НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗАТВЕРДЖЕНО

Вченою радою

Фізико-математичного факультету

Протокол № 1 від 03 лютого 2020 р.

Голова Вченої ради _____________ В.В. Ванін

м.п.

ПРОГРАМА

основного вступного випробування для вступу

на освітньо-наукову програму підготовки аспіранта

спеціальності 111 Математика

Програму рекомендовано кафедрою

математичного аналізу та теорії ймовірностей

Протокол № 6 від 28 січня 2020 р.

Завідувач кафедри _______О.І. Клесов

Київ – 2020

І. ВСТУП

В сучасній науці і техніці математичні методи дослідження, моделювання і проектування відіграють важливу роль. Важливим завданням курсу вищої математики є розвиток логічного і алгоритмічного мислення студентів, вміння проводити математичний аналіз прикладних задач. Ця програма з вищої математики відображає нові вимоги, які ставить до математичної освіти XXI століття. Її характеризує прикладна направленість та орієнтація на використання математичних методів, особлива увага до ймовірнісно-статистичних методів в зв'язку з її практичною значимістю. Загальний курс математики становить фундамент математичної підготовки.

Дисципліни, зміст яких входить до програми, належать до циклу математичних дисциплін. Метою проведення даного випробування є перевірка базових навичок та вмінь вступників щодо розв'язання математичних задач, які є основою при дослідженні характеристик процесів, знання основних принципів і законів математичних дисциплін; здатності відтворювати математичні моделі, кількісно формулювати і вирішувати математичні задачі, наявність уявлення про межі застосування математичних моделей і теорій.

Вступники повинні з повним розумінням знати фундаментальні закони математики, а також методи їх досліджень, вміти застосовувати ці знання при розгляді окремих явищ, поєднувати їх суть з аналітичними співвідношеннями, вміти використовувати знання з курсів базових математичних дисциплін, при вивченні інших дисциплін, як загально-інженерних, так і за фахом. Вступне випробування відбувається у вигляді письмового екзамену.

Кожен з вступників отримує білет, в якому міститься три теоретичних питання з математики. На підготовку відповіді відводиться 90 хв. часу.

ІІ. ОСНОВНИЙ ВИКЛАД

Програма вступного випробування складена на основі програм таких дисциплін: «Функціональний аналіз», «Теорія ймовірностей», «Комплексний аналіз», «Теорія випадкових процесів», «Математична статистика», «Математична фізика», «Динамічні системи», «Детермінований хаос», «Основи теорії солітонів», «Варіаційне числення і методи оптимізації», «Диференціальні рівння» — і містить такі розділи:

Розділ 1. Функціональний аналіз

1. Принцип стислих відображень в метричних просторах.
2. Міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.
3. Компактність та повна обмеженість. Теорема Хаусдорфа.
4. Інтеграл Лебега.
5. Критерій компактності в просторі неперервних функцій (теорема Арцела).
6. Теорема про продовження міри з алгебри на σ-алгебру.
7. Повні метричні простори. Принцип вкладених куль.
8. Інтеграл Лебега-Стілтьєса.
9. Теореми Єгорова та Лузіна.
10. Оператори Гілберта-Шмідта та інтегральні оператори.

11. Теорема Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.
12. Теорема Кантора про незліченність множини дійсних чисел.
13. Теорема Ф. Рісса про загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів на просторі неперервних функцій.
14. Добуток мір та теорема Фубіні.
15. Критерій компактності в $\mathbb{R}^n$.
16. Типи збіжності вимірних функцій.
17. Лінійні неперервні функціонали. Теорема Хана-Банаха.
18. Формула Гріна.
19. Обернений оператор. Теорема Банаха про обернений оператор.
20. Теорема Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.
21. Вимірні функції та їх властивості.
22. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля.
23. Властивості неперервних на компакті функцій.

Розділ 2. Теорія ймовірностей

1. Ймовірнісний простір; аксіоми теорії ймовірностей; неперервність ймовірності.
2. Умовна ймовірність, формула повної ймовірності.
3. Дискретні розподіли: Бернуллі, біноміальний, Пуассона.
4. Теорема Пуассона
5. Неперервні розподіли: рівномірний, нормальний.
6. Випадкові величини, функція розподілу.
7. Моменти випадкової величини; математичне сподівання; дисперсія.
8. Нерівність Чебишева; закон великих чисел.
9. Випадкові вектори, спільна функція розподілу.
10. Кореляція, коваріація; нерівність Коші -Буняковського.
11. Багатовимірний нормальний розподіл.
12. Характеристичні функції, властивості.
13. Слабка збіжність розподілів.
14. Закон великих чисел Хінчіна.
15. Центральна гранична теорема.

Розділ 3. Теорія випадкових процесів

1. Процес Пуасона.
2. Вінерівський процес.
3. Ланцюги Маркова; класифікація станів.
4. Ланцюги Маркова; ергодичність.
5. Ланцюги Маркова; стаціонарний розподіл.
6. Стохастичні диференціальні рівняння; означення, приклади.
7. Стохастичні диференціальні рівняння; формула Іто.

Розділ 4. Математична статистика

1. Вибіркове оцінювання параметрів розподілу.
2. Метод максимальної правдоподібності.
3. Задача регресії; оцінка параметрів методом найменших квадратів.

Розділ 5. Комплексний аналіз

1. Аналітичні функції.
2. Умови аналітичності функції комплексної змінної.
3. Інтеграл функції комплексної змінної.
4. Інтегральна теорема, формула Коші.
5. Інтегральна теорема Коші.
6. Інтегральна формула Коші.
7. Ряд Лорана, особливі точки.
8. Розклад в ряд Лорана.
9. Теорія лишків.
10. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.

Розділ 6. Математична фізика

1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку.
2. Вивчення малих коливань нескінченної однорідної струни: постановка задачі, її коректна класична розв’язність, формула Даламбера.
3. Загальна схема методу відокремлення змінних Фур’є.
4. Властивості власних чисел і власних функцій задачі Штурма–Ліувілля.
5. Принцип максимуму для розв’язків рівняння теплопровідності та його наслідки.
6. Означення та властивості гармонічних функцій. Функція Гріна та її застосування до розв’язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа.
7. Означення та властивості об’ємного та поверхневих потенціалів.
8. Зведення задач Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь.
9. Теореми Фредгольма

Розділ 7 Динамічні системи

1. Основні поняття. Поняття динамічної системи. Кінематична інтерпретація динамічної системи. Класифікація динамічних систем, потоки та каскади. Неенергетичне означення консервативної та дисипативної системи.

2. Стійкість руху динамічних систем. Означення стійкості руху за Ляпуновим. Система рівнянь у варіаціях та система першого наближення. Класифікація положень рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку. Сигма - дельта діаграма стійкості. Функції Ляпунова та їх властивості. Теореми Ляпунова та Четаєва про стійкість руху. Критерій А. Гурвіца. Стійкість за першим наближенням. Методи знаходження функцій Ляпунова. Грубі системи на площині. Типи траєкторій можливі в грубих системах.

3. **Граничні множини та теорія біфуркацій.** Інваріантні многовиди динамічних систем. Граничні множини. Атрактори, репелери, сідлові множини. Теореми Гробмана-Хартмана та Перрона. Граничні цикли. Орбітальна стійкість граничного циклу. Матриця монодромії. Мультиплікатори граничного циклу. Інваріантні тори та резонансні цикли на торах. Поняття біфуркації динамічної

системи. Біфуркації положень рівноваги динамічної системи (транскритична біфуркація, сідло-вузлова біфуркація та біфуркація вилка). Біфуркації граничних циклів (Андронова-Хопфа, подвоєння періоду, сідло-вузлова).

Розділ 8. Детермінований хаос

1. Дискретні відображення. Регулярні та дивні атрактори динамічних систем**.** Діаграма Ламерея. Хаос у відображеннях «зуб пили», логістичному відображенні та у відображенні пекаря. Теореми Шарковського та Лі – Йорка. Відображення Ено.

2. Основні поняття та методи хаотичної динаміки. Стійкість за Лагранжем, Пуассоном та Ляпуновим. Означення ляпуновського характеристичного показника. Спектр і сигнатура спектру ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Метод Беннеттина – Гальяні для знаходження спектру (ЛХП). Переріз та відображення Пуанкаре. Метод Мішеля Ено. Спектральна густина атрактора.

3. Розмірність атрактора. Поняття фрактальної множини. Сніжинка Коха, канторів пил, килим Серпіньського. Означення фрактальної розмірності та розмірності Хаусдорфа – Безиковича. Формула Каплана – Йорка. Ляпуновська розмірність. Природна інваріантна міра атрактора. Ергогдичні системи та системи з перемішуванням.

4. Сценарії переходу до хаосу. Перехід від регулярного атрактора до хаотичного за сценаріями Фейгенбаума (каскад біфуркацій подвоєння періоду), Помо – Манневілля (через переміжність) та Шильникова. Узагальнена переміжність. Перехід до хаосу в системах Лоренца таРесслера.

Розділ 9. Основи теорії солітонів

1. Нелінійні рівняння. Нелінійність та дисперсія. Рівняння Кортевега-де Вріза і його точний розв’язок типу біжучої хвилі. Задача Фермі-Паста-Улама з квадратичною та кубічною нелінійністю. Асимптотичний метод автомодельної редукції. Рівняння Буссинеска. Солітон Забускі-Крускала.

2. Прямі методи інтегрування солітонних рівнянь. Метод Хіроти. Білінійний оператор Хіроти та дії з ним. Одно- та двосолітонні розв’язки рівняння Кортевега-де Вріза. N-солітонний розв’язок. Перетворення Беклунда для рівняння Кортевега-де Вріза. N-солітонні розв’язки.

3. Метод оберненої задачі розсіяння (МОЗР). Пара Лакса для рівняння Кортевега-де Вріза. Пряма задача розсіяння. Обчислення даних розсіювання за заданим потенціалом рівняння Шредінгера. Властивості даних розсіяння. Коефіцієнт відбиття та інтегральна формула Коші. Рівняння Гельфанда-Левітана-Марченка. Рівняння оберненої задачі розсіяння у відсутності дискретного спектра. Формула обернення. Дискретний спектр рівняння Шредінгера та його властивості. Рівняння оберненої задачі розсіяння за наявності дискретного спектра. Закони збереження.

4. Рівняння Клейна-Гордона та пов’язані з ним моделі. Рівняння синус-Гордона. Лоренц-інваріантні розв’язки рівняння синус-Гордона. Знаходження солітонних розв’язків рівняння синус-Гордона за допомогою перетворення

Беклунда. Застосування МОЗР до рівняння синус-Гордона. Топологічні солітони. Взаємодія солітонів рівняння синус-Гордона.

5. Нелінійне рівняння Шредінгера. Солітони огинаючої. Застосування МОЗР до нелінійного рівняння Шредінгера.

Розділ 10. Варіаційне числення, оптимально керовані системи та оптимальні математичні моделі

1.Задачі мінімізації функцій багатьох змінних і задачі оптимізації у функціональних просторах. Задачі оптимізації для функцій багатьох змінних. Класичні задачі варіаційного числення для функціоналів Лагранжа, Майєра і Больця. Сильні та слабкі екстремалі. Рівняння Ейлера, Ейлера-Пуассона та Ейлера-Лагранжа. Узагальнені задачі варіаційого числення.

2.Методи і алгоритми для розв'язування задач оптимізації та побудови екстремалей у функціональних просторах. Градієнтні методи побудови екстремалей у функціональних просторах. Методи апроксимації екстремалей у вибраних класах параметричних функцій: поліномів, сплайнів та спеціальних функцій. Методи і алгоритми побудови екстремалей за рівняннями Ейлера-Пуассона та Ейлера-Лагранжа.

3.Оптимізаційні задачі з обмеженнями та оптимізовані траєкторії. Задачі з обмеженнями-рівностями і теорема Лагранжа. Задача з обмеженнями-нерівностями і теорема Каруша-Куна-Таккера. Функціональні множники Лагранжа і теорема принципу максимума.. Принцим оптимальності у динамічному програмуванні і рівняння Белмана та рівняння Рікатті.

4.Методи розв'язування задач оптимізації з обмеженнями. Методи умовних градієнтів, проекції градієнтів та прискорених алгоритмів внутрішньої точки. Методи **у**загальнених градієнтів для мінімізації недиференційованих функцій та задач оптимізації керованих фізичних процесів із розподіленими та зосередженими параметрами. Методи внутрішньої точки для розв'язування ускладнених крайових задач математичної фізики.

5.Методи побудови та оптимізації математичних моделей складних систем. Математичні моделі стаціонарних та динамічних причинно-наслідкових залежностей, що описуються узагальненими системами математичної фізики. Методи найменших квадратів та методи максимальної вірогідності для оцінювання параметрів лінійних, лінійно-параметричних та нелінійних математичних моделей.

Розділ 11. Диференціальні рівняння

1. Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння 1-го порядку: основні поняття. Теорема Коші-Пікара існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Основні класи рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Рівняння Ріккаті. Диференціальні рівняння *n*-го порядку. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку. Рівняння Ейлера.

2. Системи диференціальних рівнянь. Загальний розв'язок. Теореми існування та єдиності. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів. Продовження розв'язку. Положення рівноваги та їх класифікація.

3. Лінійні рівняння *n*-го порядку. Розв’язок лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Основні властивості розв’язків. Однорідні і неоднорідні лінійні рівняння. Структура загального розв’язку.

Метод варіації довільних сталих.

4. Системи лінійних рівнянь. Фундаментальна матриця розв’язків. Формула Остроградського-Ліувілля. Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь, їх існування та застосування.

ІІІ. ПРИКІНЦЕВІ ПОЛОЖЕННЯ

Для вступників на освітньо-наукову програму підготовки аспіранта «Страхова та фінансова математика» обов’язковими розділами є: «Функціональний аналіз», «Теорія ймовірностей», «Комплексний аналіз», «Теорія випадкових процесів», «Математична статистика».

Для вступників на освітньо-наукову програму підготовки аспіранта «Математичні та комп’ютерні методи моделювання динамічних систем» обов’язковими розділами є: «Математична фізика», «Динамічні системи», «Детермінований хаос», «Основи теорії солітонів», «Варіаційне числення і методи оптимізації».

1. **Допоміжні матеріали.**

На екзамені не допускається користування додатковою літературою.

2. **Критерії оцінювання**.

Екзаменаційний білет складається з трьох теоретичних питань з математики.

Система оцінювання оцінює здатність вступника:

– – узагальнювати отримані знання для вирішення конкретних завдань, проблем;
– застосовувати правила, методи, принципи, закони у конкретних ситуаціях;
– аналізувати і оцінювати факти, події та робити обґрунтовані висновки;
– інтерпретувати схеми, графіки, діаграми;
– викладати матеріал логічно, послідовно, з дотриманням вимог стандартів.

Відповідь вступника оцінюється за 100-бальною шкалою (по 33-34 бали за кожне питання). Правильною відповіддю вважається повне і адекватне висвітлення питання згідно з Програмою основного фахового випробування.

Після цього здійснюється перерахування цих балів у оцінку ECTS згідно з таблицею:

Сума набраних балів	Оцінка
95…100	Відмінно
85…94	Дуже добре
75…84	Добре
65…74	Задовільно
60…64	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ, Киев, Выща школа, 1990.

2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1,2. Київ, Либідь, 1994.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементи теории функций и функционального

анализа, Москва, "Наука", 1989.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, Вища школа, 1979.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, М., Наука, 1988.
6. Клесов О. І., Теорія ймовірностей та математична статистика, електронний конспект лекцій, Київ, ТВіМС, 2018 – 426с.
7. Крамер Г. Математические методы статистики, М., Мир, 2003.
8. Ширяев А.Н. Вероятность-1, М., МЦНМО, 2004.
9. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — Изд. 13-е. — М,: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 432 с.
10. Краснопольская Т.С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением / Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. // Москва-Ижевск: РХД, 2008. - 280 с.
11. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости / Меркин Д.Р. // Москва: Наука, 1971. - 310 с.
12. Швець О.Ю. Динамічні системи: Стійкість динамічних систем / Швець О.Ю. // Київ: НТУУ «КПІ» - 2011 р. – 51 с.
13. Швець О.Ю. Детермінований хаос (навч. посіб.). – Київ: НТУУ «КПІ» - 2010 р. – 93 с.
14. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
15. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
16. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
17. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
18. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
19. Суетин П.К. Классические ортогональные полиномы. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
20. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций: с приложениями к механике. – М.: КомКнига, 2006. – 368 с.
21. Шалдырван В.А., Герасимчук В.С. Методы математической физики. – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.
22. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Л. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
23. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
24. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наук. думка, 1989. – 304 с.
25. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. – Ижевск, РХД, 2002. – 96 с.
26. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. – М.: Физматлит, 2007. – 560 с.
27. Герасимчук В.С., Ребенчук Т.Л., Герасимчук І.В. Метод оберненої задачі розсіяння та його застосування. – К.: НТУУ “КПІ”, 2016. – 96 с.
28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.
29. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.
30. Алексеев В.М. Оптимальное управление./ Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.− М.: Наука, 1979. – 430 с.

31. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации./ Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. – М. Наука. 1984. – 288 с.

32. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: навч. посібник, 2-ге вид. перероб./ Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. – К: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. 799 с.

33. Бейко І.В. Методи математичного і комп'ютерного моделювання для відшукання нових знань. ч.4 // Лабораторний практикум, ч.4. НУКМА. – Київ: Фітосоццентр, 2000. – С.168-193.

34. Гельфанд И.М. Вариационное исчисление. /Гельфанд И.М., Фомин С.В. М.: Высшая школа, 2005. - 838 с.

35. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.

36. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.

Розробник програми:
зав. каф. математичного аналізу
та теорії ймовірностей,
д.ф.-м.н., проф. Клесов О.І.