компоненты и компоненты, зависимой от возраста, которая экспоненциально возрастает с возрастом и описывает старение организма. В защищённых средах, где внешние причины смерти отсутствуют (в лабораторных условиях, в зоопарках или для людей в развитых странах) независимая от возраста компонента часто становится малой.

Для модели Гомпертца–Мейкхама

$$\pi(t) = \exp\left\{-\alpha t - \frac{\beta}{t}\left(e^{\gamma t} - 1\right)\right\}.$$

Модель Гомпертца–Мейкхама наилучшим образом подходит для диапазона возраста от 30 до 80 лет. При большем возраста смертность не возрастает так быстро, как предусматривается этой моделью.

3.5. Задача о расследовании. На острове жили $n+2$ жителей. Одного из них нашли мертвым, убийцей может быть только кто-то из оставшихся $n+1$ жителей. Полиция смогла провести ДНК анализ на месте преступления и установила фрагмент ДНК кода убийцы.

Ученые утверждают, что такой фрагмент ДНК кода встречается только у определенной части людей; обозначим ее через p. Полиция начинает исследовать ДНК коды всех жителей острова. У первого же из них (назовем его Джоном Смитом) оказывается именно такой фрагмент ДНК кода. Какова вероятность, что Джон Смит убийца?

Первое решение. Обозначим гипотезу о том, что Джон Смит убийца, через H_1. Поскольку все жители острова подозреваются в одинаковой степени, то $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{n+1}$ и $\mathsf{P}(H_2) = \frac{n}{n+1}$, где $H_2 = \overline{H}_1$. Обозначим

$$B = \{\texttt{фрагменты ДНК кодов убийцы и Джона Смита совпадают}\}.$$

Тогда $\mathsf{P}(B/H_1) = 1$ и $\mathsf{P}(B/H_2) = p$. Применим теперь формулу Байеса (7.10):

$$\mathsf{P}(H_1/B) = \frac{\mathsf{P}(B/H_1)\,\mathsf{P}(H_1)}{\mathsf{P}(B/H_1)\,\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(B/H_2)\,\mathsf{P}(H_2)} = \frac{1}{1+pn}.$$

Второе решение. Эта задача имеет и другое решение, которое приводит к другому ответу. Пусть для $0 \le k \le n$

$$A_k = \left\{\begin{array}{c}\text{кроме Смита еще } k \text{ жителей острова, оставшихся в живых,}\\ \text{имеют такой же фрагмент ДНК кода, как и убийца.}\end{array}\right\}$$

Тогда по формуле количества "*успехов*" в схеме Бернулли (теорема 2.2)

$$\mathsf{P}(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad 0 \le k \le n. \tag{4}$$

Если среди жителей острова только Джон Смит имеет такой же фрагмент ДНК кода, как и убийца, то Смит наверняка является убийцей. Если же кроме него еще один житель имеет такой фрагмент ДНК кода, то Джон Смит вляется убийцей с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если же такой фрагмент ДНК кода имеют k других жителей острова, то Смит является убийцей с вероятностью $\frac{1}{k+1}$. Поэтому из формулы полной вероятности (7.9) вытекает, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(H_1) &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}\left(H_1/A_k\right) \mathsf{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} p^{k+1} (1-p)^{(n+1)-(k+1)} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left(1-(1-p)^{n+1}\right). \quad ⑨
\end{aligned}$$

Условную вероятность $\mathsf{P}\left(H_1/B\right)$ вычисляем, как и выше с помощью формулы полной вероятности, но ответ получаем другой, так как вероятность $\mathsf{P}(H_1)$ не такая, как раньше. ⑩