(q+1)\Big)\Big|_p^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\ln\frac{A}{A+1} - \ln\frac{p}{p+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

17.6.2. Знайти зображення оригіналу $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Розв'язання*. *[14.4.8.]

$$\sin t \overset{[14.5.5]}{\to} \frac{1}{p^2+1};$$

$$\frac{\sin t}{t} \overset{[14.4.8]}{\to} \int\limits_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

17.7. Знайти зображення оригіналу $f(t) = te^t \cos t$.

***Розв'язання**. [14.4.4, 14.4.6.]*

[*Використовуємо властивості диференціювання зображення* [14.4.6] *та зсунення аргументу зображення* [14.4.4]**]**:

$$\cos t \overset{[14.5.6]}{\rightarrow} \frac{p}{p^2+1};$$

$$t\cos t \overset{[14.4.6]}{\rightarrow} -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = -\frac{p^2+1-2p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2};$$

$$e^t t\cos t \overset{[14.4.4]}{\rightarrow} \frac{(p-1)^2-1}{((p-1)^2+1)^2} = \frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}.$$

17.8. Знайти зображення оригіналу $\varphi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch} \tau d\tau$.

***Розв'язання**. [14.4.9.]*

[*Використовуємо теорему множення* [14.4.9.]**]**

$$t^2 \overset{[14.5.3]}{\rightarrow} \frac{2}{p^3},\ \operatorname{ch} t \overset{[14.5.8]}{\rightarrow} \frac{p}{p^2-1}.$$

$$\varphi(t) = t^2 * \operatorname{ch} t \overset{[14.4.9]}{\rightarrow} \frac{2}{p^3}\cdot\frac{p}{p^2-1} = \frac{2}{p^4-p^2}.$$

17.9.1. Знайти зображення оригіналу $\eta(t-3)$.

***Розв'язання**. [14.4.3.]*

[*Використовуємо теорему про запізнення оригіналу* [14.4.3.]**]**

$$1 \overset{[14.5.1]}{\rightarrow} \frac{1}{p};$$

$$\eta(t-3) \rightarrow \frac{e^{-3p}}{p}.$$

17.9.2. Знайти зображення оригіналу $\sin(t-b)\eta(t-b)$.

***Розв'язання**. [14.4.3.]*

$$\sin t \overset{[3.5.5]}{\rightarrow} \frac{1}{p^2+1};$$

$$\sin(t-b)\eta(t-b) \rightarrow \frac{e^{-pb}}{p^2+1}.$$

17.9.3. Знайти зображення оригіналу $f(t)$ (функції-«ножиці»).

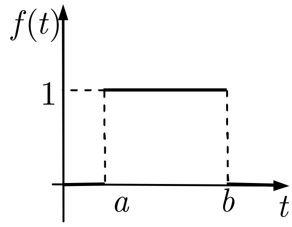


Рис. до зад. 17.9.3

***Розв'язання*. [14.3.5.]**

$$f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b) \underset{[14.5.1]}{\overset{[14.4.3]}{\longrightarrow}}$$

$$\to \frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-pb}}{p} = \frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p}.$$

17.9.4. Знайти зображення оригіналу $f(t)$.

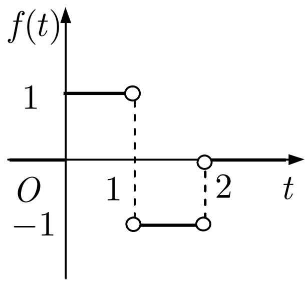


Рис. до зад. 17.9.4

***Розв'язання*. [14.3.5.]**

[*Записуємо функцію-оригінал аналітично*.]

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,0 \le t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

[*Застосовуємо функцію-«ножиці»* [14.3.5]. *Так, бачимо, що функція* $f_1(t) = 1$ *«діє» лише на проміжку* $(0;1)$, *а функція* $f_2(t) = -1$ *на проміжку* $(1;2)$.]

$$f(t) = 1 \cdot \Big(\eta(t) - \eta(t-1) \Big) + (-1) \cdot (\eta(t-1) - \eta(t-2)) =$$

$$= \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2) \underset{[14.5.1]}{\overset{[14.4.3]}{\longrightarrow}} \frac{1}{p}\Big(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\Big).$$

17.9.5. Знайти зображення оригіналу $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi/2, \\ -\cos t, & \pi/2 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$

***Розв'язання*. [14.3.5.]**

[*Записуємо функцію одним аналітичним виразом*.]

$$f(t) = \sin t \cdot \left(\eta(t) - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \cos t \cdot \left(\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \eta(t-\pi)\right) =$$

$$= \eta(t)\sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t + \cos t) + \eta(t-\pi)\cos t =$$

$$= \eta(t)\sin t - \eta(t-\pi)\cos(t-\pi) - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \to$$

$$\underset{[14.5.5],[14.5.6]}{\overset{[14.4.4]}{\longrightarrow}} \frac{e^{-p}}{p^2+1} - \frac{e^{-\pi p/2}(p-1)}{p^2+1} - \frac{e^{-\pi p}p}{p^2+1}.$$

17.10. Знайти зображення періодичного оригіналу $f(t)$.

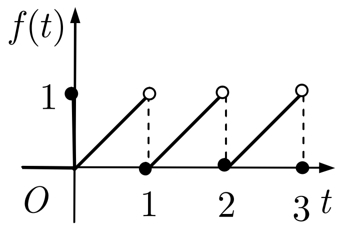


Рис. до зад. 17.10

Розв'язання. [14.4.11.]

1-й спосіб.

Оригінал — періодична функцією з періодом $T = 1$.

$$f(t) = t, 0 \le t < 1.$$

[*Використовуємо властивість зображення періодичного оригіналу* [14.4.11.]]

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p}}\int_0^1 e^{-pt}t\,dt = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(-\frac{te^{-pt}}{p}\Big|_0^1 - \frac{e^{-pt}}{p^2}\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left(-\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1-e^{-p}}{p^2}\right) = \frac{e^p - p - 1}{p^2(e^p-1)}.$$

2-й спосіб. Маємо

$$\int_0^T f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-pt}dt = F_0(p),$$

де $f_0(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0;T], \\ 0, & t \notin [0;T]. \end{cases}$

[*Розгляньмо допоміжну функцію.*]

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & t \in [0;1) \\ 0, & t \notin [0;1). \end{cases}$$

[*Записуємо її за допомогою функції-«ножиці».*]

$$f_0(t) = t[\eta(t) - \eta(t-1)] = t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1) - \eta(t-1).$$

[*Знаходимо зображення допоміжної функції.*]

$$F_0(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-p} = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - pe^{-p})$$

Отже,

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}} = \frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2(1-e^{-p})} = \frac{e^p - p - 1}{p^2(e^p-1)}.$$

що дорівнює $f(t)$ на проміжку $[0;\backslash]$на основному періоді $f_0(t) = t, t \in [0;1)$ і запишемо

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

17.11. Знайдіть зображення оригіналу:

1) $f(t) = \cos^2 t$; 2) $f(t) = \sin^4 t$;

3) $f(t) = \sin t \cdot \sin 2t$; 4) $f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t$;

5) $f(t) = \operatorname{ch} 2t + 2e^{-3t} + 1;$ 6) $f(t) = e^{-t} + 3e^{-2t} + t^2.$

17.12. Знайдіть зображення оригіналу:

1) $f(t) = \cos\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right);$ 2) $f(t) = (t-2)^3;$

3) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2; \end{cases}$ 4) $f(t) = \begin{cases} a_1, & 0 < t < \tau_1, \\ a_2, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ a_3, & \tau_2 < t < \tau_3, \\ 0, & t > \tau_3; \end{cases}$

5) $f(t) = \operatorname{sh}(3t - 5);$ 6) $f(t) = \operatorname{ch}(5t - 1);$

7) $f(t) = e^{at} \sin bt;$ 8) $f(t) = e^{-at} \operatorname{ch} bt;$

9) $f(t)$ (рис.); 10) $f(t)$ (рис.);

11) $f(t)$ (рис.); 12) $f(t)$ (рис.).

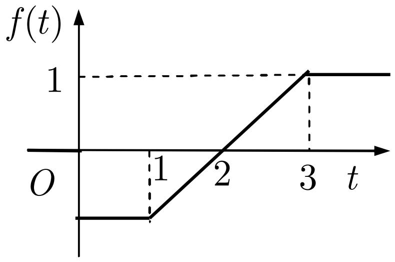


Рис. до зад. 17.12.9)

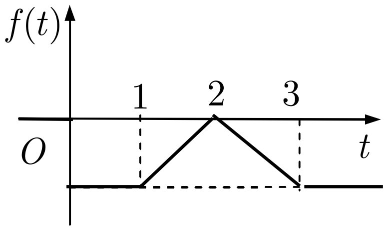


Рис. до зад. 17.12.10)

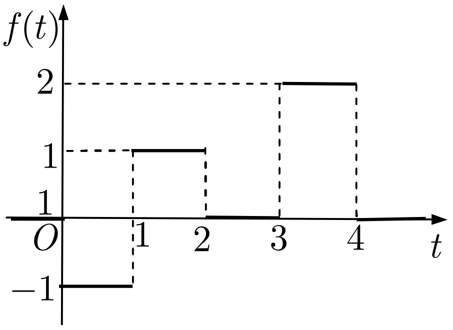


Рис. до зад. 17.12.11)

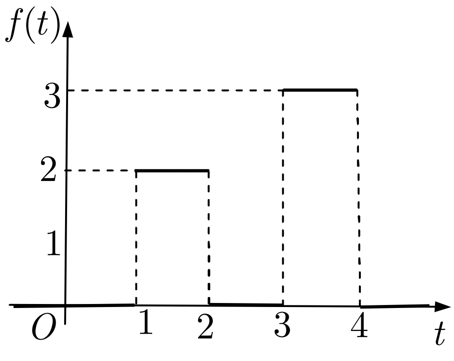


Рис. до зад. 17.12.12)

17.13. Знайдіть зображення оригіналу $(x = x(t))$:

1) $f(t) = x'' + 5x' - 7x + 2, x(0) = 1, x'(0) = 0;$

2) $f(t) = x'' + 3x' + 2x + 1, x(0) = -1, x'(0) = -2;$

3) $f(t) = x''' - 2x' + x - 1,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0;$

4) $f(t) = x''' + 6x'' - x' - 2x,\ x(0) = -3, x'(0) = 7, x''(0) = 1;$

5) $f(t) = t\sin\omega t;$ 6) $f(t) = t^2\cos\omega t;$

7) $f(t) = (t^2 - t + 1)e^{3t};$ 8) $f(t) = t^3 e^{2t}.$

17.14. Знайдіть зображення оригіналу:

1) $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{t};$ 2) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t};$

3) $f(t) = e^{-t}\,\dfrac{1-\cos t}{t};$ 4) $f(t) = e^{-at}\,\dfrac{\sin t}{t};$

5) $\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau - 1}{\tau}\,d\tau;$ 6) $\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\,d\tau;$

7) $\displaystyle\int_0^t \frac{\cos\beta\tau - \cos\alpha\tau}{\tau}\,d\tau;$ 8) $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{\beta\tau} - e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau.$

17.15. Знайдіть зображення згортки функцій:

1) $f_1(t) = \cos t, f_2(t) = \sin t;$ 2) $f_1(t) = e^{2t}, f_2(t) = \sin 3t;$

3) $f_1(t) = \cos t, f_2(t) = \cos t;$ 4) $f_1(t) = e^{t}, f_2(t) = e^{-t}.$

17.16. Знайдіть зображення періодичного оригіналу:

1) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \dfrac{a}{2}, \\ -1, & \dfrac{a}{2} \le t < a, T = a; \end{cases}$ 2) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \dfrac{a}{2}, \\ 0, & \dfrac{a}{2} \le t < a, T = a; \end{cases}$

3) $f(t) = \left|\sin t\right|;$ 4) $f(t) = \left|\cos t\right|.$

Відповіді

17.11. 1) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p^2+4}\right)$; 2) $\dfrac{4!}{p(p^2+4)(p^2+16)}$; 3) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+9}\right)$;
4) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+25} + \dfrac{p}{p^2+1}\right)$; 5) $\dfrac{p}{p^2-4} + \dfrac{2}{p+3} + \dfrac{1}{p}$; 6) $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{3}{p+2} + \dfrac{2}{p^3}$.

17.12. 1) $\dfrac{p}{p^2+1}e^{-\pi p/2}$; 2) $\dfrac{6}{p^4}e^{-2p}$; 3) $\dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p}e^{-p} - \dfrac{1}{p}e^{-2p}$;

4) $\dfrac{a_1}{p}+\dfrac{a_2-a_1}{p}e^{-p\tau_1}+\dfrac{a_3-a_2}{p}e^{-p\tau_2}-\dfrac{a_3}{p}e^{-p\tau_3}$; 5) $\dfrac{3e^{-5p/3}}{p^2-9}$; 6) $\dfrac{e^{-p/5}p}{p^2-25}$;

7) $\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$; 8) $\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$; 9) $-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{ap^2}(e^{-p}-e^{-3p})$;

10) $-\dfrac{2e^{-p}}{p}+\dfrac{1}{p^2}(e^{-p}-2e^{-2p}+e^{-3p})$;

11) $\dfrac{1}{p}(-1+2e^{-p}-e^{-2p}+2e^{-3p}-4e^{-4p})$; 12) $\dfrac{2}{p}(e^{-p}-e^{-2p})+\dfrac{3}{p}(e^{-3p}-e^{-4p})$.

17.13. 1) $(p^2+5p-7)X(p)-p-5+\dfrac{2}{p}$; 2) $(p^2+3p+2)X(p)+p+5+\dfrac{1}{p}$;

3) $(p^3-2p+1)X(p)-\dfrac{1}{p}$; 4) $(p^3+6p^2+p-2)X(p)+3p^2+11p-40$;

5) $\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$; 6) $\dfrac{2p^3-6\omega^2 p}{(p^2+\omega^2)^3}$; 7) $\dfrac{p^2-7p+14}{(p-3)^3}$; 8) $\dfrac{6}{(p-3)^4}$.

17.14. 1) $\ln\dfrac{p-b}{p-a}$; 2) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$; 3) $\dfrac{1}{2}\ln\left[1+\dfrac{1}{(p+1)^2}\right]$; 4) $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(p+a)$;

5) $-\dfrac{1}{2p}\ln\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right)$; 6) $\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$; 7) $\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$; 8) $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{p-\alpha}{p-\beta}$.

17.15. 1) $\dfrac{t}{2}\sin t\to\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; 2) $\dfrac{e^{2t}-3\cos 3t-2\sin 3t}{13}\to\dfrac{3}{(p-2)(p^2+9)}$;

3) $\dfrac{\sin t+t\cos t}{2}\to\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$; 4) $\operatorname{sh} t\to\dfrac{1}{p^2-1}$.

17.16. 1) $\dfrac{1}{p}\operatorname{th}\dfrac{ap}{4}$; 2) $\dfrac{1}{p\left(1+e^{-ap/2}\right)}$; 3) $\dfrac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\dfrac{\pi p}{2}$; 4) $\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{1}{p^2+1}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2}}$.

18. Відшукання оригіналу за зображенням

Навчальні задачі

18.1.1. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

Розв'язання*. *[14.4.4.]

[*Перетворюємо зображення, що можна було скористатись властивостями перетворення Лапласа і таблицею зображень.***]**

$$\frac{1}{p^2+4p+5}=\frac{1}{(p+2)^2+1}\underset{[14.5.5]}{\overset{[14.4.4]}{\leftarrow}}e^{-2t}\sin t.$$

18.1.2. Знайти оригінал для зображення $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2}$.

***Розв'язання**. [14.4.6.]*

$$\frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \underset{[14.4.4]}{\overset{[14.5.2]}{\leftarrow}} e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t).$$

18.1.3. Знайти оригінал для зображення $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

***Розв'язання**. [14.4.6.]*

[*Розкладаємо дробово-раціональний вираз на суму елементарних дробів.***]**

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1+p^2-p^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \underset{[14.5.5]}{\overset{[14.5.3]}{\leftarrow}} t - \sin t.$$

18.1.4. Знайти оригінал для зображення $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

***Розв'язання**. [14.4.6.]*

$$F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

[*Коефіцієнти A та B знаходимо методом викреслювання.***]**

$$A = \left.\frac{p+2}{(p-2)(p^2+4)}\right|_{p=-1} = -\frac{1}{15}.$$

$$B = \left.\frac{p+2}{(p+1)(p^2+4)}\right|_{p=2} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} = -\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

$$p=0: -\frac{1}{4} = -\frac{1}{15} - \frac{1}{12} + \frac{D}{4} \Leftrightarrow D = -\frac{2}{5}.$$

$$p=1: \frac{3}{-10} = -\frac{1}{30} - \frac{1}{6} + \frac{C}{5} - \frac{2}{25} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{10}.$$

$$F(p) = -\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{p^2+4} \underset{[14.5.5],[14.5.6]}{\overset{[14.5.2]}{\leftarrow}}$$

$$\leftarrow \frac{e^{2t}}{6} - \frac{e^{-t}}{15} - \frac{\cos 2t}{10} - \frac{\sin 2t}{5}.$$

18.2 Знайти оригінал, який відповідає зображенню $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Розв'язання*. *[14.6.2.]

[*Щоб знайти шуканий оригінал, використовуємо першу теорему розвинення [14.6.2].***]**

Якщо $\left|p\right| > 1$, то

$$F(p) = \frac{1}{p\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}} = \frac{1}{p}\left(1+\left(\frac{1}{p}\right)^2\right)^{-1/2} \overset{[12.7.6]}{=}$$

$$\frac{1}{p}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^4 + \ldots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\left(\frac{1}{p}\right)^{2n} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{p} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^n}\frac{1}{p^{2n+1}} \overset{[14.6.2]}{\leftarrow} 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,t^{2n}}{2^n n!(2n)!} =$$

$$= \left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n-1)!!\cdot(2n)!!} = \frac{1}{(2n)!!} = \frac{1}{2^n n!}\right| =$$

$$\overset{①}{=} 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Коментар. ① Сума одержаного ряду є Бесселевою функцією 1-го роду

$$J_0(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

18.3. Знайти оригінал зображення $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)^2(p+1)}$.

Розв'язання*. *[14.6.3.]

[*Щоб знайти шуканий оригінал, використовуємо другу теорему розвинення* [14.6.3.] *Визначаємо характер особливих точок функції $F(p)$.***]**

Особливі точки $F(p)$: $p_1 = -1, p_2 = -3$.

1. $p_1 = -1$ — простий полюс.

$$\operatorname*{res}_{p_1=-1}\left(\frac{e^{pt}}{(p+1)(p+3)^2}\right) \overset{[13.8.6]}{=} \lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}\cancel{(p+1)}}{\cancel{(p+1)}(p+3)^2} = \frac{e^{-t}}{4}.$$

2. $p_2 = -3$ — полюс порядку 2.

$$\underset{p_1=-3}{\operatorname{res}} \frac{e^{pt}}{(p+1)(p+3)^2} \overset{[13.8.5]}{=} \frac{1}{1!} \lim_{p\to-1} \left(\frac{e^{pt}\cancel{(p+3)}^2}{(p+1)\cancel{(p+3)}^2} \right)' =$$

$$= \lim_{p\to-1} \frac{e^{pt}t(p+1)-e^{pt}}{(p+1)^2} = e^{-3t}\frac{-2t-1}{4} = -\frac{1}{4}(2t+1)e^{-3t}.$$

$$F(p) \leftarrow \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{-3t}}{4}(2t+1).$$

18.4. Знайти оригінал зображення $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

***Розв'язання**. [14.4.10.]*

[*Використовуємо Дюамелів інтеграл* [14.4.10.]**]**

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2} = p\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{d}{dt}\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)d\tau = \cos t - \frac{1}{2}t\sin t.$$

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

18.5. Відновіть оригінал за його зображенням:

1) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+6p+10}$; 2) $F(p) = \dfrac{1}{p^2-p+7}$;

3) $F(p) = \dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$; 4) $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$;

5) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$; 6) $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}$;

7) $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3+1}$; 8) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3-1}$;

9) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2}$; 10) $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^3}$;

11) $F(p) = \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{e^{-p}}{p} + \dfrac{3e^{-4p}}{p^2+9}$; 12) $F(p) = \dfrac{p}{p^2+4} - \dfrac{2pe^{-p}}{p^2-4}$.

18.6. Використовуючи першу теорему розвинення, знайдіть оригінал для зображення:

1) $\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$; 2) $\sin\frac{1}{p}$;

3) $\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$; 4) $\frac{1}{p}e^{1/p^2}$.

18.7. Відновіть оригінал за його зображеннями, використовуючи властивість зображення згортки і Дюамелеву формулу:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; 4) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p-1)}$;

5) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$; 6) $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}$;

7) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$; 8) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$;

9) $F(p)=\dfrac{1}{(p^4-1)^2}$; 10) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

Відповіді

18.5. 1) $e^{-3t}\sin t$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{t/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$; 3) $1-e^{-t}-te^{-t}$; 4) $e^{-t}(1-t^2)$;
5) $\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^t+3te^t)$; 6) $t+2+2te^t-2e^t$; 7) $\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{5}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$;
8) $\frac{2}{3}e^t-\frac{2}{3}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$; 9) $\eta(t-2)(t-2)$; 10) $\frac{1}{2}\eta(t-3)(t-3)^2e^{-(t-3)}$;
11) $e^{2t}+\eta(t-1)+\eta(t-4)\sin 3(t-4)$; 12) $\cos 2t-2\eta(t-1)\operatorname{ch}2(t-1)$.

18.6. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!(2n)!}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!(2n)!}$.

18.7. 1) $1-\cos t$; 2) $\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}t\cos t$; 3) $\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$; 4) $1-t-\frac{t^2}{2}-e^t$;
5) $\frac{1}{2}(e^t+\cos t+\sin t)$; 6) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t+\cos t)$; 7) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$; 8) $\frac{1}{2}t\sin t$;
9) $\frac{t}{8}(\operatorname{ch}t-\cos t)-\frac{3}{8}(\operatorname{sh}t-\sin t)$; 10) $\frac{1}{10}t\cos t-\frac{7}{50}\sin t+\frac{1}{50}\operatorname{sh}2t$.

19. Застосування операційного числення

Навчальні задачі

19.1.1. Розв'язати задачу Коші:

$$x'' + 2x' + x = \sin t, x(0) = 0, x'(0) = -1.$$

***Розв'язання*.** ①

[***Крок 1.*** *Припускаючи, що розв'язок задачі Коші $x(t)$ є оригіналом, переходимо від диференціального рівняння до операторного.*]

Нехай $x(t)$ — оригінал та $x(t) \to X(p)$. Тоді:

$$x'(t) \to pX(p);$$

$$x''(t) \to p^2X(p) + 1; \sin t \to \frac{1}{p^2+1}.$$

$$p^2X(p) + 1 + 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p^2+1};$$

[***Крок 2.*** *Розв'язуємо операторне рівняння.*]

$$X(p)(p^2 + 2p + 1) = \frac{-p^2}{p^2+1};$$

$$X(p) = \frac{-p^2}{(p+1)^2(p^2+1)}.$$

[***Крок 3.*** *Знаходимо оригінал для розв'язку операторного рівняння.*]

$$X(p) = \underbrace{\frac{-p^2}{(p+1)^2(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}}_{\text{розкладаємо зображення на суму елементарних дробів}}.$$

$$B = \left.\frac{-p^2}{p^2+1}\right|_{p=-1} = -\frac{1}{2};$$

$$A = \operatorname*{res}_{p=-1} X(p) = \lim_{p \to -1}\left(\frac{-p^2}{p^2+1}\right)' = \lim_{p \to -1} \frac{-2p(p^2+1) + 2p^3}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$p = 0 : 0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D \Leftrightarrow D = 0.$$

$$p = 1 : -\frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{C}{2} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$X(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{1}{2}\left(e^{-t} - te^{-t} - \cos t\right).$$

[***Крок 4.*** *Записуємо розв'язок.*]

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - te^{-t} - \cos t\right).$$

Коментар. ① ***Розв'язання*** задачі Коші для ЛДР зі сталими коефіцієнтами ***зі знаходженням зображення*** правої частини рівняння.

Задача Коші для диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), x(0) = x_0, x'(0) = x_0',$$

де a_0, a_1, a_2 — сталі, $a_0 \neq 0$.

Нехай $x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$ (припускаючи, що $x(t)$ та $f(t)$ — функції-оригінали). Застосовуючи перетворення Лапласа до обох частин ДР і враховуючи початкові умови, дістаємо операторне рівняння

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_0' + a_1 x_0) = F(p).$$

З операторного рівняння дістаємо операторний розв'язок

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Знаходячи по зображенню $X(p)$ оригінал $x(t)$, одержують функцію $x(t)$ — розв'язок задачі Коші.

19.1.2. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - y' - 2y = 1, y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

Розв'язання.

1. Нехай $y(t)$ — оригінал та $y(t) \to Y(p)$.

$$y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + 1.$$

2. $p^2Y(p) + 1 - pY(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p}.$

3. $Y(p) = \dfrac{1-p}{p(p+1)(p-2)}.$

$$y(t) = \operatorname*{res}_{p_1=0}(Y(p)e^{pt}) + \operatorname*{res}_{p_2=-1}(Y(p)e^{pt}) + \operatorname*{res}_{p_3=2}(Y(p)e^{pt}).$$

$$\operatorname*{res}_{p_1=0}(Y(p)e^{pt}) = -\frac{1}{2}; \operatorname*{res}_{p_2=-1}(Y(p)e^{pt}) = \frac{2}{3}e^{-t};$$

$$\operatorname*{res}_{p_3=2}(Y(p)e^{pt}) = -\frac{1}{6}e^{2t}.$$

4. $y(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}e^{-t} - \dfrac{1}{6}e^{2t}.$

[*Перевіряємо виконання початкових умов.***]**

$$y(0) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0;$$

$$y'(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{6}e^{2t}; \; y'(0) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1.$$

19.2. Розв'язати задачу Коші $x'' + 4x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$.

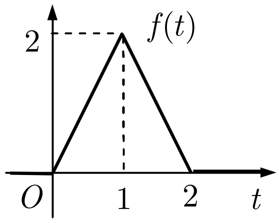


Рис. до зад. 19.2

Розв'язання*. *[14.3.5.]

[*Записуємо функцію $f(t)$ аналітично.***]**

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 4 - 2t, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t \ge 2. \end{cases}$$

$$f(t) = 2t \cdot (\eta(t) - \eta(t-1)) + (4 - 2t) \cdot \Big(\eta(t-1) - \eta(t-2)\Big) =$$
$$= 2t\eta(t) - 4(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2).$$

1. Нехай $x(t)$ — оригінал і

$$x(t) \to X(p).$$

$$x''(t) \to p^2 X(p).$$

$$f(t) \to \frac{2}{p^2} - \frac{4e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^2}.$$

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{p^2}.$$

2. $X(p)(p^2 + 4) = \dfrac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{p^2}.$

$$X(p) = \frac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{p^2(p^2+4)}.$$

3. $\dfrac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{p^2(p^2+4)} = \dfrac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{4} \dfrac{4 + p^2 - p^2}{p^2(p^2+4)} =$

$$= \frac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right).$$

4. $x(t) = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t) - \left(t - 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2(t-1)\right)\eta(t-1) +$

$$+\frac{1}{2}\left(t - 2 - \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\eta(t-2).$$

19.3. Знайти силу струму $i(t)$ під час увімкнення одиничної ЕРС в елементарне електричне коло, складене з послідовно ввімкнених самоіндукції L, опору R та ємності C.

Розв'язання. ①

Для всього кола матимемо рівняння:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = 1,$$

де $i(0) = 0$, що відповідає задачі ввімкнення. Нехай $i(t) \to I(p)$, тоді:

$$i'(t) \to pI(p); \quad \int_0^t i(t)dt \to \frac{I(p)}{p}.$$

$$LPI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow I(p) = \frac{1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

Позначаючи $\alpha = \dfrac{R}{2L}, \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ і покладаючи $\alpha < \omega_0$, перепишімо операторне рівняння так:

$$I(p) = \frac{1}{L(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} = \frac{1}{L\left[(p+\alpha)^2 + (\omega_0^2 - \alpha^2)\right]} =$$

$$= \frac{1}{L\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}{\left[(p+\alpha)^2 + (\omega_0^2 - \alpha^2)\right]} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{1}{L\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}e^{-\alpha t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t) = i(t).$$

Коментар. ① Струм $i(t)$ та напруга $u(t)$ на кінцях елементу кола, який містить відповідно лише самоіндукцію L, лише опір R або лише ємність c, пов'язані співвідношеннями:

$$u(t) = L\frac{du}{dt}; \;\; u(t) = Ri(t); \;\; u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt,$$

якщо початковий заряд на конденсаторі дорівнює нулеві.

Фізичний зміст сталих: α — коефіцієнт згасання; $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — колова частота контуру; ω_0 — колова частота контуру без опору. Умова $\alpha < \omega_0$ відповідає коливному контуру.

19.4. Розв'язати задачу Коші: $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. ①

1. Нехай $x(t)$ — оригінал та $x(t) \to X(p)$.

$$x'(t) \to pX(p), x''(t) \to p^2X(p),$$

$$f(t) = \frac{1}{1+e^t} \to F(p).$$

$$p^2X(p) - pX(p) = F(p);$$

$$X(p)(p^2 - p) = F(p).$$

2. $X(p) = \dfrac{1}{p^2 - p} \cdot F(p)$.

3. $\dfrac{1}{p^2 - p} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p} \to e^t - 1$.

За властивістю зображення згортки маємо

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^\tau - 1}{e^{t-\tau} + 1} d\tau = \int_0^t \frac{e^\tau - 1}{e^t + e^\tau} de^\tau = \int_0^t \left(1 - \frac{e^t + 1}{e^t + e^\tau}\right) de^\tau =$$

$$= \left(e^\tau - (e^t + 1)\ln(e^t + e^\tau)\right)\Big|_0^t = e^t - 1 - (e^t + 1)\ln 2e^t + (e^t + 1)\ln(e^t + 1).$$

4. $x(t) = e^t - 1 - (e^t + 1)(\ln 2 + t) + (e^t + 1)\ln(e^t + 1)$.

Коментар. ① ***Розв'язання*** задачі Коші ***без знаходження зображення*** правої частини рівняння.

Задача Коші для диференціального рівняння 2-го порядку з нульовими початковими умовами:

$$L[x(t)] = a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t),$$
$$x(0) = x'(0) = 0,$$

де a_0, a_1, a_2 — сталі, $a_0 \neq 0$.

Перший метод. Нехай $x(t) \to X(p), f(t) \to F(p)$ (припускаючи, що $x(t)$ та $f(t)$ — функції-оригінали), і явний вигляд $F(p)$ не знаходимо.

Тоді розв'язок $x(t)$ шукаємо як згортку:

$$x(t) = \int_0^t k(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

де $K(p) \leftarrow k(t) = \dfrac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$.

Знаходячи по зображенню $X(p)$ оригінал $x(t)$, одержуємо функцію $x(t)$ — розв'язок задачі Коші.

Другий метод. Якщо відомий розв'язок $x_1(t)$ задачі Коші:

$$L[x_1(t)] = 1, x_1(0) = x_1'(0) = 0,$$

то розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$L[x(t)] = f(t), x(0) = x'(0) = 0,$$

можна знайти за Дюамелевою формулою:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = \int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau.$$

19.5. Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = x + y + e^t, x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

Розв'язання. ①

1. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ — оригінали і $x(t) \to X(p), y(t) \to Y(p)$. Тоді:

$$x'(t) = pX(p) - 1;$$

$$y'(t) = pY(p) - 1; e^t \to \frac{1}{p-1}.$$

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 3Y(p) - X(p), \\ pY(p) - 1 = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} (p+1)X(p) - 3Y(p) = 1, \\ -X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{p}{p-1}. \end{cases}$

Розв'яжімо систему, приміром, за Крамеровим правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 4;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \dfrac{p}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{p^2+p+1}{p-1};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+1 & 1 \\ -1 & \dfrac{p}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p^2+2p-1}{p-1}.$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{p^2+p+1}{(p-1)(p^2-4)};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p^2 + 2p - 1}{(p-1)(p^2-4)}.$$

3. $X(p) = -\dfrac{1}{p-1} + 2 \cdot \dfrac{p}{p^2-4} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{p^2-4} \to -e^t + 2\operatorname{ch} 2t + \dfrac{3}{2}\operatorname{sh} 2t;$

$$Y(p) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{p}{p^2-4} +$$

$$+\frac{11}{6} \cdot \frac{2}{p^2-4} \to -\frac{2}{3}e^t + \frac{5}{3}\operatorname{ch} 2t + \frac{11}{6}\operatorname{sh} 2t.$$

4. $\begin{cases} x(t) = -e^t + 2\operatorname{ch} 2t + \dfrac{3}{2}\operatorname{sh} 2t, \\ y(t) = -\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{5}{3}\operatorname{ch} 2t + \dfrac{11}{6}\operatorname{sh} 2t. \end{cases}$

19.6. Розв'язати інтегральне рівняння $\varphi(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$

Розв'язання. ①

1. Нехай $\varphi(x) \to \Phi(p)$.

$$\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt = t * \varphi(t) \to \frac{\Phi(p)}{p^2}, \sin x \to \frac{1}{p^2+1};$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{\Phi(p)}{p^2}.$$

2. $\Phi(p) \cdot \dfrac{p^2-1}{p^2} = \dfrac{1}{p^2+1};$

$$\Phi(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{p}{p^2-1} \cdot \frac{p}{p^2+1}.$$

3. $\varphi(x) = \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t) \cdot \cos t dt =$

$$= \operatorname{ch}(x-t) \cdot \sin t \,\Big|_0^x + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t) \cdot \sin t dt =$$

$$= \sin x - \operatorname{sh}(x-t)\cos t \,\Big|_0^x - \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t) \cdot \cos t dt.$$

4. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \operatorname{sh} x).$

Коментар. ① ***Розв'язання інтегральних рівнянь*** Вольтерра 2-го роду типу згортки.

Нехай маємо інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду типу згортки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt.$$

Нехай

$$\varphi(x) \to \Phi(p), f(x) \to F(p), K(x) \to L(p).$$

Застосовуючи до обох частин інтегрального рівняння перетворення Лапласа і користуючись властивістю зображення згортки, матимемо

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\Phi(p),$$

звідки

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, L(p) \neq 1.$$

Для зображення $\Phi(p)$ знаходимо оригінал $\varphi(x)$ — розв'язок інтегрального рівняння.

Задачі для аудиторної і домашньої роботи

19.7. Розв'яжіть задачу Коші:

1) $x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}, x(0) = 0, x'(0) = 0;$

2) $x^{\mathrm{IV}} + x''' = e^t, x(0) = -1,\ x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;$

3) $x'' + x' = t^2 + 2t, x(0) = 4, x'(0) = -2;$

4) $x'' + 4x = 8\sin 2t, x(0) = 1, x'(0) = 0;$

5) $x'' + 9x' = \cos t, x(0) = x'(0) = 0;$

6) $x'' - 3x' + 2x = 2e^t \cos\frac{t}{2}, x(0) = 1, x'(0) = 0;$

7) $x'' - 2x' - 3x = 2t, x(0) = 1, x'(0) = 1;$

8) $x'' + 4x = 4e^{2t} + 4t^2, x(0) = 1, x'(0) = 2;$

9) $x''' + 2x'' - x' - 2x = 1, x(0) = 3, x'(0) = -1, x''(0) = 4;$

10) $x^{\mathrm{IV}} + x''' - 2x'' = 20t\sin t, x(0) = x'(0) = x'''(0) = 0, x''(0) = -1.$

19.8. Знайдіть при початкових нульових умовах розв'язок диференціального рівняння:

1) $x' + x = f(t), f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2; \end{cases}$

2) $x'' + x = f(t), f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi; \end{cases}$

3) $x'' - x' = f(t), f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1; \end{cases}$

4) $x'' + x = f(t), f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2. \end{cases}$

19.9. Розв'яжіть задачу Коші з нульовими початковими умовами:

1) $x' - x = \dfrac{1}{e^t + 3}$; 2) $x'' - x' = \dfrac{1}{1 + e^t}$;

3) $x'' + x = \dfrac{1}{2 + \cos t}$; 4) $x'' + x = \dfrac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 t}$;

5)* $x'' + x = e^{-t^2}$; 6) $x'' - x = \operatorname{th} t$.

19.10. Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases} x(0) = y(0) = 0;$

2) $\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}, \end{cases} x(0) = y(0) = 0;$

3) $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{at}, \end{cases} x(0) = y(0) = 1;$

4) $\begin{cases} x' + x - y = 2, \\ y' + x + y = 2t, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = -1.$

19.11. Розв'яжіть інтегральне рівняння:

1) $\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)x(\tau)d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t$; 2) $3\int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau)d\tau = x(t) - e^{-t}$;

3) $x(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau + \cos t$;

4) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 x(\tau)d\tau - 2x(t) + 2e^t = 0$.

Відповіді

19.7. 1) $x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 3t - \frac{3}{2}te^{-3t}$; 2) $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}t - 2$; 3) $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2e^{-t} + 2$;

4) $x(t) = (1-2t)\cos 2t + \sin 2t$; 5) $x(t) = \frac{1}{82}(e^{-9t} + 9\sin t - \cos t)$;

6) $x = 2e^t + \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{8}{5}e^t\left(\cos\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\right)$; 7) $x(t) = \frac{5}{9}e^{3t} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}t$;

8) $x(t) = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - \frac{1}{2}$; 9) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t + e^{-t}$;

10) $x(t) = -\frac{83}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{20}e^{-2t} + 4e^t + 2t\cos t + 6t\sin t + \frac{81}{5}\cos t - \frac{24}{5}\sin t$.

19.8. 1) $x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$;

2) $x(t) = \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\eta(t-\pi)(t-\pi)\sin(t-\pi)$;

3) $x(t) = \operatorname{ch} t - 1 - \frac{1}{e}\eta(t-1)(\operatorname{ch}(t-1) - 1)$;

4) $x(t) = 2\left(\sin^2\frac{t}{2} - 2\eta(t-1)\sin^2\frac{t-1}{2} + \eta(t-2)\sin^2\frac{t-2}{2}\right)$.

19.9. 1) $x(t) = \frac{1}{3}(e^t - 1) - \frac{t}{9}e^t + \frac{1}{9}e^t\ln\frac{e^t+3}{4}$;

2) $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1)\ln(e^t + 1)$;

3) $x(t) = \sin t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \cos t\ln\frac{2+\cos t}{3}$;

4) $x(t) = \frac{1}{3} - \frac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t - 2}{\sqrt{3}\sin t + 2}\right| - \frac{\sqrt{3}}{9}\cos t\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t)$;

5) $x(t) = \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)^2}\sin\tau d\tau$ (інтеграл не можна виразити через елементарні функції);

6) $x(t) = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + 2\operatorname{ch} t\left(\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}\right).$

19.10. 1) $x = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t, y(t) = -2t + 2\sin t;$

2) $x(t) = \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{4}{5}e^{-4t} + \frac{7}{40}e^{-7t},\ y(t) = \frac{3}{40}e^t - \frac{3}{10}e^{-2t} - \frac{7}{30}e^{-4t} + \frac{11}{40}e^{-7t}.$

3) $x(t) = \frac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{3e^{at}}{a^2-4}, y(t) = -\frac{e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{(a+1)}{a^2-4}e^{at}.$

4) $x(t) = t, y(t) = t - 1.$

19.11. 1) $x(t) = 2\sin t;$ 2) $x(t) = \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t;$

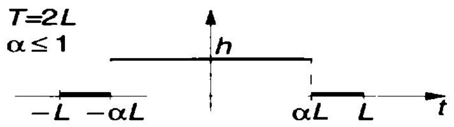
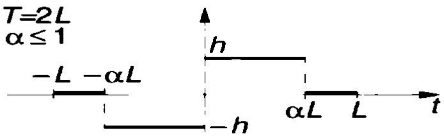
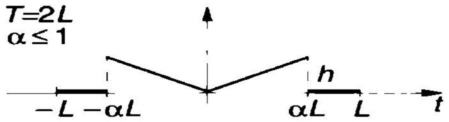
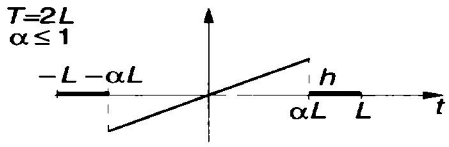
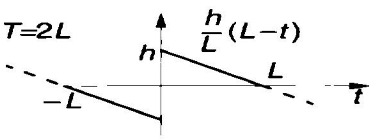
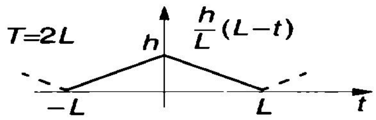
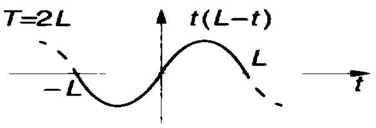
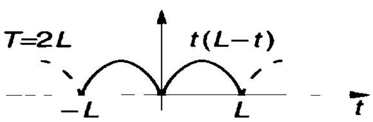
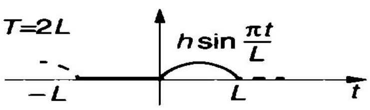
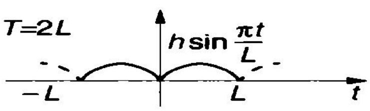
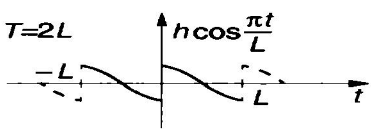
3) $x(t) = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t;$ 4) $x(t) = \frac{1}{3}te^t - \frac{2}{3\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}.$

Додаток А

А.1. Допоміжні відомості

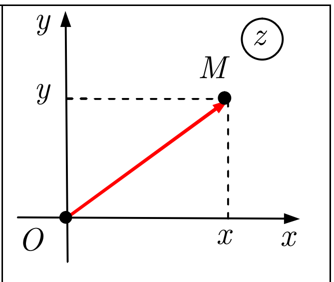
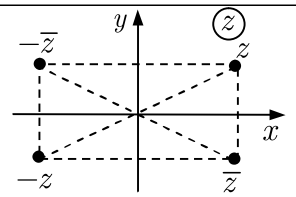
<table>
<tr><td colspan="2">❶ ① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^l+a_1n^{l-1}+...+a_l}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+...+b_m}=\begin{cases}0, & l<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & l=m,\\ \infty, & l>m;\end{cases}$
② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e;$ ③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ a>0;$
④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0n^m+a_1n^{m-1}+...+a_m}=1$</td></tr>
<tr><td>❷ Формули перетворення степенево-показникової невизначеності</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)};$
$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">❸ Таблиця еквівалентностей $(u(x)\to 0,$ коли $x\to x_0)$</td></tr>
<tr><td>① $\sin u(x)\sim u(x);$
② $\mathrm{tg}\,u(x)\sim u(x);$
③ $1-\cos u(x)\sim\dfrac{u^2(x)}{2};$
④ $\arcsin u(x)\sim u(x);$</td><td>⑤ $\mathrm{arctg}\,u(x)\sim u(x);$
⑥ $e^{u(x)}-1\sim u(x);$
⑦ $\ln(1+u(x))\sim u(x);$
⑧ $(1+u(x))^\mu-1\sim\mu u(x)$</td></tr>
<tr><td>❹ Факторіал</td><td>$n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n,\qquad 0!=1;$
$(n+1)!=n!(n+1);$
$n!=(n-1)!n$</td></tr>
<tr><td>❺ Подвійний факторіал</td><td>$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1);$
$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n=2^n n!$</td></tr>
<tr><td>❻ Сума геометричної прогресії з першим членом b_0 і знаменником q</td><td>$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_0q^{k-1}=b_0\dfrac{q^n-1}{q-1}$</td></tr>
<tr><td>❼ Стірлінґова формула</td><td>$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n, n\to\infty$</td></tr>
</table>

А.2. Деякі розвинення функцій у ряд Фур'є

(1) 	$\alpha h+\frac{2h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\alpha}{n}\cos\frac{n\pi t}{L}$
(2) 	$\frac{2h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi\alpha}{n}\sin\frac{n\pi t}{L}$
(3) 	$\frac{\alpha h}{2}+$ $+\frac{2h}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi\sin n\pi\alpha}{n}-\frac{1-\cos n\pi\alpha}{\alpha n^2}\right)\cos\frac{n\pi t}{L}$
(4) 	$\frac{2h}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi\cos n\pi\alpha}{n}+\frac{\sin n\pi\alpha}{\alpha n^2}\right)\sin\frac{n\pi t}{L}$
(5) 	$\frac{2h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi t}{L}$
(6) 	$\frac{h}{2}+\frac{4h}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{L}$
(7) 	$\frac{8L^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{L}$
(8) 	$\frac{L^2}{6}-\frac{L^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi t}{L}$
(9) 	$\frac{h}{\pi}+\frac{h}{2}\sin\frac{\pi t}{L}-\frac{2h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi t}{L}$
(10) 	$\frac{2h}{\pi}-\frac{4h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi t}{L}$
(11) 	$\frac{8h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi t}{L}$

Додаток Б. Комплексні числа

Б.1. Дії з комплексними числами в алгебричній формі

❶ ***Комплексне число.*** *Комплексним числом* z називають упорядковану пару дійсних чисел x та y. x — *дійсна частина*, $x = \operatorname{Re} z$ y — *уявна частина*, $y = \operatorname{Im} z$[*]	Комплексне число z зображують точкою $M(x; y)$ або радіусом-вектором $\overline{OM}$.	
❷ ***Алгебрична форма*** комплексного числа	$z = x + iy$ $i^2 = -1$	
❸ ***Рівність*** комплексних чисел[**]	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 \end{cases}$	
❹ ***Сума (різниця)*** комплексних чисел	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$	
❺ ***Добуток*** комплексних чисел	$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$	
❻ ***Натуральний степінь*** комплексного числа	$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}$ $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$	
❼ ***Спряжене*** до комплексного числа	$\overline{z} = x - iy$	
❽ ***Частка*** комплексних чисел	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2}$	
❾ Арифметичні дії над комплексними числами в алгебричній формі можна проводити як з алгебричними виразами, враховуючи, що $i^2 = -1$.		

[*] Дійна та уявна частини комплексного числа дійсні числа.

[**] Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не означують.

Б.2. Полярна система координат

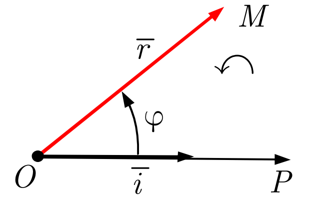
❶ ***Полярна система координат.***

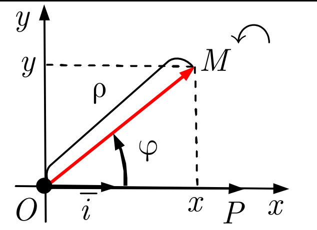
Полярну систему координат задає:

1) точка O — *полюс*;

2) промінь, орієнтований одиничним вектором $\overline{i}$, — *полярна вісь*;

3) *додатний напрям* відліку кутів (проти годинникової стрілки).





Полярні координати:

ρ — *полярний радіус* $(\rho \geq 0)$;

φ — *полярний кут*.

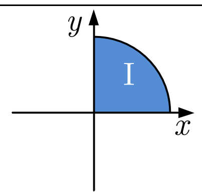
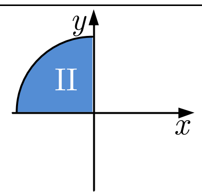
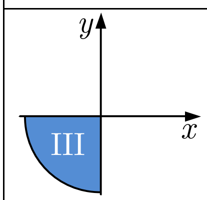
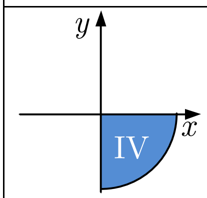
❷ ***Зв’язок*** між декартовими координатами і полярними координатами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

❸ ***Головне значення*** φ_0 полярного кута $(-\pi < \varphi_0 \leq \pi; \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

	$x > 0, y = 0$	$\varphi = 0$
	$x > 0, y > 0$	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x = 0, y > 0$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$
	$x < 0, y > 0$	$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x < 0, y = 0$	$\varphi = \pi$
	$x < 0, y < 0$	$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\arccos\dfrac{x}{\rho}$
	$x = 0, y < 0$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
	$x > 0, y < 0$	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\arccos\dfrac{x}{\rho}$

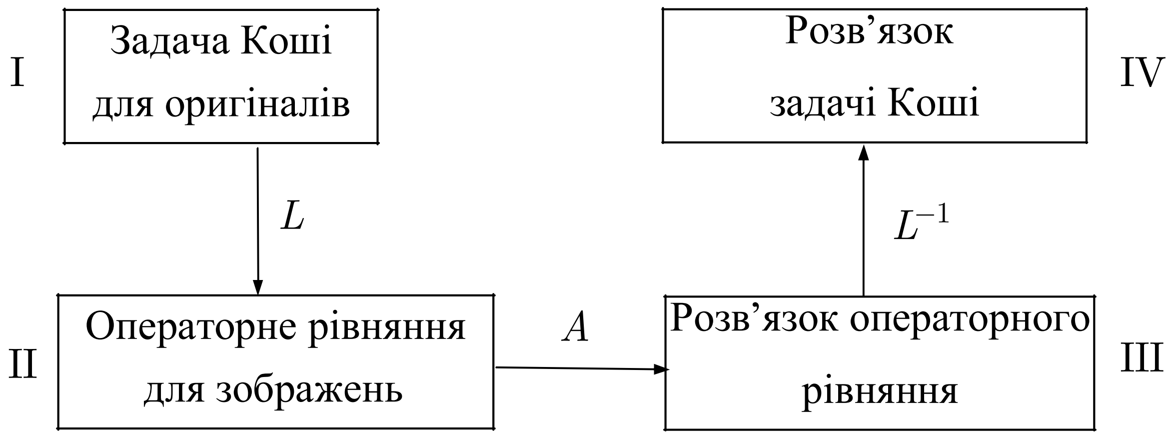
Б.3. Дії над комплексними числами у тригонометричній і показниковій формах

❶ ***Тригонометрична (показникова)*** форма комплексного числа	$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$
❷ ***Ейлерова*** формула	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
	$e^{\pi i} + 1 = 0$
❸ ***Модуль*** комплексного числа	$\lvert z\rvert = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
	$z\overline{z} = \lvert z\rvert^2$
❹ ***Аргумент*** комплексного числа	$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
	$\arg z$ — *головне значення* $\operatorname{Arg} z$; $\arg z \in (-\pi; \pi]$
❺ ***Добуток*** комплексних чисел	$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
❻ ***Спряження*** комплексного числа	$\overline{z} = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \rho e^{-i\varphi}$
❼ ***Частка*** комплексних чисел	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
❽ ***Натуральний степінь*** комплексного числа	$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}, n \in \mathbb{N}$
❾ ***Муаврова*** формула	$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
❿ ***Корінь*** з комплексного числа	$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$ $k = \overline{0, n-1}$
	Всі значення $\sqrt[n]{z}$ розташовані у вершинах правильного n-кутника

Додаток В

В.1. Розв’язання задачі Коші з допомогою перетворення Лапласа

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = f(t);$$
$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, ..., x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$



① Переваги операційного методу полягають у тому, що його застосування зводить операції над оригіналами до простіших операцій над зображеннями. Диференціальні та інтегральні рівняння переходять у алгебричні.

② Початкові умови в зображеннях ураховано автоматично.

③ Операційний метод дозволяє знаходити не лише частинний розв’язок диференціального рівняння, а й загальний, для цього досить покласти

$$x^{(k)}(0) = C_k = \mathrm{const},\ k = \overline{0, n-1}.$$

Список використаної і рекомендованої літератури

Підручники і посібники

1. *Вища* математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.
2. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 3. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 240 с. — ISBN 978-5-354-01329-6.
3. *Вся* высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01051-9.
4. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.
5. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч. 3. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.
6. *Жевняк Р. М.* Высшая математика: учеб. пособие Ч. 4. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 240 с.
7. *Овчинников П. П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.
8. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: *Айрис-Пресс*, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.
9. *Шипачев В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

Задачники і розв'язники

10. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. — 448 с. — ISBN 5-8114-0107-8.
11. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів: навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. — К.: ЦУЛ, 2010. — 417 с. — ISBN 978-966-364-991-7.
12. *Вища* математика: збірник задач: Навч. посібник /В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К.: А. С. К., 2005. – 480 с.
13. Герасимчук, В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч.3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. — 400 с. — ISBN 978-966-2331-04-2.
14. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібн. / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — К.: ЦУЛ, 2009. — 592 с. — ISBN 978-966-364-928-3.
15. *Краснов М. Л.* Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 208 с. — ISBN 978-5-397-01172-3.
16. *Сборник* задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 2. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие / Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др. Под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: «Издательский дом Альянс», 2010. — 368 с. — ISBN 978-5-903034-90-1.
17. *Сборник* задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.