МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА – 2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів технічних напрямків підготовки

Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ»

КИЇВ
НТУУ «КПІ»
2013

Вища математика -2 : Навчальний посібник для студентів технічних напрямків підготовки /Укладач: В. В. Бакун. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 270с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 10 від 20.06.2013 р.)

ВИЩА МАТЕМАТИКА -2

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів технічних напрямків підготовки

Укладач: Бакун Володимир Володимирович,
канд. фіз.- мат. наук

Відповідальний редактор :
О.І.Клесов, д-р фіз.-мат.наук, проф.

Рецензенти:
М.О.Денисьєвський , канд. фіз.-мат.наук, доцент

О.М.Радченко , канд. фіз.-мат.наук, доцент

Анотація:

Навчальний посібник містить розширення матеріалу лекцій з курсу “Вища математика-2” для студентів радіо технічного факультету НТУУ “КПІ”. Може бути корисним для поглибленого вивчення дисципліни та успішного виконання самостійної роботи для студентів факультетів електронно-технічного профілю .

Зміст

Передмова

Перед тим, як щось писати, кожен автор питає себе: а для чого він це робить, а потім – як це робити.

Відповідь на перше питання очевидна – змінився час і умови. По-перше, із запозиченою думкою про те, що студентам легше і плідніше вчитись самостійно, останнім часом кількість годин викладання математичних дисциплін на технічних факультетах було значно зменшено без скорочення об’єму курсів. Якщо раніше (у 1960 – 1980 – х роках) на більшості (якщо не на всіх) технічних факультетах (а інших тоді і не було) загально освітній курс математики викладався 5-ть семестрів, то зараз – два або три. Тому лектор вимушений або читати свій курс помітно інтенсивніше, так що під завісу лекції вся сорочка мокра, хоч викручуй, або значно спрощувати зміст лекцій – тоді лекція стає схожою на інструкцію по експлуатації. Навряд чи звичайна людина, почувши інструкцію, зрозуміє як працює прилад – дай Бог запам’ятати, які кнопочки натискати. Звідси і формується відношення студента до математики як до нудної релігії…

А по-друге, якщо ще й врахувати, що сучасні студенти, як плід школи перебудовчих років, часто непідготовлені до конспектування лекцій ні технічно, ні теоретично (тобто, вони не володіють навиками швидкісного запису, не вміють виділяти головну думку, погано ознайомлені з основами дедукції) …

Все це вимагає від викладача нових підходів до цілеспрямування лекції, її змістовності, способів її викладання.

У теперішній добі основною і найважчою метою лекції є заохочення студента до вивчення математичних дисциплін. Звичайно, друга мета - ознайомлення студента з основними поняттями і методами вищої математики. Формування способів математичного мислення у студента – це вже мрія.

Тому автор свідомо відмовляється від завдання написати лекції . Перенести лекції на папір - це неможливо… Можливо хіба що привести повний текст лекцій, та це – недоцільно. Бо, по-перше, під час лекцій кожне слово промовляється зі своєю інтонацією, наголосом, рухом, жестом, поглядом, які під час не менш інформативні ніж загальне значення слова і важливі для сприймається. Та й узагалі, лектор – це актор, а лекція – вистава, а виставу треба бачити і чути, цього не передати на папері.

Отже, доцільно, скоріше всього, писати навчальний посібник, складений з основного і допоміжного матеріалу зі теми лекції, по можливості з вкрапленням у їх склад лекційних мовних оборотів, для полегшення сприйняття тексту, та додаткових прикладів, для яких не вистачило часу під час лекції, або доведень теорем, які були залишені для самостійного доведення студентам.

Навчальний посібник складений на базі лекцій, що були прочитані у 2009 – 2012 роках для студентів Радіо - технічного факультету з курсу «Вища математика -2», і який містить теми «Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл.», і може бути корисним як студентам РТФ , так і студентам інших технічних факультетів.

Поданий матеріал курсу розбитий на частини, які умовно (мабуть, за традицією) названі лекціями, але з таким же успіхом їх можна було позначити як глави, розділи чи параграфи. Автор ні в якому разі не стверджує, що за одну лекцію потрібно чи доцільно подавати саме зазначену кількість інформації – все залежить від складу потоку студентів на курсі, їх математичної підготовки, точки зору лектора на важливість тих чи інших понять, програми, тощо.

Посібник складений за підручниками, що рекомендуються студентам, та за особистими розробками автора.

З повагою до читача Бакун В.В.

12 травня 2013 року.

Лекція №1

Вступне слово до курсу

З якою метою ми будемо вивчати курс математичного аналізу?

Мабуть кожен з вас відразу скаже: «З метою ознайомлення з основними поняттями і методами математичного аналізу, які застосовуються в фізиці, хімії, електроніці, економіці, тощо».

Це дійсно так, але це не головне! Інформативна функція курсу не є основною – більшість цих понять і методів ви, можливо, забудете через рік чи, може, через п’ять!...Звичайно знову згадаєте, якщо життя заставить!

Головне ж завдання нашого курсу, як і всякої математичної дисципліни, полягає у розвитку вашої інтелектуальної діяльності та формуванні досконалих рис характеру. Наші заняття математикою мають за мету:

1) розвинення процесів вашого логічного мислення (навчитись міркувати, аналізувати, абстрагувати, схематизувати, мислити дедуктивно, узагальнювати, спеціалізувати, застосовувати тощо);

2) надати раціональних якостей думці і способам її вираження (таких як упорядкованість, точність, ясність, стислість тощо);

3) розвинути просторові і кількісні уявлення, інтуїцію, креативність в абстрактній області;

4) розвинути уважність і уміння зосередитись;

5) виховати наполегливість і звичку працювати упорядковано;

6) формування наукового духу (об’єктивність, інтелектуальна чесність, смак до дослідження, тощо);

Хто після цього зможе сказати, що йому математика не потрібна…?!

Як бажано і потрібно вивчати математичні дисципліни

Для вивчення курсу спочатку необхідно дати собі чесну відповідь чи є у вас бажання витрачати сили і час на навчання (а час – це єдине дароване Богом життя!), чи може слід зайнятись іншою вам більш до вподоби і корисною для людства справою. Якщо ви обрали шлях навчання, то для опанування математичною дисципліною слід:

1) прийти і вислухати лекцію, бо лекція – це мінімум того, що хотів би розповісти викладач по даній темі, і що обов’язково повинен знати студент!

2) старанно її законспектувати;

3) прийти додому і розібратись у своїх записах;

4) зрозуміти зміст лекції; звіритись з підручником;

5) вивчити всі поняття і теореми, які були приведені під час лекції, та придумати приклади до їх застосування; подумати: а чи не можна простіше або іншим методом довести твердження лекції;

6) прийти на практичне заняття, на якому розглядаються приклади зі теми лекції, плідно на ньому попрацювати;

7) виконати вправи, які були запропоновані для самостійної роботи зі задачника;

8) виконати розрахункову роботу, написати контрольну роботу.

Тоді можна сміливо чекати іспит!

Література, що пропонується викладачем

1. Дороговцев А.Л. «Введение в дифференциальное и интегральное исчисление», - Киев: Факт,2005.
2. Вища математика: підручник: у 2-х томах, - Київ: Либідь,2003. За редакцією Г.Л.Кулініча.
3. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления». В 3-х т.: - М.,Наука,1970 (та інші видання).

4. Кудрявцев Л.Д. «Краткий курс математического анализа», - М., Наука, Физ.-мат.лит.,1989.

5. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.Н. «Курс математического анализа», - М., Наука, Физ.-мат.лит.,1988.

6. Бугров Л.С., Никольский С.М. «Дифференциальное и интегральное исчисление», - М., Наука, Физ.-мат.лит.,1984.

7. Кудрявцев Л.Д. «Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т. 1. –М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.

8. Сборник задач по математике для втузов. Часть I . Под ред.. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П.- 2 изд., М., Наука, Физ.-мат.лит.,1986.

9. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2007. – 600 с.

Елементи математичної символіки

Для прискорення швидкості запису та точності математичних тверджень загально прийнято використовувати такі символи:

=> - читається ***«випливає»,*** і пишеться між двома твердженнями, щоб показати, що одне твердження є наслідком (слідує з) іншого;

<=> - читається ***«рівносильно»***, «тоді і тільки тоді», «необхідно і достатньо», і пишеться між двома твердженнями, щоб показати, що множини їх істинності однакові;

$\exists$ - читається ***«існує», «знайдеться», «можна знайти»***, називається ***квантором існування,*** і пишеться перед об'єктом, існування якого стверджується; походить від першої літери слова Exist;

$\nexists$ - читається ***«не існує», «не має»*** тощо, пишеться для ***заперечення існування*** об'єкту;

$\exists!$ – читається ***«існує і є єдиним», «знайдеться тільки єдиний(єдина, єдине)»***, використовується для ствердження існування об'єкта тільки в єдиному числі (екземплярі);

$\forall$ - читається ***«для всіх», «для кожного», «всі»*** тощо, називається ***квантором узагальнення***, використовується для ствердження виконання деякої умови (властивості) для всіх елементів вказаної множини; наприклад, запис ***«*** $\forall x \in R$ ***»*** читається ***«для всіх дійсних чисел», «на всій дійсній числовій осі»*** тощо;

$\vee$ - теж саме, що і символ великої квадратної дужки, читається ***«або», «сукупність», «об'єднання»*** тощо; твердження, утворене з інших тверджень, з'єднаних знаком «або» є істинним тоді і тільки тоді, коли істинне хоч одне із тверджень, що входять у з'єднання;

$\wedge$ - теж саме, що і кома або фігурна дужка, читається ***«і»***, означає, що твердження (умова), з'єднані цим символом, повинні виконуватись разом (одночасно);

$:=$ - читається ***«покладемо», «покласти», «позначимо»,*** тощо, використовується для позначення рівності за означенням;

$\overset{def}{<=>}$ - читається ***«рівносильно за означенням»***, використання символу очевидне.

Інші математичні символи ми будемо вводити по потребі.

***Приклад 1.1*. Теорема:** $A \Rightarrow B$. Таким чином сформульована теорема читається так: *«з умов А випливає твердження В»*, або – *«твердження В є наслідком умов А»,* або *«умови А є достатніми для виконання твердження В»*, або *«умови В є необхідними для виконання твердження А».*

***Приклад 1. 2*. Теорема:** $A \Leftrightarrow B$. Такого типу теорему можна сформулювати як: *«твердження А рівносильне твердженню В»*, або *«твердження В виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови А»*, або *«умови А є необхідними і достатніми для виконання твердження В»,* тощо.

Множини і операції над ними

Єдиною категорією математики, тобто поняттям, що вважається початково даним, первісним, з якого починається побудова теорії математики, є поняття ***множини.*** Під ***множиною*** ми розуміємо якусь купу, набір, зібрання, сукупність, рід, клас тощо. Будемо вважати, що кожна множина складається з якихось елементарних частинок, які називаються елементами множини, або її точками.

Множини, зазвичай, позначають великими латинськими літерами, а їх елементи – маленькими. Якщо деякий x є елементом множини А, то це записують так $x \in A$.

Відповідно, запис $x \notin A$ означає, що x не є елементом множини А, або кажуть, що елемент x не входить у множину А.

Якщо множина А складається з елементів a, b, c, то використовують позначення:

$$A=\{a,b,c\}.$$

Інший спосіб запису множини полягає у задаванні деякого твердження (умов), якому (яким) необхідним і достатнім чином повинні задовольняти елементи множини. А саме, запис

$$A=\{x\,|\,P(x)\} \qquad \text{або} \qquad A=\{x:P(x)\}$$

означає , що множина А складається з таких і тільки таких елементів x , які задовольняють твердження *P(x).*

Твердження $P(x)$ інколи називають ***характеристичною властивістю множини*** A ([9], с. 179).

Наприклад, запис $B=\{x\in N: x^2-2x-3=0\}$ означає, що множина *B* складається з натуральних чисел, які задовольняють рівняння $x^2-2x-3=0$. Очевидно, що $B=\{3\}$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають ***пустою,*** і позначають як $\varnothing$.

Прийнято літерою R позначати множину дійсних чисел, N – натуральних, Q – раціональних, Z – цілих.

Із шкільного курсу ми пам'ятаємо як позначаються сегменти, відрізки, інтервали дійсних чисел. Наприклад, якщо числа a і b - кінці інтервалу дійсних чисел, то він позначається як $(a\,,b)$, тобто

$$(a,b):=\{\ x\in R\,|\ a<x<b\,\}.$$

Відповідно:

$$[a,b):=\{\ x\in R\,|\ a\le x<b\,\},$$

$$(a,b]:=\{\ x\in R\,|\ a<x\le b\,\},$$

$$[a,b]:=\{\ x\in R\,|\ a\le x\le b\,\}.$$

Означення 1.1. ***Об'єднанням двох множин А і В*** *будемо називати множину, яка складається з усіх точок, що є елементами множини А або елементами множини В, і будемо її позначати як* $A\cup B$*. Тобто,*

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \quad \text{або} \quad x \in B\}.$$

Означення 1.2. ***Перетином множин А і В*** *називається множина, яка складається з усіх елементів, що одночасно є і елементами множини А, і елементами множини В. Перетин позначається як* $A \cap B$. *Тобто,*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\} \; .$$

Означення 1.3. ***Різницею А мінус В*** **множин** *А і В, називається множина, яка складається з усіх таких елементів множини А, що не входять у множину В. Така різниця позначається як* $A \setminus B$. *Тобто,*

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\} \; .$$

Означення 1.4. *Кажуть, що* ***множина А є підмножиною множини В***, і *позначають* $A \subset B$, *якщо всі елементи множини А є і елементами множини В. Тобто,*

$$A \subset B \;\overset{def}{<=>}\; (\, x \in A \;=>\; x \in B \,).$$

Означення 1.5. *Дві* ***множини називаються рівними*** (*однаковими), якщо кожен елемент множини А є елементом множини В, та навпаки. Тобто,*

$$(A = B) \;<=>\; (x \in A <=> x \in B) \;<=>\; (A \subset B,\, B \subset A).$$

Означення 1.6. ***Симетричною різницею множин А і В*** *називається множина*

$$A \Delta B \;:=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Часто трапляється, що розглядаються тільки множини, які є підмножинами однієї і тієї ж множини (за межі якої не виходять). Тоді така множина називається ***універсальною*** *і позначається як U. Як правило, ми будемо розглядати тільки підмножини множини R дійсних чисел. Тому, зазвичай, під універсальною множиною U ми будемо розуміти множину R.*

Означення 1.7. ***Доповненням*** *множини A до універсальної множини U називається множина* $\overline{A} := U \setminus A$, *яка читається* ***«не A»,*** або ***«доповнення до A».***

Приклад 1.3. Нехай $A=\left[1,3\right]$, $B=\left\{1\right\}\cup(2,4)$. Тоді :

$$A\cup B=\left[1,4\right),\ \ A\cap B=\left\{1\right\}\cup\left(2,3\right],\ \ A\setminus B=\left(1,2\right],\ \ B\setminus A=(3,4),\ \ A\Delta B=\left(0,2\right]\cup(3,4),$$

$$\overline{A}=R\setminus A=(-\infty,1)\cup(3,+\infty),\quad \overline{B}=R\setminus B=(-\infty,1)\cup\left[1,2\right]\cup\left[4,+\infty\right).$$

Властивості операцій над множинами

Для множин довільної природи справедливі такі рівності:

1. ***Комутативність*** операцій об’єднання і перетину :

$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=A\cap B\ .$$

2. ***Асоціативність*** операцій об’єднання і перетину:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

3. ***Закони дистрибутивності*** операцій об’єднання і перетину:

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),\quad (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

4. $A\cap A=A,\ A\cup A=A,\ A\setminus A=\varnothing,\ A\Delta A=\varnothing,\ \overline{\overline{A}}:=\overline{(\overline{A})}=A.$

5. Дії над пустою та універсальною множиною:

$$A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\setminus\varnothing=A,\ \varnothing\setminus A=\varnothing,$$
$$\overline{\varnothing}=U,\ \overline{U}=\varnothing,\ A\cup U=U,\ A\cap U=A,$$
$$A\setminus U=\varnothing,\ U\setminus A=\overline{A}.$$

6. Правила де Моргана:

а) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, б) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

в) $C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$, г) $C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.

Зауваження1.1. *За означенням рівності множин для доведення відповідних рівностей 1-6 необхідно і достатньо показати, що довільний елемент множини, що стоїть зліва у рівності, є елементом множини, яка стоїть справа, і навпаки.*

Приклад 1.4. Доведемо, що для довільних множин A і B, які є підмножинами універсальної множини U, виконується рівність 6 а), тобто,

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\ .$$

Дійсно, нехай x – довільний елемент множини $\overline{A\cup B}$. Це рівносильне тому, що x не є елементом множини $A\cup B$ (але входить в універсальну множину U). За означенням об’єднання множин останнє твердження рівносильне тому, що x не є ні елементом множини A, ні елементом множини В (це очевидно від супротивного!). А значить, за означенням доповнення множини, елемент x входить як у доповнення до множини А, так і у доповнення до множини В. Останнє твердження, за означенням перетину множин, рівносильне тому, що елемент x входить у перетин доповнень множин А і В. Доведення закінчене. Мовою символіки його можна записати так:

$$\forall A\ \forall B: \qquad x \in \overline{A \cup B} \ \Leftrightarrow\ x \notin A \cup B \ \Leftrightarrow\ x \notin A,\, x \notin B \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A},\, x \in \overline{B} \ \Leftrightarrow\ x \in \overline{A} \cap \overline{B} \quad .$$

Сама рівність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ читається так: *« Доповнення до об'єднання двох множин співпадає (дорівнює)з перетином доповнень до цих множин»*.

Завдання для самостійної роботи 1.1: Довести інші тотожності 1-6.

Зауваження1.2. *За доведенням тотожності 6 а) можна угледіти, що вона виконується для довільної кількості множин.*

Нехай ми маємо довільну кількість множин A_α за індексованих індексом α з деякої множини I. Це означає, що кожній множині A_α відповідає тільки один індекс $\alpha \in I$ та навпаки (точне означення терміну ***відповідність*** дамо пізніше). Тоді об'єднання і перетин всіх множин A_α, $\alpha \in I$, позначають, відповідно, таким чином:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha .$$

Якщо ж множиною індексів є множина $I = \{1, 2, ..., n\}$ або $I = N = \{1, 2, ..., n, ...\}$, то прийнято такі позначення:

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \ \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ та, відповідно, $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k, \ \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Наприклад, для довільної кількості множин $A_\alpha, \alpha \in I$, перше правило де Моргана можна записати так:

$$\overline{\mathop{U}\limits_{\alpha\in I} A_\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha} .$$

Означення 1.8. *Будемо називати не пусту множину А* ***одноелементною*** *(або такою, що складається з одного елемента), якщо при вилученні довільного її елемента* $a \in A$ *різниця множин* $A\backslash\{a\}$ *є пустою, і будемо писати* $|A|=1$*. Тобто,*

$$|A|=1 \quad \overset{def}{<=>} \quad \forall a \in A: \quad A\backslash\{a\}=\varnothing.$$

Аналогічно, будемо називати не пусту множину В ***двоелементною*** або ***парою*** і *позначати* $|B|=2$ *, якщо при вилученні довільного її елемента* $b \in B$ *різниця множин* $B\backslash\{b\}$ *є одноелементною множиною, тобто,*

$$|B|=2 \quad \overset{def}{<=>} \quad \forall b \in B: \ |B\backslash\{b\}|=1 \ .$$

Означення 1.9. ***Упорядкованою парою елементів a і b*** *будемо називати двоелементну множину, що складається з одноелементної множини* $\{a\}$ *та пари* $\{a,b\}$*,тобто,*

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Теорема 1.1. ***(про основну властивість упорядкованої пари).*** *Упорядкована пара* (a,b) *співпадає з упорядкованою парою* (b,a) *тоді і тільки тоді, коли елементи* a *і* b *рівні. Тобто,*

$$(a,b)=(b,a) \quad <=> \quad a=b\,.$$

Це твердження можна прочитати ще і так: *«Упорядкована пара не зміниться від перестанови її елементів тоді і тільки тоді, коли ці елементи рівні»*.

Доведення. Нехай $(a,b)=(b,a)$, що означає, що $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{b\},\{a,b\}\}$. Тобто ці дві множини мають однаковий склад елементів. Але, за означенням пари, двоелементна множина не може співпадати з одноелементною. Тому, у множинах, що стоять у лівій і правій частинах останньої рівності, повинні співпадати одноелементні множини $\{a\}$ та $\{b\}$. Звідки маємо рівність $a=b$.

Навпаки, нехай $a=b$. Тоді $\{a\}=\{b\}$ і отже, $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{b\},\{a,b\}\}$.

Теорема доведена.

Зауваження1.3. *Аналогічно можна означити множину, що складається з трьох, чотирьох елементів, тощо, та ввести поняття упорядкованої трійки, четвірки і так далі.*

Завдання для самостійної роботи 1.2: означити триелементну множину та упорядковану трійку елементів.

Означення 1.10. ***Декартовим добутком*** $A\times B$ *двох множин A і B будемо називати множину всіх можливих упорядкованих пар* (a,b) *елементів* a *і* b *таких, що перший елемент a пари* (a,b) *береться з множини A, та другий елемент* b *– з множини B. Тобто,*

$$A\times B := \{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

Приклад 1.5. Нехай $A=\{1,2\}$ і $B=\{3,4,5\}$. Тоді декартовий добуток $A\times B$ складається з упорядкованих пар (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5). Тобто,

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}.$$

Приклад1.6. Нехай $A=[0,1]$, і A=B. Тоді добуток $A\times B = A\times A$ позначають як A^2, при цьому A^2 буде складатись з усіх упорядкованих пар (x, y) дійсних невід'ємних чисел x і y, які не перевищують одиницю. Тобто,

$$A^2=[0,\,1]^2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}.$$

Якщо зобразити множину $A^2=[0,1]^2$ у декартовій системі координат xOy, то отримаємо квадрат, дві сторони якого є відрізками $[0,1]$, що лежать на координатних осях Ox і Oy:

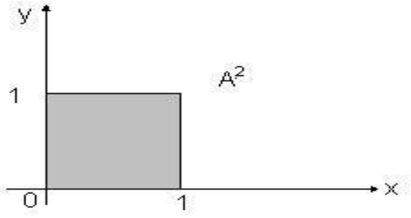


Рис. 1

Відображення. Образ та прообраз точки і множини

Означення 1.10. ***Відображенням*** *f множини A у множину B будемо називати певну підмножину декартового добутку $A\times B$ множин A і B, тобто $f\subset A\times B$. При цьому відображення f ми будемо* *позначати як* $f: A \to B$ *або* $A \xrightarrow{f} B$. *Якщо упорядкована пара* (x, y) *входить у множину* f*, то будемо говорити, що елемент* x *відображається у елемент* y *, і будемо позначати* $x \xrightarrow{f} y$. *Множину* $f(x)$ *всіх елементів* $y \in B$*, у які відображається елемент* $x \in A$*, будемо називати (повним)* ***образом елемента x*** *при відображенні* f. *В свою чергу множину* $f^{-1}(y)$ *всіх елементів* x *множини* A*, які відображаються в елемент* y *множини* B*, будемо називати* ***прообразом елемента*** y *при відображенні* f. *Аналогічно, якщо* $A_1 \subset A$ *і* $B_1 \subset B$ *є підмножинами множин* A *і* B*, то* ***образом*** $f(A_1)$ ***множини*** A_1 *при відображенні* f *будемо називати множину образів всіх елементів* x *, що входять у множину* A_1*, а* ***прообразом*** $f^{-1}(B_1)$ ***множини*** B_1 *при відображенні* f *- множину всіх прообразів елементів* y*, що входять у множину* B_1. *Тобто,*

$$f(A_1) := \{ f(x) \mid x \in A_1 \} = \{ y \mid (x, y) \in f, x \in A_1 \},$$

$$f^{-1}(B_1) := \{ f^{-1}(y) \mid y \in B_1 \} = \{ x \mid (x, y) \in f, y \in B_1 \}.$$

Приклад 1.7. Нехай $f: R \to R$ задає відображення усіх дійсних чисел у їх квадрати, тобто, $f = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in R\}$, яке ще можна записати як $f: x \to x^2, x \in R$. Тоді,

$$f(1) = 1, \qquad f^{-1}(1) = \{-1, 1\},$$

$$f([0, 1]) = f([-1, 1]) = [0, 1], \qquad f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1].$$

Завдання для самостійної роботи 1.3 (***Властивості образів***). Нехай $f:A\to B$. Довести, що для довільних підмножин A_1 і A_2 множини A справедливі наступні рівності або включення:

1) $f(A_1\bigcup A_2)=f(A_1)\bigcup f(A_2)$;
2) $f(A_1\bigcap A_2)\subset(f(A_1)\bigcap f(A_2))$;
3) $f(A_1)\setminus f(A_2)\subset f(A_1\setminus A_2)$;
4) $A_1\subset A_2 => f(A_1)\subset f(A_2)$;
5) $A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

Завдання для самостійної роботи 1.4. (***Властивості прообразів***).Нехай $f:A\to B$. Довести, що для довільних підмножин $B_1\subset B, B_2\subset B$ виконуються такі рівності або включення:

1. $f^{-1}(B_1\bigcup B_2)=f^{-1}(B_1)\bigcup f^{-1}(B_2)$;
2. $f^{-1}(B_1\bigcap B_2)=f^{-1}(B_1)\bigcap f^{-1}(B_2)$;
3. $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$;
4. $B_1\subset B_2 => f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$;
5. $f(f^{-1}(B_1))=B_1\bigcap f(A)$;
6. $f^{-1}(\overline{B_1})=\overline{f^{-1}(B_1)}$, де доповнення береться по відношенню до універсальних множин A і B відповідно.

Лекція № 2

Деякі означення і термінологія теорії відображень

Нехай задане деяке відображення множини A у множину B, тобто $f:A\to B$. Ясно, що, можливо, не всі точки ***x*** множини A мають деякий образ у множині B. У свою чергу, можливо не всі точки y множини B є прообразами деяких точок x з множини A. Тому є сенс ввести таке поняття як область визначення і множина значень відображення f.

Означення 2.1. ***Областю визначення (означення)*** *відображення* f *будемо називати підмножину* $D := D(f)$ *усіх точок* $x \in D \subset A$ *множини А, для кожної з яких знайдеться хоча б один елемент* $y \in f(x)$ *образу* $f(x) \in B$. ***Множиною значень*** *відображення* f *будемо називати множину* $E := E(f)$ *, для кожної точки якої* $y \in E$ *існує хоча б один прообраз* x *із множини А, тобто* $x \in A \xrightarrow{f} y \in B$. *Таким чином, формально можна записати:*

$$D(f) := \{ x \in A | \exists y \in B : (x, y) \in f \} = \{ x \in A | \exists y \in B : x \xrightarrow{f} y \} ,$$

$$E(f) := \{ y \in B | \exists x \in A : (x, y) \in f \} = \{ y \in B | \exists x \in A : x \xrightarrow{f} y \} .$$

Якщо відображення f *означене для всіх елементів множини А, тобто,* $D(f) = A$, *то будемо говорити, що* ***відображення*** f ***задане на множині А.***

Приклад 2.1. Влаштуємо відображення $f : R \to R$ таким чином: нехай точка з координатами (x, y) лежить на одиничному колі $L : x^2 + y^2 = 1$, тоді абсцисі x поставимо у відповідність ординату y. Легко бачити, що областю визначення даного відображення є відрізок $D(f) = [-1, 1]$, множиною значень $E(f)$ є той же відрізок [-1,1]. При цьому кожне дійсне число x відрізка [-1, 1] , крім крайніх його точок, відображається у дві різні точки $y_1 = +\sqrt{1 - x^2}$ та $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, а крайні точки відображається у нулі. Це значить, що повний образ кожної точки

$x \in (-1,1)$ складається з двох точок $\pm\sqrt{1-x^2}$, а крайніх точок – тільки з нулів. Аналогічно, прообраз кожної точки ***y*** з інтервалу (-1,1) теж складається з двох точок $\pm\sqrt{1-y^2}$, а прообразом точок $\pm 1 \in E(f)$ є тільки одне число 0.

Означення 2.2

а) Відображення f *множини А у множину В називається* ***однозначним****, якщо повний образ кожної точки* $x \in D(f)$ *складається тільки з однієї точки, тобто:*

$$(x, y_1) \in f, \ \ (x, y_2) \in f \quad \Rightarrow y_1 = y_2 \quad .$$

б) Однозначне відображення $f: A \to B$ *називається* ***ін'єктивним або ін'єкцією*** (або ***взаємно однозначним)****, якщо кожна точка* $y \in E(f)$ *має тільки один прообраз, тобто,*

$$(x_1 \in D(f), \ x_2 \in D(f), \ x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ ,$$

що рівносильне тому, що

$$(\,(x_1, y) \in E(f) \ , (x_2, y) \in E(f) \ ) \Rightarrow \ x_1 = x_2.$$

в) Відображення $f: A \to B$ *називається* ***сюр'єктивним або сюр'єкцією*** *(або* ***відображенням на множину*** *В), якщо* $D(f) = A$ *та* $E(f) = B$*, тобто відображення задане на множині А, і прообраз кожної точки множини В містить хоч одну точку.*

г) Якщо відображення $f: A \to B$ *є одночасно і ін'єкцією, і сюр'єкцією, то кажуть, що воно –* ***бієктивне або є бієкцією****. Також в* *цьому випадку кажуть, що відображення* $f: A \to B$ *здійснює (задає)* ***взаємнооднозначну відповідність між множинами A і B.***

д) Якщо задано два відображення $f: A \to B$ *і* $g: B \to C$*, то відображення задане рівністю:* $h(x) = f(g(x)),\ x \in A,$ *називається* ***складним (складеним) або суперпозицією відображень f і g***, *і позначають*:

$$h := f \circ g.$$

Завдання для самостійної роботи 2.1: Довести, що суперпозиція бієкцій є бієкцією.

Означення 2.3. *Нехай* $f: A \to B$. *Відображення, яке кожній точці y* $\in$ *E(f) ставить у відповідність точки її прообразу, називається* ***оберненим відображенням*** *і позначається* f^{-1}*. Тобто ,*

$$(x , y) \in f \Leftrightarrow (y , x) \in f^{-1}.$$

Завдання для самостійної роботи 2.1: Довести, що обернене відображення бієкції є бієкцією.

Означення 2.4. *а) Однозначне відображення f множини дійсних чисел у множину дійсних чисел, тобто f :* $R \to R$*, називають, як правило,* ***функцією****.*

б) Якщо $A \subset R$, $B \subset R$ *і функція* $f: A \to B$ *є бієкцією, то обернене відображення* $f^{-1}: B \to A$ *називають* ***оберненою функцією****.*

в) Нехай функція f задана на множині $A \subset R$ *і множина* A_0 *є підмножиною множини A, тобто* $A_0 \subset A$ *.Тоді функція означена на підмножині* A_0 *за тим самим правилом, що і функція f, називається звуженням функції f на множину* A_0*, і позначається* $f\,|_{A_0}$ *.Тобто,*

$$(x,y) \in f|_{A_0} \overset{def}{\Leftrightarrow} (x,y) \in f,\, x \in A_0 \,.$$

Приклад 2.2. Розглянемо відображення $f : x \to x^2$, $x \in R$. Відображення ***f*** є однозначним і означене на множині всіх дійсних чисел, яку відображає на множину $R_+ = [0, +\infty)$ невід'ємних дійсних чисел, тобто ***D(f) = R, E(f)=*** R_+**.** Отже, відображення ***f*** є сюр'єкцією множини ***R*** на множину R_+**.**

Обернене відображення задається формулою f^{-1}***: y*** → $\pm\sqrt{y}$ ***, y*** ∈ R_+**.** Отже, обернене відображення f^{-1} не є однозначним , а тому не є оберненою функцією.

Якщо ж звузити відображення ***f*** на множину R_+, тобто розглянути функцію $g = f|_{R_+}$ то відображення ***g:*** $R_+ \to R_+$ буде бієкцією і, отже, обернене відображення f^{-1} буде оберненою функцією, яка буде задаватись за правилом : g^{-1}***: y*** → $\sqrt{y}$***, y*** ∈ R_+**.**

При цьому, дуже часто аргумент оберненої функції теж позначають як ***x***. Тобто, $g(x) = x^2, x \in R_+$**,** і $g^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \in R_+$ **.**

Завдання для самостійної роботи 2.2: Довести, що для будь-якої пари взаємно обернених функцій виконуються тотожності

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in D(f),$$
$$f(f^{-1}(x)) = x,\ x \in E(f).$$

Зауваження 2.1. *З означення відображення випливає, що два відображення f і g* ***співпадають****, тобто є однаковими, або, інакше кажучи,* ***є рівними****, якщо вони мають однакові області визначення, тобто D(f) = D(g) = D, і для кожного елемента x ∈ D повні образи f({x}) і g({x}) співпадають. Відповідно, дві функції f і g є рівними, якщо*

$$D(f) = D(g) = D, \quad \forall\ x \in D \ \ g(x) = f(x).$$

Означення основних числових множин. Натуральний ряд чисел. Аксіоми Пеано

Є різні методи означення натурального ряду чисел. Один із них – ***конструктивний***. Початок конструктивного означення ми заклали у означеннях одноелементної та двоелементної множин. Ці означення можна було продовжити, ввівши поняття триелементної, чотириелементної множини, тощо. Легко помітити, що між будь-якими одноелементними множинами можна влаштувати бієктивне відображення. Тому є сенс поставити у відповідність всім одноелементним множинам число „один" і позначити його 1, яке ми будемо називати кількістю елементів одноелементної множини. Аналогічно, двоелементні множини теж бієктивно відображаються одна на одну, і всім двоелементним множинам поставимо у відповідність число „два", і позначимо його 2, триелементним – три (3) і т.д. Таким чином, кожне наступне число будується після означення попереднього, і кожному такому числу, крім одиниці, передує попереднє число. До того ж, якщо до будь-якої n-елементної множини приєднати довільну одноелементну множину, то отримаємо множину, число елементів якої описується числом, що слідує за числом n. Тому його можна позначити як число n+1, і таким чином вводиться операція додавання на множині, яка ***називається натуральним рядом чисел.***

Детальне описання конструктивної побудови натурального ряду чисел та арифметичних операцій можна знайти, наприклад, в підручнику Л.Д. Кудрявцева([7], ст.27-30).

Інший метод означення натурального ряду – ***аксіоматичний***. Він полягає у тому, що фіксують основні властивості натурального ряду, які однозначно його визначають. Ці властивості називають аксіомами. Це означає, що якщо дві множини задовольняють всім аксіомам натурального ряду, то між ними можна утворити бієкцію, причому так, що всі арифметичні операції натурального ряду чисел збережуться. Тобто , якщо елементам n_1 і k_1 множини N_1 відповідають елементи n_2 і k_2 множини N_2, то елементу $(n_1+k_1)\in N_1$ буде відповідати елемент (n_2 + k_2)$\in$ N_2. Наведемо ***аксіоматичне означення натурального ряду чисел.***

Означення 2.5 (*Пеано*). ***Натуральним рядом чисел*** *будемо називати множину N, яка задовольняє наступним аксіомам:*

1. *Кожному елементу* $n \in N$ *поставлено у відповідність рівно один елемент цієї множини, який називається елементом, наступним за елементом* n *і позначається* $n+1$.
2. *Кожен елемент з множини N може слідувати тільки за одним елементом* $n \in N$.
3. *Існує тільки один елемент множини N , що позначається символом 1, який не слідує за жодним елементом.*
4. *Якщо множина* $M \subset N$ *така, що* $1 \in M$, *а із включення* $n \in N$ *випливає*

$(n+1)\in M$ *, то* $M = N$.

Остання аксіома називається ***аксіомою індукції.***

Аксіому індукції можна використовувати для доведення істинності на множині натуральних чисел різноманітних тверджень, сформульованих відносно натуральних чисел. Відповідний метод називається методом математичної індукції, і його суть полягає в доведенні того факту, що множина істинності (справджування) відповідного твердження задовольняє умовам аксіоми індукції. Сформулюємо точно дане твердження.

Теорема 2.1 (***про метод математичної індукції*****).***Нехай твердження P(n) відносно елементів натурального ряду чисел задовольняє умовам:*

1) Твердження P виконується для числа $1 \in N$, тобто, твердження P(1) – істинне.

2) Якщо твердження P істинне для деякого довільно вибраного натурального числа $n \in N$, то воно істинне і для наступного натурального числа $(n+1) \in N$, тобто,

$$P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1).$$

Тоді твердження P(n) справджується на всій множині натуральних чисел.

Зауваження 2.2. *Якщо у* ***теоремі 2.1*** *умову 1) замінити на умову« 1) а): твердження P виконується для деякого фіксованого числа $n_0 \in N$» , то тоді твердження P(n) буде справджуватись для всіх натуральних чисел, які не менше числа n_0.*

Приклад 2.3.Доведемо відому ***нерівність Я. Бернуллі***, яка полягає в тому, що для довільних дійсних чисел $x > -1$ і натуральних чисел $n \in N$ виконується нерівність

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

в якій рівність має місце тоді і тільки тоді, коли n = 1 або $x = 0$.

Доведення: Застосуємо метод математичної індукції.

а) Якщо n = 1 або $x = 0$, то рівність є очевидною.

б) Нехай n = 2 і $x > -1$, $x \neq 0$, тоді $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$, так як число x^2 додатне.

в) Припустимо, що строга нерівність виконується для довільного фіксованого натурального числа $n \geq 2$, і покажемо, що тоді нерівність буде справджуватись для наступного натурального числа n+1.

Дійсно, маємо $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$.Оскільки за припущенням для числа n$\in$N нерівність $(1+x)^n > 1+nx$ виконана, то

$$(1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2.$$

Відкинувши в правій частині останньої нерівності додатне число nx^2, отримаємо наслідок:

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x.$$

Отже, твердження, яке полягає в тому, що для всіх дійсних чисел, більших числа -1 і відмінних від нуля та всіх натуральних, не менших за 2, виконується строга нерівність $(1+x)^n > 1+nx$, задовольняє умовам теореми 2.1, починаючи з числа n = 2. Тому за теоремою це твердження справджується на всій множині натуральних чисел більших за одиницю. Доведення завершено.

Легко бачити, що натуральний ряд чисел є замкненою множиною відносно операцій додавання та множення. Це означає, що результат цих операцій теж є натуральне число, тобто завжди є елементом множини натуральних чисел. Але натуральний ряд чисел не є множиною, замкненою відносно операцій віднімання та ділення. Для того, щоб для довільних елементів числової множини можна було виконати операцію віднімання, потрібно натуральний ряд чисел розширити до множини цілих чисел Z, яка складається з елементів:

$$Z := \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\},$$

де число 0 – це такий елемент множини, що $\forall$ n$\in$N n+0 = n, а „-n" – це таке число, що n + (-n) = 0.

Аналогічно, щоб замкнути множину цілих чисел відносно операції ділення, потрібно її розширити до множини раціональних чисел:

$$Q:=\{\frac{k}{n} \mid n\in N, k\in Z\},$$

на якій відповідним чином розповсюджуються всі арифметичні операції. Але найпростіше алгебраїчне рівняння $x^2=a,\ a\geq 0,$ на множині раціональних чисел може не мати розв'язку. Для того, щоб останнє рівняння завжди мало розв'язок при невід'ємній правій частині, потрібно розширити множину раціональних чисел Q до множини дійсних чисел. Дамо ***аксіоматичне означення множини дійсних чисел.***

Означення 2.6. *Множину R, що складається більше ніж з одного елемента, будемо називати* ***множиною дійсних чисел****, якщо будь-якій парі її елементів x і y поставлено єдиним чином у відповідність числа x + y та xy цієї множини, які називаються сумою та добутком чисел x і y, а сама відповідність – операціями додавання та множення дійсних чисел. Причому, операції додавання і множення мають наступні властивості (задовольняють аксіомам):*

1. ***Комутативність (або переставний закон)*** *операцій додавання і множення:*

$$\forall x,y\in R:\quad x+y=y+x,\quad xy=yx\ .$$

2. ***Асоціативність (або сполучний закон)*** *операцій додавання і множення:*

$$\forall\ x,y,z\in R\quad x+(y+z)=(x+y)+z,\ \ x(yz)=(xy)z\ .$$

3. ***Існування нерухомих елементів відносно додавання і множення:***

$$\exists\, 0\in R:\ \forall x\in R\ \ x+0=x\ \ ,\ \ \exists 1\in R:\ \forall x\in R\ \ 1\cdot x=x\ \ .$$

4. ***Існування оберненого елемента відносно операції множення і протилежного елемента відносно операції додавання:***

$$\forall\, x \neq 0,\ x \in R \qquad \exists x^{-1} \in R: \quad x \cdot x^{-1} = 1\ ,$$

$$\forall x \in R \qquad \exists\, (-x) \in R: \quad x + (-x) = 0 \cdot$$

5. ***Дистрибутивність (розподільний закон)*** *множення відносно додавання:*

$$\forall\, x, y, z \in R \qquad x(y+z) = xy + yz\ \ .$$

6. ***Упорядкованість множини дійсних чисел:***

$\forall\, x \in R$ *або x > 0 , або x < 0, або x = 0.*

Причому, x>0, y>0 ⇒ x + y >0, xy>0.

7. ***Властивість неперервності множини R:***

якщо A і B такі непусті підмножини множини R, що для довільних елементів $x \in A$ *і* $y \in B$ *має місце нерівність* $x \le y$*, то знайдеться число* $p \in R$ *таке , що для всіх чисел* $x \in A$ *і* $y \in B$ *виконуються нерівності:* $x \le p \le y$.

Зауваження 2.2. *Можна довести, що з аксіом 1-7 випливають всі інші властивості дійсних чисел* (див. Кудрявцев Л.Д., [7], ст.40-57).

Завдання для самостійної роботи 2.3: Довести єдиність існування нерухомих елементів 0 і 1, а також протилежного $(-x)$ та оберненого x^{-1} для кожного фіксованого $x \in R$.

Обмежені та необмежені числові множини. Точна верхня і нижня межа множини

Означення 2.7. 1)*Числова множина A ⊂ R називається* ***обмеженою зверху****, якщо знайдеться таке число M∈R, що для всіх елементів x множини A виконується нерівність* $x \le M$. *Тобто,*

$$A \subset R \; - обмежена\ зверху \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists M \in R:\ \forall x \in A \quad x \le M \ .$$

При цьому число М називається ***верхньою межею*** *числової множини А. Якщо верхня межа М є елементом множини А, то число М називають* ***максимальним елементом*** *множини А і позначають:*

$$M := \max A = \max_{x \in A} x = \max\{x | \ x \in A\} \ .$$

2)Числова множина А $\subset$ R називається ***обмеженою знизу****, якщо знайдеться таке число $m \in R$, що для всіх елементів х множини А виконується нерівність $x \ge m$. Тобто,*

$$A \subset R \; - обмежена\ знизу \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists m \in R:\ \forall x \in A \quad x \ge m \ .$$

При цьому число $m \in R$ називається ***нижньою межею*** *числової множини А. Якщо ж нижня межа є елементом множини А, то число m називають* ***мінімальним елементом*** *цієї множини і позначають:*

$$m := \min A = \min_{x \in A} x = \min\{x | \ x \in A\} \ .$$

3) Множина А $\subset$ R називається ***обмеженою****, якщо вона обмежена зверху і знизу.*

Завдання для самостійної роботи 2.4:

1) Довести, що множина А ⊂ R обмежена тоді і тільки тоді, коли

$$\exists M \ge 0:\ \forall x \in A \quad |x| \le M \ .$$

2) Сформулювати словесно та записати мовою символів твердження:

а)”Множина А – необмежена знизу”;

б) „Множина А – необмежена зверху”;

в) „ Множина А – необмежена”;

г) „ Множина А не має мінімального елемента”;

д) „Множина А не має максимального елемента”.

3) Довести, що:

а) Множина N обмежена знизу, але необмежена зверху;

б) Множина А = $\{\frac{(-1)^n n}{n+1} \mid n \in N\}$ є обмеженою. Знайти її всі верхні і нижні межі;

в) Множина Z – необмежена.

Означення 2.8. 1) *Найменшу верхню межу обмеженої зверху числової множини А, будемо називати* ***точною верхньою межею*** *множини А і позначати:* $\sup A$ *(читається „сюпремум" від лат. supremum - найбільший) . Якщо ж множина А* $\subset$ *R необмежена зверху, то покладемо, що* $\sup A = +\infty$.

2)Найбільшу нижню межу обмеженої знизу числової множини А, будемо називати ***точною нижньою межею*** *множини А і позначати:* $\inf A$ *(читається „інфімум" від лат. infimum – найменший). Якщо ж множина А* $\subset$ *R необмежена знизу, то покладемо, що* $\inf A = -\infty$.

Зауваження 2.3. *За* **означеннями 2.7 та 2.8** *випливає, що якщо числова множина А має максимальний елемент, то* $\sup A = \max A$. *Аналогічно, якщо множина А має мінімальний елемент, то*

$\inf A = \min A$.

Завдання для самостійної роботи 2.5: Нехай А = $\{\frac{(-2)^n}{2^n+1} \mid n \in N\}$, знайти infA та supA.

Теорема 2.2 ***(про існування і скінченність точних меж числової множини).***

1) Нехай непуста числова множина А обмежена зверху, тоді її верхня межа існує і є скінченним дійсним числом. Тобто,

$$A \subset R,\quad A \neq \varnothing,\quad A - \textit{обмежена зверху} \Rightarrow \quad \exists \quad \sup A \in R.$$

2) Нехай непуста числова множина А обмежена знизу, тоді її точна нижня межа існує і є скінченним дійсним числом. Тобто,

$$A \subset R,\quad A \neq \varnothing,\quad A - \textit{обмежена знизу} \Rightarrow \exists \ \inf A \in R.$$

Доведення. Нехай множина M^* складається з усіх верхніх меж числової множини А, тобто, $M^* := \{M \in R \mid \forall\ x \in A,\ x \leq M\}$. За умовою теореми множина А – обмежена зверху, а , отже, M^* містить хоч одну верхню межу множини М, тобто, $M^* \neq \varnothing$.

З іншого боку, для всіх елементів множини А і будь-якого елементу множини M^* виконується нерівність: $x \leq M$. Тому, за аксіомою неперервності множини дійсних чисел R (**означення 2.6**, аксіома 7) знайдеться таке число $z \in R$, що для всіх елементів множини А і всіх елементів М множини M^* мають місце нерівності: $x \leq z \leq M$, за якими слідує, що, по-перше, число z є верхньою межею множини А і, по-друге, воно не перевищує будь-яку іншу верхню межу. Отже, z = sup A. Перше твердження доведене.

Завдання для самостійної роботи 2.6: Другу частину теореми довести самостійно.

Теорема 2.3 ***(про характеризацію точних меж множин).***

1) Число $a^* \in R$ є точною верхньою межею числової множини А тоді і тільки тоді, коли число a^* є верхньою межею, і для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий елемент множини А, який більший числа a^* - ε. Тобто,

$$\sup\ A = a^* \in R \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in A: x > a^* - \varepsilon, \quad \forall y \in A: y \leq a^*) .$$

2) Число $a_* \in R$ *є точною нижньою межею числової множини А тоді і тільки тоді, коли* a_* *є нижньою межею і для довільного додатного числа* ε *>0 знайдеться такий елемент множини А, який менший числа* $a_* + \varepsilon$. *Тобто,*

$$\inf A = a_* \in R \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A: \; x < a_* + \varepsilon, \;\; \forall y \in A: \; y \geq a_*) \; .$$

Доведення. Доведемо перше твердження теореми.

Необхідність. Доведемо від супротивного. Припустимо, що число a^* - точна верхня межа, а значить, і одна з верхніх меж множини А ⊂ R, але для деякого числа ε>0 не знайдеться жодного елемента множини А, більшого за число a^* - ε. Але тоді число a^* - ε є верхньою межею множини А, причому меншою за точну верхню межу a^*. Чого не може бути за означенням точної верхньої межі числової множини А. Отже, припущення не вірне.

Достатність. Нехай число a^* є верхньою межею множини А, і для довільного додатного числа ε>0 знайдеться елемент множини А більший за число a^* - ε. Тоді жодне число $a^*{}_0$, менше за число a^* не може бути верхньою межею множини А. Це тому, що для числа $\varepsilon = \frac{1}{2}(a^* - a_0^*) > 0$ існує елемент ***x*** ∈ А, який більший за число

$$a^* - \varepsilon = a^* - \frac{1}{2}(a^* - a_0^*) = \frac{a^*_0}{2} + \frac{a^*}{2} > a^*_0, \quad \text{тобто} \quad x > a^*_0.$$

Отже, число a^* є найменшою верхньою межею, тобто, a^* = sup A, що і треба було довести.

***Завдання для самостійної роботи* 2.7:** Довести друге твердження теореми.

Скінченні та нескінченні множини. Порівняння кількості елементів множин

Означення 2.9. *Будемо говорити, що* ***множина А складається з (має) n елементів****,* $n \in N$*, і будемо позначати* $|A| = n$*, якщо можна влаштувати бієкцію між множинами А та {1,2,...n}, при цьому покладемо, що* $|\varnothing| := 0$*. Якщо знайдеться таке натуральне число* $n \in N$*, що* $|A| = n$*, то множину А будемо називати* ***скінченною****. У противному разі множину А будемо називати* ***нескінченною.***

Означення 2.10. *Будемо називати множини А і В* ***рівнопотужними*** *або такими, що мають однакову (рівну) потужність, якщо можна утворити бієкцію між множинами А і В. При цьому будемо позначати А~В.*

Зауваження 2.4. *За означенням рівнопотужності множин всі скінченні множини, які мають однакову кількість елементів, є рівнопотужними і навпаки, якщо скінченні множини є рівнопотужними, то вони мають однакову кількість елементів.*

Означення 2.11. *Множина А називається* ***зліченною****, якщо вона рівнопотужна натуральному ряду чисел N. Скінченна або зліченна множина називається* ***не більш ніж зліченною.*** *Множина, рівнопотужна відрізку [0,1] ⊂ R називається множиною* ***потужності континіум.***

Завдання для самостійної роботи 2.8**:** Довести, що:

1) Множина А скінченна тоді і тільки тоді, коли не існує такої її підмножини $B \subset A$, що $B \neq A$, і $B \sim A$. Навпаки, множина А нескінченна тоді і тільки тоді, коли знайдеться така її підмножина $B \subset A$, що $B \neq A$, і $B \sim A$.

2) Нескінченна підмножина зліченної множини є зліченною.

3) Нескінченна множина містить зліченну підмножину.

4) Якщо існує ін’єкція ***f:*** $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{N}$, то множина ***A*** не більш ніж зліченна;

5) Якщо ***A*** – нескінченна множина і $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$, то $A \cup \{x\}) \sim \boldsymbol{A}$.

Теорема 2.4 (*про зліченність об’єднання*). *Об’єднання зліченної сукупності зліченних множин є зліченною множиною. Тобто,*

$$\forall n \in N: \ A_n \sim N \ \Rightarrow \ \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \sim N \ .$$

Доведення. Якщо деяка множина рівнопотужна натуральному ряду чисел, то це означає, що її елементи можна занумерувати, тобто приписати кожному елементу $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ єдиним чином індекс $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, і позначити це як x_n. Занумеруємо елементи кожної множини A_n таким чином:

$$A_n = \{ x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, ... \} = \{ x_{nk} \mid k \in N \}, \quad n \in N \ .$$

Тоді об’єднання $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ буде складатись з елементів

$x_{nk}, \ k \in N, \ n \in N$. Покажемо, що множину

$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{ x_{nk} \mid k \in N, n \in N \}$ теж можна занумерувати.

Нумерацію можна здійснити за схемою:

$$\begin{tikzcd}
x_{11} \arrow[r] & x_{12} \arrow[dl] & x_{13} \arrow[r] & x_{41} \arrow[dl] \ldots \\
x_{21} & x_{22} \arrow[ur] & x_{23} \arrow[dl] & x_{24} \ldots \\
x_{31} \arrow[ur] & x_{32} \arrow[dl] & x_{33} & x_{34} \ldots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \ldots
\end{tikzcd}$$

………………………………., тощо.

Тобто $x_{11} := x_1$; $x_{12} := x_2$; $x_{21} := x_3$; $x_{31} := x_4,...$, і т.д.

Тоді, A = $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$, тобто, A – зліченна множина. Що і треба було довести.

***Завдання для самостійної роботи 2.9*:**

Довести, що:

1) N ~ Z ~ Q;

2) множина всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами є зліченною;

3) [0;1] ~ (0;1) ~ R ~ R^2;

4) ***Множина всіх підмножин*** натурального ряду чисел, яку позначають 2^N, не є зліченною;

5) 2^N ~ (0;1] .

Лекція № 3

Послідовності та їх границі

Означення 3.1. *Функцію $f : N \to A$, означену на множині натуральних чисел N у множину A довільної природи, буде називатись* ***послідовністю****. Значення функції f на натуральному числі $n \in N$ будемо позначати x_n. Якщо множина значень послідовності f є підмножиною множини дійсних чисел R, то послідовність називається числовою.*

Отже, щоб задати послідовність f, досить вказати множину всіх її значень $\{x_n | n \in N\}$ або формулу обчислення її загального елемента (члена) $x_n = f(n)$, $n \in N$. Також послідовностями називають функції, означені на множині цілих чисел Z або на нескінченній її підмножині, наприклад, на $Z_+ = N \cup \{0\}$.

Надалі будемо розглядати тільки числові послідовності, не обумовлюючи це окремо!!!

Означення 3.2. *Послідовність* $X = \left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\}$ *називається* ***обмеженою****, чи відповідно* ***обмеженою зверху***, або ***знизу****, якщо такою є числова множина* $\left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\}$.

Тобто,

$$X = \left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\} \text{ - обмежена } \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, c \geq 0 : \forall n \in N \quad |x_n| \leq c .$$

Означення 3.3. *Послідовність* $X = \left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\}$ *називається:*

1) ***строго зростаючою*** *і позначається* $X \uparrow_s$ *на N або* $\left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\} \uparrow_s$, *якщо кожен наступний елемент послідовності* x_{n+1} *більший попереднього елемента* x_n, *тобто:*

$$\left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\} \uparrow_s \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\ n \in N \;\; x_{n+1} > x_n \qquad (3.1);$$

2) ***нестрого зростаючою або не спадною***, *і позначається* $\left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\} \uparrow$, *якщо нерівність (3.1) не строга ;*

3) ***строго спадною***, *і позначається* $\left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\} \downarrow_s$ *, якщо*

$$\forall n \in N \quad x_{n+1} < x_n \qquad (3.2);$$

4) ***нестрого спадною, або не зростаючою***, *і позначається* $\left\{ x_n \,\middle|\, n \in N \right\} \downarrow$, *якщо нерівність (3.2) не строга;*

5) монотонною, *якщо послідовність строго чи не строго зростає або спадає.*

Приклад 3.1. Легко бачити, що послідовність $\left\{ x_n = \frac{1}{n} \mid n \in N \right\}$ є строго спадною і обмеженою послідовністю.

Дійсно, для довільного $n \in N$ $0 < x_n \le 1$, отже, послідовність обмежена; а також,

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n, \qquad n \in N,$$

тому послідовність строго спадає.

Означення 3.4. *Будемо називати множину* $\overline{R}$ *-* ***розширеною множиною дійсних чисел****, якщо вона складається з усіх дійсних чисел та двох додаткових чисел* $+\infty$ *та* $-\infty$ *(читається плюс нескінченність та мінус нескінченність) для яких арифметичні операції виконуються за такими правилами:*

1) $\forall x \in R$ $x + (+\infty) = (+\infty) + x = x - (-\infty) = +\infty$;

$$(-\infty) + x = x + (-\infty) = x - (+\infty) = (-\infty) - x = -\infty;$$

2) $\forall x > 0$ $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty, \quad x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$;

$\forall x < 0$ $x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty, x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$;

3) $\forall x \ne 0$ $\frac{+\infty}{x} = (+\infty) \cdot \frac{1}{x}; \qquad \frac{-\infty}{x} = (-\infty) \cdot \frac{1}{x}$;

4) $$(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

5) $$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Означення 3.5. *Будемо називати* ε***-околом*** *точки* $a \in \overline{R}$

а) множину $B(\varepsilon,a):=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, *якщо* $a\neq\pm\infty$,

б) множини $B(\varepsilon,+\infty):=(\frac{1}{\varepsilon};+\infty)$, $B(\varepsilon,-\infty):=(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon})$, *якщо* $a=\pm\infty$ *відповідно.*

Означення 3.6. *Будемо говорити, що число* $a\in\overline{R}$ *називається* ***границею послідовності*** $\left\{x_n \mid n\in N\right\}$, *коли* n *прямує до плюс нескінченності, і позначати*

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a \qquad \text{або} \qquad x_n\to a,\ n\to+\infty,$$

якщо для довільного додатного числа $\varepsilon>0$ *знайдеться таке натуральне число* $n_0\in N$, *що як тільки число* n *потрапляє у* $\frac{1}{n_0}$*-окіл точки* $+\infty$, *то елемент послідовності* x_n *потрапляє у* ε*–окіл точки а, тобто:*

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N:\ (\ n\in B(\frac{1}{n_0},+\infty)\ \Rightarrow\ x_n\in B(\varepsilon,a)\ )\quad (3.3),$$

або, інакше кажучи,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N:\ (\ n>n_0\ \Rightarrow\ x_n\in B(\varepsilon,a)\ ).$$

При цьому, якщо границя послідовності є скінченним дійсним числом, то послідовність називається ***збіжною,*** *у противному випадку –* ***розбіжною***.

Зауваження 3.1. *Умову (3.3) можна розписати через нерівності, як у випадку скінченого значення* $a \in R$, *так і у випадку нескінченного значення* $a = \pm\infty$, *таким чином:*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in R \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in N : (n > n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon)$,

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \ \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in N : (n > n_0 \ \Rightarrow \ x_n > \frac{1}{\varepsilon})$,

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \ \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ x_n < -\frac{1}{\varepsilon})$.

Означення 3.7. *Будемо говорити, що (коли* $n \to +\infty$*) послідовність* $\{ x_n \mid n \in N \}$ *є* ***нескінченно великою*** *, або що її* ***границя дорівнює нескінченності****, і позначати* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, *якщо* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$ *, тобто,*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}) \qquad (3.4) .$$

Зауваження 3.2. *1) Якщо позначити* $B(\varepsilon,\infty) := B(\varepsilon,+\infty) \cup B(\varepsilon,-\infty)$, *то умова (3.4) співпаде з умовою (3.3).*

2) Якщо $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *або* $-\infty$*, то послідовність* $\{x_n \mid n \in N \}$ *є нескінченно великою .*

Завдання для самостійної роботи 3.1 : Записати символікою у термінах нерівностей твердження:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq a \in R$;

2) послідовність $\{x_n \mid n \in N \}$ розбіжна;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq -\infty$;

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq \infty$;

5) послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ необмежена;

6) послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ не є строго зростаючою.

Завдання для самостійної роботи 3.2 : Довести, що

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \in \overline{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} x_{n+k} = a \in \overline{R} \quad ,$$

де $k \in N$ - будь яке фіксоване натуральне число.

Деякі властивості збіжних послідовностей

Теорема 3.1 (про єдиність існування границі). *Якщо існує скінченна границя послідовності* $\{ x_n \}$*, то ця границя єдина, тобто:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \in R \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b \in R \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що існують границі $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \in R$ та $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b \in R$, і при цьому $a \neq b$. Тоді за означенням границі числової послідовності для числа $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b| > 0$ знайдуться такі числа $n_1 \in N$ і $n_2 \in N$ такі, що

$$\begin{cases} n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon \\ n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |x_n - b| < \varepsilon \end{cases}.$$

Покладемо $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Отже, маємо:

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a-b| = |a - x_n + x_n - b| =$$

$$= |(x_n - b) - (x_n - a)| \le |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}.$$

Тобто, $|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$, що неможливо.

Таким чином, припущення неправильне. Отже, $a = b$.

Що і потрібно було довести.

***Зауваження 3.3**. Твердження теореми можна поширити і на випадок коли границя належить і розширеній множині дійсних чисел, тобто, коли* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \overline{R}$.

Це є наслідком того факту, що для довільних різних точок розширеної множини дійсних чисел можна вибрати $\varepsilon-$околи цих точок, які не будуть перетинатись. Дійсно, якщо ці точки a і b - скінчені числа, тобто, $a \in R,\ b \in R,$ то досить вибрати $\varepsilon-$околи радіуса $\varepsilon = \frac{1}{3}|a-b|$, тоді околи $B(\varepsilon, a)$ і $B(\varepsilon, b)$ не перетинаються. Околи $B(\varepsilon, +\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty),\ B(\varepsilon, -\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ не мають спільних точок за своєю побудовою. Якщо ж $a \in R$ і $b = \pm\infty$, то можна вибрати околи радіусів $\varepsilon_1 = |a|$ і $\varepsilon_2 = \frac{1}{3\varepsilon_1} = \frac{1}{3|a|}$, тоді околи $B(\varepsilon_1, a)$ і $B(\varepsilon_2, \pm\infty)$ теж не перетнуться.

Таким чином, якщо б послідовність мала дві різні границі з розширеної множини дійсних чисел, то можна б було вибрати таке натуральне число n_0, що всі члени послідовності з номером більшим за n_0 потрапляли б у $\varepsilon-$околи, що не перетинаються. Чого не може бути.

Теорема 3.2 ***(про обмеженість збіжної послідовності).***

Нехай послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ *є збіжною, тоді вона обмежена. Тобто,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in R \quad \Rightarrow \quad \exists c \geq 0: \ \forall n \in N \quad |x_n| \leq c \cdot$$

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ - збіжна, тобто $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in R$. Виберемо довільне додатне число $\varepsilon > 0$. Тоді за означенням границі послідовності, знайдеться таке число $n_0 \in N$, що для всіх натуральних чисел n більших за n_0 буде виконуватись нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \ \Rightarrow \ |x_n| < \max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}.$$

Покладемо $\qquad c := \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}.$

Тоді,

$$\forall n \in N : |x_n| \leq c,$$

що і потрібно було довести.

Зауваження 3.4. *Остання теорема свідчить про те, що необхідною умовою збіжності послідовності є її обмеженість.*

Приклад 3.2. Послідовність $\{x_n = c \mid n \in N\}$, де с – деяке дійсне число, будемо називати ***постійною або константою***. Доведемо, що границею константи є константа, тобто,

$$\lim_{n\to+\infty} c = c, \qquad (3.4a).$$

Дійсно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 := 1: \ (n > 1 \ \Rightarrow \ |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon),$$

що і потрібно було довести.

Теорема 3.3 ***(про збереження знаку нерівності).*** *Нехай збіжна послідовність* $\{x_n \mid n \in N\}$ *має границю* $a \in R$*, яка більша за число* $b \in R$*. Тоді, знайдеться такий номер послідовності* $n_0 \in N$*, що для номерів* n *більших за нього, елементи* x_n *більші за число* b*. Тобто,*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a > b \;\Rightarrow\; \exists\, n_0 \in N: \; (n > n_0 \;\Rightarrow\; x_n > b) \qquad (3.5).$$

Аналогічно,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a < c \;\Rightarrow\; \exists\, n_0 \in N: (n > n_0 \;\Rightarrow\; x_n < c) \qquad (3.6).$$

Доведення. Нехай при n, що прямує до плюс нескінченності, послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ збігається до числа a, яке більше числа b, тобто, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a > b$. Тоді, за означенням границі послідовності для числа $\varepsilon := \dfrac{a-b}{2} > 0$ знайдеться такий номер $n_0 \in N$, що для всіх номерів $n \in N$ більших за n_0 має місце нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

з якої отримаємо

$$x_n > a - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x_n > a - \frac{a-b}{2} \;\Leftrightarrow\; x_n > \frac{a+b}{2} > \frac{b+b}{2} = b\cdot$$

Тобто, $\quad n > n_0 \;\Rightarrow\; x_n > b\cdot$

Перше твердження теореми доведено. Аналогічно доводиться друге твердження теореми.

Наслідок 3.1 (про збереження знаку елементів послідовності).

Якщо послідовність збігається до додатного (від'ємного) числа, то знайдеться такий номер елементів послідовності, після якого всі елементи послідовності теж додатні (від'ємні) . Тобто

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n_0 \in N: \ (n > n_0 \Rightarrow x_n > 0) \qquad (3.7)$$

Аналогічно,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, n_0 \in N: \ (n > n_0 \Rightarrow x_n < 0) \qquad (3.8)\,.$$

Доведення. Для доведення наслідку досить в **теоремі 3.3** покласти $b = 0$.

Теорема 3.4 ***(про перехід до границі у нерівності).*** *Нехай послідовність* $\{x_n | n \in N\}$ *збігається до числа* $a \in R$ *та послідовність* $\{\, y_n | n \in N \,\}$ *збігається до числа* $b \in R$, *при цьому, всі елементи першої послідовності не перевищують відповідних елементів другої послідовності. Тоді і границя* a *першої послідовності не перевищує границі* b *другої послідовності. Тобто,*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b \\ \forall n \in N: \quad x_n \le y_n \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a \le b.$$

Аналогічно, якщо всі елементи першої збіжної послідовності не менші за відповідні елементи другої збіжної послідовності, то і границя першої послідовності не менша за границю другої послідовності.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, і при цьому $\forall n \in N : x_n \le y_n$. Тоді, за попередньою теоремою для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдуться такі номери n_1 і n_2 елементів послідовності $\{x_n | n \in N\}$ і $\{\, y_n | n \in N \,\}$ відповідно, що

$$\forall n > n_1: \quad x_n > a - \varepsilon, \qquad \forall n > n_2: \quad y_n < b + \varepsilon.$$

Якщо покласти $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, то

$$n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} x_n \le y_n \\ x_n > a - \varepsilon \\ y_n < b + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon \Leftrightarrow a - b < 2\varepsilon \qquad (3.9).$$

Так як число $\varepsilon > 0$ довільне, то з нерівності (3.9) слідує, що число $a - b$ не додатне, тобто, $a \le b$.

Аналогічно доводиться друга частина теореми.

Зауваження 3.5. *Якщо між відповідними елементами першої та другої збіжних послідовностей виконується строга нерівність, то нерівність між їх границями може бути не строгою.*

Наприклад, якщо розглянути послідовності $\left\{x_n = \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in N\right\}$ і $\left\{y_n = \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in N\right\}$, то має місце строга нерівність $x_n > y_n,\ n \in N$. Але легко довести, що при цьому $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Теорема 3.5 (теорема про три границі послідовностей). *Нехай для всіх відповідних елементів трьох послідовностей виконуються нерівності*

$$x_n \le y_n \le z_n, \quad n \in N \qquad (3.10),$$

і нехай крайні послідовності нерівності $\{x_n | n \in N\}$ *та* $\{z_n | n \in N\}$ *збігаються до одного і того ж числа* $a \in \overline{R}$. *Тоді і послідовність* $\{y_n | n \in N\}$ *збіжна до цього ж числа* $a \in \overline{R}$.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n | n \in N\}$ та $\{z_n | n \in N\}$ збігаються до числа $a \in R$. Тоді за означенням границі для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдуться такі натуральні числа $n_1 \in N$ і $n_2 \in N$, що

$$\begin{cases} n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |x_n - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \end{cases} .$$

Звідки отримаємо, що для всіх натуральних чисел n більших за n_0 виконується нерівності

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n < a + \varepsilon ,$$

де $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Тому

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in N : (n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon),$$

або

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N : \quad (n > n_0 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon).$$

Отже, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = a$, що і потрібно було довести.

Аналогічно доводиться твердження і у випадку коли $a = \pm\infty$.

Теорема 3.6 (про арифметичні дії над границями). *Нехай послідовності* $\{x_n | n \in N\}$ *і* $\{y_n | n \in N\}$*- збіжні, а саме:*

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \in R,\ \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b \in R$. *Тоді послідовності* $\{x_n \pm y_n | n \in N\}$, $\{x_n y_n | n \in N\}$, $\{c x_n | n \in N\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n} \middle| n \in N\right\}$ *(якщо* $b \ne 0$*) теж є збіжними, причому,*

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x_n + y_n) = a \pm b$, *б)* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = ab$,

в) $\lim\limits_{n\to+\infty}(cx_n) = ca$,

д) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, де a,b - дійсні числа. Тоді, за означенням границі для довільного додатного числа $a > 0$, знайдуться такі натуральні числа n_1 і n_2, що

$$n > n_1 \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon\ ,\ n > n_2 \Rightarrow \ |x_n - b| < \varepsilon .$$

Покладемо $n_0 := \max\{n_2, n_2\}$. Отримаємо, що

$n > n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ |(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |(x_n - a) + (y_n - b)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

де 2ε - довільне додатне число.

Отже,

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b .$$

Аналогічно доводимо, що

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = a - b .$$

Далі, розглянемо вираз :

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - bx_n + bx_n - ab| =$$

$$= |x_n(y_n - b) + b(x_n - a)| \ \le \ |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a| \qquad (3.11) .$$

За умовою теореми, послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ збігається, а значить, є обмеженою. Тобто, знайдеться число $c > 0$, таке, що $\forall n \in N \ \ |x_n| \le c$. Тому за нерівністю (3.11) маємо

$$n > n_0 \Rightarrow \ |x_n y_n - ab| \le |c|\varepsilon + |b|\varepsilon \ ,$$

де число $(|c| + |b|)\varepsilon$ - довільне додатне дійсне число, отже,

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n y_n) = ab.$$

Якщо покласти $\forall n \in N \quad b_n = c$, то з останньої рівності отримаємо, що

$$\lim_{n \to +\infty} (c\, x_n) = ca.$$

Наостанок розглянемо вираз :

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{y_n} + \frac{a}{y_n} - \frac{a}{b} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x_n - a)}{y_n} + a\left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right) \right| \le \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + |a| \frac{|y_n - b|}{|y_n|\,|b|} \qquad (3.12).$$

Так як, $b \ne 0$, то $|b| > 0$. Тому знайдеться таке натуральне число n_3, що

$$n > n_3 \quad \Rightarrow \ (\ |y_n| > \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \ ) \qquad (3.13).$$

Покладемо $n^* := \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Таким чином, за нерівностями (3.12), (3.13) маємо

$$n > n^* \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2\varepsilon}{|b|} + \frac{2|a|\varepsilon}{b^2} = 2\varepsilon(\frac{|a|+|b|}{b^2}),$$

де $2\varepsilon \cdot \frac{|a|+|b|}{b^2}$ - довільне дійсне додатне число. Отже, за означенням границі

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.7 ***(про деякі класичні границі).***

1) Нехай число $\alpha > 0$*, тоді*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0 \qquad (3.14).$$

2) Нехай $|a| > 1$*, тоді для довільного* $\beta \in R$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\beta}}{a^{n}} = 0 \qquad (3.15).$$

3) Нехай $a > 1$*, тоді*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0 \qquad (3.16).$$

4) $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \qquad (3.17).$$

Доведення. 1) Щоб довести рівність (3.14.) розглянемо спочатку більш просту границю. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ - довільне додатне дійсне число, а натуральне число $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, де $[x]$ означає цілу частину числа x. Згадаємо, що за означенням цілої частини дійсного числа виконуються нерівності

$$[x] \le x < [x] + 1 \qquad (3.18).$$

Тоді, якщо $n > n_0$, то $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. З останньої нерівності та нерівності (3.18) маємо $n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Отже, за означенням границі послідовності доведено, що

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad (3.19).$$

Але для довільного фіксованого числа $k \in N$ та для всіх натуральних $n \in N$ мають місце нерівності

$$0 < \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}.$$

Так як границі лівого і правого виразів у останній нерівності рівні нулеві, то за теоремою про три послідовності (**теорема 3.5**) середня послідовність $\left\{ \frac{1}{n^k} \mid n \in N \right\}$ збігається до нуля, тобто,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \qquad k \in N \qquad (3.20).$$

Тепер доведемо, що

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0, \quad k \in N \qquad (3.21).$$

Дійсно, якщо покласти $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon^k}\right] + 1$, то з нерівності $n > n_0$ маємо

$$n > \left[\frac{1}{\varepsilon^k}\right] + 1 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon^k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[k]{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt[k]{n}} - 0\right| < \varepsilon \cdot$$

Отже, для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке натуральне число n_0, а саме $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon^k}\right] + 1$, що для всіх чисел $n \in N$ більших за n_0 буде виконуватись нерівність $\left|\frac{1}{\sqrt[k]{n}} - 0\right| < \varepsilon$. Тому за означенням границі

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0.$$

Так як для довільного додатного числа $\alpha > 0$ знайдуться такі два натуральні числа k_1 і k_2, що $\frac{1}{k_1} < \alpha < k_2$, то з нерівності

$$\frac{1}{n^{k_2}} < \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{k_1}}}$$

та за теоремою про три послідовності отримаємо, що

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0.$$

Перше твердження теореми доведено.

2) Доведемо спочатку рівність (3.15) для невід’ємних показників степеня $\beta \geq 0$.

Для довільного фіксованого числа $\beta \geq 0$ знайдеться натуральне число $k > \beta + 1$, при чому число k не менше двох. За нерівністю Бернуллі маємо:

$$\left|a^n\right| = (\left|a\right|^{\frac{n}{k}})^k = ((1 + (\left|a\right|^{\frac{1}{k}} - 1))^n)^k >$$

$$> (n(\left|a\right|^{\frac{1}{k}} - 1))^k = n^k (\left|a\right|^{\frac{1}{k}} - 1)^k \qquad (3.22).$$

Тому, для всіх $n \in N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right| \le \frac{n^{k-1}}{|a|^{n}} < \frac{n^{k-1}}{n^{k}(|a|^{\frac{1}{k}}-1)^{k}} = \frac{1}{(|a|^{\frac{1}{k}}-1)^{k}}\frac{1}{n} \quad .$$

Позначимо $c := (|a|^{\frac{1}{k}} - 1)^{-\kappa}$. Тоді $0 < \left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right| < \frac{c}{n},\ n \in N$.

Так як $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c}{n} = c\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, то за теоремою про три послідовності

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right| = 0 \cdot$$

Але,

$$-\left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right| \le \frac{n^{\beta}}{a^{n}} \le \left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right|,\ n \in N \cdot$$

Тому, застосувавши теорему про три послідовності ще раз, остаточно встановлюємо, що

$$\forall\beta \ge 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\beta}}{a^{n}} = 0 \cdot$$

Якщо ж показник степеня $\beta < 0$ є від’ємним, то маємо

$$0 < \left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right| < \frac{1}{n^{-\beta}},\ n \in N \cdot$$

Тому знову, за теоремою про три послідовності отримаємо, що

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^{\beta}}{a^{n}}\right| = 0, \qquad \beta < 0,$$

звідки слідує, що

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\beta}}{a^{n}} = 0,$$

як це ми показали вище. Отже, друге твердження теореми доведено.

3) Нехай $a > 1$. Тоді

$$\left|\frac{\log_a n}{n}-0\right|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \log_a n<\varepsilon n \;\Leftrightarrow\; n<a^{\varepsilon n} \Leftrightarrow \frac{n}{(a^{\varepsilon})^{n}}<1\cdot$$

Але за доведеним другим твердженням теореми (рівність 3.15) маємо

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(a^{\varepsilon})^{n}}=0<1\cdot$$

Тому, за теоремою про збереження знаку нерівності (**теорема 3.3**) знайдеться таке натуральне число $n_0\in N$, що для всіх натуральних чисел більших за n_0 справджується нерівність

$$\frac{n}{(a^{\varepsilon})^{n}}<1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{\log_a n}{n}-0\right|<\varepsilon \quad .$$

Отже, $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in N:\ (n>n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{\log_a n}{n}-0\right|<\varepsilon) \quad \cdot$

Таким чином,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n}=0\ ,$$

третє твердження теореми доведено.

4) Доведемо рівність (3.17). Спочатку зауважимо, що за нерівністю (3.22), при $k=2$ маємо

$$\left|a^{n}\right|>n^{2}(|a|^{\frac{1}{2}}-1)^{2},\;\; n\in N.$$

Звідси, поклавши $a:=\sqrt[n]{n},\ n>1$, отримаємо нерівність

$$n>n^{2}((\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}-1)^{2} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}-1<\frac{1}{\sqrt{n}} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\cdot$$

Таким чином, при $n>1$, мають місце нерівності

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Але, за теоремою про арифметичні операції над границями (**теорема 3.6**) та за рівністю (3.15) маємо

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}) = 1 + 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 1+0+0=1\cdot$$

Тому за теоремою про три границі випливає, що

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Що і треба було довести.

Означення 3.8. *Будемо називати послідовність* $\{x_n \mid n \in N\}$ ***нескінченно малою****, якщо вона збігається до числа нуль, тобто* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Теорема 3.8 ***(про зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями).*** *Послідовність* $\left\{x_n \middle| \, n \in N, x_n \neq 0\right\}$ *є нескінченно малою тоді і тільки тоді, коли послідовність* $\left\{\frac{1}{x_n} \mid n \in N\right\}$ *є нескінченно великою. І навпаки, послідовність* $\{y_n \mid n \in N\}$ *є нескінченно великою тоді і тільки тоді, коли послідовність* $\left\{\frac{1}{y_n} \mid n \in N\right\}$ *є нескінченно малою.*

Доведення. Доведемо спочатку перше твердження теореми. Нехай $\{x_n \mid n \in N\}$ є нескінченно малою послідовністю, тобто $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $n_0 \in N$, що для всіх чисел $n > n_0$ маємо $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$. Але остання нерівність рівносильна нерівності $\left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Звідки, за означенням границі слідує, що

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = \infty,$$

тобто $\{\frac{1}{x_n} \mid n \in N\}$ - нескінченно велика послідовність.

Отже, $$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \infty.$$

Таким чином, перше твердження теореми доведено.

Друге твердження теореми отримаємо, якщо позначити

$$x_n := \frac{1}{y_n}, \quad n \in N.$$

Зауваження 3.6. *Формально твердження* ***3.8*** *ми будемо записувати так:*

$$0 = \frac{1}{\infty} \quad \text{і} \quad \infty = \frac{1}{0} \qquad (3.19)$$

Зауваження 3.7. *Теорему про арифметичні операції над границями можна узагальнити на той випадок, коли границею послідовності є число з розширеної множини дійсних чисел $\overline{R}$. При цьому дії над числами $\pm\infty$ і числами $a \in R$ виконуються за правилами 1) - 5)* **означення 3.4.**

Завдання для самостійної роботи 3.3: Довести, що:

1) $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a \pm \infty = \pm\infty$$

2) $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

3) $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

4) $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

5) $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

6) $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty \; .$$

Завдання для самостійної роботи 3.4:

1) Довести, що *добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу послідовність є нескінченно малою послідовністю*.

2) Довести, що при $\alpha > 0$:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin f(n)}{n^{\alpha}} = 0$ і б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos f(n)}{n^{\alpha}} = 0$ (3.20), де $f(n)$ - довільна функція означена на множині натуральних чисел.

3) Довести, що при $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in R$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a^\beta n}{n^\alpha} = 0 \qquad (3.21).$$

4) Довести, що при $|a| > 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\beta \in R$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b^\beta n}{a^n} = 0 \qquad (3.22).$$

5) Довести, що при $a > 0$, :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (3.23).$$

Приклади обчислення границь числових послідовностей

Коли інженер-конструктор створює новий прилад, він передусім керується на ту елементну базу, на ті технології, на ті стандартні схеми, на ті загальні способи, мови і алгоритми програмування, тощо, які розроблені на той час, а не починає все з самого початку. От якщо нічого не виходить, якщо всього цього недостатньо для досягнення задуманого, тоді доводиться “копати глибше”…

Так і при обчисленні границь числових послідовностей перш за все потрібно намагатись звести їх до класичних границь з **теореми 3.7**, а технологія зведення полягає у використанні теореми про арифметичні операції над границями (**теорема 3.6**), теореми про три границі (**теорема 3.5**), та інших наведених теорем.

Приклад 3.3. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n - 3}{3n^2 + 1}$.

Розв’язання.

Дріб, що стоїть під знаком шуканої границі, містить у чисельнику і знаменнику тільки суми степеневих функцій натурального аргументу, тому природньо спробувати звести шукану границю до границь виду (3.14) зі списку стандартних границь.

Для цього розділимо цей дріб на степеневу функцію n^{α} з найбільшим показником степеня, який є у чисельнику або знаменнику дробу, тобто, на функцію n^{2}. Тоді маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-3}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-2n-3}{n^2}}{\frac{3n^2+1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}=\left|\begin{matrix}\textit{застосуємо}\\ \textit{теорему}\,3.6\end{matrix}\right|=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{застосуємо границі}\\ (3.14)\ \textit{зі теореми}\ 3.7\end{matrix}\right|=\frac{1-2\cdot0-3\cdot0}{3+0}=\frac{1}{3}\quad.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-3}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$.

Приклад 3.4. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3^n}{3^{n-2}+1}$.

Розв’язання.

По суті, **теорема 3.7** стверджує, що перші три послідовності (3.14), (3.15) і (3.16) є нескінченно малими. ***Завдання для самостійної роботи 3.4*** додає до класу нескінченно малих послідовностей ще й послідовності (3.20), (3.21) і (3.22). При розв’язанні попереднього прикладу були використані нескінченно малі послідовності тільки першого виду (3.14). У даному прикладі застосуємо нескінченно малі послідовності другого виду (3.15). Для цього розділимо дріб, що стоїть під знаком границі, на показникову функцію 3^n, яка зі усіх доданків чисельника і знаменника дробу “найшвидше” зростає. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3^n}{3^{n-2}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-3^n}{3^n}}{\frac{3^{n-2}+1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{3^n}-1}{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^n}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{застосуємо}\\ \textit{теорему}\, 3.6\end{matrix}\right|=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}-\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}}=\left|\begin{matrix}\textit{застосуємо границі}\\ (3.15)\ \textit{зі теореми}\ 3.7\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{0-1}{\frac{1}{3^2}+0}=-9\ .$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3^n}{3^{n-2}+1}=-\frac{1}{9}$.

Приклад 3.5. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})\right)$.

Розв’язання.

У попередніх ***прикладах 3.3. і 3.4*** під знаком границі ми мали відношення двох нескінченно великих послідовностей (доведіть це самостійно!), і звели шукані границі до границь класичних (стандартних) нескінченно малих послідовностей з **теореми 3.7**, розділивши чисельник і знаменник дробу на найбільший доданок із тих, що були у чисельнику чи знаменнику. Щоб застосувати це й же алгоритм і у даному випадку (людина завжди воліє йти вже прототорованим шляхом!), перетворимо у дріб добуток, що стоїть під знаком шуканої границі, помноживши і розділивши його на вираз $\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}$ (який є спряженим до різниці квадратів), а далі діємо як і раніше. Таким чином, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}\left(\ \sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\ \right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3}\left(\ \sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\ \right)\left(\ \sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\ \right)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3}\left(\ \sqrt{(n^3+1)^2}-\sqrt{(n^3-1)^2}\ \right)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3}\left(\ (n^3+1)-(n^3-1)\ \right)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3}\left(\ n^3+1-n^3+1\ \right)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}}}{\dfrac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3}}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{n^3+1}{n^3}} + \sqrt{\frac{n^3-1}{n^3}}} = \begin{vmatrix} \text{застосуємо} \\ \text{теорему } 3.6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} \quad .$$

Залишилося тільки знайти границі, які отримали у знаменнику останнього дробу (проблема в тому, що вони не є стандартними !!!).

Утворимо нерівність:

$$1 \le \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} \le 1+\frac{1}{n^3}, \qquad n \in N \ . \qquad (3.24)$$

За стандартними границями (3.4а) та (3.14) слідує, що вирази, які стоять у лівій і правій частинах нерівності (3.24), прямують до числа 1, тобто,

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} (\ 1+\frac{1}{n^3}\ ) = 1\ .$$

Тому, за ***теоремою про три послідовності*** **(теорема 3.5),** і середня частина нерівності прямує до одиниці. Тобто:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^3}} = 1\ . \qquad (3.25)$$

Аналогічно, за нерівністю

$$1-\frac{1}{n^3} \le \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}} \le 1\ , \qquad n \in N\ ,$$

виводимо, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}=1\ , \qquad (3.26)\ .$$

Отже, після довгих міркувань (не все так просто у житті як хотілось !) за границями (3.25) і (3.26) слідує:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\right)=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}=$$

$$=\frac{2}{1+1}=1\ .$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\right)\ =\ 1.$

Лекція № 4.

Збіжність монотонних послідовностей.

Теорема 4.1 (*про границю монотонної послідовності*). *Монотонна послідовність завжди має границю. Причому, якщо послідовність ще і обмежена, то вона збіжна.*

Доведення. Нехай, наприклад, деяка послідовність $\{x_n\mid n\in N\}\in R$ є неспадною. Якщо ця послідовність обмежена, то за **теоремою 2.8** точна верхня межа послідовності є скінченою, тобто

$$\sup\{x_n\mid n\in N\}:=a^*\in R\ .$$

Тоді за **теоремою 2.4** для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться хоч один такий елемент x_{n_0} послідовності , для якого має місце нерівність

$$a^* - \varepsilon < x_{n_0} \leq a^* \qquad (4.1).$$

Але послідовність $\{x_n \mid n \in N\}$ неспадна, тому для всіх чисел $n \in N$ більших за n_0 маємо $x_{n_0} \leq x_n$. Отже,

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a^* - \varepsilon < x_n < a^* \quad \Rightarrow \quad | x_n - a^* | < \varepsilon .$$

А це значить, що $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a^* \in R$.

Якщо ж неспадна послідовність необмежена, то ця послідовність необмежена саме зверху (так як неспадна послідовність обмежена знизу своїм першим елементом). Тому для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент x_{n_0} даної послідовності більший за число $\frac{1}{\varepsilon}$, тобто, $x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Але для чисел $n > n_0$ виконується нерівність $x_n \geq x_{n_0}$. Отже, для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $n_0 \in N$ таке, що

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \; x_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x_n \in B(\varepsilon, +\infty).$$

Таким чином, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty = \sup\{x_n \mid n \in N\}$.

Аналогічно доводиться, що у випадку не зростаючої послідовності існує границя

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in N\} ,$$

яка при умові обмеженості цієї послідовності, буде скінченим дійсним числом. Теорему доведено.

Приклад 4.1. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}$.

Розв’язання.

По-перше, легко помітити, що послідовність дійсних чисел

$\{x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}\ \mid n\in N\}$ є строго зростаючою.

Дійсно, якщо домножити і розділити різницю $x_{n+1}-x_n$ на вираз $x_{n+1}+x_n$, спряжений до різниці квадратів, то отримаємо:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n+1}+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}}\ .$$

При цьому ,

$$x_2-x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2})}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}>0\ .$$

Тому, за аксіомою індукції, нерівність $x_{n+1}-x_n>0$ виконується на всій множини натуральних чисел.

По-друге, послідовність $\{x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}\ \mid n\in N\}$

обмежена на N.

Дійсно, за аксіомою індукції та нерівностями

$$x_1=\sqrt{2}<2,$$

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+2} < 2 \ ,$$

………………………………..

$$x_{n+1} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{n}} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} < 2 \quad (\text{так як } \ x_n < 2 \ )$$

слідує, що всіх елементів послідовності справедливі нерівності:

$$\sqrt{2} < x_n < 2, \quad n \in N.$$

Отже, теоремою про границю монотонної послідовності (**теорема 4.1**) та за теоремою про перехід до границі у нерівності (**теорема 3.4**) існує скінчена границя шуканої послідовності, і значення цієї границі міститься між числами $\sqrt{2}$ та 2. Тобто,

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{n} := a \in \left[\sqrt{2},\, 2\right].$$

По-третє, як уже було помічено, елементи послідовності зв’язані між собою рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{n}} = \sqrt{2+x_n}, \ \ n \in N,$$

піднісши яке до другого степеня, отримаємо рівність

$$x^2{}_{n+1} = 2 + x_n, \ \ n \in N.$$

Перейдемо в останній рівності до границі. Враховуючи, що

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n = a \in \left[\sqrt{2},\, 2\right],$$

$$\lim_{n\to+\infty} x^2{}_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = a^2,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (2+x_n) = 2 + \lim_{n\to+\infty} x_n = 2 + a,$$

прийдемо до рівняння, розв'язавши яке, отримаємо шукане значення границі:

$$a^2 = 2 + a, \quad a \in \left[\sqrt{2}, 2\right] \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0, \quad a \in \left[\sqrt{2}, 2\right] \Leftrightarrow a = 2.$$

Відповідь: $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n} = 2$.

Число *e*

Теорема 4.2 (*про число е*). *Послідовність* $\{x_n = (1+\frac{1}{n})^n \mid n \in N\}$ *є збіжною, і її границю позначають як* ***число е*** *. Тобто,*

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Доведення. Розглянемо послідовності $\{x_n = (1+\frac{1}{n})^n \mid n \in N\}$ і $\{y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \mid n \in N\}$.

По-перше, легко довести, що виконуються нерівності $x_n < y_n,\ n \in N$.Дійсно,

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) = y_n,$$

так як множник $1+\frac{1}{n}$ більший за число1 при всіх $n\in N$.

По-друге, послідовність $\{x_n \mid n\in N\}$ є строго зростаючою. Так як за нерівністю Бернуллі маємо:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}=\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}}=\frac{n}{n-1}(\frac{n^2-1}{n^2})^n=$$

$$=\frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n^2})^n>\frac{n}{n-1}(1-\frac{n}{n^2})=\frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n})=1, \qquad n>1.$$

Отже, $\frac{x_n}{x_{n-1}}>1,\ n>1$, тобто, $x_{n-1}<x_n,\ n>1$.

По-третє, послідовність $\{y_n \mid n\in N\}$ є строго спадною. Дійсно, аналогічно до доведення попередньої нерівності, маємо:

$$\forall n>1 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}=\frac{n}{n-1}(\frac{n^2}{n^2-1})^{n+1}=$$

$$=\frac{n}{n-1}(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}>\frac{n}{n-1}(1+\frac{n+1}{n^2-1})=\frac{n}{n-1}(1+\frac{1}{n-1})=1.$$

Тому, $\forall n>1\ \ y_n<y_{n-1}$, тобто, послідовність $\{y_n \mid n\in N\}$ строго спадає.

Таким чином, для всіх чисел $n\in N$ має місце система нерівностей :

$$x_1<x_2<x_3...<x_n<y_n<...<y_2<y_1$$

Отже, послідовності $\{x_n \mid n \in N\}$ та $\{y_n \mid n \in N\}$ є монотонними і обмеженими. Тому, за теоремою про границю монотонної послідовності ці послідовності збіжні.

Позначивши границю першої послідовності як число ***e*,** отримаємо, що:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = e\cdot 1 = e\,.$$

Теорему доведено.

Зауваження 4.1. *За теоремою 4.1 маємо, що* $e=\sup\{x_n \mid n\in N\}$ *і* $e=\inf\{y_n \mid n\in N\}$. *Але послідовності* $\{x_n \mid n\in N\}$ *та* $\{y_n \mid n\in N\}$ *- строго монотонні, тому*

$$\forall n>1 \quad x_n < \sup\{x_n \mid n\in N\} = e \quad , \quad y_n > \inf\{y_n \mid n\in N\} = e\,.$$

Тобто, для оцінки числа n *маємо систему нерівностей:*

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \qquad n\in N \qquad (4.1).$$

Можна довести, що число e *є ірраціональним числом, і* $e = 2,718281828459045...$.

Означення 4.1. Логарифм дійсного числа за основою e називають ***натуральним логарифмом*** і позначають $\ln x, x>0$. Показникову функцію за основою e, тобто функцію $f(x)=e^x$, $x\in R$, називають ***експоненціальною***, а число e – ***експонентою.***

З нерівності (4.1) слідує, що

$$\frac{1}{1+n} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}, \quad n \in N \qquad (4.2)\,.$$

Отже, за теоремою про три послідовності (**теорема 3.5**),

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0 \qquad (4.3)\,.$$

Приклад 4.2. Обчислити границю: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}$.

Розв’язання.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком границі, до вигляду

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\,,$$

та застосуємо теорему про арифметичні операції над границями (**теорема 3.6**), теорему про число e (**теорема 4.2**) та класичні границі (**теорема 3.7**), одержимо:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}\right)^{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+0}\right)^{2}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e}\,.$$

Відповідь: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{1}{e}$.

Підпослідовності і їх властивості

Означення 4.2 *Нехай* $\{n_k \mid k \in N\}$ *є строго зростаючою послідовністю натуральних чисел. Тоді, послідовність* $\{x_{n_k} \mid k \in N\}$ *називають* ***підпослідовністю*** *послідовності* $\{x_n \mid n \in N\}$*. Тобто, підпослідовністю називається підмножина множини елементів послідовності, яка упорядкована так само як і послідовність.*

Наприклад, послідовності $\{x_2, x_4, x_6, ..., x_{2k}, ...\}$ і $\{x_1, x_4, x_9, ..., x_{k^2}, ...\}$ є підпослідовностями послідовності $\{x_n \mid n \in N\}$.

Означення 4.3 *Нехай* $\{x_{n_k} \mid k \in N\}$ *деяка підпослідовність послідовності* $X = \{x_n \mid n \in N\}$ *і при цьому ця підпослідовність має границю* $a \in \overline{R}$*, тобто,* $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = a \in \overline{R}$*. Тоді число* a *називають* ***частковою границею*** *послідовності* X.

Завдання для самостійної роботи 4.1: Довести, що число $a \in \overline{R}$ є частковою границею послідовності $\{x_n \mid n \in N\}$, тоді і тільки тоді, коли для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдуться зі як завгодно великими номерами $n \in N$ елементи послідовності x_n, які лежать у ε–околі точки $a \in \overline{R}$. Тобто,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in N \quad \exists n^* \in N: \ (n^* > n, \ \ |x_n - a| < \varepsilon).$$

Означення 4.4. *Нехай* $X = \{x_n \mid n \in N\} \subset R$ *деяка послідовність дійсних чисел. Позначимо як* $A(X)$ *множину всіх часткових границь послідовності* X*. Тобто,*

$$A(X) := \{a \in \overline{R} \mid \ a - \textit{часткова границя послідовності } X\}.$$

Тоді, точну верхню межу множини часткових границь $A(X)$ *послідовності* X *будемо називати* ***верхньою границею послідовності*** X *при* $n \to +\infty$ *і будемо позначати* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$. *Тобто,*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \sup A(X).$$

Точну нижню межу множини $A(X)$ *будемо називати* ***нижньою границею послідовності*** X *і будемо позначати* $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$. *Тобто,*

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \inf A(X).$$

Звісно виникає питання щодо коректності означення нижньої та верхньої границь послідовності, та щодо зв'язку їх зі границею послідовності, якщо границя останньої існує. Відповіді на ці питання можна отримати з наступних теорем.

Теорема 4.3. *Будь-яка послідовність* X *дійсних чисел містить монотонну підпослідовність.*

Доведення. Означимо підмножину $M \subset N$ натуральних чисел таким чином:

$$M := \{n \in N \mid \forall k > n : x_k > x_n\}$$

Тоді множина M або скінчена, або нескінчена. Якщо множина M нескінчена і занумерована у порядку зростання її елементів, тобто,

$$M = \{n_k \mid k \in N\} \text{ і } \forall k \in N : n_{k+1} > n_k ,$$

то за означенням множини M маємо:

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_k} < \ldots \quad .$$

Отже, підпослідовність $\{x_{n_k} \mid k \in N\}$ строго зростає.

Якщо ж множина M скінчена, то знайдеться найменше натуральне число $n_1 \in N$ таке, що $\forall m \geq n_1 : m \notin M$. Так як $n_1 \notin M$ то знайдеться хоч одне число $n_2 \in N$, яке більше за n_1 і для якого $x_{n_1} \geq x_{n_2}$. В свою чергу, число $n_2 \notin M$, тому знайдеться натуральне число n_3 більше за n_2 і таке, що $x_{n_3} \geq x_{n_2}$. Діючи таким чином і надалі побудуємо не зростаючу підпослідовність $\{x_{n_k} \mid k \in N\}$ послідовності $X = \{x_n \mid n \in N\}$.

Що і потрібно було довести.

Наслідок 4.1. *З будь-якої числової послідовності можна вилучити послідовність, що має границю (можливо нескінчену).*

Наслідок 4.2 (***теорема Больцано-Вейєрштрасса***). *Будь-яка обмежена числова послідовність містить у собі збіжну підпослідовність.*

Доведення. Твердження слідує із **теорем 4.1 і 4.3.**

Наслідок 4.3. *Будь-яка числова послідовність* $X = \{x_n \mid n \in N\}$ *має непусту множину її часткових границь* $A(X)$.

Теорема 4.4. *Якщо послідовність* $X = \{x_n \mid n \in N\}$ *має своєю границею число* $a \in \overline{R}$, *то будь-яка її підпослідовність* $\{x_{n_k} \mid k \in N\}$ *має своєю границею теж число a. Тобто,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \in \overline{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = a\,.$$

Доведення. Нехай послідовність X є збіжною і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \overline{R}$. Тоді за означенням границі

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in N: \; (\; n > n_0 \;\Rightarrow\; x_n \in B(\varepsilon, a)\;) \qquad (4.4).$$

Але за означенням підпослідовності для довільної підпослідовності $\{x_{n_k} \mid k \in N\}$ послідовність її індексів $\{n_k \mid k \in N\}$ є строго зростаючою послідовністю натуральних чисел. Легко довести (наприклад, від супротивного), що будь-яка нескінчена підмножина $\{n_k \mid k \in N\}$ натурального ряду чисел є необмеженою зверху. Тому, $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$.

Отже, для довільного натурального числа $n_0 \in N$ знайдеться таке число $k_0 \in N$, то для всіх натуральних чисел k більших за k_0 виконується нерівність $n_k > n_0$, тобто,

$$\forall n_0 \in N \;\; \exists\; k_0 \in N: \; (\; k > k_0 \;\Rightarrow\; n_k > n_0) \qquad (4.5)\,.$$

Таким чином, з (4.4) і (4.5) маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in N: \; (\; k > k_0 \;\Rightarrow\; x_{n_k} \in B(\varepsilon, a)).$$

Тобто, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_K} = a \in \overline{R}$.

Що і потрібно було довести.

Наслідок 4.4. *Послідовність дійсних чисел має границею деяке число* $a \in \overline{R}$ *, тоді і тільки тобі, коли всі її підпослідовності мають ту ж саму границю* $a \in \overline{R}$.

Доведення. Необхідність умови наслідку слідує з теореми 4.4.

Достатність умови збіжності послідовності слідує з того факту, що послідовність є підпослідовністю самої себе.

Наслідок 4.5. *Якщо послідовність має границю, то її множина часткових границь складається тільки з однієї точки (можливо нескінченої) і*

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} x_n = \overline{\lim}_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_n .$$

Фундаментальні послідовності і критерій Коші

Означення 4.5. *Послідовність* $X = \{x_n \mid n \in N\}$ *називається* ***фундаментальною або послідовністю Коші,*** *якщо для довільного додатного числа* ε *знайдеться таке натуральне число* $n_0 \in N$ *, що для всіх натуральних чисел* n *і* k*, які більші за число* n_0*, виконується нерівність* $|x_n - x_k| < \varepsilon$*, тобто,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N : \quad (\, n > n_0, k > n_0 \ \Rightarrow | \, x_n - x_k \, | < \varepsilon) \, .$$

Завдання для самостійної роботи 4.2: Довести, що фундаментальна послідовність обмежена.

Теорема 4.5 (***критерій Коші*** **).** *Числова послідовність є збіжною тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай числова послідовність $X=\{x_n \mid n\in N\}$ є збіжною, доведемо, що вона фундаментальна. Дійсно, за означенням границі числової послідовності маємо

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a\in R \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N:\ (n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}),$$

звідки отримаємо, що:

$$k>n_0,\ n>n_0 \;\Rightarrow\; |x_n-x_k|=|x_n-a+a-x_k|\le|x_n-a|+|x_k-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Отже, послідовність X – фундаментальна. Необхідність доведено.

Достатність. Доведемо, що якщо послідовність X – фундаментальна, то вона збігається.

Легко помітити, якщо послідовність X є фундаментальною, то вона обмежена. Тоді за теоремою Больцано-Вейєрштрасса (***наслідок 4.2***) із послідовності X можна вилучити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k} \mid k\in N\}$, яка збігається до деякого числа $a\in R$. Отже, для довільного числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке натуральне число $k_0\in N$, що

$$m\ge k_0 \quad\Longrightarrow\quad |x_{n_m}-a|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.6).$$

З іншого боку, послідовність X – фундаментальна, а значить для вибраного числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке натуральне число $n_0\in N$, що

$$n\ge n_0,\ p\ge n_0 \Rightarrow |x_n-x_p|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.7).$$

Виберемо число $k\in N$ таке, щоб $n_k>n_0$.Тоді за нерівностями (4.6) і (4.7) маємо

$$n > n_k \Rightarrow \ | x_n - a | = | x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a | \le | x_n - x_{n_k} | + | x_{n_k} - a | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому за означенням границі послідовності існує границя $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in R$.

Отже, послідовність X – збіжна. Теорему доведено.

Деякі додаткові теореми про границю числової послідовності

Теорема 4.6 (*теорема Штольця*). *Нехай послідовність $Y = \{y_n \mid n \in N\}$ є строго зростаючою і прямує до числа $+\infty$ при $n \to +\infty$. До того ж, нехай існує границя $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{R}$, де $X = \{x_n \mid n \in N\}$ - деяка інша числова послідовність. Тоді і послідовність $\{\frac{x_n}{y_n} \mid n \in N\}$ прямує до числа a при $n \to +\infty$, тобто,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \qquad (4.8) .$$

Доведення цієї теореми можете знайти, наприклад у підручнику Фіхтенгольця Г.М. ([3], ст. 67), або довести самостійно.

Наслідок 4.6. *Нехай послідовність $\{a_n \mid n \in N\} < R$ прямує до числа $a \in \overline{R}$ при $n \to +\infty$, тоді ту саму границю має і послідовність $\{ \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \mid n \in N \}$, тобто,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n \qquad (4.9) .$$

Доведення. Покладемо $x_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ y_n := n, \quad n \in N$.

Тоді

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n \text{ і } \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Тому за теоремою Штольця рівність (4.9) є наслідком рівності (4.8).

Завдання для самостійної роботи 4.3**:** Довести, що обернене твердження не вірне.

Приклад 4.3. Обчислити при $ї \to +\infty$ границю послідовності

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \geq 1.$$

Розв’язання.

Покладемо:

$$a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \geq 1, \qquad b_n := \sqrt{n},\ n \geq 1.$$

Так як,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ і } b_{n+1} - b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

то легко побачити , що існує границя

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 2.$$

Отже, за теоремою Штольця,

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 2.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 2$.

Теорема 4.7(теорема *Тепліця*). *Нехай задано множину дійсних чисел* $\{ c_{nk} \mid 1 \le k \le n,\, n \in \mathrm{N} \}$ *таку що:*

1) $\forall k \in N \quad c_{nk} \to 0$ *при* $n \to +\infty$,

2) $\forall\ n \ge 1 \quad S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} \to 1$ *при* $n \to +\infty$,

3) $\exists\ C > 0 \quad \forall\ n \ge 1 \ S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_{nk}| \le C \cdot$

Тоді, якщо послідовність $\{ a_n \mid n \ge 1 \} \subset R$ *збігається до числа* $a \in R$ *, то і послідовність* $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} a_k$ *,* $\quad n \in N$*, теж збігається до числа* a *, тобто:*

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = a \in R \implies \exists \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k = a \quad .$$

Границя функції у точці

Означення 4.6. *Нехай* $\varepsilon > 0$ *і* $x_0 \in \overline{R}$ *або* $x_0 = \infty$. *Тоді множину* $B(\varepsilon, x_0) \setminus \{x_0\} := \overset{0}{B}(\varepsilon, x_0)$ *будемо називати* ***виколотим околом точки*** x_0**.**

Зауваження 4.2. Легко бачити, що:

а) $\overset{0}{B}(\varepsilon, x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, якщо $x_0 \in R$.

б) $\overset{0}{B}(\varepsilon, +\infty) = B(\varepsilon, +\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$, $\quad \overset{0}{B}(\varepsilon, -\infty) = B(\varepsilon, -\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$,

$\overset{0}{B}(\varepsilon, \infty) = B(\varepsilon, \infty) = B(\varepsilon, +\infty) \cup B(\varepsilon, -\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$.

Означення 4.7. *Нехай* A *- деяка множина дійсних чисел. Будемо говорити, що точка* $x_0 \in \overline{R} \cup \{\infty\}$ *є **граничною точкою множини*** A, *якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться хоч одна точка* x *множини* A *у виколотому околі точки* x_0. *Тобто,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{o}{B}(\varepsilon, x_0) \cap A \neq \varnothing.$$

***Завдання для самостійної роботи 4.3*:**

Довести, що:

1) якщо x_0 – гранична точка множини $A \subset \overline{R}$ і $A \subset B$, то x_0 є граничною точкою і множини B;

2) будь-яка точка x_0 відрізка $[a,b] \subset \overline{R}$ є граничною точкою інтервалу $(a,b) \subset R$;

3) якщо x_0 – гранична точка множини $A \subset \overline{R}$, то множина A нескінчена;

4) x_0 є граничною точкою множини $A \subset \overline{R}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться така послідовність $X = \{x_n \mid n \in N\}$, яка лежить у множині A $(X \subset A)$ і має своєю границею число $x_0 \in \overline{R}$.

Означення 4.8 (***Коші***).*Нехай* $f : A \to R$ *деяка функція означена на множині* $A \subset R$ *і* x_0 *– гранична точка тієї множини. Тоді число* $a \in \overline{R} \cup \{\infty\}$ *будемо називати **границею функції*** f, *коли* x *прямує до числа* x_0 , *і писати* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, *якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке число* $\delta > 0$, *що всі точки перетину виколотого* $\delta -$ *околу* $\overset{0}{B}(\delta, x_0)$ *точки* x_0 *з множиною* A *функція* f *відображає у* $\varepsilon -$*окіл* $B(\varepsilon, a)$ *точки* a. *Тобто,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ (x \in \overset{0}{B}(\delta, x_0) \cap A \ \Rightarrow \ f(x) \in B(\varepsilon, a)) \quad (4.8).$$

Зауваження 4.3. *У випадку, коли функція f визначена на інтервалі $A = (a,b) \subset R$ або відрізку $A = [a,b]$, означення границі функції можна писати трохи простіше. Наприклад,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c \in \overline{R} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \ (x \in \overset{0}{B}(\delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in B(\varepsilon, c)) \qquad (4.9),$$

де $f : (a,b) \to R, \quad x_0 \in [a,b], \quad a \neq b$.

Надалі будемо вважати, що $f : (a,b) \to R$, тобто, $A = (a,b) \subset R$.

Твердження (4.9), записане символікою у термінах околів, можна розписати і у термінах відповідних нерівностей. А саме:

а) $\lim_{x\to x_0 \in R} f(x) = c \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - a| < \varepsilon)$;

б) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = c \in R \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow | f(x) - c| < \varepsilon)$;

в) $\lim_{x\to x_0 \in R} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ (0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ | f(x)| > \frac{1}{\varepsilon})$,

тощо.

***Завдання для самостійної роботи 4.3*:**

1. Сформулювати символікою в термінах нерівностей означення наступних границь:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to x_0\in R} f(x)=-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a\in R$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

2. Довести, що за умови існування границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ або границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ слідує існування границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, але не навпаки.

Приклад 4.4. Довести , що $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

Доведення: Виберемо довільне додатне число $\varepsilon>0$ і розглянемо нерівність:

$$|f(x)-4|<\varepsilon <=> \left|\frac{x^2-4}{x-2}\right|<\varepsilon <=> \left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right|<\varepsilon <=>$$

$$<=> \left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|<\varepsilon <=> 0<|x-2|<\varepsilon .$$

Отже, для всіх δє $(0,\varepsilon)$ з нерівності $0<|x-2|<\delta$ випливає нерівність $0<|x-2|<\varepsilon$, що рівносильна нерівності $|f(x)-4|<\varepsilon.$ Звідки, за означенням границі,

$$\lim_{x\to2} f(x)=4.$$

Що і потрібно було довести.

Означення 4.9 (Гейне). *Кажуть, що у точці* $x_0 \in \overline{R}$ *існує границя функції* f *і дорівнює числу* $a \in \overline{R}$, *якщо для будь якої послідовності* $\{x_n | \; n \in N, \, x_n \neq x_0 \}$ *точок з множини А і збіжної до граничної точки* $x_0 \in \overline{R}$, *відповідна послідовність* $\{ \, y_n = f(x_n) \, | \, n \in N \}$ *значень функції* f *збігається при* $n \to +\infty$ *до числа* a.

Теорема 4.8 (***про рівносильність означень Гейне і Коші*** **).**
Означення границі функції за Коші і за Гейне рівносильні.

Доведення. 1) Доведемо спочатку, що з означення Коші випливає означення Гейне.

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{R}$, тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; f(\overset{\circ}{B}(\delta, x_0)) \subset B(\varepsilon, a).$$

Виберемо довільну послідовність точок $\{x_n | \; n \in N, \, x_n \neq x_0 \}$ з множини А, збіжну до граничної точки $x_0 \in \overline{R}$. Тоді за означенням границі послідовності для вибраного числа $\delta > 0$ знайдеться номер послідовності $n_0 \in N$ такий, що всі елементи послідовності з номерами $n > n_0$ лежать у виколотому δ-околі точки $x_0 \in \overline{R}$,тобто, $x_n \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_0)$.

Але $f\left(\overset{\circ}{B}(\delta, x_0)\right) \subset B(\varepsilon, a)$, тому маємо:

$$x_n \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_0) \;\; \Rightarrow \;\; f(x_n) \in B(\, \varepsilon, \, a).$$

А це означає, що $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = a$. Отже, існує границя функції f за Гейне, і вона дорівнює числу a.

2) Навпаки. Покажемо, що якщо функція має границю за Гейне, то вона має таку саму границю і згідно означення Коші. Застосуємо метод доведення від супротивного.

Припустимо, що функція має границю $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{R}$ згідно означення за Гейне, але $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq a$ *за* означенням Коші. Останнє означає, що знайдеться таке число $\varepsilon > 0$, що яке б ми не брали число $\delta > 0$, наприклад, $\delta_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, то існує така точка $x_n \in A$ така, що $x_n \in \overset{\circ}{B}(\delta_n = \frac{1}{n}, x_\circ)$, але при цьому $f(x_n) \notin B(\varepsilon, a)$. Тоді вказана послідовність аргументів $\{x_n |\ n \in N, x_n \neq x_0\}$ збігається до граничної точки $x_0 \in \overline{R}$ при $n \to +\infty$, тоді як $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) \neq a$. Що неможливо згідно означення за Гейне. Отже припущення не вірне, що і потрібно було довести.

Доведена **теорема 4.8** дає змогу застосувати при доведенні тверджень стосовно границь функції відповідні теореми теорії границь послідовностей та навпаки. Наприклад,

Теорема 4.8 (***про єдиність існування границі***). *Якщо існує границя функції* f *при* $x \to x_0 \in \overline{R}$, *то ця границя єдина. Тобто,*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{R}} f(x) = a \in \overline{R} \\ \lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{R}} f(x) = b \in \overline{R} \end{cases} \Rightarrow \quad a = b \quad .$$

Доведення. Нехай існують границі

$$\lim_{x \to x_0 \in \overline{R}} f(x) = a \in \overline{R} \quad \text{і} \quad \lim_{x \to x_0 \in \overline{R}} f(x) = b \in \overline{R}.$$

Отже, за означенням Гейне границі функції у точці для довільної послідовності значень аргументу $\{x_n |\ n \in N, x_n \neq x_0\}$, яка збігається до граничної точки $x_0 \in \overline{R}$ при $n \to +\infty$, існують границі $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = a \in \overline{R}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b \in \overline{R}$. Але тоді за теоремою про єдність границі послідовності (дивіться ***зауваження 3.3**.)* слідує, що $a = b$. Теорему доведено.

Аналогічно доводяться теореми про три границі та про перехід до границі у нерівності:

Теорема 4.9 (*про три границі*). *Нехай* $f : A \to R, g : A \to R, h : A \to R,$ x_0 *- гранична точка множини A, для всіх точок* $x \in A$ *виконується нерівність*

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \qquad (4.10),$$

причому існують і співпадають границі

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a \in \overline{R} \qquad (4.11).$$

Тоді існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a.$

Доведення. З (4.11) згідно означення границі функції за Гейне маємо, що для будь-якої послідовності $\{\, x_n \mid n \ge 1\} \subset A \setminus \{\, x_0\}$, яка прямує до числа x_0, відповідні послідовності значень $\{\, g(x_n) \mid n \ge 1\}$ і $\{\, h(x_n) \mid n \ge 1\}$ функцій g і h збігаються до числа $a \in \overline{R}$. При цьому, згідно нерівності (4.10) виконуються нерівності :

$$\forall n \ge 1 \quad g(x_n) \le f(x_n) \le h(x_n) .$$

Звідки, ґрунтуючись на теоремі про три границі для послідовностей, робимо висновок , що

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = a \in \overline{R} .$$

Тоді, за означенням границі функції за Гейне, слідує , що існує границя функції f при $x \to x_0$, і ця границя дорівнює числу a, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \cdot$$

Доведення закінчено.

Теорема 4.11 (***про перехід до границі функції у нерівності*** **).** *Нехай:*

а) задано функції $f : A \to R$, $g : A \to R$,

б) x_0 *- гранична точка множини А*

в) $\forall \ x \in A \setminus \{ x_0 \} \quad f(x) \le g(x)$, *і до того ж*

г) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{R}$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \in \overline{R}$ $\cdot$

Тоді $a \le b$.

Тобто, $$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x) \ .$$

Завдання для самостійної роботи 4.4: Довести **теорему 4.11** самостійно.

Лекція № 5

Властивості функцій, що мають границю

На минулій лекції було показано як застосовувати означення границі функції за Гейне до доведення відповідних теорем . Але в деяких теоремах про границю функції краще спрацьовує означення Коші. Так, помітивши, що означення границі функції за Коші співпадає з відповідним означенням границі послідовності з тією тільки різницею, що послідовність – це функція , яка означена на множині натуральних чисел із єдиною граничною точкою, легко перенести теореми такі як про обмеженість збіжної послідовності, про збереження її знака, тощо, і на випадок функції дійсної змінної.

Означення 5.1. ***Функція*** $f: A \to R$ *називається* ***обмеженою*** *на множині A, якщо всі її значенні лежать в деякому околі точки нуль. Тобто,*

$$f - обмежена\ \ на\ мн.\ A \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, M > 0\ \forall x \in A:\ |\, x\,| < M \quad (5.1).$$

Теорема 5.1 (***про обмеженість функції в околі граничної точки***). *Якщо функція* $f: A \to R$ *в граничній точці* $x_{\circ} \in \overline{R}$ *множини A має скінчену границю* $a \in R$*, то тоді знайдеться виколотий окіл граничної точки* $x_{\circ}$*, в якому функція f обмежена. Тобто:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in R \ \ => \exists M > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_{\circ}) \ \ \left| f(x) \right| \le M \quad (5.2).$$

Доведення. Нехай функція f в точці $x_{\circ} \in \overline{R}$ має скінчену границю $a \in R$. Тоді за означенням границі функції за Коші для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться деякий виколотий δ-окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_{\circ}) \cap A$ граничної точки $x_{\circ}$, на якому функція відображається у ε-окіл точки $a \in R$. Тобто,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in R \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0:\ (x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_{\circ}) \cap A\ \ \Rightarrow\ \ |\, f(x) - a\,| < \varepsilon)\ .$$

Отже, якщо вибрати число $M := \max\{|f(x_\circ) - \varepsilon|, |f(x_\circ) + \varepsilon|\}$, то тоді $\forall x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ)$ $|f(x)| \le M$, що і потрібно було довести.

Зауваження 5.1. *Якщо функція f означена і в точці $x_\circ \in R$, то функція буде обмежена на невиколотому околі $B(\delta, x_\circ)$.*

Доведення. Для цього у доведенні попередньої теореми досить покласти

$$M := \max\{|f(x_\circ)|, |f(x_\circ) - \varepsilon|, |f(x_\circ) + \varepsilon|\}.$$

Теорема 5.2 (***про збереження функцією знака нерівності***).

1) *Якщо функція $f : A \to R$ в граничній точці $x_\circ \in \overline{R}$ множини A має скінчену границю $a \in R$, і до того ж виконується нерівність $a < b$, $b \in R$, то знайдеться такий виколотий окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ граничної токи $x_\circ \in \overline{R}$, на якому виконується нерівність $f(x) < b$.*

Тобто,

$$\lim_{x \to x_\circ \in \overline{R}} f(x) = a < b \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \colon \ \forall x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \quad f(x) < b \,.$$

2) Якщо в умовах на функцію f першого твердження теореми має місце нерівність $a > b$, $b \in R$, то відповідно знайдеться такий виколотий окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ граничної токи $x_\circ \in \overline{R}$, на якому виконується протилежна нерівність $f(x) > b$.

Тобто,

$$\lim_{x \to x_\circ \in \overline{R}} f(x) = a > b \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \colon \ \forall x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \quad f(x) > b \,.$$

Доведення. Доведемо, наприклад перше твердження теореми. Нехай функція f у граничній точці $x_\circ \in \overline{R}$ має скінчену границю $a \in R$. Тоді за означенням границі функції за Коші для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться деякий виколотий δ-окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ граничної точки $x_\circ$, на якому виконується нерівність $| f(x) - a | < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Виберемо число $\varepsilon := \dfrac{b-a}{2}$. Тоді на околі $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ виконується нерівність

$$f(x) < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b,$$

що і потрібно було довести.

Теорема 5.3 (***про збереження знака функції***).

1) *Якщо функція $f : A \to R$ в граничній точці $x_\circ \in \overline{R}$ множини А має скінчену границю $a \in R$, і до того ж виконується нерівність $a < 0$, то знайдеться такий виколотий окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ граничної токи $x_\circ \in \overline{R}$, на якому функція від'ємна.*

2) Якщо в умовах на функцію f першого твердження теореми має місце нерівність $a > 0$, то відповідно знайдеться такий виколотий окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ граничної токи $x_\circ \in \overline{R}$, на якому функція додатна.

Доведення. Досить в доведенні попередньої теореми покласти $b = 0$.

Зауваження 5.2. *У формулюванні* **теорем 5.2 і 5.3** *можна виколотий окіл $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ граничної токи замінити на невиколотий , якщо додатково виконуються відповідні нерівності*

$$f(x_\circ) < b,\ f(x_\circ) > b,\ f(x_\circ) < 0,\ f(x_\circ) > 0 \ .$$

Теорема 5.4 (***про арифметичні операції над границями функцій*****).**

1) Нехай $f: A \to a = const \in R$ *- постійна функція на множені* A *і* x_0 *- гранична точка цієї множини, тоді існує границя*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

2) Нехай $f: A_1 \to R$ *і* $g: A_2 \to R$*. Причому* x_0 *- гранична точка множини* $A = A_1 \bigcap A_2$*. Тоді, якщо існують границі*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{R} \quad і \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = b \in \overline{R},$$

то існують і границі функцій: $f \pm g,\ fg,\ \dfrac{f}{g},\ cf,$

причому:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b,$ *б)* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab,$

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b},$ *г)* $\lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = ca, \quad (c \in R),$

крім випадків, які приводять до невизначеностей

$$+\infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Доведення. Твердження теореми слідує з означення границі функції за Гейне та відповідної теореми для границь послідовностей.

Завдання для самостійної роботи 5.1. Навести детальне доведення **теореми 5.4**.

Як приклад застосування теорем про три границі та попередньої теореми наведемо таке твердження:

Теорема 5.5 (***про добуток нескінченно малої функції на обмежену***) . *Нехай задано функція* $f : A \to R,\ x_\circ$ – *гранична точка множини A, в якій функція f збігається до нуля, тобто,* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *, і в деякому околі граничної точки* $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ *функція* $g : A \to R$ *є обмеженою. Тоді добуток функцій* f *і* g *прямує до нуля коли* $x \to x_0$.

Доведення. За означенням обмеженості функції g знайдеться таке число $M > 0$, що

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A: \quad -M \le g(x) \le +M ,$$

звідки маємо:

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A: \quad -Mf(x) \le f(x)g(x) \le +Mf(x) \quad .$$

За **теоремою 5.4**

$$\lim_{x \to x_0} (\pm M) f(x) = (\pm M) \lim_{x \to x_0} f(x) = (\pm M) \cdot 0 = 0 \cdot$$

Тому, за теоремою про три границі, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$, що і потрібно було довести.

Теорема 5.6 (***критерій Коші існування границі функції***). *Нехай* $f : A \to R,\ x_\circ$ *–скінчена гранична точка множини A. Тоді функція f має деяку скінчену границю* $a \in R$ *у граничній точці* $x_\circ \in R$ *тоді і тільки тоді, коли для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться такий виколотий* δ *-окіл граничної точки, модуль різниці значень функції у двох довільних точках якого менший за число* ε *. Тобто,*

$$\exists\, a \in R: \lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (\forall x, y \in A \bigcap \overset{\circ}{B}(\delta, x_0) : \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon \big) \ .$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція f у граничній точці $x_\circ \in R$ має деяку скінчену границю $a \in R$. Тоді, за означенням Коші границі функції у точці, для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий виколотий δ-окіл граничної точки $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$, на якому виконується нерівність $| f(x) - a | < \frac{\varepsilon}{2}$. Звідки для довільних точок x *і* y околу $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$ маємо нерівність

$$| f(x) - f(y) | = |(f(x) - a) - (f(y) - a)| \le ,$$

$$\le \ | f(x) - a | + | f(y) - a| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

що і потрібно було довести.

Достатність. Нехай $\{x_n | n \in N\}, \{y_n | n \in N\}$ - дві довільно вибрані послідовності з околу $\overset{\circ}{B}(\delta, x_\circ) \cap A$, які збігаються до граничної точки $x_\circ \in R$. Утворимо нову послідовність, що збігається до тієї ж точки, поклавши

$$\{z_n | n \in N\} := \{x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...\} .$$

Якщо виконується умова

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (\forall x, y \in A \bigcap \overset{\circ}{B}(\delta, x_0) : \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon \big) ,$$

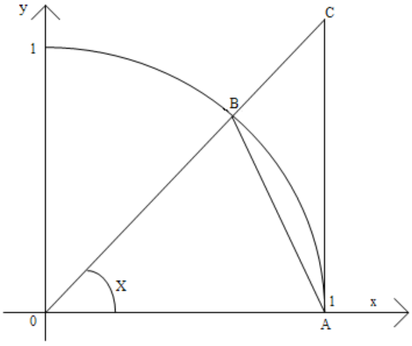
то тоді послідовність значень функції $\{ f(z_n) | n \in N\}$ - фундаментальна (детально обґрунтувати це твердження самостійно !!!). Отже, за критерієм Коші збіжності послідовності, ця послідовність збігається до деякого числа $a \in R$. Але тоді, за **теоремою 4.4** , і її підпослідовності $\{ f(x_n) | n \in N\}, \ \{ f(y_n) | n \in N\}$ теж збігаються до числа $a \in R$. Тому, за означенням Гейне границі функції у точці, функція f має скінчену границю $a \in R$ у граничній точці $x_\circ \in R$, що і потрібно було довести.

Теорему доведено.

Теорема 5.7 (***про першу видатну границю*****) .**

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (5.3) .$$

Доведення. Нехай $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Порівнюючи площі трикутника



АВО, сектора круга АВО і трикутника АСО, які побудовані за допомогою променя ОВС, що проведений під кутом x до осі абсцис, дуги АВ одиночного кола, хорди АВ та одиничного відрізка ОА осі Оx, приходимо до висновку, що

Рис. 2

$$S_{\Delta \mathrm{OAB}} < S_{\text{ñåê.ÎAB}} < S_{\Delta OAC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|OA|^2 \sin x < \frac{1}{2}|OA|^2 x < \frac{1}{2}|OA||AC| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x < x < tgx, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \qquad (5.4).$$

Так як функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ є парними, то нерівність (5.4)

виконується для всіх $x : 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$ Звідки $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{|x|}{2} < \frac{x^2}{2} \qquad (5.5).$$

Тоді, для всіх $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta = \sqrt{2\varepsilon} : \quad (0 < |x| < \delta \ \Rightarrow \ \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon \ ).$$

Тобто, $$\exists \ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot$$

Доведення закінчено.

Теорема 5.8 (***про другу видатну границю*****).**

$$\exists \ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (5.6) .$$

Доведення. 1) Покажемо спочатку, що існує границя

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (5.7) ,$$

тобто, розглянемо випадок граничної точки $+\infty$.

Виберемо довільну послідовність дійсних чисел $\{ x_n \mid n \geq 1\} \subset R$, яка збігається до $+\infty$ при $n \to +\infty$. За означенням цілої частини $[x_n] := k_n$ числа $x_n \in R$ випливає, що виконуються нерівності

$$k_n \leq x_n < k_n + 1, \ \ n \in N \ .$$

Звідки маємо:

$$k_n \ \leq \ x_n < k_n + 1 \ \leq \ x_n + 1 \ < \ k_n + 2, \quad n \geq 1.$$

Отже, справедливі нерівності

$$\left(1 + \frac{1}{1 + k_n}\right)^{1+k_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{1+x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+2}, \quad n \geq 1. \qquad (5.8) .$$

Так як $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, то для будь-якої послідовності $\{ k_n \mid n \geq 1\} \subset N$ натуральних чисел, що прямує до $+\infty$ при $n \to +\infty$, існує границя

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e\,.$$

Звідки ,

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}=e, \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{2}=e\end{cases} \qquad (5.9)\,.$$

За (5.9) і (5.8) і теоремою про три границі випливає, що

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_{n+1}}=e\,.$$

Тому, згідно означенню границі функції за Гейне, виконується (5.7).

2) Доведемо, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (5.10)\,,$$

тобто, розглянемо випадок граничної точки $-\infty$.Для цього виберемо довільну послідовність $\{\,x_n \mid n\ge 1\}\subset R$ дійсних чисел, що прямує до $-\infty$ при $n\to+\infty$. Покладемо $x_n':=-x_n,\ n\in N$. Тоді $x_n'\to+\infty$ при $n\to+\infty$, і , згідно (5.7) ,

$$\exists\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n'-1}\right)^{x_n'-1}=e\,.$$

Але, з іншого боку:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x_n'}\right)^{-x_n'}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n'}{x_n'-1}\right)^{x_n'}=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)\right)=e\cdot 1=e.$$

Отже, справедливе твердження (5.10).

3) Довільна послідовність $\{\, z_n \mid n\ge 1\}$, що прямує до ∞ при $n\to+\infty$, при досить великих $n\in N$ або містить тільки елементи одного знаку, і отже збігається чи до $+\infty$, чи до $-\infty$, або розбивається на дві послідовності $\{\, z_n\}=\{\, x_n\}\cup\{\, y_n\}$, такі ,що одна з них, наприклад $\{\, x_n\}$, прямує до $+\infty$, а друга $\{\, y_n\}$ прямує до $-\infty$ при $n\to+\infty$. Тому за (5.7) і (5.10) слідує (5.6). Теорема доведена.

Теорема 5.9 (*про класичні границі функцій на нескінченності*) .

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0\,, \qquad \alpha>0\ \cdot$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\beta}}{a^{x}}=0\ , \qquad |a|>1,\ \beta\in R\ \cdot$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\beta}}=0\,, \qquad a>0,\ a\ne 1,\ \beta>0\ \cdot$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1\ \cdot$

Доведення. Для доведення тверджень теореми досить застосувати метод, продемонстрований при доведенні попередньої теореми (про другу видатну границю). А саме, потрібно вибрати довільну послідовність дійсних чисел $\{\, x_n \mid n\ge 1\}\subset R$, яка збігається до $+\infty$ при $n\to+\infty$, утворити послідовність, складену з цілих частин $[x_n]:=k_n$ чисел $x_n\ge 1$. Тоді відповідні послідовності, складені для границь **1. – 4.** , можна обмежити послідовностями з натуральним аргументом. Після чого застосовується теорема про три послідовності та теорема про класичні границі для послідовностей. Наприклад, послідовність $\{x_n^{\frac{1}{x_n}} \mid n \in N\}$ обмежується одиницею та послідовністю $\{(\kappa_n+1)^{\frac{1}{\kappa_n}} \mid n \in N\}$, яка збігається до одиниці, тобто,

$$1 \le x_n^{\frac{1}{x_n}} \le (\kappa_n+1)^{\frac{1}{\kappa_n}}, \ \ n \in N.$$

Залишилось тільки показати , що послідовність $\{(\kappa_n+1)^{\frac{1}{\kappa_n}} \mid n \in N\}$ збігається до одиниці. Для цього досить довести , що послідовність $\{(n+1)^{\frac{1}{n}} \mid n \in N\}$ збігається до одиниці. З цією метою діємо таким чином:

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\cdot\sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1\cdot1 = 1.$$

При враховано, що $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ за **теоремою 3.7** , а також, що за нерівністю

$$1 < \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n} \ , \ \ n \ge 2,$$

і за теоремою про три границі (**теорема 3.5**) слідує:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

Завдання для самостійної роботи 5.2: Навести детальне доведення **теореми 5.9**.

Звичайно, за **теоремою 5.9** можна зробити висновок, що до обчислення границі функції у граничній точці $+\infty$ застосовні ті ж самі методи, які були показані при знаходженні границь подібних (схожих) послідовностей. Але ці обчислення можуть бути значно ефективніші, якщо при цьому застосовувати теорію неперервності функцій, яка буде розвинута на наступних лекціях.

Наша чергова мета довести твердження про класичні границі у точці $x_0 = 0$, які є наслідками першої та другої видатної границі:

Теорема 5.10 (***про класичні границі в точці нуль***) .

Існують границі:

1.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$

2.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

І для доведення цієї тереми нам потрібно розвити поняття неперервності функції, з яким ми ознайомимось на наступній лекції.

Лекція № 6.

Неперервні функції та їх властивості

Означення 6.1. *Нехай* $f: A \to R, x_0 \in A$ *і є граничною точкою множини A. Тоді кажуть, що* ***функція*** f ***є неперервною в точці*** x_0, *якщо*

$$\exists \lim_{n \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (6.1).$$

Якщо функція неперервна в усіх точках множини $B \subset A$, *то кажуть, що функція* ***неперервна на множині*** B.

Позначимо через $C(B)$ ***клас всіх неперервних функцій*** *на множині* B, *тобто:*

$$C(B) := \{ f \mid f - \text{ неперервна на } B \}.$$

Тоді твердження "функція f – неперервна на B*" скорочено можна записати як* $f \in C(B)$ *і, відповідно, "* f *- неперервна в точці* $x_0 \in R$*" - як* $f \in C(\{x_0\})$.

Теорема 6.1 (***про арифметичні операції над неперервними функціями*** **).**

1)Нехай $f: A \to a = const \in R,\ x_0 \in A,\ x_0$ *- гранична точка множини* A, *тоді функція* f *неперервна в точці* x_0.

2) Нехай $f: A \to R,\ g: A \to R,\ x_0$ *–гранична множина множини* A *і* $x_0 \in A$. *Тоді функції* $f \pm g,\ fg,\ \frac{f}{g}\ \ (g(x_0) \neq 0),\ \ af\ \ (a \in R)$ *теж є неперервними в точці* x_0.

Доведення. Досить застосувати означення неперервності функції в точці та теорему про перехід до границі при арифметичних операціях над функціями (**теорема 5.4**).

Завдання для самостійної роботи 6.1: Навести детальне доведення **теореми 6.1**.

Теорема 6.2 (***про границю складної функції*** **) .** *Нехай*

1) $f: A \to R$, $x_0 \in A$, $x_0 \in R$ *- гранична точка множини* A *і*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = a \in R.$$

2) $g: B \to R$, *де* $B \supset f(A)$, *точка а є граничною для множини* B, $a \in B$, *і функція* g *неперервна в точці а. Тоді*

$$\exists \lim_{x \to x_\circ} g(f(x)) = g(a) \ ,$$

тобто,
$$\exists \lim_{x \to x_\circ} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_\circ} f(x)), \qquad (6.2).$$

Доведення. Скористаємося означення границі функції за Гейне. Нехай послідовність $\{x_n\} \subset R \setminus \{x_\circ\}$ і $x_n \to x_0$ при $n \to +\infty$. Тоді за умови 1) випливає що $y_n = f(x_n) \to a$ при $n \to \infty$, а за умови 2) маємо, що $g(y_n) = g(f(x_n)) \to g(a)$ при $n \to +\infty$. Отже ,

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a),$$

що і потрібно було довести.

Зауваження 6.1. *Так як* $g(a) = \lim_{y \to y_0} g(y)$, *то* (6.2) *можна переписати у вигляді:*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) \qquad (6,3)\ .$$

Формулу (6.3) *ще називають* ***формулою заміни змінної у границі функції****, або кажуть, що виконано підстановку* $f(x)=y$.

Зауваження 6.2. *Нехай функція* f *має скінчену границю* $a \in R$ *у нескінченій точці* $x_\circ = +\infty$ *або* $x_\circ = -\infty$*, тобто,*

$$\exists \lim_{x\to +\infty \vee -\infty} f(x) = a \in R \ \cdot$$

Тоді , якщо формально доозначити функцію у цих точках як $f(+\infty)=a$ *або , відповідно,* $f(-\infty)=a$*, то функція стає неперервною у нескінченій точці . Отже,* **теорема 6.2** *буде виконуватись і у випадку нескінченої граничної точки* $x_\circ$.

Теорема 6.3 (***про неперервність складної функції*** **).** *Нехай* $f: A\to R$, $x_0 \in A$, x_0 *−гранична точка множини* A*, і функція* f *неперервна в точці* x_0*, а також задана функція* $g: B\to R$, $f(A)\subset B$, $y_0 = f(x_0)$, *і* g *−неперервна в точці* y_0. *Тоді складена функція* $g(f)$ *неперервна в точці* x_0.

Доведення. Дане твердження слідує з означення неперервності функції в точці та з попередньої теореми, в якій потрібно покласти $a := y_0 = f(x_0)$.

Завдання для самостійної роботи 6.2: Навести детальне доведення **теореми 6.3**.

При обчисленні границь методом заміни змінної часто доводиться використовувати формулу (6.3) в зворотному напрямку, тобто постає питання: чи існує границя функції g, якщо відомо, що існує границя складної функції $g(f)$. Відповідь на це питання міститься в наступному твердженні:

Теорема 6.4 (***про заміну змінної у границі функції*** **) .** *Нехай :*

1) $f : A \to R$, $x_0 \in A$, x_0 *–гранична точка множини* A , $y_0 = f(x_0)$*;*

2) $g : B \to R$, $f(A) = B$ *;*

3) відображення $f : A \to B$ *є бієкцією, тобто існує обернена функція* $f^{-1} : B \to A$*, і обернена функція є неперервною в точці* $y_\circ$*, тобто,*

$$\lim_{y \to y_\circ} f^{-1}(y) = x_\circ \quad ;$$

4) композиція функцій $g \circ f$ *- неперервна в точці* x_0*, і*

$$\lim_{x \to x_\circ} (g \circ f)(x) = a.$$

Тоді за існуванням границі в лівій частині рівності (6.3) випливає і її існування в правій, тобто,

$$\exists \lim_{y \to y_\circ} g(y) = a.$$

Доведення. Твердження теж випливає з **теореми 6.2**, якщо її застосувати до функцій $g \circ f$ та f^{-1}. Дійсно, функція $g \circ f$ - неперервна і має границю $\lim\limits_{x \to x_\circ} (g \circ f)(x) = a$, і існує границя $\lim\limits_{y \to y_\circ} f^{-1}(y) = x_0$, тому $\exists \lim\limits_{y \to y_\circ} ((g \circ f) \circ f^{-1})(y) = \lim\limits_{x \to x_\circ} (g \circ f)(x) = a$.

Але $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$, отже, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = a$. Теорема доведена.

Односторонні границі і одностороння неперервність функції. Класифікація точок розриву

Означення 6.2. *Будемо називати множину*

$B_+(\varepsilon, x_\circ) := \{ x \mid 0 < x - x_\circ < \varepsilon \}$ ***правим*** ε ***- околом*** *точки* $x_\circ \in R$,

і , відповідно, $B_-(\varepsilon, x_\circ) := \{x \mid 0 < x_\circ - x < \varepsilon\}$ - ***лівим.***

Означення 6.3. *Кажуть, що число* $a \in \overline{R}$ *є* ***границею функції*** f ***в точці*** x_0 ***зправа*** *, і позначають*

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a,$$

якщо для довільного ε *- околу точки* a *знайдеться такий правий* δ *- окіл точки* x_0*, образ якого при відображенні* f *лежить в* ε *- околі точки* a*. Тобто:*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a <=> \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(B_+(\delta, x_0)) \subset B(\varepsilon, a) \Leftrightarrow$$

$$<=> \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; (0 < x - x_0 < \delta => \left| f(x) - a \right| < \varepsilon).$$

Якщо замінити в означенні правий δ *- окіл* $B_+(\delta, x_0)$ *на лівий* $B_-(\delta, x_0)$*, то отримаємо означення* ***границі функції зліва****:*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = a.$$

Домовленість: ***В попередньому означенні і надалі, якщо не сказано противне, для спрощення будемо вважати, що область визначення*** $D(f)$ ***функцій*** f ***містять деякий, хоч би виколотий, окіл***

граничної точки. Наприклад, можна вважати, що $x_\circ \in (a,b) = D(f)$. ***Інакше, відповідні зміни в означені і твердженнях – очевидні.***

Теорема 6.5 (***про умови існування границі функції в термінах односторонніх границь*** **)** . *Нехай* $f : A \to R$, x_0 *–гранична точка множини* A.

Тоді число $a \in \overline{R}$ *є границею функції* f *в точці* $x_\circ \in R$ *тоді і тільки тоді , коли існують ліва і права односторонні границі функції* f *в цій точці, співпадають між собою і рівні числу* a *. Тобто,*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{R} \;<=>\; \exists\; f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = a.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для довільної точки $x_\circ \in R$ і числа $\delta > 0$ справджується рівність

$$\overset{\circ}{B}(\delta, x_0) = B_+(\delta, x_0) \bigcup B_-(\delta, x_0).$$

Тому достатність теореми доводиться так:

$$\begin{cases} \exists\, f(x_0 + 0) = a \\ \exists\, f(x_0 - 0) = a \end{cases} \quad =>$$

$$=> \quad \forall \varepsilon > 0: \quad \begin{cases} \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon): \; f(B_+(\delta_1, x_0)) \subset B(\varepsilon, a_0) \\ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon): \; f(B_-(\delta_2, x_0)) \subset B(\varepsilon, a_0) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$=> \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} : f(B_+(\delta, x_0) \bigcup B_-(\delta, x_0)) = f(\overset{\circ}{B}(\delta, x_0)) \subset B(\varepsilon, a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Тобто, якщо існують односторонні границі, які рівні числу $a \in \overline{R}$, то для довільного ε - околу цього числа знайдуться лівий та правий околи граничної точки відповідних діаметрів δ_1 та δ_2, які відображаються у ε-окіл точки a. Звідки слідує, що об'єднання цих околів з діаметрами $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ є виколотим δ-околом граничної точки, і теж відображається у ε-окіл точки a. Тому число a є границею функції у точці $x_\circ$, що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи 6.3: *Довести необхідність* **теореми 6.4.**

Наслідок 6.1 (***про необхідні і достатні умови неперервності функції в термінах односторонніх границь*** **).** Функція f неперервна в точці $x_0 \in R$ тоді і тільки тоді, коли існують в точці x_0 границі функції зліва і з права, співпадають між собою і рівні значеню функції у цій точці. Тобто:

$$f \in C(\{x_0\}) \iff \exists\, f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0) \quad (6.4).$$

Означення 6.4.

Якщо функція f означена в деякому околі точки $x_0 \in R$ і порушуються умови існування або рівності (6.4), то точку x_0 називають ***точкою розриву*** *функції f.*

При цьому, якщо існують і є скінченими границі $f(x_0 \pm 0)$, але порушуються рівності (6.4), то кажуть що функція f в точці x_0 має ***розрив першого типу (роду)****.*

А якщо хоч одна з двох границь $f(x_0 \pm 0)$ не існує або є нескінченою, то кажуть, що функція f має в точці x_0 ***розрив другого типу (роду)****.*

В свою чергу, у випадку розриву першого роду, якщо порушується перша з рівностей (6,4), тобто,

$\exists f(x_0+0)\in R, \exists f(x_0-0)\in R$ *але* $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$,

то кажуть що в точці розриву x_0 *функція* f *має (здійснює)* ***стрибок*** *величини* $\Delta = f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

А якщо порушується друга рівність (7,2), тобто

$\exists\ f(x_0+0)=f(x_0-0)=a\in R$, *але* $a\neq f(x_0)$ *або* $\nexists f(x_0)$,

то кажуть, що x_0 *є точкою* ***усувного розриву*** *(в цьому випадку, якщо переозначити функцію* f *в точці* x_0*, поклавши* $f(x_0)=a$*, то функція стає неперервною в цій точці).*

Означення 6.5.

Функція f *називається* ***неперервною зправа*** *в точці* $x_0\in R$*, якщо* $\exists\ f(x_0+0)=f(x_0)$*, і -* ***неперервною зліва****, якщо* $\exists\ f(x_0-0)=f(x_0)$.

Функція f *називається* ***неперервною на відрізку*** $[a, b]$**,** *якщо вона неперервна у кожній точці інтервалу* (a,b) *і є неперервною справа у точці* a *та є неперервною зліва у точці* b.

Зауваження 6.3. *Для односторонніх границь та односторонньої неперервності функції виконуються ті ж самі теореми що і для звичайних (повних) границь та звичайної неперервності. Щоб показати це, досить у відповідних теоремах повні околи граничної точки замінити на односторонні.*

Властивості неперервної функції на відрізку

Теорема 6.6 (***перша теорема Вейєрштрасса*** **).** *Нехай* f *- неперервна на відрізку* $[a,b]$*, тоді вона обмежена на* $[a,b]$*. Тобто,*

$$f\in C([a,b]) \ \Rightarrow\ \exists M>0:\ \forall x\in[a,b]\quad |f(x)|\leq M.$$

Доведення. Від супротивного. Нехай функція f неперервна на $[a,b]$ але не є обмеженою. Тоді для кожного $n \in N$ знайдеться точка $x_n \in [a,b]$ така, що $|\, f(x_n)| \geq n.$ Так як послідовність $\{\, x_n | \, n \geq 1\} \subset [a,b]$,то вона обмежена, і ,отже, з неї можна вибрати підпослідовність $\{\, x_{n_k} | k \in N\}$ збіжну до деякої точки $x_0 \in [a,b]$. Так як функція f неперервна на $[a,b]$,то вона неперервна і в точці x_0, тому $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, але це неможливо, бо $\left| f\left(x_{n_k}\right)\right| \geq n_k, k \geq 1,$ і , отже, $f\left(x_{n_k} \right) \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Таким чином, припущення не вірне. Теорему доведено.

Теорема 6.7 (***друга теорема Вейєрштрасса*** **) .** Нехай функція f неперервна на відрізку $[a,b]$, тоді вона приймає на ньому своє найбільше і найменше значення. Тобто,

$$f \in C([a,b]) => \exists \ \{x_*, x^*\} \subset [a,b]: \forall x \in [a,b] \quad f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*).$$

Доведення. Доведемо, наприклад, існування точки $x_* \in [a,b]$, в якій функція f приймає своє найменше значення . Так як функція f обмежена на $[a,b]$, то це означає, що множина $B := f([a,b])$ значень функції f є обмеженою. Тому існує скінчена точна нижня межа множини B, тобто, $m := \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \in R$. Звідки випливає, що

$$\forall n \in N \quad \exists \, x_n \in [a,b]: \quad m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n} \qquad (6.5).$$

З обмеженої послідовності $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset [a,b]$ можна вилучити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k} | k \in N\}$, що збігається до деякої точки $x_* \in [a,b]$. При цьому, з неперервності функції f випливає, що $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_*)$, а за умовою (6.5) та за теоремою про три границі, що $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = m.$ Тому,

$$f(x_*) = m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Аналогічно доводиться існування відповідної точки x^*. (Довести самостійно!). Теорема доведена.

Теорема 6.8 (***теорема Больцано – Коші*** **).** Нехай f неперервна на $[a,b]$, і числа m та M є відповідно найменшим і найбільшим значенням функції f на відрізку $[a,b]$. Тоді функція f приймає всі проміжні значення між m та M . Тобто,

$$f \in C([a,b]) \quad \Rightarrow \forall c \in [m, M] \quad \exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = c.$$

Доведення. Якщо $\acute{n} = m$ або $c = M$, то тоді твердження даної теореми випливає з попередньої теореми.

Нехай $m < c < M$. Розглянемо множину $B := \{x \in [a,b]:\ f(x) < c\}$. Так як $B \subset [a,b]$, то $a = \inf[a,b] \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup[a,b] = b$. Отже, точка $x_0 := \sup B$ належить відрізку $[a,b]$. За теоремою про збереження знака нерівності функцією при переході до границі слідує, що знайдуться деякі околи точок a і b, в яких зберігаються нерівності $f(x) < c$ та $f(x) > c$ відповідно. Тому, $x_0 \neq a$ і $x_0 \neq b$, тобто, $a < x_0 < b$. За теоремою про характеризацію точних меж для довільного числа $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, починаючи з деякого $n_\circ \in N,$ знайдеться точка $\boldsymbol{x_n}$ така, що

$a < x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n < x_0$. Тому, послідовність $\{ x_n \mid n \geq n_\circ \} \subset [a,b]$ збігається до точки $x_0 \in [a,b]$, і при цьому $f(x_n) < c$. Отже, за неперервністю функції f, існує границя

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0 - 0) = f(x_0) \leq c.$$

Але для всіх точок $x > x_0$ має місце нерівність $f(x) > c$, тому, $f(x_0 + 0) = f(x_0) \geq c$. Отже, $f(x_0) = c$, що і потрібно було довести.

Означення 6.6. *Функція* f *називається* ***рівномірно неперервною*** *на множині* $A \subset D(f)$ *, якщо для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке число* $\delta > 0$*, що для всіх точок x і y цієї множини з нерівності* $|x - y| < \delta$ *слідує* $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$*,* тобто, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x, y \in A, \left| x - y \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon) \quad (6.6).$$

Завдання для самостійної роботи 6.4: *Довести, що функція* f *рівномірно неперервна на множині* A *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{x_1, x_2 \in A : \left| x_1 - x_2 \right| < \varepsilon} \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \to 0, \quad при \quad \varepsilon \to +0.$$

Теорема 6.9 (***теорема Кантора*** **).** *Нехай функція* f *неперервна на відрізку* $[a,b]$*, тоді вона рівномірно неперервна на цьому відрізку.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $f \in C[a,b]$, але не є рівномірно неперервною на $[a,b]$. Тоді, за запереченням (6.6) існує таке число $\varepsilon > 0$*, що для будь-якого числа* $\delta > 0$*, наприклад, для* $\delta_n = \frac{1}{n}$ *знайдуться такі точки* $x_n', x_n'' \in [a,b]$, відстань міх якими менша за число $\delta_n = \frac{1}{n}$, *та при цьому відстань між значеннями функції* f у цих точках не менша за число $\varepsilon > 0$. *Тобто,*

$$\exists \varepsilon > 0: (\forall \delta_n = \frac{1}{n} > 0 \ \exists x_n', x_n'' \in [a,b]: |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}, |f(x_n')| - |f(x_n'')| \geq \varepsilon) \cdot$$

Але, послідовність $\{x_n' \,|\, n \geq 1\}$ є підмножиною відрізка $[a,b]$ і ,отже, обмежена. Тому з неї можна вилучити підпослідовність $\{x_{n_k}' \,|k \geq 1\} \subset \{x_n' \,|\, n \geq 1\}$, яка збігається до деякого числа $x_0 \in [a,b]$ при $k \to +\infty$. Так як, $\forall \ k \geq 1 \ \left|x_{n_k}' - x_{n_k}''\right| < \frac{1}{n_k}$, то можна зробити висновок, що і підпослідовність $\{x_{n_k}'' \,|\, k \geq 1\}$ збіжна до x_0 при $k \to +\infty$(довести самостійно!). Отже, згідно неперервності f на $[a,b]$ маємо

$$|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0, \quad при \ k \to +\infty.$$

Що неможливо внаслідок нерівності

$$|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geq \varepsilon, \quad k \geq 1.$$

Значить, припущення невірне. Теорему доведено.

Неперервність оберненої функції

В т**еоремі 6.4** фігурує умова існування оберненої функції, тому нас цікавить достатня умова існування оберненої функції та умови її неперервності.

Теорема 6.10 (***про достатні умови існування оберненої функції*** **).** *Нехай функція* f *відображає множину* $A \subset R$ *на множину* $B \subset R,$ *і є строго монотонною функцією. Тоді функція* f *має обернену, яка означена на множині* B*, і теж є строго монотонною.*

Доведення. Поставимо у відповідність кожному елементу $y \in B$ його прообраз $x = f^{-1}(y) \in A.$ Нам потрібно довести, що для кожного $y \in A$ існує тільки один прообраз цього елементу і що більшому образу $y \in B$ відповідає більший прообраз $x = f^{-1}(y)$, якщо функція f - зростаюча, і навпаки - в противному разі.

По-перше, існування хоч одного прообразу $x = f^{-1}(y) \in A$ випливає з того, що відображення f є сюр'єкцією, тобто відображенням множини A на множину B.

По друге, єдиність існування прообразу є наслідком строгої монотонності функції f . Це легко бачити від супротивного. Дійсно, нехай, наприклад, функція f є строго зростаючою, і припустимо, що якась точка $y \in B$ має два прообрази x_1 і x_2, які не співпадають ,наприклад, $x_2 > x_1.$ Але тоді, внаслідок строгого зростання функції f , виконана нерівність $f(x_2) = y > f(x_1) = y,$ що неможливо. Отже, припущення не вірне, тобто, обов'язково $x_2 = x_1.$

По-третє, якщо , наприклад, функція f є строго зростаючою, $y_2 > y_1$ і $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$, то тоді $x_2 > x_1.$ Бо в противному разі нерівність $f(x_2) = y_2 > f(x_1) = y_1$ не виконується. Отже, обернена функція f^{-1} теж є строго зростаючою. Теорему доведено.

Теорема 6.11 (***про достатні умови неперевності оберненої функції на відрізку).*** *Нехай* $f:[a,b\,] \to R,$ *де* $a,b \in R,$ *і нехай :*

1) $f \uparrow_s$ *на* $[a,b]$ *(тобто,* f *- строго зростає на* $[a,b]$ *);*

2) $f \in C([a,b])$ *(функція неперервна на*$[a,b]$ *) .*

Тоді f *має обернену функцію* $\overset{-1}{f} : [c,d] \to [a,b]$, *яка теж строго зростає і є неперервною на* $[c,d]$. *При цьому,* $c = f(a),\ d = f(b)$.

Доведення. За теоремою Больцано-Коші слідує, що відображення f є сюрьєкцією відрізка $[a,b]$ на відрізок $[m,M]$, де

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{і} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

А за попередньою теоремою випливає, що строго зростаюча функція f має обернену функцію $\overset{-1}{f} : [m,M] \to [a,b]$, яка теж є строго зростаючою, і , тому,

$$c = f(a) = m,\ d = f(b) = M.$$

Доведемо неперервність оберненої функції. Нехай

$$\{y_n | n \in N\} \subset [c,d]$$

- довільна послідовність точок відрізка $[c,d]$, яка збігається до деякої точки $y_\circ$ цього відрізка. Покажемо, що тоді відповідна послідовність прообразів відображення f збігається до точки $x_\circ = \overset{-1}{f}(y_\circ)$, тобто,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \overset{-1}{f}(y_n) = x_\circ = \overset{-1}{f}(y_\circ).$$

Від супротивного. Припустимо, що

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \neq x_\circ.$$

Тоді існує таке число $\varepsilon > 0$, для якого знайдеться нескінчена підпослідовність

$$\left\{x_{n_k} | k \geq 1\right\} \subset \left\{x_n \,|\, n \geq 1\right\}$$

така , що відстань її точок до точки $x_\circ$ не менша за число $\varepsilon > 0$, тобто, має місце нерівність

$$\left|x_{n_k} - x_{\circ}\right| \geq \varepsilon, \quad k \geq 1.$$

Так як підпослідовність $\left\{x_{n_k} \mid k \geq 1\right\} \subset [a,b]$ - обмежена, то з неї можна вилучити збіжну до деякої точки $x_* \in [a,b]$ підпослідовність

$$\left\{x'_{n_k} \mid k \geq 1\right\} \subset \left\{x_{n_\kappa} \mid \kappa \geq 1\right\},$$

для елементів якої теж виконана нерівність

$$\left|x'_{n_k} - x_{\circ}\right| \geq \varepsilon, \quad k \geq 1.$$

Таким чином, точка x_* не співпадає з точкою $x_{\circ}$, отже, (за однозначністю функції f)

$$f(x_*) \neq f(x_{\circ}),$$

і при цьому

$$\lim_{n \to +\infty} x'_{n_\kappa} = x_*.$$

Тому, за неперервністю функції f маємо:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x'_{n_\kappa}) = f(x_*) \neq f(x_{\circ}) \qquad (6.7).$$

Але послідовність $\{y'_{n_\kappa} = f(x'_{n_\kappa}) | k \in N\}$ є підпослідовністю послідовності $\{y_n | n \in N\}$, яка збігається до числа $y_{\circ}$. Отже,

$$\lim_{n \to +\infty} y'_{n_\kappa} = y_{\circ},$$

що рівносильно рівності

$$\lim_{n \to +\infty} f(x'_{n_\kappa}) = f(x_{\circ}),$$

яка суперечить (6.7). Таким чином, припущення не вірне. Теорему доведено.

Теорема 6.12 (***про достатні умови неперевності оберненої функції на інтервалі).*** *Нехай* $f : (a,b) \to R$, *де* $a,b \in \overline{R}$, *і нехай :*

1) $f \uparrow_S$ *на функції* f *;*

2) $f \in C((a,b))$ *.*

Тоді f *має обернену функцію* $f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$*, яка теж строго зростає і є неперервною на* (c,d)*. При цьому,*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \;\; d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доведення. Існування і строге зростання оберненої функції $f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$ слідує за **теоремою 6.10**. Доведемо її неперервність . Нехай $y_\circ$ - довільна точка інтервалу (c,d), яка є образом деякої точки $x_\circ \in (a,b)$ при відображенні f. Тоді знайдеться відрізок, який містить точку $x_\circ$ і сам міститься у інтервалі (a,b). Наприклад, це відрізок $[a',b']$, де

$$a' = x_\circ - \varepsilon, \; b' = x_\circ + \varepsilon, \; \varepsilon = \min\{1, |x_\circ - a|, |x_\circ - b|\}.$$

Тоді на відрізку $[a',b']$ виконуються умови попередньої теореми, і, отже, в точці $y_\circ$ обернена функція є неперервною, що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи 6.5: *Довести, що* **теореми 6.10 і 6.11** *справджуються і за умови строгого спадання функції* f *.*

Зауваження 6.4. *За* **теоремами 6.10 і 6.11** *слідує, що їх твердження справджуються і за умови задання функції* f *на сегментах* $[a,b)$ або $(a,b]$.

Лекція № 7

Неперервність основних елементарних функцій

Приклад 7.1. Розглянемо функцію $f(x)=x$. Виберемо довільні числа $\varepsilon>0$ та $x_0\in R$. Тоді за нерівністю $0<|x-x_\circ|<\varepsilon$ слідує нерівність

$$|f(x)-f(x_\circ)|=|x-x_\circ|<\varepsilon.$$

Отже, має місце рівність $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$, тобто, функція $f(x)=x$ є неперервною у будь-якій точці $x_0\in R$ числової осі.

Тоді за теоремою про арифметичні операції над неперервними функціями **(теорема 6.1)** функція $f(x)=x^n=x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$ теж є неперервною у будь-якій точці $x_0\in R$ при довільному натуральному показнику степеня $n\in N$.

Аналогічно, за тією ж теоремою функція $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ є неперервною на всій дійсній числовій осі крім точки $x_0=0$.

Так як функція $f(x)=x^{2n-1}$, $n\in N$, є строго зростаючою і неперервною на R, то обернена до неї функція $f(x)=x^{\frac{1}{2n-1}}, x\in R,$ теж є неперервною (за теоремою про неперервність оберненої функції).

Аналогічно, функція $f(x)=x^{\frac{1}{2n}}$, $n\in N$, є неперервною на пів осі $[0,+\infty)$.

Тоді, знову ж таки за теоремою про арифметичні операції над неперервними функціями , функції $f(x)=x^{\frac{-1}{2n-1}}$ та $f(x)=x^{\frac{-1}{2n}}$, $n\in N$, є неперервними у кожній точці їх областей визначення.

Наслідок 7.1. *Степенева функція* $f(x)=x^{\alpha}$ *є неперервною у кожній точці її області визначення при будь-якому раціональному показнику степеня* $\alpha \in Q$.

Теорема 7.1 (***про неперервність основних елементарних функцій*** **).** *Всі основні елементарні функції, тобто функції* x^{α}, a^{x}, $\log_a x$, $\cos x$, $\sin x$, tgx, $ctgx$, $\arccos x$, $arc\sin x$, $arctgx$, $arcctgx$ *є неперервними у кожній точці їх областей визначення.*

Доведення: 1) Доведемо, спочатку, що показникові функція $f(x)=a^{x}$, $x \in R$, є неперервною у нулі.

Для цього покажемо, що
$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (7.1).$$

Нехай $a \geq 1$. Тоді знайдеться таке натуральне число $n_{\circ} \in N$, що для всіх більших за $n_{\circ}$ чисел $n \in N$ виконуються нерівності
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Але, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, тому, за теоремою про три послідовності,
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a \geq 1.$$

Якщо $a \leq 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$, так як $\dfrac{1}{a} \leq 1$. Таким чином, рівність (7.1) доведено для всіх $a > 0$.

Виберемо довільну послідовність $\{ x_n \mid n \geq 1\}$ додатних чисел, яка збігається до нуля: $x_n \to 0, n \to +\infty$ і $x_n > 0, n \geq 1$. Покладемо $k_n := \left[\dfrac{1}{x_n}\right]$, $n \geq 1$, де $\left[\dfrac{1}{x_n}\right]$ - ціла частина числа $\dfrac{1}{x_n}$. Тоді,
$$k_n \leq \frac{1}{x_n} < k_n + 1 \ <=> \ \frac{1}{k_n+1} < x_n \leq \frac{1}{k_n},\ n \geq 1.$$

Тому виконуються нерівності

$$a^{\frac{1}{k_n+1}} < a^{x_n} \le a^{\frac{1}{k_n}}, \quad \text{якщо } a \ge 1, \quad \text{і}$$

$$a^{\frac{1}{k_n+1}} > a^{x_n} \ge a^{\frac{1}{k_n}}, \quad \text{якщо } a \le 1.$$

Але послідовності чисел $a^{\frac{1}{k_n}}$ та $a^{\frac{1}{k_n+1}}$ є під послідовностями послідовності $\{\sqrt[n]{a} | n \in N\}$, яка збігається до одиниці при $n \to +\infty$. Тому,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{k_n}} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{k_n+1}} = 1.$$

А значить, за теоремою про три послідовності, маємо $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{x_n} = 1.$

Отже, згідно означення границі функції за Гейне , $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} a^x = 1,$

тобто, показникова функція $f(x) = a^x$ є неперервною у нулі зправа. Але,

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} a^x = \lim_{x\to+0} \left(\frac{1}{a}\right)^x = 1.$$

Таким чином, функція неперервна з обох сторін в точці $x_0 = 0$, тому, показникова функція $f(x) = a^x$ є неперервною у нулі.

Нехай точка $x_0 \in R$ - довільна. Позначимо $x - x_\circ := \Delta x$, тоді маємо

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \lim_{x\to x_\circ} a^x = a^{x_\circ} \lim_{x\to x_\circ} a^{x-x_\circ} = a^{x_\circ} \lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = a^{x_\circ} \cdot 1 = a^{x_\circ} = f(x_\circ).$$

Отже, показникова функція $f(x) = a^x$ є неперервною на всій числовій осі.

2) Нехай $f(x) = \log_a x, \ \ x > 0, \ \ a > 0, a \ne 1$. Так як логарифмічна функція є оберненою до показникової, неперервної і строго монотонної, то неперервність логарифмічної функції випливає з теореми про неперервність оберненої функції (**теорема 6.12**).

3) Нехай $f(x)=x^{\alpha}$. Якщо показник степеня $\alpha\in R$- раціональний, то неперервність функції була доведена раніше (**приклад 7.1**).Якщо $a\in R\setminus Q$- ірраціональне число, то

$$x^{a}=e^{\ln x^{a}}=e^{a\ln x},\qquad x>0.$$

Тому, в цьому випадку, неперервність степеневої функції випливає з теореми про збереження неперервності функцій при арифметичних операціях над ними **(теорема 6.1)** та про неперервність складної функції (**теорема 6.3**).

4) Доведемо неперервність функції $f(x)=\sin x,\ x\in R.$

Дійсно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\varepsilon>0:\ 0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon\ \Rightarrow\ |\sin x-\sin x_0|=$$

$$=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon.$$

Тому, за означенням границі по Коші,$\exists\ \lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,\quad x_0\in R.$

Отже, функція f неперервна на множині дійсних чисел R.

5) Неперервність функції $f(x)=\cos x,\ x\in R,$ випливає з неперервності функцій $\sin x$ та $x+\frac{\pi}{2}$, так як $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),\ x\in R.$

6) Неперервність функцій $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ і $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}$ на відповідних областях їх визначення слідує за теоремою про збереження неперервності функцій при арифметичних операціях над ними **(теорема 6.1).**

7) Неперервність функцій $arc\sin x,\ \arccos x,\ arctgx$ і $arcctgx$ на їх областях визначення слідує за теоремами про неперервність оберненої функції (**теореми 6.11-6.12**) і вище доведеного.

Доведення теореми закінчено.

Перейдемо до доведення теореми про класичні границі функцій у точці нуль.

Доведення теореми 5.10.

I. 1) Границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ було доведено в **теоремі 5.7**.

2) Так як функція $\frac{1}{\cos x}$ неперервна в точці нуль і має границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=1,$$

то за теоремою про арифметичні операції над границями функцій (**теорема 5.4)** маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1\cdot$$

3) Функція $\arcsin x$ неперервна, і ,тому, має границю в нулі, а також існує границя функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$ і , таким чином, функцію $\frac{x}{\sin x}$ можна вважати неперервною у нулі, якщо доозначити її у цій точці одиницею. Отже, згідно **теореми 6.2** про границю складеної функції, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1.$$

4) Аналогічно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$ (Довести самостійно!!!).

5) Точно так, згідно **теореми 6.2** про границю складеної функції та теореми про арифметичні операцій над границями функцій (т**еорема 5.4)** маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

6) Аналогічно, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{(kx)}=1.$

II. 1) Нехай $g(y):=(1+y)^{\frac{1}{y}}$, $y\neq 0$. Покладемо $f(x):=\frac{1}{x},\ x>0$.

Тоді $(g\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. У **теоремі 5.8** було доведено, що

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Отже, якщо доозначити функцію $g\circ f$ у точці

$x_\circ=\infty$ як $(g\circ f)(\infty):=e$, то функція стає неперервною у цій точці.

Функція $f(x)=\frac{1}{x},\ x>0,$ має неперервну обернену, і $\lim_{x\to +0}f(x)=+\infty$.

Тому, за **теоремою 6.4**, виконавши заміну змінної $y=\frac{1}{x}$, отримаємо:

$$g(+0)=\lim_{y\to +0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

Аналогічно, $g(-0)=\lim_{y\to -0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Так як існують границі $g(+0)=g(-0)=e$, то, за **теоремою 6.5**, існує границя

$$\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

2) Так як функція $g(y)=\log_a y,\ y>0\ (a>0, a\neq 1)$ є

неперервною і існує границя $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$ то за теоремою про

границю складної функції (**теорема 6.2**), існує границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\ .$$

3) Відповідно, при $a=e$ маємо : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln e}=1$.

4) Так як функція

$$f(x)=a^x-1,\ \ x\in R\ \ (a>0,\, a\neq 1)$$

є неперервною і монотонною, то вона має неперервну обернену функцію $x=\log_a(y+1)$. Отже, згідно **тереми 6.4**, можна виконати заміну $y=a^x-1$, маємо :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a\ \ .$$

5) Відповідно, якщо $a=e$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$$

6) Аналогічно, функція

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}-1\quad(\alpha\neq 0)$$

є строго монотонною і неперервною в лівому і правому околі точки $x_0=0$. Отже, користуючись аргументацією попереднього пункту, і виконавши заміну $y=(1+x)^{\alpha}-1$, та враховуючи співвідношення

$$\ln(1+y)=\alpha\ln(1+x),$$

маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{y}{x}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\ln(1+x)}=$$

$$=\alpha\lim_{x\to\pm 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{y\to\pm 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\alpha\cdot 1\cdot 1=\alpha.$$

Теорему доведено.

Про обчислення границь функцій

По-перше, слід зауважити, що найлегше знайти границю функції, якщо вдається довести її неперервність: в цьому випадку питання зводиться до обчислення значення функції.

По-друге, як було вже зауважено на лекції №5, до знаходження границі функції у нескінченно віддаленій точці $+\infty$ (а, при певній модифікації, і в точках $-\infty$ та ∞) можна застосовувати методи, які були розвиненні для обчислення границь числових послідовностей.

По-третє, при доведенні теореми 5.10 вже були продемонстровані методи обчислення границь функцій у граничній точці 0 (нуль) – це застосування різних теорем про границі функцій та про їх неперервність. Перш за все, це теореми про арифметичні операції над границями (теорема 5.4), про границю складеної функції (теорема 6.2), про заміну змінної (теореми 6.2 і 6.4), про класичні границі у нулі (теорема 5.10), тощо (насправді, всі теореми важливі – важко виявити серед них найважливіші!!!).

По-четверте, якщо гранична точка $x_\circ$ не є нульовою, то її можна зробити нульовою, виконавши заміну змінної

$$t = x - x_\circ \qquad (\Leftrightarrow x = t + x_\circ),$$

яку (заміну) називають ***лінійним зсувом*** змінної на величину $x_\circ$.

По-п'яте, граничну точку $+\infty$ можна перевести у граничну точку $+0$ і навпаки (відповідно , точку $-\infty$ - у точку -0, і точку ∞ - у точку 0) заміною змінної

$$x = \frac{1}{t} \quad .$$

Звичайно, ми говорили тільки про методи , які спонукувані матеріалом, викладеним на попередніх лекціях, але на цьому математика не закінчується!

Начебто, про головне все сказано - все інше (знання, розуміння, майстерність) здобувається на практиці !!!

Приклад 7.1. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))}$.

Розв'язання

Досить просто зрозуміти, що функція $f(x)=\sqrt{2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))}$ неперервна у граничній точці $x_\circ=0$.

Дійсно, функція $f_1(x)=1+x$ є неперервною за **теоремами 6.1** та **7.1** на всій осі дійсних чисел як сума неперервних функцій $f_2(x)=1,\ x\in R,$ та $f_3(x)=x,\ x\in R$.

Функція $f_5(x)=\ln(1+x)$ є неперервною у точці $x_\circ=0$ **за теоремою 6.3** як суперпозиція $f_5=f_4\circ f_1$ неперервних функцій $f_1(x)=1+x$ та $f_4(x)=\ln x$.

У свою чергу, за **теоремою 6.1** різниця $f_6(x):=\frac{\pi}{4}-\ln(1+x)$ є неперервною функцією як різниця сталої функції $\frac{\pi}{4}$ і неперервної функції f_5.

Далі, за **теоремою 6.3** функція $f_8(x):=tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))$ те ж є неперервною як суперпозиція $f_8=f_7\circ f_6$ неперервних функцій $f_6(x)=\frac{\pi}{4}-\ln(1+x)$ та $f_7(x)=tg\,x$.

Потім, , за **теоремою 6.1** функція $f_9(x):=2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))$ є неперервною як сума неперервних функцій $f_8(x):=tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))$ та константи.

Нарешті, функція $f(x)=\sqrt{2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))}$, що стоїть під знаком шуканої границі, неперервна у граничній точці $x_\circ=0$ за **теоремами 7.1** та **6.3** як суперпозиція $f\ =f_{10}\circ f_9$ неперервної функції $f_9(x):=2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))$ та елементарної функції $f_{10}(x)=\sqrt{x}$.

Отже, за означенням неперервності функції в точці, маємо:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\ =\ f(0)\ =\sqrt{2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+0))}\ =\sqrt{3}\ .$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2+tg(\frac{\pi}{4}-\ln(1+x))}=\sqrt{3}$.

Начебто, складна була границя - але просто обчислюється !!!

***Приклад** 7.2.* Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Розв’язання.

Для спрощення функції, яка стоїть під знаком границі, застосуємо основну логарифмічну тотожність:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}=\left|a=e^{\ln a},\ a>0\right|=$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}} .$$

Після цього, за **теоремою 6.2**, знак границі можна внести під знак неперервної функції (експоненти):

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\sin x}} .$$

Далі наша мета – звести границю до тих, що фігурують у таблиці границь **теореми 5.10**. Для цього домножимо і розділимо останній дріб на множники $\cos x - 1$ та x, тоді границю можна переписати у вигляді:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x-1}{x}\right)} .$$

Але за **теоремою 5.10** (про класичні границі у точці нуль), за **теоремою 5.4** (про арифметичні операції над границями функцій) та за неперервністю функції $f(x) = x$ існують такі границі функцій:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 ;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot x\right) = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot \lim_{x\to 0} x = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0 .$$

Крім того, якщо доозначити функцію $g(y) = \dfrac{\ln(1+y)}{y}$ у точці нуль одиницею, тобто, як $g(0) = 1$, то ця функція стає неперервною у нулі, отже, за **теоремою 6.2** можна виконати заміну змінної у наступній границі:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\right) = \left|\begin{array}{l} \textit{заміна змінної}: \\ t=\cos x-1, \\ t\to 0, \textit{якщо}\, x\to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Тому, за **теоремою 5.4** про арифметичні операції над границями функцій, остаточно отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}} =$$

$$= e^{1\cdot 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = e^{0} = 1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = 1.$

Нескінчено малі та нескінчено великі величини

Означення 7.1. *Нехай функція f визначена в деякому, можливо виколотому, околі точки $x = x_0 \in \overline{R}$. Кажуть, що функція f є* ***нескінченно малою (великою) величиною*** *в точці $x = x_0$, якщо*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad (\textit{відповідно, } \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty).$$

Означення 7.2. *Нехай функція* f *і* g *є нескінченно малі величини в точці* $x = x_0 \in \overline{R}$*. Тоді кажуть, що :*

а) f *є нескінченно малою величиною* ***вищого порядку*** *ніж* g*, і позначають* $f = o(g)$*, якщо*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0;$$

б) f *і* g *є нескінченно малими величинами* ***одного порядку****, якщо*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = a \in R \setminus \{0\} ;$$

в) f *є нескінченно малою величиною* ***нижчого порядку*** *ніж* g*, відповідно,* g *є вищого порядку ніж* f*, якщо*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \infty ;$$

г) f *і* g *є* ***непорівнянні****, якщо*

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g};$$

д) f *і* g *є* ***еквівалентними****, і пишуть* $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$*, якщо*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$$

е) *Нескінченно мала величина* f *має* ***головне значення*** $c(x - x_0)^k$*,* $(x_0 \in R)$*, якщо*

$$f \underset{x \to x_0}{\sim} a(x - x_0)^k, \quad (a \neq 0).$$

ж) *f є нескінченно малою величиною по* ***порядку k > 0*** *по відношенню до нескінченно малої величини* g*, якщо*

$$\exists \lim_{x \to x_\circ} \frac{f}{g^k} = a \in R \setminus \{0\} \quad <=> \quad f \underset{x \to x_\circ}{\sim} ag^k.$$

Зауваження 7.1. *Аналогічне означення дається і для нескінченно великих величин (*написати самостійно !!!*).*

Як наслідок з **теореми 5.10** випливає таке твердження:

Теорема 7.2 (***про таблицю класичних еквівалентностей у нулі***). *Нехай* $x \to 0$*, тоді:*

1) $\sin x \sim x, \qquad tgx \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$

$arctgx \sim x, \qquad (e^{x} - 1) \sim x, \qquad \ln(1+x) \sim x,$

2) $(a^{x} - 1) \sim x \ln a \qquad (a > 0,\ a \neq 1),$

3) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1),$

4) $(1 - \cos x) \sim \dfrac{x^2}{2},$

5) $shx \sim x,$ *де функція* $shx := \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ *називається* ***гіперболічним синусом*** ,

6) $chx - 1 \sim \dfrac{x^2}{2},$ *де функція* $chx := \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ *називається* ***гіперболічним косинусом*** **.**

Доведення. Еквівалентності 1) -4) елементарно випливають за **теоремою 5.10** і означенням еквівалентності нескінченних малих величин.

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{shx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad shx \underset{x\to 0}{\sim} x \cdot$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{chx}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2+e^{-x}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2}{x^2}=\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\left(sh\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1^2=1 <=> chx-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}.$$

Теорему доведено.

Теорема 7.3 (***про деякі властивості відношення еквівалентності нескінченно малих величин***). *Нехай функції* f,g,h *визначені і є нескінченно малими величинами в деякому околі точки* $x=x_0$. *Тоді:*

1) Якщо $f\sim g,\ g\sim h$ *при* $x\to x_0$ *, то* $f\sim h,$ *при* $x\to x_0$.

2) Якщо $f\sim g$ *при* $x\to x_0$ *, то:*

$$\begin{cases}\exists\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot h)=a <=> \exists\lim\limits_{x\to x_0}(g\cdot h)=a\\ \exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=a <=> \exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=a\end{cases}.$$

3) $f\sim g$ *при* $x\to x_0$ $<=>$ $f-g=o(f)$ *при* $x\to x_0$.

4) $f\sim g\,,\ h=o(f)$ $=>$ $(f+h)\sim g$.

5) $f\sim g$ *при* $x\to x_0,\ h\in C(\{x_\circ\})$ $=>$ $f\cdot h\sim h(x_0)\cdot g$ *при* $x\to x_0$.

6) $f\sim g$ *при* $x\to x_0$ $=>$ $\forall\alpha>0$ $f^\alpha\sim g^\alpha$ *при* $x\to x_0$.

7) $f\sim g$ *при* $x\to x_0,$ $\lim\limits_{t\to t_\circ}h(t)=x_\circ$ $=>$ $f\circ h\sim g\circ h$ *при* $t\longrightarrow t_\circ$.

Доведення. 1) Нехай $f\sim g$ і $g\sim h$ при $x\to x_0$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)} = 1\cdot 1 = 1\cdot$$

Отже, $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$.

2) Твердження другого пункту теореми є наслідком рівностей

$$f\cdot h = \frac{f}{g}\cdot gh, \qquad \frac{h}{f} = \frac{g}{f}\cdot\frac{h}{g} \qquad .$$

Так як ,згідно умови теореми, існує границя відношень

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{g}{f} = 1,$$

то границя лівої частини, приведених вище рівностей, існує тоді і тільки тоді, коли існує границя правої частини рівностей.

3) Нехай $f \sim g$ при $x \to x_0$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f-g)}{f} = 1 - \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \quad f - g = o(f).$$

Тобто, різниця $f - g$ є нескінченно малою величиною вищого порядку ніж f. З іншого боку, якщо $f - g = o(f)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{(f-g)+g}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{f-g}{g} + 1 = 0 + 1 = 1 \;<=>\; \underset{x\to x_\circ}{f \sim g}\cdot$$

7) Нехай $f \sim g$ при $x \to x_\circ$, тоді $\lim\limits_{x\to x_\circ}\frac{f}{g} = 1$. Отже, якщо доозначити відношення функцій f і g у точці $x_\circ$ одиницею, то воно стає у цій точці неперервним. Тому, за теоремою про границю складної функції слідує існування границі

$$\lim_{t\to t_\circ}\frac{f\circ h}{g\circ h} = 1,$$

тобто, $f\circ h \sim g\circ h$, що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи 7.1: *Довести пункти* 4)-6) *попередньої теореми.*

Завдання для самостійної роботи 7.2: *Привести словесне формулювання теореми.*

***Завдання для самостійної роботи** 7.3:* *Довести, що за умов*

1) функції f_1, g_1, f_2, g_2 *визначені і є нескінченно малими величинами в деякому околі точки* $x = x_0$*;*

2) $f_1 \sim g_1, \quad f_2 \sim g_2, \quad$ *при* $x \to x_\circ$*;*

3) числа $\alpha, \beta \in R$ *такі, що нескінченно мала* αf_1 **не (!!!)** *є еквівалентною величині* $(-\beta g_1)$,

слідує:

$$\alpha f_1 + \beta g_1 \quad \sim \quad \alpha f_2 + \beta g_2 \ .$$

Суть техніки застосування нескінченно малих величин до знаходження границь функцій полягає у тому, щоб замінити складні множники або доданки у границі на простіші нескінченно малі. При цьому слід пам'ятати, що доданки можна міняти на їм еквівалентні лише тоді, коли це не приводить до різниці двох еквівалентних нескінченно малих величин .

***Приклад** 7.3.* Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - chx}{\sin x \cdot shx}$.

Розв'язання.

За **теоремою 7.2** справджуються такі еквівалентності:

$$\sin x \sim x, \quad shx \sim x, \quad (1-\cos x) \sim \frac{x^2}{2}, \ x \to 0.$$

Тому за **теоремою 7.3** добуток цих нескінченно малих величин еквівалентний добутку їх еквівалентних величин, тобто,

$$\sin x \cdot shx \sim x \cdot x = x^2, \quad x \to 0.$$

Аналогічно, за еквівалентностями

$$(1-\cos x) \sim \frac{x^2}{2}, \quad (\mathrm{c}hx - 1) \sim \frac{x^2}{2}, \qquad x \to 0,$$

слідує, що

$$\cos x - \mathrm{c}hx = -(1-\cos x) - (\mathrm{c}hx - 1) \sim$$

$$\sim -\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}=-x^2, \quad x\to 0 \ .$$

Отже, замінивши вказані множники шуканої границі на їм еквівалентні, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - chx}{\sin x\cdot shx} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2} = -1 \ .$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - chx}{\sin x\cdot shx} = -1$.

Теорема 7.4 (***про класичні еквівалентності на нескінченності***).

1. *Нехай* $x\to\infty$, *тоді:*

$$P_n(x)=a_{\circ}+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \ \sim \ a_nx^n \ , \quad a_n\neq 0, \, n\in N.$$

2. *Нехай* $x\to+\infty$, *тоді:*

$$F_n(x)=a_{\circ}+a_1x^{k_1}+a_2x^{k_2}+...+a_nx^{k_n} \ \sim \ a_nx^{k_n} \ , \quad a_n\neq 0, \, n\in N,$$

де $k_1 , k_2 , ..., k_n$ *- довільні додатні показники степеня.*

Завдання для самостійної роботи ***7.4:*** *Довести* **теорему 7.4** *самостійно.*

Аналогічно до **теореми 7.3** можна сформулювати і довести твердження про властивості еквівалентності нескінченно великих величин.

Теорема 7.5 (***про деякі властивості відношення еквівалентності нескінченно великих величин***). *Нехай функції* f,g,h *визначені і є нескінченно великими величинами в деякому околі точки* $x=x_0$. *Тоді:*

1) Якщо $f\sim g, \ g\sim h$ *при* $x\to x_0$ *, то* $f\sim h,$ *при* $x\to x_0$.

2) Якщо $f\sim g$ *при* $x\to x_0$ *, то:*

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)=a <=> \exists \lim\limits_{x\to x_0} (g\cdot h)=a \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)}=a \quad <=> \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)}=a \end{cases}.$$

3) $f \sim g$ *при* $x\to x_0$ $<=>$ $f-g$ *- нескінченно велика величина меншого порядку ніж* f *або* g *при* $x\to x_0$.

4) $f \sim g$, h *- нескінченно велика величина меншого порядку ніж* f *або* g *при* $x\to x_0$ $=>$ $(f+h)\sim g$

5) $f \sim g$ *при* $x\to x_0,\ h\in C(\{x_\circ\})$ $=>$ $f\cdot h \sim h(x_0)\cdot g$ *при* $x\to x_0$.

6) $f \sim g$ *при* $x\to x_0$ $=>$ $\forall\alpha>0$ $f^{\alpha}\sim g^{\alpha}$ *при* $x\to x_0$.

7) $f \sim g$ *при* $x\to x_0$, $\lim\limits_{t\to t_\circ} h(t)=x_\circ$ $=>$ $f\circ h \sim g\circ h$ *при* $\boldsymbol{t \longrightarrow t_\circ}$.

***Завдання для самостійної роботи** 7.5:* *Довести* **теорему 7.5** *самостійно.*

***Приклад** 7.4.* Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[4]{x-3}}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}$.

Розв’язання.

За **теоремою 7.4** слідує:

$$x^2-1\sim x^2,\ x-3\sim x,\ (x+5)^2\sim x^2, \qquad x\to\infty,$$

тому, за **теоремою 7.5** , маємо**:**

$$\sqrt[3]{x^2-1}\sim x^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[4]{x-3}\sim x^{\frac{1}{4}},\ \sqrt[3]{(x+5)^2}\sim x^{\frac{2}{3}}, \qquad x\to\infty$$

$$\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[4]{x-3} \sim x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{4}} \sim x^{\frac{2}{3}}, \qquad x\to\infty .$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[4]{x-3}}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=1$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[4]{x-3}}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}=1$.

Лекція № 8.

Похідна функції та її властивості

Нехай задано функцію $f:A\to R,\ \ x_0\in A,\ \ B(\delta,x_0)\subset A$. Позначимо: $\Delta x:=x-x_0,\ \Delta f(x_0):=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Означення 8.1. *Якщо існує скінчена границя*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

то ця границя називається ***похідною функції*** f *в точці* x_0 *і позначається:*

$$f'(x_0)\ \textit{або}\ \frac{df(x_0)}{dx}\ \textit{або}\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}\ \textit{або}\ f'_x(x_0).$$

Таким чином,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \qquad (8.1).$$

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** *функції* f.

Означення 8.2. ***Лівою і правою похідною*** *функції* f *в точці* x_0 *називаються відповідно границі:*

$$f'_-(x) = f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x) = f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Зауваження 8.1. *Похідна функції* f *існує в точці* x_0 *тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують права та ліва похідні функції* f, *і вони співпадають між собою. Тобто,*

$$\exists\ f'(x_0) \ \ <=> \ \ \exists\ f'_-(x_0) = f_+(x_0) \qquad (8.2)\,.$$

Означення 8.3. Будемо говорити, що функція f має ***похідну на множині*** B, якщо в кожній точці $x_0 \in B$ існує похідна $f'(x_0)$. Клас функцій, що мають похідну на множині B, будемо позначати як $D(B) := \{ f \mid \forall x_0 \in B\ \exists f'(x_0) \}$.Тоді ,

$$\exists f'(x_0) <=> f \in D(\{x_0\}) \qquad (8.3).$$

Теорема 8.1 (***про характеризацію функції, що має похідну***). *Нехай функція* f *має похідну в точці* x_0. *Тоді в деякому околі* $B(\delta, x_0)$ *її можна подати у вигляді*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \qquad (8.4),$$

де $\alpha(x)$ *-нескінченно мала неперервна величина в точці* x_0.

Доведення. $f \in D(\{x_0\}) <=> \exists f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x)}{x - x_0} <=>$

$$\Leftrightarrow \alpha^*(x) := \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Звідки випливає, що в деякому виколотому околі $\overset{0}{B}(\delta, x_0)$ виконується рівність

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha^*(x)(x - x_0) \qquad (8.4),$$

де $\alpha^*(x)$ - нескінчено мала величина в точці x_0.

Покладемо, $\alpha(x) := \left[\begin{array}{ll} \alpha^*(x), & x \in \overset{\circ}{B}(\delta, x_0) \\ 0, & x = x_0 \end{array} \right.$.

Тоді функція $\alpha(x)$ буде неперервною нескінченно малою величиною , і при цьому має місце рівність

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Що і потрібно було довести.

Теорема 8.2 (***про необхідну умову існування похідної***). *Нехай функція f має похідну в точці $x = x_0$, тоді функція f в цій точці є неперервною. Тобто,*

$$f \in D(\{x_0\}) \quad => \quad f \in C(\{x_0\}) \qquad (8.5).$$

Доведення. Нехай $f \in D(\{x_0\})$, тоді з попередньої теореми випливає, що існує границя

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \right] = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0) \ ,$$

що і потрібно було довести.

Теорема 8.3 (***про похідну складної функції***). *Нехай функція* f *визначення в деякому околі точки* x_0 *, має в цій точці похідну* $f'(x_0)$ *та приймає значення* $y_0 = f(x_0)$*.Нехай функція* g *визначена в деякому околі точки* y_0 *і теж має похідну* $g'(y_0)$*.Тоді існує похідна складної функції* $g \circ f$ *в точці* x_0*, і при цьому*

$$(g \circ f)'(x_0) = g(f)'\big|_{x=x_0} = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \qquad (8.6).$$

Тобто,

$$\begin{cases} f \in D(\{x_0\}) \\ g \in D(\{y_0\}) \quad => \quad g \circ f \in D(\{x_0\}), \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

Доведення. Нехай $g \in D(\{y_0\})$, тоді в деякому околі $B(\delta, y_0)$ точки y_0 функцію g можна подати у вигляді

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \alpha(y)(y - y_0),$$

де $\alpha(y)$ -неперервна нескінченно мала величина в точці y_0. Але за неперервностю функції f в точці x_0 випливає, що знайдеться такий ε - окіл $B(\varepsilon, x_0)$, що для всіх точок $x \in B(\varepsilon, x_0)$ маємо $f(x) \in B(\delta, y_0)$. Тоді, підставивши $y = f(x)$ в попередню рівність , отримаємо:

$$g(f(x)) = g(y_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + \alpha(f(x))(f(x) - y_0) =$$
$$= g(f(x_0)) + g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + \alpha(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

А тому, за існуванням похідних $g'(y_0)$ і $f'(x_0)$ випливає, що існує границя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[g'(y_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\alpha(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=$$

$$=g'(y_0)f'(x_0)+0\cdot f'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0).$$

При цьому враховано, що за неперервністю функцій α в точці y_0 і f в точці x_0 випливає неперервність функції $\alpha(f)$, і тому

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(f(x))=\alpha(f(x_0))=\alpha(y_0)=0.$$

Теорему доведено.

Теорема 8.4 (***про арифметичні операції над похідними*).** Нехай існують похідні $f'(x_0)$ і $g'(x_0)$ функцій f та g в точці x_0. Тоді існують і похідні функцій $af \quad (a\in R),\quad fg,\quad f\pm g,\quad \frac{f}{g}$ (якщо $g(x_0)\neq 0$), і при цьому:

1) $(a)'(x_0)=0$, де $a=const$.

2) $(af)'(x_0)=af'(x_0)$.

3) $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.

4) $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},\quad (g(x_0)\neq 0)$.

Доведення. Доведемо, наприклад, третє твердження теореми. Використовуючи **теорему 5.4** про збереження арифметичних операцій при взятті границі, отримаємо

$$f,g\in D(\{x_0\}) \;<=>\; \exists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\;\; \exists\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \exists\,(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\left[\left(f(x)+g(x)\right)-\left(f(x_0)+g(x_0)\right)\right]}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)-g'(x_0).$$

Змінивши в попередніх викладках суму функцій f та g на їх різницю, одержимо

$$(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0).$$

Аналогічно доводяться і інші пункти теореми. Так для п’ятого твердження теореми за **теоремами 5.4 і 8.2** маємо:

$$\exists\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)g(x_0)}\right]\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\left[g(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-y(x_0)}{x-x_0}\right]=$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},\quad (g(x_0)\neq 0)\cdot$$

Де враховано, що з того, що існує похідна $g'(x_0)$, випливає неперервність функції g в точці x_0. Тому, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$

П’яте твердження теореми доведено.

Завдання для самостійної роботи 8.1: Довести пункти 1),2),4) попередньої теореми.

Похідна оберненої функції

Теорема 8.5 (*про похідну оберненої функції*). *Нехай* $-\infty \le a < b \le +\infty$ *і функція* $f:(a,b)\to R$ *задовольняє умовам :*

$$\begin{cases} f \in C\big((a,b)\big) \\ f \uparrow_s \text{ або } f \downarrow_s \text{ на } (a,b) \\ \exists\ f'(x_0) \ne 0 \end{cases} .$$

Тоді існує похідна оберненої функції $g := f^{-1}$ *у відповідній точці* $y_0 = f(x_0)$, *і при цьому* $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$ *, тобто,*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (8.7).$$

Доведення. Нехай, наприклад, функція строго спадає на інтервалі, тобто, $f \downarrow_s$ на (a,b). Тоді за **теоремою 6.12** про існування і неперервність оберненої функції випливає, що існує обернена неперервна строго спадна функція $g = f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$, де $c = \inf f$ і $d = \sup f$ на (a,b). Так як f і g взаємно обернені функції, то $f(g(y)) = y,\ y \in (c,d)$. Нехай $f(x_0) = y_0 \in (c,d)$, тобто, $g(y_0) = x_0$. Тоді, за **теоремою 8.1** слідує:

$$y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) =$$

$$= f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \alpha(x)\cdot(x - x_0) =$$

$$= f'(g(y_0))\cdot(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0)) ,$$

де $\alpha(x)$ - нескінченно мала неперервна величина в точці x_0, тому $\alpha(g(y))$ - нескінченно мала неперервна величина в точці y_0. Отже,

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{f'(g(y_0))(g(y)-g(y_0))+\alpha(g(y))(g(y)-g(y_0))} =$$

$$= \lim_{y - y_0} \frac{1}{f'(g(y_0))+\alpha(g(y))} = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Тобто, існує похідна $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Що і потрібно було довести.

Теорема 8.6 (***про таблицю похідних основних елементарних функцій*****).**

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \ \alpha \in R \cdot$

2) $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a, \ \ a > 0, \qquad \left(e^{x}\right)' = e^{x}, \ \ x \in R.$

3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ (\ln x)' = \frac{1}{x}, \ \ a > 0, a \neq 1, x > 0, \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0.$

4) $(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x, \ (shx)' = chx, \ (chx)' = shx, \ x \in R.$

5) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z, \ \ (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \ x \neq n\pi, n \in Z,$

$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \ x \in R, \qquad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}, \ x \neq 0,$

де функція $thx := \frac{shx}{chx}$ *називається* ***тангенсом гіперболічним,*** *а функція* $cthx := \dfrac{chx}{shx}$ ***- котангенсом гіперболічним.***

6) $$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$$

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R\cdot$$

7) $$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}, \quad \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$ *на*

відповідних областях визначення лівих і правих частин рівностей.

Доведення .1) Нехай $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha \in R$. Тоді на підставі означення похідної та т**еореми 5.10** маємо:

$$(x^{\alpha})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \left| \text{Заміна}: \frac{\Delta x}{x} = t \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0 \right| = x^{\alpha-1} \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\alpha} - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Аналогічно обчислюється похідна степеневої функції у тих випадках, коли вона має ширшу область визначення.

2) Нехай $f(x) = a^x$, $x \in R$, $a > 0$. З таких самих міркувань, як і в попередньому пункті доведення, отримаємо:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a \cdot$$

3) Нехай $f(x)=\log_a x, \quad x>0, \ a>0, \ a\neq 1$. Тоді,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Якщо $a=e$, то $\ln a=1$. Тому, $(\ln x)'=\frac{1}{x}, \ x>0$.

За теоремою про складне диференціювання маємо:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}, \ x<0.$$

Тому, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \ x\neq 0$.

4) Нехай $f(x)=\cos x, \ x\in R$. Тоді,

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} =$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Так як функція $\sin x$ неперервна на R, то $\sin\left(x+\frac{\Delta x}{x}\right)\to\sin x$, коли $\Delta x\to 0$. Користуючись формулою зведення кутів тригонометричних функцій та правилом обчислення похідної складної функції, маємо:

$$(\sin x)' = \left(\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)' = \cos x\cdot(1-0) = \cos x, \ x\in R.$$

Обчислимо похідні гіперболічних функцій:

$$(shx)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)'-(e^{-x})'\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\cdot(-x)'\right] = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = chx, \ x\in R.$$

Аналогічно, $(chx)' = shx,\ x \in R$.

5) Щоб отримати похідну $f(x) = tgx,\ x \neq \frac{1}{2}\pi + \kappa\pi,\ \kappa \in Z,$ застосуємо теорему про похідну частки:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

Аналогічно, $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi,\ k \in Z\ \cdot$

Легко перевірити, що $ch^2 x - sh^2 x = 1, x \in R$. Дійсно,

$$ch^2 x - sh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = 1.$$

Тому,

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)' \cdot chx - shx \cdot (chx)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}, x \in R.$$

Аналогічно можна отримати : $\left(cthx\right)' = -\frac{1}{sh^2 x},\ x \neq 0\ .$

6) Знайдемо похідні обернених тригонометричних функцій.

Нехай $y = arctgx, x \in R$. Тоді $x = x(y) = tgy,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$ є оберненою функцією, отже, згідно теореми про похідну оберненої функції, маємо

$$(arctgx)' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{tg^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1},\quad x \in R$$

Аналогічно знаходиться похідна інших обернених тригонометричних функцій.

7) Розглянемо функцію $x = shy, y \in R$. Покажемо, що оберненою до неї є функція $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x \in R$. Дійсно,

$$\forall x \in R: \quad x = shy \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \Leftrightarrow e^{y} - e^{-y} = 2x \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{y} = x \pm \sqrt{x^{2}+1} \\ e^{y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^{2}+1}).$$

Тоді, з теореми про похідну оберненої функції випливає, що для довільного дійсного числа $x \in R$ існує похідна

$$(\ln(x + \sqrt{x^{2}+1}))' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{sh^{2}y+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}.$$

Що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи 8.2: Довести нерозглянуті формули зі теореми.

Лекція №9.

Похідна параметрично заданої функції

Означення 9.1. *Будемо говорити, що на інтервалі* $(a,b) \subset \overline{R}$ ***параметрично задано функцію*** $y = y(x)$*, якщо на деякому інтервалі* (α,β) *означена пара функцій* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. *Причому функції* φ, ψ *- неперервні на* (α,β)*, і функція* φ *є строго монотонною, та*

$$a = \sup_{t \in (\alpha,\beta)} \varphi(t), \ b = \inf_{t \in (\alpha,\beta)} \varphi(t).$$

Зауваження 9.1. *При умовах* **означення 9.1** *існує строго монотонна і неперервна функція* $\hat{O} := \varphi^{-1} : (a,b) \to (\alpha,\beta)$*, яка є оберненою до функції* φ*, тобто,* $t = \Phi(x),\ x \in (a,b)$. *Тоді означена і є неперервної складна функція* $y = \psi(\Phi(x)),\ x \in (a,b)$*, тобто, задана композиція функцій* $y = \psi \circ \hat{O}$.

Теорема 9.1 (*про похідну параметрично заданої функції*). Нехай на деякому інтервалі $(a,b) \subset \overline{R}$ задано параметрично функцію $y = y(x)$ рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t),\ t \in (\alpha,\beta),$ і нехай існують похідні $\varphi'(t_\circ),\ \psi'(t_\circ),\ t_\circ \in (\alpha,\beta)$.

Тоді існує і похідна $y'(x_\circ)$, де $x_\circ = \varphi(t_\circ)$, і обчислюється за формулою:

$$y'(x_\circ) = \frac{\psi'(t_\circ)}{\varphi'(t_\circ)}, \quad (\varphi'(t_\circ) \neq 0) \qquad (9.1).$$

Доведення. Дійсно, за умов теореми випливає, що існує строго монотонна і неперервна функція $\hat{O} := \varphi^{-1} : (a,b) \to (\alpha,\beta)$. Причому, за **теоремою 8.5** про похідну оберненої функції існує її похідна $\hat{O}'(x_\circ) = \dfrac{1}{\varphi'(t_\circ)}$ в точці $x_\circ = \varphi(t_\circ)$. Тоді за теоремою про похідну композиції функцій випливає, що існує похідна функції $y = \psi \circ \hat{O}$ в точці $x_\circ = \varphi(t_\circ)$ і обчислюється за формулою

$$y'(x_\circ) = (\psi \circ \hat{O})'(x_\circ) = \psi'(t_\circ) \cdot \hat{O}'(x_\circ) = \psi'(t_\circ) \cdot \frac{1}{\varphi'(t_\circ)},$$

що і потрібно було довести.

Похідна неявно заданої функції

Означення 9.2. *Будемо говорити, що* ***функція*** $y = y(x)$ ***задана на деякому інтервалі*** $(a,b) \subset \overline{R}$ ***неявно*** *рівнянням*

$$F(x,y) = 0 \qquad (9.2),$$

якщо при кожному фіксованому числу $x_\circ \in (a,b)$ *рівняння (9.2) має єдиний розв'язок* $y_\circ$*, який ми і називаємо значенням функції* y *в точці* $x_\circ$.

Для того, щоб обчислити похідну функції $y = y(x)$, яка задана неявно рівнянням (9.2), ліву і праву частину цього рівняння диференціюють по змінній x. При цьому вважають, що всі вирази, які входять у рівняння (9.2) та містять змінну y, є складними функціями, тобто композицією відповідної зовнішньої функції і функції $y = y(x)$. Так, наприклад, похідна виразу y^2 по змінній x буде дорівнювати добутку множників $2y$ і y', тобто, $(y^2)' = 2y \cdot y'$, так як функція y^2 є композицією степеневої функції з показником степеня 2 і функції $y = y(x)$.

Приклад 9.1. Довести існування та обчислити похідну функції $y = y(x)$, $x > 1$, що задана умовами

$$e^{-x+y} = x - y^2, y \geq 0 \qquad (9.3).$$

Розв'язання: Зафіксуємо довільне значення аргументу $x > 1$ і намалюємо графік функції $z_1(y) = e^{-x} \cdot e^{y}$, $y \geq 0$, та $z_2 = x - y^2$, $y \geq 0$, в декартовій системі координат YOZ:

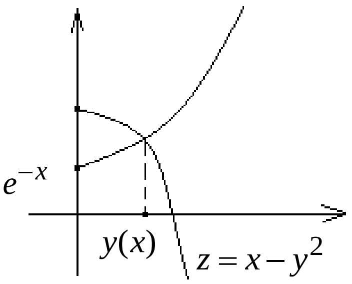


Рис.3

Графік функції $z_1 = e^{-x} \cdot e^{y}$ монотонно зростає, починаючи з величини $e^{-x} < e^{-1} < 1$. А графіком другої функції $z_2 = x - y^2$ є спадна гілка параболи, що піднята на величину $x > 1$. Отже, графіки цих функцій при кожному $x > 1$ перетинаються в єдиній точці з абсцисою $y(x)$, тобто рівняння (9.3) при кожному $x > 1$ має єдиний розв'язок $y(x)$.

Для обчислення похідної $y'(x)$ продиференціюємо ліву і праву частину рівняння (9.3) по змінній x, маємо:

$$\left(e^{-x+y}\right)' = \left(x - y^2\right)' \Leftrightarrow e^{-x+y}(-x+y)' = (x)' - (y^2)' \Leftrightarrow e^{-x+y}(-1+y') = 1 - 2yy' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'\left(e^{-x+y} + 2y\right) = 1 + e^{-x+y} \Leftrightarrow y' = \frac{e^{y-x} + 1}{e^{y-x} + 2y},$$

або, враховуючи, що експонента e^{y-x} рівна $x - y^2$, отримаємо:

$$y' = \frac{x - y^2 + 1}{x - y^2 + 2y} .$$

Фізичне та геометричне тлумачення похідної

Нехай $S = S(t)$ - довжина шляху, що проходить точка за час $t > t_\circ \geq 0$ від початку руху. Тоді $S(t) - S(t_\circ)$ - величина шляху, який пройшла точка від моменту часу $t_\circ$ до моменту t, отже, $V_{cp}([t_\circ, t]) = \frac{S(t) - S(t_\circ)}{t - t_\circ}$ - середня швидкість руху за вказаний проміжок часу, а границя

$$\lim_{t\to t_\circ} V_{cp}([t_\circ, t]) = \lim_{t\to t_\circ} \frac{S(t)-S(t_\circ)}{t-t_\circ} = S'(t_\circ)$$

є миттєвою швидкістю точки в момент часу $t_\circ$. Таким чином, якщо функція описує довжину шляху у часі деякого матеріального тіла, то її похідна є миттєвою швидкістю цього тіла у даний момент часу $t_\circ$. Похідна функції f може мати і інші фізичні тлумачення, які визначаються фізичним змістом цієї функції. Наприклад, якщо функція f описує величину електричного заряду у часі деякого провідника, то її похідна f' є швидкістю зміни величини електричного заряду, тобто, миттєвою величиною сили електричного струму у провіднику. В загальному випадку, похідна f' є миттєвою швидкістю зміни величини функції по відношенні до величини зміни аргументу функції.

Означення 9.3. *Пряма* $L_t : y = g(x)$, *де* $g(x) = k(x-x_\circ) + f(x_\circ)$, *називається* ***дотичною до графіку*** L_f *функції* f *в точці* $x_\circ \in D(f)$, *якщо в деякому околі точки* $x_\circ$ *виконується умова:*

$$f(x) - g(x) = o(x - x_\circ).$$

Наслідок 9.1. *За* **теоремою 8.1** *слідує, що якщо функція має в деякій точці* $x_\circ$ *похідну* $f'(x_\circ)$, *то пряма*

$$y = f'(x_\circ)(x - x_\circ) + f(x_\circ) \qquad (9.4)$$

є дотичною до графіка L_f *функції* f *в точці* $x_\circ$, *при цьому величина* $k = f'(x_\circ)$ *є кутовим коефіцієнтом дотичної.*

Означення 9.4. *Пряма* L_n*, що проходить через точку* $(x_\circ, f(x_\circ))$ *перпендикулярно дотичній* L_t *до графіку* L_f *функції* f*, називається* ***нормаллю або нормальною прямою*** *до графіка* L_f *функції* f *в точці* $x_\circ$.

З рівняння (9.4) отримаємо рівняння нормалі:

$$L_n: \ \ y = \frac{-1}{f'(x_\circ)}(x - x_\circ) + f(x_\circ).$$

Приклади диференціювання складних функцій. Логарифмічне диференціювання

Приклад 9.2. Нехай функції $f_1,..., f_n$ відмінні від нуля і мають похідну на інтервалі (a,b) . Знайдемо похідну добутку $y = f_1 f_2 ... f_n$ цих функцій на (a,b).

Для цього логарифмуємо модуль функції y, і обчислимо похідну лівої і правої частини рівності:

$$\ln|y| = \ln|f_1 f_2 ... f_n| \ \ \Rightarrow \ \ \left(\ln|y|\right)' = \left(\ln|f_1| + \ln|f_2| + ... + \ln|f_n|\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + ... + \frac{f_n'}{f_n} \Leftrightarrow y' = y \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_1 \cdot ... \cdot f_{k-1} \cdot f_k' \cdot f_{k+1} \cdot ... \cdot f_n}{f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n} \right).$$

Так як $y = f_1 f_2 ... f_n$, то маємо:

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \left(f_1 ... f_{k-1} f_k' f_{k+1} ... f_n \right), \quad x \in (a,b).$$

Приклад 9.3. Нехай функції u і v мають похідну на $(a,b) \subset \overline{R}$, і, крім того, u - додатна функція. Обчислимо похідну функції $y = u^v$. Діючи так само, як і в попередньому прикладі, отримаємо:

$$\ln y = \ln u^{v} \Leftrightarrow \ln y = v \ln u \quad \Rightarrow \quad (\ln y)' = (v \ln u)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = y\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(u^{v} \right)' = u^{v} v' \ln u + v u^{v-1} u',\, x \in (a,b).$$

Похідні вищих порядків та приклади їх обчислення

Означення 9.5. *Нехай функція* $f:(a,b) \to R$ *має похідну* $f' := h_1$ *на* (a,b). *Якщо функція* h_1 *має похідну* h_1', *то ця похідна називається* ***похідною другого порядку*** *функції* f, *і позначається* f'' *або* $f^{(2)}$, *тобто,*

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f^{(2)} = f'' = h_1' = (f')'.$$

Нехай, в свою чергу, функція $h_2 := f''$ *має похідну* h_2' *на* (a,b). *Тоді* h_2' *називається* ***похідною третього порядку*** *функції* f *і позначається*

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = f^{(3)} = f''' = h_2' = (f'')'.$$

І так далі. Тобто, якщо функція $h_n = f^{(n)}$ *має похідну* h_n' *на інтервалі* (a,b) *то ця похідна називається похідною* $n+1$ *порядку функції* f :

$$\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = f^{(n+1)} = h_n' = \left(f^{(n)} \right)', \quad x \in (a,b).$$

При цьому, саму функцію f називають похідною $f^{(0)}$ нульового порядку, а похідну f' - першого порядку.

***Приклад 9.4*.**

а) Якщо $y = x^{n}$, $x \in R, n \in N$, то

$$\left(x^{n}\right)^{(k)} = \left[\begin{array}{l} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}, k \leq n \\ 0, k > n \end{array}\right. .$$

б) $\left(x^{-n}\right)^{(k)} = (-1)^{k} n(n+1)...(n+k)x^{-n-k}, \quad x \neq 0, \ k \in N.$

в) $\left(\ln|x|\right)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \quad x \neq 0, \ k \in N.$

Доведення: Застосуємо метод математичної індукції. Нехай $k = 1$. Тоді твердження $\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}, \ x \in R,$ за доведеним раніше вірне.

Припустимо, що твердження вірне для деякого натурального числа $k < n$, тобто,

$$\left(x^{n}\right)^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}, \ x \in R .$$

Покажемо, що тоді твердження вірне і для натурального числа $k+1$. Дійсно,

$$\left(x^{n}\right)^{(k+1)} = \left(\left(x^{n}\right)^{(k)}\right)' = \left(n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}\right)' =$$

$$= n(n-1)...(n-k+1)(n-k)x^{n-(k+1)}, \qquad x \in R ,$$

що і потрібно було довести при $k < n$.

Якщо, $k = n$, то

$$\left(x^{n}\right)^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! = const \ .$$

Тому, при $k = n+1$ маємо $\left(x^{n}\right)^{(n+1)} = 0$, і, отже, всі наступні похідні теж рівні нулю: $\left(x^{n}\right)^{(n+1)} = \left(x^{n}\right)^{(n+2)} = \ldots = \left(x^{n}\right)^{(k)} = 0$.

Аналогічно доводяться і твердження б) та в).

***Приклад 9.5*.** Нехай $y = \sin x,\ x \in R.$ Тоді,

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x + \pi),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),\ y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + 2\pi).$$

Таким чином, похідні функції $y = \sin x$ періодично повторюються (через чотири порядки), або можна довести (наприклад, методом математичної індукції), що $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n \in N,\ \ x \in R.$

Аналогічно, $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \ n \in N,\ x \in R.$

Приклади застосування похідних вищих порядків

Теорема 9.2 (*про біном Ньютона*). *Справедлива рівність*

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k a^{n-k} \qquad (9.5),$$

де $C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ *(читається: n-факторіал),* $n \in N$, $0! := 1$. *При цьому, вираз* $(a+x)^n$ *називають* ***біномом Ньютона***.

Доведення. Очевидно, що вираз $(a+x)^n = (a+x)(a+x)...(a+x) = a_\circ + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n = P_n(x)$ - це многочлен n-го степеня з поки що невідомими коефіцієнтами $a_\circ, a_1, ..., a_n$. Знайдемо коефіцієнти многочлена $P_n(x)$, обчисливши похідну $P_n^{(k)}$ в точці $x = 0$ двома способами:

$$\begin{cases} P_n^{(k)}(0) = \left.(a_\circ + ... + a_n x^n)^{(k)}\right|_{x=0} = k(k-1)...1 \cdot a_k = k! a_k , \\ P_n^{(k)}(0) = \left.\left((a+x)^n\right)^{(k)}\right|_{x=0} = \left.n(n-1)...(n-k+1)(a+x)^{n-k}\right|_{x=0} = \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} . \end{cases}$$

Прирівнюючи знайдені значення похідної, маємо:

$$k! a_k = \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} \Leftrightarrow a_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} = C_n^k a^{n-k}, \quad k = 1, 2, ..., n .$$

Очевидно, $a_\circ = a^n = C_n^\circ a^n$, так як, $C_n^\circ = 1$. Тому,

$$(a+x)^n = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k ,$$

що і потрібно було довести.

Наслідок 9.2 (***про властивості біноміальних коефіцієнтів*** **).** *Для всіх невід'ємних цілих чисел* n *i* k $(k \le n)$ *мають місце рівності :*

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^{\circ} + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$;

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$; 3) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доведення. 1) Покладемо у формулі бінома Ньютона (9.5) $a = 1, x = 1,$ тоді

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ .$$

Твердження 2) доводиться безпосередньою перевіркою (довести самостійно!!!).

Перевіримо рівність 3):

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{k+1-n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!} = C_{n+1}^{k+1} \ .$$

Доведення закінчено.

Похідні вищих порядків для добутку функції

Означення 9.5. *Будемо називати* ***класом*** n ***раз диференційованих на інтервалі*** (a,b) ***функцій*** *множину:* $D^n\big((a,b)\big) := \left\{ f : \forall x \in (a,b)\ \exists f^{(n)}(x) \right\}$,

і, відповідно, ***класом*** n ***раз неперервно диференційованих функцій*** *множину* $C^n\big((a,b)\big) := \left\{ f :\ f \in D^n\big((a,b)\big),\ f^{(n)} \in C\big((a,b)\big) \right\}$. *У означенні* *відповідних класів для замкненого відрізку* $[a,b]$ *будемо додатково вимагати відповідно існування і неперервність похідних зправа в лівому кінці та зліва в правому кінці відрізка* $[a,b]$, *тобто*

$$D^n([a,b]):=\left\{f:\ f\in D((a,b)),\ \exists f^{(k)}(a+0),\ \exists f^{(k)}(b-0),\ k=1,2,...,n\right\},$$

$$C^n([a,b]):=\left\{f:\ f\in D^n([a,b]),\ f^{(k)}(a)=f^{(k)}(a+0),\ f^{(k)}(b)=f^{(k)}(b-0),\ k=0,1,...,n\right\}.$$

Розглянемо питання про похідну вищих порядків добутку функцій.

Теорема 9.3 (***про формулу Лейбніця*** **).** *Нехай функції* u *і* v *мають похідні до* n*-го порядку включно на інтервалі* (a,b). *Тоді існує похідна* n*-го порядку на* (a,b) *від добутку цих функцій* uv, *і при цьому виконана рівність*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)},\ x\in(a,b),\ n\in N \qquad (9.6).$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Очевидно, при $n=1$ формула (9.6) справджується. Дійсно, $C_1^0=C_1^1=1$, тому

$$(uv)'=u'v+uv'=C_1^0u'v+C_1^1uv'.$$

Припустимо, що формула (9.6) має місце для деякого натурального числа $n-1$. Покажемо, що тоді твердження теореми справедливе і для наступного натурального числа $n\in N$. Дійсно,

$$(uv)^{(n)}=\left((uv)^{(n-1)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k)}v^{(n-1-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(\left(u^{(k)}\right)'v^{(n-k-1)}+\right.$$

$$\left.+u^{(k)}\left(v^{(n-k-1)}\right)'\right)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k+1)}v^{(n-k-1)}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(k)}v^{(n-k)}=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k} u^{(k)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} u^{(k)} v^{(n-k)} = C_{n-1}^{n-1} u^{(n)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} u^{(k)} v^{(n-k)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} u^{(k)} v^{(n-k)} + C_{n-1}^{0} u^{(0)} v^{(n)} = C_{n}^{n} u^{(n)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{\kappa-1} + C_{n-1}^{k}) u^{(k)} v^{(n-k)} + C_{n}^{0} u^{(0)} v^{(n)} =$$

$$= C_{n}^{n} u^{(n)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n}^{\kappa} u^{(k)} v^{(n-k)} + C_{n}^{0} u^{(0)} v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{\kappa} u^{(k)} v^{(n-k)} .$$

При цьому було використано такі тотожності:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_{n}^{k}, \quad C_{n-1}^{0} = C_{n}^{0} = C_{n-1}^{n-1} = C_{n}^{n} = 1 .$$

Доведення теореми завершено.

Приклад 9.6 **.**Обчислити $y^{(10)}(x)$, якщо $y = x\sin x,\ x \in R$.

Розвязання

Покладемо $u := x,\ v := \sin x$. Тоді $u' = 1, u'' = u''' = \ldots = u^{(10)} = 0$, і $v^{(k)}_{(x)} = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$. Отже, за формулою Лейбніца маємо:

$$(x\sin x)^{(10)} = (uv)^{(10)} = C_{10}^{0} uv^{(10)} + C_{10}^{1} u'v^{(9)} + \ldots + C_{10}^{10} u^{(10)} v =$$

$$= uv^{(10)} + 10u'v^{(9)} + 0 + \ldots + 0 = x\sin\left(x + \frac{10\pi}{2}\right) + 10\sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) =$$

$$= -x\sin x + 10\cos x$$

Відповідь: $y^{(10)}(x) = -x\sin x + 10\cos x$.

Лекція № 10

Обчислення похідних вищих порядків від функцій, заданих параметрично

Нехай функція $y = y(x), x \in (a,b)$ задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ t \in (\alpha, \beta)$. Тоді, в умовах теореми 10.1 перша похідна $y'(x)$ шукається за правилом

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} := h_1(t),\ t \in (\alpha, \beta) \qquad (10.1),$$

і при цьому, $x = \varphi(t)$. Таким чином отримано нову функцію y', яка теж задана параметрично рівняннями: $x = \varphi(t),\ y' = h_1(t),\ t \in (\alpha, \beta)$, яку, при умові, що існує похідна $h_1^{'}(t)$, можна знову диференціювати по змінній x:

$$\begin{cases} y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \dfrac{h_1^{'}(t)}{\varphi'(t)} := h_2(t) \\ x = \varphi(t), \quad t \in (\alpha, \beta) \end{cases} \qquad (10.2).$$

Аналогічно, $y'''(x) = \left(y''(x)\right)' = \dfrac{h_2(t)}{\varphi'(t)}$, і так далі. Взагалі,

якщо $\begin{cases} y^{(n)}(x) = h_n(t) \\ x = \varphi(t),\ t \in (\alpha, \beta) \end{cases}$ і функція h_n має похідну

$h_n',\ \ t \in (\alpha, \beta),$ то існує похідна $y^{(n+1)}(x)$ та справедлива формула

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{h_n^{'}(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \text{де } x = \varphi(t),\ t \in (\alpha, \beta) \qquad (10.3).$$

Приклад 10.1. Нехай функція y задана параметрично рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де функції $\varphi\in D^2((\alpha,\beta))$ і $\psi\in D^2((\alpha,\beta))$. Знайдемо $y''(x)$. Згідно (10.1)

$$y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ t\in(\alpha,\beta)\ \cdot$$

А за (10.2) випливає, що

$$y''(x)=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}}{\varphi'(t)}=\frac{1}{\varphi'^3}\cdot\begin{vmatrix}\varphi'(t) & \psi'(t)\\ \varphi''(t) & \psi''(t)\end{vmatrix} \qquad (10.4).$$

Приклад 10.2. Нехай $\begin{cases}x=acht\\ y=bsht\end{cases},\quad t\in R$. Обчислимо $\dfrac{d^3y}{dx^3}:=y'''_{xxx}(t)$.

Очевидно, $y'_x(t)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{(asht)'}{(acht)'}=\dfrac{acht}{asht}=ctht=h_1(t)$. Тоді

$$y''_{xx}(t)=\frac{h_1'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{(ctht)'}{(acht)'}=\frac{-\dfrac{1}{sh^2t}}{asht}=-\frac{1}{ash^3t}=h_2(t)\ \cdot$$

Аналогічно, $y'''_{xxx}(t)=\dfrac{h_2'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{ash^3t}\right)'}{(acht)'}=\dfrac{\dfrac{3cht}{ash^4t}}{asht}=\dfrac{3cht}{a^2sh^5t}$.

Обчислення похідних вищих порядків від неявно заданих функцій

Нехай функція $y:(a,b)\to R$ задана неявно рівнянням

$$F(x,y)=0 \qquad (10.6).$$

Знайшовши першу похідну,

$$y' = \hat{O}_1(x,y) \qquad (10.7)$$

диференціюємо ліву і праву частину рівняння по змінній x, і враховуючи, що змінна y є функцією від x, отримаємо рівність виду

$$y'' = H_1(x,y,y') \qquad (10.8).$$

Підставляючи y' з рівняння (10.7) в (10.8), одержимо вираз для y'':

$$y'' = H_1(x;y;\Phi_1(x,y)) := \Phi_2(x,y) \qquad (10.9).$$

Діючи аналогічно попередньому випадку, після диференціювання рівняння (10.9), отримаємо рівність $y''' = H_2(x,y,y')$, і, відповідно,

$$y''' = H_2(x,y,\Phi_1(x,y)) := \Phi_3(x,y), \qquad \text{і так далі.}$$

Приклад 10.2. Нехай функція y задана умовами

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0 \qquad (10.10).$$

Знайдемо $y''(x)$. Знайшовши похідні по x лівої і правої частини рівняння, маємо:

$$2x + 2yy' = 0 \iff y' = -\frac{x}{y} \qquad (10.11).$$

Диференціюємо рівняння (10.11) ще раз: $y'' = -\frac{y - xy'}{y^2}$.

Підставивши вираз для y' з рівності (10.11), маємо

$$y'' = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} ,$$

або, враховуючи рівність (10.10), остаточно отримаємо:

$$y'' = -\frac{a^2}{y^3} \qquad (10.12).$$

Нехай, наприклад, $x = 0$, тоді з (10.10) знайдемо, що $y = a$ $(a > 0)$. Тому

$$y''(0) = -\frac{a^2}{a^3} = -\frac{1}{a} .$$

Властивості функцій, що мають похідну

Теорема 10.1 (Ферма). Нехай функція f означена на інтервалі $(a,b) \subset \overline{R}$, і в деякій точці $x_\circ$ цього інтервалу приймає своє найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці $x_\circ$ функція має похідну, то ця похідна рівна нулю. Тобто,

$$\begin{cases} f : (a,b) \to R \\ f(x_\circ) = \max\limits_{x \in (a,b)} f(x) \vee \min\limits_{x \in (a,b)} f(x) \\ \exists \;\; f'(x_\circ) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x_\circ) = 0 .$$

Доведення. Якщо існує похідна $f'(x_\circ)$ в деякій точці $x_\circ \in (a,b)$, то існують ліва $f'_-(x_\circ)$ і права $f'_+(x_\circ)$ похідні в цій точці, і $f'(x_\circ) = f'_+(x_\circ) = f'_-(x_\circ)$. Нехай, наприклад, $f(x_\circ) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Тоді $\forall x \in (a,b) \quad f(x) - f(x_\circ) \le 0$. Тому

$$f'_+(x_\circ) = \lim_{\substack{x\to x_\circ \\ x-x_\circ>0}} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} \le 0, \quad f'_-(x_\circ) = \lim_{\substack{x\to x_\circ \\ x-x_\circ<0}} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} \ge 0,$$

отже, $0 \le f'_-(x_\circ) = f'(x_\circ) = f'_+(x_\circ) \le 0$. Звідки, $f'(x_\circ) = 0$. Теорему доведено.

Теорема 10.2 (*Ролля*). Якщо функція неперервна на відрізку $[a,b]$, має похідну в усіх його внутрішніх точках, і на кінцях відрізка приймає однакові значення, то знайдеться така точка з інтервалу (a,b), в якій похідна функції рівна нулю. Тобто,

$$\begin{cases} f \in C([a,b]) \\ f \in D((a,b)) \\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \ \exists x_\circ \in (a,b): \ f'(x_\circ) = 0.$$

Доведення. Можливі два випадки. По-перше, в усіх точках відрізка $[a,b]$ функція може приймати однакові значення, тобто, $\forall x \in (a,b) \ f(x) = f(a) = f(b) = const$. Тоді, $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) = 0$.

Отже, в цьому випадку $x_\circ$ - довільна точка інтервалу (a,b).

По-друге, в іншому випадку, знайдеться хоч одна точка $x \in (a,b)$ така, що $f(x) \ne f(a) = f(b) := c$. Так як функція f неперервна на замкненому відрізку $[a,b]$, то вона приймає на ньому своє найменше

$$m = f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad x_1 \in [a,b],$$

і найбільше значення

$$M = f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x), \; x_2 \in [a,b] \cdot$$

Але функція f не є постійною на $[a,b]$, тому або $m \neq c$, або $M \neq c$. Отже, або $x_1 \neq a, \; x_1 \neq b$, або $x_2 \neq a, \; x_2 \neq b$. Значить, для однієї з цих двох точок, x_1 або x_2, і функції f виконані умови теореми Ферма. Тому, або $f'(x_1) = 0$, або $f'(x_2) = 0$. Теорему доведено.

Теорема 10.3 (*Лагранжа про середнє значення, або про скінчений приріст*).

$$\begin{cases} f \in C([a,b]) \\ f \in D\big((a,b)\big) \end{cases} \Rightarrow \quad \exists x_\circ \in (a,b): \quad f(b) - f(a) = f'(x_\circ)(b-a) \cdot$$

Тобто, якщо функція неперервна на відрізку $[a,b] \subset R$ і має похідну в усіх його внутрішніх точках, то знайдеться така точка $x_\circ$ з інтервалу (a,b), що приріст функції на відрізку $[a,b]$ буде рівний добутку похідної функції в цій точці $x_\circ$ на приріст аргумента.

Доведення. Розглянемо функцію

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b].$$

Так як другий доданок, що є лінійною функцією, неперервний і має похідну на всій множині дійсних чисел R, то з умов, накладених на функцію f, випливає, що функція h є неперервною на відрізку $[a,b]$ і має похідну в його внутрішніх точках, тобто, $h \in C([a,b])$ і $h \in D((a,b))$. До того ж, $h(a) = h(b) = f(a)$. Таким чином, функція h

задовольняє умовам теореми Ролля і, отже, знайдеться така точка $x_\circ$ із інтервалу (a,b), в якій похідна цієї функції дорівнює нулю. Тобто,

$$\exists x_\circ \in (a,b): \ (\ h'(x_\circ)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_\circ)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-0)=0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x_\circ)(b-a)=f(b)-f(a) \ \ ),$$

що і потрібно було довести.

Наслідок 10.1. 1) *Якщо в усіх точках інтервалу* (a,b) *функція* f *має похідну* f' *рівну нулю, то функція є постійною на цьому інтервалі. Тобто,*

$$\begin{cases} f \in D((a,b)) \\ \forall x \in (a,b) \ \ f'(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \ \exists c \in R: \ \forall x \in (a,b) \quad f(x)=c=const.$$

2) *якщо в усіх точках інтервалу* (a,b) *існують і співпадають похідні двох функцій* f *і* g, *то ці функції можуть різнитися тільки на постійну величину. Тобто,*

$$\begin{cases} f,g \in D((a,b)) \\ \forall x \in (a,b) \ \ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Rightarrow \ \exists c \in R: \ \forall x \in (a,b) \quad f(x)=g(x)+c.$$

Доведення. 1) Нехай $\forall x \in (a,b) \ \ \exists \ f'(x)=0$. Виберемо довільне $x_\circ \in (a,b)$. Тоді для будь якого $x \in (a,b) \setminus \{x_\circ\}$ на відрізку $[x_\circ, x]$ або, відповідно, на $[x, x_\circ]$ функція f задовольняє умовам теореми Лагранжа, а, значить,

$$f(x)-f(x_\circ)=f'(x)(x-x_\circ)=0, \quad x\in(a,b)\setminus\{x_\circ\} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \forall x\in(a,b) \qquad f(x)=f(x_\circ):=c=const.$$

За довільністю вибору точки $x_\circ\in(a,b)$ слідує справедливість першого твердження.

2) Нехай $\forall x\in(a,b) \quad \exists\ f'(x)=g'(x)\in R$. Розглянемо функцію $h(x):=f(x)-g(x),\ x\in(a,b)$. Очевидно, $h'(x):=f'(x)-g'(x)=0,\ x\in(a,b)$. Отже, згідно попереднього пункту наслідку, $\forall x\in(a,b) \quad h(x)=c$. Тобто, $f(x)=g(x)+c$.

Наслідок доведено.

Зауваження10.1. *Теорема Лагранжа є узагальненням теореми Ролля і має таке геометричне тлумачення: якщо виконуються умови теореми, то на графіку функції знайдеться така точка, в якій дотична паралельна хорді, що сполучає кінці цього графіка.*

Теорема 10.4 (*Коші про відношення приростів двох функцій*). *Якщо функції* f *і* g *є неперервними на відрізку* $[a,b]$, *у внутрішніх точках якого вони мають скінчену похідну, причому похідна функції* g *відмінна від нуля, то знайдеться така внутрішня точка відрізка, у якій відношення приросту функції* f *до приросту функції* g *на відрізку буде рівне відношенню похідних відповідних функцій у цій точці. Тобто,*

$$\begin{cases} f,g\in C([a,b]) \\ f,g\in D((a,b)) \\ g'(x)\neq 0, x\in(a,b) \end{cases} \Rightarrow \exists x_\circ\in(a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$$

Доведення. За умовою $g'(x)\neq 0,\ x\in(a,b)$ випливає, що $g(b)\neq g(a)$. Інакше, згідно теореми Ролля, для функції g знайшлася б точка $x_\circ\in(a,b):\ g'(x_\circ)=0$, що суперечить умові теореми. Побудуємо функцію

$$h(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) \quad \cdot$$

Неважко переконатись, що $h \in C([a,b]),\ h \in D((a,b)),$ $h(a) = h(b) = f(a),$ тобто, для функції h виконуються умови теореми Ролля. Тому, знайдеться така точка $x_\circ \in (a,b)$, що

$$h'(x_\circ) = 0 \ \Leftrightarrow \ f'(x_\circ) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_\circ) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Теорему доведено.

Теорема 10.5 (*про границю відношення двох функцій в термінах відношення їх похідних*). *Нехай функції* f *і* g *означені в деякому околі точки* $x_\circ \in R$, *в якій вони дорівнюють нулю та мають скінчені похідні, причому похідна другої функції відмінна від нуля. Тоді існує границя частки першої функції на другу в цій точці, причому ця границя дорівнює відношенню похідних першої функції на другу, обчислених у даній точці. Тобто,*

$$\begin{cases} f(x_\circ) = g(x_\circ) = 0 \\ \exists\, f'(x_\circ),\ \exists g'(x_\circ) \\ g'(x_\circ) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \ \exists \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}.$$

Доведення. За умовою теореми $\exists\, f'(x_\circ), \exists g'(x_\circ),\ f(x_\circ) = g(x_\circ) = 0$, причому $g'(x_\circ) \neq 0$. Тому, за означенням похідної функції та за **теоремою 5.4** про збереження арифметичних операцій при взятті границі, маємо:

$$\exists \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{g(x)-g(x_\circ)} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{\dfrac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}}{\dfrac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}} = \frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}.$$

Теорему доведено.

Теорема 10.6 (*теорема Лопіталя*).

$$\begin{cases} f, g \in D((a,b)) \\ f(b-0) = g(b-0) = 0 \\ g'(x) \neq 0, \;\; x \in (a,b) \\ \exists \lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \overline{R} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \;\; .$$

Доведення. Розглянемо тільки випадок скінченої границі $c \in R$. Покладемо: $f(b) = g(b) = 0$. Тоді для довільного $x \in (a,b)$ функції f і g задовольняють умові теореми Коші на відрізку $[x,b]$. Тому, за умовою існування границі $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = c$ випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \;\; \forall x \in (b-\delta, \, b) \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in (b-\delta, b) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| = \left| \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} - c \right| = \left| \frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)} - c \right| < \varepsilon,$$

так як $x_\circ$ - точка з інтервалу (x,b), а значить $x_\circ \in (x,b) \subset (b-\delta, b)$.

Отже, існує границя $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$, що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи10.1: *Довести попередню теорему у випадку* $c = \pm\infty$.

Завдання для самостійної роботи 10.2: *Сформулювати* **теорему 10.6** *словесно.*

Зауваження10.2. *Теорема Лопіталя справджується і якщо:*

1) замінити умову існування границі на правому кінці інтервалу на умову її існування в його лівому кінці або у якійсь внутрішній точці ;

2) в теоремі замінити тип невизначеності $\frac{0}{0}$ *на* $\frac{\infty}{\infty}$, *тобто, якщо вимагати існування границі* $f(b-0)=\infty,\ \ g(b-0)=\infty$ *якогось певного знаку чи взагалі без знаку. Теж саме стосується лівої точки або внутрішньої точки інтервалу відповідно до першого пункту зауваження.*

Приклад 10.3. Обчислимо границю $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = a$. Застосувавши основну логарифмічну тотожність, та за неперервністю експоненти, отримаємо:

$$a = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} .$$

Очевидно, що функції $f(x)=\ln x,\ \ g(x)=x,\ \ x\in(0,+\infty)$, задовольняють умовам теореми Лопіталя, тому:

$$a = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{0} = 1 .$$

Лекція № 11

Асимптоти графіка функції

Означення 11.1. *а) Пряма* $L: y = kx + b,\ k \neq 0,$ *називається* ***похилою асимптотою*** *графіка* L_f *функції* f *на* $+\infty$ *або на* $-\infty$, *якщо*

$$\exists \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0,$$ *або, відповідно,*

$$\exists \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0 \cdot$$

б) Пряма $L: y = b,\ b \in R,$ *називається* ***горизонтальною асимптотою*** *на*

$+\infty$ *або на* $-\infty$ *графіка* L_f *функції* f, *якщо* $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$,

або, відповідно, $\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

в) Прямя $L: x = a,\quad a \in R,$ *називається* ***вертикальною асимптотою*** *графіка* L_f *функції* f, *якщо існують границі*

$f(a-0) = \infty$ *або* $f(a+0) = \infty$.

Теорема 11.1 (***про необхідні і достатні умови існування похилої асимптоти*****).** *Графік функції* f *має похилу асимптоту*

$L: y = kx + b,\ k \neq 0$ *на* $+\infty$ *тоді і тільки тоді, коли існують границі:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \in R, k \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b \in R \end{cases} \qquad (11.1).$$

Доведення. 1) *Достатність.* Нехай існують скінчені границі (11.1), тоді за **теоремою 5.4** про збереження арифметичних операцій при взятті границі існує границя функції:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]-\lim_{x\to+\infty}b=b-b=0.$$

Отже, згідно **означення 11.1**, пряма $L: y=kx+b$ є похилою асимптотою графіка функції f на $+\infty$.

2) *Необхідність.* Нехай $L: y=kx+b$ є похилою асимптотою графіка функції f на $+\infty$. Тоді, згідно о**значення 11.1**, за **теоремою 5.4** про збереження арифметичних операцій при взятті границі та за **теоремою 5.9** про класичні границі функцій на $+\infty$, існує границя

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \quad\Rightarrow\quad \exists\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(kx+b)}{x}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0 \Leftrightarrow \exists\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0 \Leftrightarrow \exists\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

Аналогічно, за **теоремою 5.4** про збереження арифметичних операцій при взятті границі, маємо:

$$\exists\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\Big[\big(f(x)-kx-b\big)+b\Big]=0+b=b.$$

Теорему доведено.

Зауваження 11.1. *Аналогічне твердження справедливе і для похилої асимптоти на* $-\infty$.

Теорема 11.2 (***про необхідні умови існування похилої асимптоти)***. *Нехай графік функції* f *має похилу асимптоту на* $+\infty$ *(або на* $-\infty$*). Тоді,*

$$\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)=\infty \qquad \text{(або } \lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty\text{)}.$$

Доведення. Нехай за умовою теореми існує похила асимптота $L: y=kx+b,\ k\neq 0$ на плюс нескінченності. Тоді, за **теоремою 11.1** слідує, що існує скінчена відмінна від нуля границя $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$.

Отже, , за **теоремою 5.4** про збереження арифметичних операцій при взятті границі, маємо:

$$\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x\cdot\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty} x\cdot \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty\cdot\kappa=\infty.$$

Аналогічно доводиться теорема і у випадку існування асимптоти на лівому кінці числової осі. Доведення закінчено.

Наслідок 11.1. 1) *З одного боку числової осі, тобто на* $+\infty$ *або на* $-\infty$*, може існувати асимптота тільки одного типу: або похила, або горизонтальна.*

2) *Якщо функція* f *неперервна на* R*, то її графік не має вертикальних асимптот. Якщо пряма* $L: x=a$ *є вертикальною асимптотою графіка функції* f*, то* $x_{\circ}=a$ *є точкою розриву другого роду функції* f.

Приклад 11.1. Знайти асимптоти графіка функції:

$$y=\frac{x^2}{x-1},\ x\neq 1.$$

Розв'язання. 1) Легко бачити, що точка $x_1=1$ є точкою розриву другого роду. Дійсно, діючи формально, легко обчислити границі $f(1\pm 0)$:

$$f(1+0)=\frac{(1+0)^2}{+0}=\frac{1+0}{+0}=+\infty,\quad f(1-0)=\frac{(1-0)^2}{(1-0)-1}=\frac{1-0}{-0}=-\infty\,.$$

Тому, згідно о**значення 11.1**, пряма $L_1 : x=1$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

2) Обчислимо границю функції f на $\pm\infty$:

$$f(\pm\infty):=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\pm\infty}{1\mp 0}=\pm\infty\,.$$

Отже, горизонтальних асимптот немає, але ,можливо, існують похилі асимптоти.

3) Знайдемо значення параметрів k і b, за **теоремою 11.1** слідує:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1\mp 0}=1\,,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2}{x-1}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

Таким чином, пряма $L_2 : y=x+1$ є похилою асимптотою графіка функції f на $+\infty$ і $-\infty$, тобто на лівому і правому кінці числової осі Ox.

Відповідь: $L_1 : x=1$- вертикальна асимптота; $L_2 : y=x+1$ похила асимптота на $\pm\infty$.

Формула Тейлора-Маклорена

Означення 11.2. *Функція, що задана на множині R формулою*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_\circ)^k = b_0 + b_1(x - x_\circ) + .. + b_n(x - x_\circ)^n,$$ *називається* ***центрованим многочленом*** *n-го степеня з центром в точці* $x = x_0$.

Обчислимо коефіцієнти b_k цього многочленна через значення його похідних в точці $x = x_0$:

$$P_n^{(k)}(x_0) = [0 + ... + 0 + k!b_k + (k+1)!b_{k+1}(x - x_0) + ... + n(n-1)...(n-k+1)b_n(x - x_0)^{n-k}]|_{x=x_0} =$$

$$= \ 0 + ... + 0 + b_k k! + 0 + ... + 0 \ = k!b_k, \quad k = 0,1,...,n \ <=>$$

$$<=> \ b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \ k = 0,1,...,n \qquad (11.2).$$

Поставимо задачу про найкраще наближення функції f в околі точки $x_0 \in D(f)$ многочленом n-го степеня. Нехай функція f має в точці $x = x_0$ усі похідні до n-го порядку включно. Тоді будемо вважати, що наближення “досить близьке”, якщо значення функції і усіх її похідних в точці $x = x_0$ співпадають з відповідними значеннями многочленна $P_n(x)$, центрованим в точці $x = x_0$. Тобто,

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0), \ k = 0,1,...,n \qquad (11.3).$$

За формулами (13.3) і (13.2) випливає, що коефіцієнти b_k шуканого центрованого многочленна $P_n(x)$ мають бути такими:

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1,...,n.$$

Отже, відповідна формула найкращого наближення функції f многочленом має такий вигляд:

$$f(x) \approx T_n(x),$$

де
$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!},$$

або
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \qquad (11.4),$$

де $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ є похибкою наближення функції f многочленом T_n, обчисленою у точці x.

Означення 11.3. *Многочлен $T_n(x)$ називається* ***многочленом Тейлора****, а формула (11.4) –* ***формулою Тейлора n-го порядку функції*** f *в околі точки $x = x_0$. Доданок $R_n(x)$ називається* ***залишковим членом у формулі Тейлора****. У випадку $x_0 = 0$ формулу Тейлора називають ще* ***формулою Маклорена****.*

Теорема 11.3 ***(теорема Пеано про формулу Тейлора).***

$$\left\{\begin{array}{l} f \in D^{(n-1)}((a,b)) \\ \exists f^{(n)}(x_0) \in R \\ x_0 \in (a,b) \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ x \in (a,b) \qquad (11.5).$$

Завдання для самостійної роботи11.1: *Привести словесне формулювання теореми.*

Доведення теореми. Потрібно довести, що залишковий член $R_n(x)$ у формулі Тейлора для функції f в околі точки x_0 є нескінченно малою величиною вищого порядку відносно величини $(x-x_0)^n$. Так як функції $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ i $g(x)=(x-x_0)^n$ та їх похідні на (a,b) до $(n-2)$-го порядку включно задовольняють теоремі Лопіталя, то застосувавши її $(n-1)$ раз, отримаємо:

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{R''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}.$$

Так як існує похідна n-го порядку функцій f і T_n в точці x_0, то існує і похідна функції $R_n^{(n-1)}=f^{(n-1)}-T_n^{(n-1)}$ в цій точці, яка дорівнює числу $R_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)-T_n(x_0)=0$. Значить, до функції $R_n^{(n-1)}$ і до лінійної функції $n!(x-x_0)$ можна застосувати **теорему 10.5** про границю відношення двох функцій в термінах відношення їх похідних, тому маємо:

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

що і потрібно було довести.

Теорема 11.4 (***про залишковий член у формі Лагранжа*** **)**. *Нехай функція f є диференційованою $(n+1)$ раз на інтервалі (a,b), і x_0 - деяка точка з цього інтервалу. Тоді на інтервалі (a,b) справджується формула Тейлора n-го порядку для функції f з точкою центрування x_0, причому залишковий член має вигляд* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

де x^* - деяка зі інтервалу (a,b), що міститься між точками x_0 і x. Тобто,

$$\begin{cases} f \in D^{(n+1)}(a,b) \\ x_0 \in (a,b) \end{cases} \Rightarrow\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$x \in (a,b),\ 0<\theta<1. \qquad (11.6).$$

Функцію $R_n^{(n-1)}$ *у цьому випадку називають* ***залишковим членом у формі Лагранжа.***

Доведення. 1) Нехай $x = x_0$. Тоді $f(x_0) = T_n(x_0)$ *і* $R_n(x_0) = 0$, отже , справджується рівність (11.6) , тобто, $f(x_0) = T_n(x_0) + R_n(x_0)$.

2) Нехай $x \in (a,b)\setminus\{x_0\}$. Розглянемо, наприклад, випадок, коли $a < x < x_0 < b$. Означимо функцію:

$$h(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)(x-z)^k}{k!} - \frac{C(x-z)^{n+1}}{(n+1)!},\ z \in [x, x_0]\cdot$$

Можна помітити, що $h(x) = 0$. Виберемо константу C так, щоб $h(x_0) = 0$. Так як функція h має похідну на $[x, x_0]$, то для неї виконуються умови теореми Ролля на відрізку $[x, x_0]$. Тому знайдеться така точка $\overset{*}{x} \in (x, x_0)$, що $h'(\overset{*}{x}) = 0$. Тобто,

$$\frac{d}{dz}\Big[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)(x-z)^k}{k!} - \frac{C(x-z)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]\Bigg|_{z=\overset{*}{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \Big[0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(z)(x-z)^k - k\,f^{(k)}(z)(x-z)^{k-1}}{k!} + \frac{C(x-z)^n}{n!}\Big]\Bigg|_{z=\overset{*}{x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-f^{(n+1)}(\overset{*}{x})(\overset{*}{x}-z)^n}{n!} + \frac{C(\overset{*}{x}-z)^n}{n!} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = f^{(n+1)}(\overset{*}{x})\ .$$

Отже, $h(x_0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0=f(x)-T_n(x)-\dfrac{f^{(n+1)}(x^*)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=T_n(x)-\frac{f^{(n+1)}(x^*)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x^* \in (x,\, x_0)\ .$$

Аналогічно доводиться твердження, коли $a<x_0<x<b$. Теорему доведено.

Таблиця розвинень функцій у формулу Тейлора-Маклорена

Нехай функція f має похідні до n-го порядку включно в околі точки $x_0=0$. Тоді в цьому околі справджується формула Маклорена $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$. Отже, рахуючи похідні відповідних функцій в точці $x_0=0$, маємо:

$$1.\, e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\,;$$

$$2.\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\,;$$

$$3.\, chx=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\,;$$

$$4.\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\,;$$

$$5.\, shx=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\,;$$

$$6.\, a)\ (1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{n!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$б)$ якщо $\alpha=-1$, то $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+o(x^n);$

$в)$ якщо в попередній формулі замінити x на $-x$, то

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)=1+x+x^2+...+x^n+o(x^n)$$

7. $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)$.

Приклади застосування формули Тейлора-Маклорена

Приклад 11.2. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{shx-\sin x}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}$.

Розв'язання. Так як, $shx=x+\frac{x^3}{6}+o_1(x^4)$ *і* $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o_2(x^4),$

то

$$shx\text{-}\sin x=\frac{x^3}{3}+o(x^4),\quad o(x^4):=o_1(x^4)+o_2(x^4)$$. Тому,

$$\lim_{x\to 0}\frac{shx-\sin x}{\sqrt[3]{1+x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{(1+\frac{1}{3}x^3+o_3(x^3))-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^4)}{x^3}}{1+\frac{o_3(x^3)}{x^3}}=\frac{1+0}{1+0}=1\cdot$$

Приклад 11.3. Обчислити величину $\ln\frac{3}{2}$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язання. З **теореми 11.3** випливає, що

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+x^*)^{n+1}},$$

де $0 < x^* < x,\ x > 0.$

Отже, $\ln\frac{3}{2} = \ln(1+\frac{1}{2}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} + \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)(1+x^*)^{n+1}} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+x^*)^{n+1} \cdot 2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^k} + R_n \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n},$$

де величина $R_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+x^*)^{n+1} \cdot 2^{n+1}},\ 0 < x^* < \frac{1}{2},$ буде похибкою даного наближення. Очевидно, що множник $(1+x^*)^{-n-1} < 1$, тому абсолютну величину похибки можна оцінити нерівністю:

$$\Delta_n := |R_n| < \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} := \delta_n, \quad n = 0,1,2\ldots \ .$$

Легко побачити, що $\delta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, застосувавши метод перебору, можна розв'язати нерівність:

$$\delta_n < 10^{-3} \Leftrightarrow \delta_n < 10^{-3}, \delta_0 = \frac{1}{2}, \delta_1 = \frac{1}{8}, \ \ldots \ , \delta_6 = \frac{1}{896}, \delta_7 = \frac{1}{1048}, \ldots \ \Leftrightarrow \quad n \geq 7.$$

Отже у формулі наближення досить взяти сім перших додатків, щоб гарантовано отримати похибку наближення за абсолютною величиною меншою ніж 0.001, тобто,

$$\ln\frac{3}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \ .$$

Відповідь: $\ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \pm 0.001$

Лекція №12

Дослідження монотонності функції за допомогою похідної

Означення 12.1. Будемо говорити, що:

1) функція f ***строго зростає*** *на множині* A*, і позначати* $f\uparrow_s$ *на* A*, якщо* $\forall x_1,x_2\in A:\quad x_2>x_1 \;\Longrightarrow\; f(x_2)>f(x_1)$*;*

2) функція f ***не спадає*** *на множині* A *(не строго зростає), і позначати* $f\uparrow$ *на* A*, якщо* $\forall x_1,x_2\in A:$ $(\;x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)\;)$ *;*

3) функція f ***строго спадає*** *на множині* A*, і позначати* $f\downarrow_s$ *на* A*, якщо* $(-f)\uparrow_s$ *на* A*;*

4) функція f ***не зростає*** *на множині* A *(не строго спадає), і позначати* $f\downarrow$ *на* A*, якщо* $(-f)\uparrow$ *на* A*.*

5) *функція* f *є* ***монотонною*** *на множині* A*, якщо* f *строго чи не строго зростає або строго чи не строго спадає на множині* A*.*

Теорема 12.1 ***(про необхідні і достатні умови нестрогої монотонності функції, яка має похідну)****. Нехай функція* f *визначена і має скінчену похідну на деякому інтервалі* $(a;b)\subset\overline{R}$*. Тоді функція* f *не спадає на цьому інтервалі тоді і тільки тоді, коли в кожній точці інтервалу її похідна невід'ємна. Тобто,*

$$\begin{cases} f\in D((a,b)) \\ (a,b)\subset\overline{R} \end{cases} \Rightarrow \quad (\; f\uparrow \text{ на } (a,b) \;\Leftrightarrow\; \forall x\in(a,b):\;\; f'(x)\geq 0\;).$$

Доведення. 1) *Достатність*. Нехай $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)\geq 0$. Виберемо довільні числа x_1 *і* x_2 з інтервалу (a,b) так, щоб $x_2>x_1$. Так як $f\in D((a,b))$, то до функції f можна застосувати теорему Лагранжа про приріст функції на відрізку $[x_1,x_2]\subset(a,b)$. Отже,

$$\exists x_0\in(x_{1,},x_2):\quad f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1).$$

Але $f'(x_0)\geq 0$. Тому

$$\forall x_2>x_1:\quad (\ f(x_2)-f(x_1)\geq 0\ \Leftrightarrow\ f(x_2)\geq f(x_1)\ ).$$

Тобто функція f не спадає на інтервалі (a,b).

2) Необхідність. Нехай функція f не спадає і має похідну на інтервалі $(a,b)\subset\overline{R}$. Доведемо, що тоді ця похідна невід'ємна. Нехай x_0 - довільна точка з (a,b). За умовою існування скінченої похідної $f'(x_0)$ в точці x_0, випливає що існує і права похідна $f'_+(x_0)$ в цій точці і співпадає з основною похідною, тобто, $f'_+(x_0)=f'(x_0)$. Так як f не спадає на (a,b), то приріст $f(x)-f(x_0)\geq 0$, якщо $x>x_0$. Тому $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, якщо $x>x_0$. Звідки, згідно теореми про перехід до границі в нерівностях, маємо

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,$$

що і треба було довести.

Теорема 12.2 ***(про необхідні і достатні умови строгої монотонності функції, яка має похідну)***. *Нехай функція f визначена і має скінчену похідну на деякому інтервалі $(a;b)\subset\overline{R}$. Тоді функція строго зростає на цьому інтервалі тоді і тільки тоді, коли в кожній точці інтервалу її похідна невід'ємна, і не знайдеться жодного такого* *інтервалу, який лежить в середині інтервалу* $(a;b)$ *, і в усіх точках якого похідна функції* f *дорівнює нулю . Тобто,*

$$f \in D((a,b)) \Rightarrow \left(f \uparrow_s \text{ на } (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \quad \forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geq 0 \\ б) \nexists\, (\alpha,\beta) \subset (a,b):\ \forall x \in (\alpha,\beta) \quad f'(x) = 0 \end{cases} \right).$$

Доведення. *1). Необхідність.*

Нехай функція f має похідну і строго зростає на інтервалі (a,b), тоді вона і не спадає на ньому, тому, за попередньою теоремою похідна функції f є невід'ємною на інтервалі (a,b). Тобто,

$$f \in D((a,b)),\ f \uparrow_s \text{ на } (a,b) \Rightarrow f \in D((a,b)),\ f \uparrow \text{ на } (a,b) \Rightarrow\ \forall x \in (a,b)\ \ f'(x) \geq 0.$$

Доведемо, що при цьому виконується умова б). Від супротивного. Нехай,

$$\exists\ (\alpha,\beta) \subset (a,b):\ \forall x \in (\alpha,\beta) \quad f'(x) = 0.$$

Тоді, за наслідком з теореми Лагранжа про скінчений приріст, функція f є постійною величиною на інтервалі $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, що суперечить умові строго зростання функції f на (a,b). Отже, припущення не вірне, і має виконуватися умова б).

2). Достатність.

Нехай функція f має скінчену похідну в кожній точці інтервалу (a,b) і виконуються умови а) і б). Покажемо, що $f \uparrow_s$ *на* (a,b). За умови а) і **теореми 12.1** випливає, що функція f не спадає, тобто, $f \uparrow$ *на* (a,b).

Доведемо, що монотонність строга. Від супротивного. Припустимо, що функція зростає не строго на (a,b). Це означає, що знайдуться такі точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, що $x_2 > x_1$ і при цьому $f(x_1) = f(x_2)$. Але тоді, за нерівністю $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ слідує, що функція f є постійною величиною на інтервалі $(x_1, x_2) \subset (a,b)$.Тому,

$$\forall x \in (x_1, x_2) \quad f'(x) = 0,$$

що суперечить виконанню умови б). Отже, припущення не вірне, і функція f строго зростає на інтервалі (a,b). Теорему доведено.

Теорема 12.3 *(про достатні умови монотонності функції, яка має похідну не в усіх точках відрізка)*. *Якщо функція* f *має додатну (або невід'ємну) похідну в усіх точках інтервалу крім однієї, в якій функція неперервна, то вона строго (не строго) зростає на всьому інтервалі. Тобто,*

$$\begin{cases} f \in D((a,b) \setminus \{x_0\}) \\ (a,b) \subset \overline{R}, x_0 \in (a,b), \quad f \in C(\{x_0\}) \\ \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\} \quad f'(x) > 0 \quad (\text{або } f'(x) \ge 0) \end{cases} \Rightarrow \quad f \uparrow_s \text{на } (a,b) \quad (\text{або } f \uparrow \text{на } (a,b)).$$

Доведення. Доведемо тільки випадок строгого зростання функції. Розглянемо три випадки можливого розташування точок $x_1, x_2 \in (a,b)$.

а) Нехай $a < x_1 < x_2 \le x_0$. Застосувавши теорему Лагранжа про приріст функції f на відрізку $[x_1, x_2]$, побачимо, що приріст

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0, \quad c \in (x_1, x_2).$$

Отже, $\quad x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$,

тобто, функція f строго зростає на на проміжку $(a, \ x_\circ]$.

б) Аналогічно доводиться, що функція f строго зростає на проміжку $[x_\circ, b)$.

в) Нехай $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$.Тоді, згідно доведеному у попередніх пунктах а) і б), справедливі нерівності

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Отже, функція f строго зростає на всьому інтервалі (a,b), що і потрібно було довести.

Випадок нестрогого зростання функції доводиться майже дослівно.

Зауваження 12.1. *Легко побачити, що* **теореми 12.1-12.3** *виконуються і в тому випадку, якщо в них умову строгого чи нестрогого зростання функції* f *замінити відповідно на умову строгого чи нестрогого спадання, а умову додатності чи від'ємності похідної* f' *функції* f, *відповідно замінити на умову від'ємності чи недодатності.*

Дослідження опуклості графіка функції

Означення 12.2. *Будемо говорити, що функція*

1) ***строго опукла вниз*** *на інтервалі* (a,b), *і позначати* $f_{s\cup}$ *на* (a,b), *якщо*

$$\forall \alpha \in (0,1) \ \ \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2 : \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2);$$

2) ***не строго опукла вниз*** *на інтервалі* (a,b), *і позначати* $f_{\cup}$ *на* (a,b), *якщо*

$$\forall \alpha \in [0,1] \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b) : \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2);$$

3) ***строго опукла вгору*** *на інтервалі* (a,b), *і позначати* $f_{s\cap}$ *на* (a,b), *якщо* $(-f)_{s\cup}$ *на* (a,b);

4) ***не строго вгору*** *на інтервалі* (a,b), *і позначати* $f_{\cap}$ *на* (a,b), *якщо* $(-f)_{\cup}$ *на* (a,b);

5) ***опукла*** *на* (a,b), *якщо функція* f *задовольняє хоч одну з умов 1)-4).*

Зауваження 12.2*. Геометрично умова, наприклад, строгої опуклості функції* f *на інтервалі* (a,b) *означає, що для будь-якої внутрішньої точки* $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ *відрізка* $[x_1,x_2] \subset (a,b)$ *відповідна точка* $(x_0, f(x_0))$ *графіка функції* f *лежить нижче ніж точка* (x_0, y_0), *де* $y_0 = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ *- ордината хорди, що зв'язує кінці* $(x_1, f(x_1))$ *і* $(x_2, f(x_2))$ *графіка функції* f.

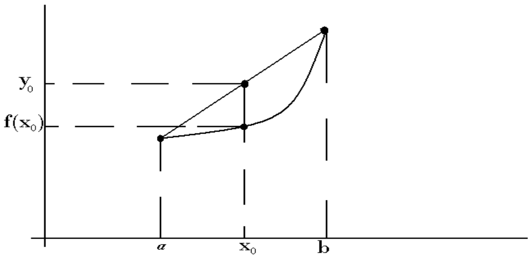


Рис. 4

Теорема 12.4 ***(про необхідні і достатні умови опуклості функції в термінах функції нахилу)****. Нехай* $f:(a,b) \to R,\ (a,b) \subset \overline{R}$. *Для довільної* $x_0 \in (a,b)$ *означимо функцію*

$$g_{x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ x \in (a,b) \setminus \{x_0\},$$

яку будемо називати ***функцією нахилу*** *функції* f. *Тоді:*

1) функція f *строго опукла вниз на інтервалі* (a,b) *тоді і тільки тоді, коли для довільно вибраної точки* $x_0 \in (a,b)$ *функція* g_{x_0} *строго зростає на інтервалі* $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$;

2) функція f не строго опукла вниз на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли для довільно вибраної точки $x_0 \in (a,b)$ функція $g_{x_\circ}$ не спадає на інтервалі $x \in (a,b) \setminus \{x_\circ\}$. Тобто,

$$1)\ f_{s\cup}\ \text{на}\ (a,b)\ \Leftrightarrow\ g_{x_\circ}\uparrow_s\ \text{на}\ (a,b)\setminus\{x_\circ\};$$

$$2)\ f_{\cup}\ \text{на}\ (a,b)\ \Leftrightarrow\ g_{x_\circ}\uparrow\ \text{на}\ (a,b)\setminus\{x_\circ\}.$$

Доведення. Доведемо тільки першу частину тереми. Розглянемо три можливі випадки розташування точок x_0, x_1, x_2 на інтервалі (a,b).

а) Нехай $a < x_1 < x_2 < x_0 < b$. Виберемо за α число

$\alpha := \dfrac{x - x_0}{x_0 - x_1} \in (0;1)$. Тоді $1-\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1}$, тому,

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1}x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{-x_2x_1 + x_2x_0}{x_0 - x_1} = x_2.$$

Отже, $$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) < \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_1) f(x_2) < (x_0 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_1) f(x_2) < (x_0 - x_2) f(x_1) + [(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)] f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} > \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow g_{x_0}(x_2) > g_{x_0}(x_1).$$

Звідки випливає, що функція f строго опукла вниз на інтервалі (a, x_0) тоді і тільки тоді, коли функція $g_{x_\circ}$ на ньому строго зростає.

Аналогічно доводиться твердження і для наступних розташувань цих точок $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ та $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$. (Довести самостійно!!!)

Доведення другої частини теореми відрізняється від попередньої тільки заміною відповідних знаків строгої нерівності на знаки, нестрогої нерівності. (Довести самостійно!!!). Теорему доведено.

Теорема 12.5 ***(про необхідні і достатні умови опуклості функції, яка має похідну).*** *Нехай функція f визначена і має скінчену похідну на деякому інтервалі $(a;b)\subset\overline{R}$. Тоді:*

1) функція f строго опукла вниз на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли перша похідна функції f строго зростає на цьому інтервалі;

2) функція f не строго опукла вниз на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли перша похідна функції f не спадає на цьому інтервалі. Тобто,

$$f\in D((a,b)) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 1)\;\; f_{s\cup}\;\; на\;\; (a,b) \;\;\Leftrightarrow\; f'\uparrow_s\;\; на\;\; (a,b) \\ 2)\;\; f_{\cup}\;\; на\;\; (a,b) \;\;\Leftrightarrow\; f'\uparrow\;\; на\,(a,b) \end{cases} .$$

Доведення. Доведемо, наприклад, тільки твердження 2), так як інше доводиться аналогічно.

а) Необхідність. Нехай функція f не строго опукла вниз на інтервалі (a,b). Покажемо, що тоді функція f' не спадає на (a,b), тобто для довільних точок x_1 *і* x_2 з інтервалу (a,b) таких, що $x_2>x_1$, виконується нерівність $f'(x_2)\geq f'(x_1)$. Для цього виберемо довільні точки $u\in(a,x_1)$, $v\in(x_2,b)$. Згідно твердження попередньої теореми з умови нестрогої опуклості вниз функції f випливає справедливість нерівностей

$$g_{x_1}(u)\leq g_{x_1}(x_2)=g_{x_2}(x_1)\leq g_{x_2}(v) \;\Rightarrow\; \frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1}\leq\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2}.$$

Перейшовши до границі в лівій частині останньої нерівності при умові, що $u\to x_1-0$, а в правій частині при умові, що $v\to x_2+0$ отримаємо , що

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_2).$$

Але за умовою існування скінченої похідної функції f в усіх точках інтервалу (a,b) $(f \in D((a,b)))$ випливає, що

$$f'_-(x_1) = f'(x_1)\ i\ f'_+(x_2) = f'(x_2).$$

Тому,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f'(x_2) \ge f'(x_1),$$

тобто, похідна f' не спадає на (a,b).

b) *Достатність.* Нехай похідна f' не спадає на (a,b). Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in (a,b)$ і обчислимо похідну функції нахилу $g'_{x_\circ}(x),\ x \in (a,b) \setminus \{x_\circ\}$:

$$g'_{x_0}(x) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)' = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2}.$$

Застосувавши теорему Лагранжа до другого доданка чисельника, отримаємо:

$$g'_{x_0}(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - f'(c)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - x_0} \ge 0,\ \ x \in (a,b) \setminus \{x_0\}.$$

Дійсно, якщо $x > x_0$, то $x_0 < c < x$, тому,

$$f'(x) \le f'(c), \quad x - x_0 < 0.$$

Отже,

$$\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}:\ \ g'_{x_0}(x) \ge 0.$$

Крім того, за умови існування скінченої похідної f' в довільній точці $x \in (a,b)$ випливає, що існують і співпадають скінчені границі $g_{x_0}(x_0 \pm 0)$, а саме:

$$g_{x_0}(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = f'(x_0),$$

$$g_{x_0}(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Тому, якщо доозначити функцію нахилу g_{x_0}, в точці x_0, як $g_{x_0}(x_0):=f'(x_0)$, то функція g_{x_0} стане неперервною в цій точці. А значить, згідно твердження **теореми 12.3.**, функція g_{x_0} не спадає на всьому інтервалі (a,b), звідки за **теоремою 12.4**, випливає, що функція f не строго опукла вниз на (a,b), що і потрібно було довести.

Завдання для самостійноїроботи12.1. *Довести перше твердження* **теореми 12.5.**

Теорема 12.6 ***(про необхідні і достатні умови опуклості функції в термінах її другої похідної).*** *Нехай в усіх точках інтервалу* $(a,b)\subset\overline{R}$ *функція* f *має другу скінчену похідну* f''. *Тоді:*

1) функція f *не строго опукла вниз на* (a,b) *тоді і тільки тоді, коли друга похідна функції* f *є невід'ємною на* (a,b).

2) функція f *строго опукла вниз на* (a,b) *тоді і тільки тоді, коли друга її похідна невід'ємна на* (a,b), *і при цьому не існує жодного інтервалу* (α,β), *що лежить всередині* (a,b), *на якому друга похідна* f'' *тотожньо дорівнює нулю.*

Доведення. Твердження випливає з доведених **теорем 12.5**, **12.1**, **12.2**.

Зауваження 12.3. *За* **означенням 12.2.** *легко бачити, що твердження* **теорем 12.4-12.6** *залишаються в силі, якщо в цих теоремах замінити умову строгої або нестрогої опуклості вниз функції* f *на умову відповідної опуклості вгору, умову зростання функції нахилу або похідної* f' *на умову її спадання, умову додатності або невід'ємності другої похідної* f'' *на умову її від'ємності або недодатності відповідно.*

Знаходження екстремумів функцій

.

Означення 12.3. *Будемо говорити, що в точці* $x_0 \in D(f)$ *функція* f *має:*

а) ***локальний максимум*** $f(x_0)$ *і позначати* $f(x_0) = f_{\max}$*, якщо*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B(\varepsilon, x_0) \quad f(x) \le f(x_0) \quad (\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \le 0) \ ;$$

б) ***строгий локальний максимум*** $f(x_0)$*, і позначати* $f(x_0) = f_{s\max}$*, якщо*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}(\varepsilon, x_0) \quad f(x) < f(x_0) \quad (\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0) \ ;$$

в) ***локальний мінімум*** $f(x_0)$ *і позначати* $f(x_0) = f_{\min}$*, якщо*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B(\varepsilon, x_0) \quad f(x) \le f(x_0) \quad (\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \ge 0) \ ;$$

г) ***строгий локальний мінімум*** $f(x_0)$*, і позначати* $f(x_0) = f_{s\min}$*, якщо*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}(\varepsilon, x_0) \quad f(x) > f(x_0) \quad (\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0) \ ;$$

д) ***екстремум*** $f(x_0)$ *(приймає* ***екстремальне значення****), і позначати* $f(x_0) = f_{ex}$*, якщо*

$$f(x_0) = f_{\max} \vee f_{s\max} \vee f_{\min} \vee f_{s\min} \ .$$

Теорема 12.7 (***про необхідну умову екстремуму***). *Нехай функція* f *в точці* x_0 *приймає екстремальне значення* $f(x_0)$ *і в цій точці існує скінчена похідна* $f'(x_0)$, *тоді* $f'(x_0)=0$. *Тобто,*

$$\begin{cases} f(x_0)=f_{ex} \\ \exists\, f'(x_0)\in R \end{cases} \Rightarrow \ f'(x_0)=0\cdot$$

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми Ферма. Дійсно, нехай, наприклад, $f(x_0)=f_{\max}$, тоді за **означенням 12.3** знайдеться таке додатне число $\varepsilon>0$, що число $f(x_0)$ є найбільшим значенням функції f в інтервалі $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)=B(\varepsilon, x_0)$. Так як, за умовою теореми в точці x_0 існує скінчена похідна $f'(x_0)$, то згідно теореми Ферма, $f'(x_0)=0$, що і потрібно було довести.

Означення 12.4. *Будемо говорити, що проходячи через* x_0

а) ***функція*** f ***змінює свій знак з "+" на "-"****, і будемо позначати* $f\ +\overset{x_0}{\frown}-$ *, якщо*

$$\exists\varepsilon>0: \begin{cases} \forall x\in(x_0-\varepsilon, \ \ x_0): & f(x)\ge 0 \\ \forall x\in(x_0, \ \ x_0+\varepsilon): & f(x)\le 0 \end{cases} \quad ;$$

б) ***функція*** f ***змінює свій знак з "-" на "+",*** *і будемо позначати* $f\ -\overset{x_0}{\frown}+$, *якщо функція* $(-f)$ *змінює свій знак з плюса на мінус.*

Теорема 12.8 (***про достатні умови екстремуму в термінах першої похідної***). *Якщо функція* f *має похідну в усіх точках інтервалу*(a,b) *крім, можливо, однієї* $x_0\in(a,b)$ *, в якій вона неперервна , і , проходячи через* x_0 *похідна функції* f *змінює свій знак, то тоді в цій точці функція* f *має екстремум. При цьому, функція* f *має у точці* x_0

строгий локальний максимум, якщо похідна f'*, проходячи через цю точку, змінює свій знак з плюса на мінус, і функція* f *має у точці* x_0 *строгий локальний мінімум - у протилежному випадку. Тобто,*

$$\begin{cases} f \in D((a,b)\setminus\{x_0\}), \quad x_0 \in (a,b) \\ f \in C(\{x_0\}) \qquad\qquad \Rightarrow \quad f(x_0) = f_{ex}, \\ f' - \overset{x_0}{\cap} + \quad \text{або} \quad f' + \overset{x_0}{\cap} - \end{cases}$$

$$\text{при цьому:} \qquad \left[\begin{array}{l} f(x_0) = f_{s\max}\ , \text{ якщо } f' + \overset{x_0}{\cap} - \\ f(x_0) = f_{s\min}\ , \text{ якщо } f' - \overset{x_0}{\cap} + \end{array}\right. .$$

Доведення. Нехай функція f неперервна в точці x_0, і при цьому похідна f' , проходячи через точку x_0 змінює, наприклад, свій знак з “+” на “-”. Тоді з **теореми 12.3** випливає, що при деякому $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} f \uparrow_s \ \text{на}\ (x_0 - \varepsilon,\ x_0] \\ f \downarrow_s \ \text{на}\ [x_0,\ x_0 + \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0): \quad f(x) < f(x_0) \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon): \quad f(x) < f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \overset{\circ}{B}(\varepsilon, x_0): \quad f(x) < f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = f_{s\max}\ .$$

Аналогічно доводиться випадок строгого мінімуму. (Перевірити самостійно!!!). Теорему доведено.

Зауваження 12.4. *Якщо в умовах попередньої теореми існує похідна* f'*, то за* **теоремою 12.7** *ця похідна дорівнює нулю. Точки, в яких похідна функції* f *рівна нулю називають ще* ***стаціонарними або критичними***.

Теорема 12.9 (***про достатні умови екстремуму в термінах вищих похідних***).

Нехай в деякій точці x_0 *інтервалу* (a,b), *на якому означена функція* f *і має всі похідні до (n-1) – го порядку включно, функція* f *має відмінну від нуля похідну ще і* n *– го порядку, причому всі похідні меншого порядку у цій точці* x_0 *дорівнюють нулю. Тоді, якщо число* n *– парне, то в точці* x_0 *функція* f *має екстремум, при цьому цей екстремум є локальним максимумом, коли* n*-та похідна від'ємна, і цей екстремум є локальним мінімумом, коли – додатна. Якщо ж число* n *– непарне, то в точці* x_0 *функція* f *не має екстремуму.*

Доведення. Нехай функція f означена і має всі похідні до (n-1)-го порядку включно на деякому інтервалі (a,b) і n-ту похідну в точці $x_0 \in (a,b)$. Тоді за теоремою Пеано про формулу Тейлора (**теорема 11.3**) справджується рівність (11.5) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \in (a,b).$$

Але за умовою теореми $f'(x_\circ) = f''(x_\circ) = ... = f^{(n-1)}(x_\circ) = 0$. Тому,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \ \ x \in (a,b).$$

Звідки маємо:

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} + \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \right), \ \ x \in (a,b) \setminus \{x_0\} \ (12.1).$$

За означенням нескінченно малої величини більшого порядку

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$, тому, знайдеться таке число $\varepsilon > 0$, що

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}(\varepsilon, x_0): \quad \left| \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \right| < \frac{1}{2} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} .$$

Звідки слідує, що знаки числа $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{k!} + \dfrac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}$ і числа $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$ однакові. Таким чином, і знак добутку, що стоїть у правій частині рівності (12.1), а разом з цим і різниці $f(x) - f(x_0)$, співпадає зі знаком числа $f^{(n)}(x_0)$, якщо число n- парне, і, тому, множник $(x-x_0)^n$- додатний. Отже, справджується перше твердження теореми.

Якщо ж число n- непарне, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ множник $(x-x_0)^n$- додатний, коли $0 < x - x_0 < \varepsilon$, і множник $(x-x_0)^n$- від’ємний, коли $0 < x_0 - x < \varepsilon$.

Отже, у ε- околі точки x_0 приріст $f(x) - f(x_0)$ приймає значення різних знаків. Таким чином, у цьому випадку функція f не має екстремуму в точці x_0.

Теорему доведено.

Точки перегину

Означення 12.5. *Будемо говорити, що точка* $x_0 \in D(f)$ *є* ***точкою перегину*** *графіка функції* f, *і позначати* $x_0 = x_{\square}$ *для* f, *якщо:*

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f_{s\cup} на\ (x_0 - \varepsilon, x_0), \quad f_{s\cap}\ на\ (x_0, x_0 + \varepsilon) \\ f_{s\cap} на\ (x_0 - \varepsilon, x_0), \quad f_{s\cup}\ на\ (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{array} \right. \\ f \in C(\{x_0\}) \end{cases} ,$$

тобто, функція f *має різні напрямки строгої опуклості зліва і справа від точки* x_0*, і є неперервною в цій точці.*

Теорема 12.10 (*про необхідну умову точки перегину*). *Нехай точка* $x_0 \in D(f)$ *є точкою перегину графіка функції* f*, і в цій точці функція* f *має другу похідну. Тоді ця похідна дорівнює нулю. Тобто,*

$$\begin{cases} \exists f''(x_0) \in R \\ x_0 \in D(f),\ x_0 = x_{\square}\ \text{для}\ f \end{cases} \Rightarrow \quad f''(x_0) = 0\,.$$

Доведення. За **означенням 12.5** точки перегину графіка функції f та за **теоремою 12.8** випливає, що в точці перегину x_0 похідна f' функції f приймає своє екстремальне значення, тобто $f'(x_0) = (f')_{ex}$. Так як в цій точці існує друга похідна $f''(x_0) = (f')'\big|_{x=x_0}$, то та за **теоремою 12.7** про необхідну умову екстремуму ця похідна дорівнює нулю. Що і потрібно було довести.

Теорема 12.11 (*про достатні умови існування точки перегину графіка функції*). *Якщо функція* f *має другу похідну в усіх точках інтервалу* (a,b) *крім, можливо, однієї* $x_0 \in (a,b)$ *, в якій вона неперервна , і , проходячи через цю точку* x_0 *друга похідна функції* f *змінює свій знак, то тоді точка* x_0 *є точкою перегину графіка функції* f .

Доведення. Якщо друга похідна функції f змінює свій знак, проходячи через точку x_0, то за **теоремою 12.6** слідує, що справа і зліва від цієї точки функція f має різну направленість опуклості, тобто, згідно

означення 12.5, точка x_0 є точкою перегину графіка функції f. Теорему доведено.

Рекомендована схема дослідження функції і побудови її графіка

1. Знаходження області визначення функції .
2. Визначення періодичності, парності і непарності, точок перетину графіка функції з координатними осями.
3. Дослідження функції методами теорії границь: знаходження області неперервності функції, точок розриву і визначення їх типу розриву, знаходження асимптот графіка функції.
4. Дослідження функції за допомогою першої похідної: знаходження похідної, побудова схеми розподілу її знаків, визначення інтервалів монотонності функції та точок екстремумів.
5. Дослідження функції за допомогою другої похідної: знаходження другої похідної, побудова схеми розподілу її знаків, визначення інтервалів опуклості функції та точок перегину графіка функції.
6. Зведення результатів дослідження в єдину таблицю.
7. Побудова за таблицею результатів дослідження функції її графіка.

Диференціал і диференційовані функції

Означення 12.6. *Нехай функція* f *визначена в деякому околі* $B(\varepsilon, x_\circ)$ *точки* $x_\circ \in R$. *Будемо говорити, що функція* f ***диференційована*** *в точці* $x_\circ$, *якщо її приріст в точці* $x_\circ$ *має вигляд*

$$f(x) - f(x_\circ) = A(x - x_\circ) + o((x - x_\circ)), \quad x \in B(\varepsilon, x_\circ),$$

при цьому лінійну частинку приросту $A(x - x_\circ)$ *називають* ***диференціалом*** *або* ***першим диференціалом*** *функції* f *в точці* $x_\circ$ *та позначають* $df(x_\circ)$, *а приріст аргументу позначають* dx, *тобто,*

$$df(x_\circ) = A(x - x_\circ) = Adx.$$

Теорема 12.12 (*про необхідні і достатні умови диференційованості функції*). *Функція* f *диференційована в точці* $x_\circ$ *тоді і тільки тоді, коли вона має скінчену похідну в цій точці, при цьому* $f'(x_\circ) = A$*, тобто,* $df(x_\circ) = f'(x_\circ)dx$.

Доведення. 1). *Необхідність.* Нехай функція f є диференційованою в точці $x_\circ$. Отже, її приріст в деякому околі точки $x_\circ$ можна подати у вигляді

$$f(x) - f(x_\circ) = A(x - x_\circ) + o((x - x_\circ)).$$

Але тоді існує границя :

$$f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ} \frac{A(x - x_\circ) + o((x - x_\circ))}{x - x_\circ} = A + \lim_{x \to x_\circ} \frac{o((x - x_\circ))}{x - x_\circ} =$$

$$= A + 0 = A.$$

Значить, функція f має похідну в точці $x_\circ$ і $f'(x_\circ) = A$. Звідки,

$$df(x_\circ) = f'(x_\circ)dx.$$

2). *Достатність.* Нехай функція f має скінчену похідну $f'(x_\circ)$ в точці $x_\circ$. Тоді за **теоремою 8.1** функцію $f(x)$ в деякому околі точки $x_\circ$ можна подати у вигляді

$$f(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ) + \alpha(x)(x - x_\circ),$$

де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_\circ$. Тому,

$$f(x) - f(x_\circ) = A(x - x_\circ) + o((x - x_\circ)),$$

де $A = f'(x_\circ), \quad o((x - x_\circ)) = \alpha(x)(x - x_\circ).$

Отже, функція f є диференційованою в точці $x_\circ$ і її диференціалом є добуток похідної $f'(x_\circ)$ на $dx = x - x_\circ$. Теорему доведено.

Теорема 12.13 (*про диференціювання константи, суми, різниці, добутку і частки функцій*). *Нехай функції* f *і* g *диференційовані в* *точці* $x_\circ$. *Тоді функції* $f \pm g$, $f \cdot g$ *і* $\frac{f}{g}$ *теж є диференційованими в точці* $x_\circ$ *(остання при умові, що* $g(x_\circ) \neq 0$ *), і при цьому:*

а) $df = 0$, *якщо* $f = c = const$;

б) $d(f \pm g)(x_\circ) = df(x_\circ) \pm dg(x_\circ)$;

в) $d(f \cdot g)(x_\circ) = g(x_\circ) \cdot df(x_\circ) + f(x_\circ) \cdot dg(x_\circ)$;

г) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_\circ) = \frac{g(x_\circ) \cdot df(x_\circ) - f(x_\circ) \cdot dg(x_\circ)}{g(x_\circ)^2}$, $g(x_\circ) \neq 0$;

д) $d(cf)(x_\circ) = c \cdot df(x_\circ)$, *де* $c = const$.

Доведення. Твердження теореми слідує за **теоремами 8.4 і 12.12**.

Доведемо, наприклад, твердження в).

Якщо функції f і g диференційовані в точці $x_\circ$, то за **теоремою 12.12** випливає, що в цій точці функції f і g мають скінчені похідні $f'(x_\circ)$ і $g'(x_\circ)$. Отже, згідно **теореми 8.4** функція $f \cdot g$ теж має скінчену похідну $(f \cdot g)'(x_\circ) = g(x_\circ) \cdot f'(x_\circ) + f(x_\circ) \cdot g'(x_\circ)$.

Тоді за **теоремою 12.12** слідує, що функція $f \cdot g$ є диференційованою в точці $x_\circ$ і її диференціал становить:

$$d(f \cdot g)(x_\circ) = (f \cdot g)'(x_\circ)dx = \big(g(x_\circ) \cdot f'(x_\circ) + f(x_\circ) \cdot g'(x_\circ)\big)dx =$$
$$= g(x_\circ) \cdot (f'(x_\circ)dx) + f(x_\circ) \cdot (g'(x_\circ)dx) = g(x_\circ) \cdot df(x_\circ) + f(x_\circ) \cdot dg(x_\circ) \;,$$

що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи12.2. *Довести інші твердження* **теореми 12.13.**

Теорема 12.14 (*про інваріантність форми першого диференціала*).

$$\begin{cases} f \in D\left(\{\, g_\circ\}\right) \\ g \in D\left(\{\, x_\circ\}\right) \Rightarrow (f \circ g) \in D\left(\{\, x_\circ\}\right),\ d(f \circ g)(x_\circ) = f'(g(x_\circ))dg(x_\circ) \\ g_\circ = g(x_\circ) \end{cases},$$

тобто, $$df(g)(x_\circ) = f'(g_\circ) \cdot dg(x_\circ)\ .$$

Завдання для самостійної роботи12.3. *Привести словесне формулювання* **теореми 12.14.**

Доведення. Якщо функція f диференційована в точці $g_\circ$, а функція g - в точці $x_\circ$, де $g_\circ = g(x_\circ)$, то за теоремою про похідну композиції функцій випливає, що існує похідна складної функції $f(g) = f \circ g$ в точці $x_\circ$ і при цьому $(f(g))'(x_\circ) = f'(g(x_\circ)) \cdot g'(x_\circ)$. Тому, згідно теореми 12.12, функція $f(g)$ диференційована в точці $x_\circ$ і її диференціал обчислюється за формулою:

$$df(g(x_\circ)) = \left(f(g)\right)'(x_\circ)dx = f'(g(x_\circ)) \cdot (g'(x_\circ)dx) = f'(g(x_\circ)) \cdot dg(x_\circ),$$

що і потрібно було довести.

Означення 12.7. *Нехай функція* $f(\cdot)$ *диференційована в деякій точці* $x \in D(f)$ *і її диференціал становить* $df(x) = f'(x)dx := g_1(x)$. *Якщо функція* $g_1(x)$ *в свою чергу є диференційована в точці* x, *то її диференціал* $dg_1(x) = d(df(x)) := g_2(x)$ *називають* ***другим диференціалом*** *функції* f *в точці* x *і позначають* $d^2 f(x)$, *тобто,* $d^2 f(x) = d(df(x))$. *Якщо* $g_2(x)$ *- диференційована в точці* x *функції, то її диференціал* $dg_2(x)$ *називають* ***третім диференціалом*** *функції* f *і позначають* $d^3 f(x)$, *тобто,* $d^3 f(x) = dg_2(x) = d(d^2 f(x))$. *І так далі. Взагалі, якщо існує* $(n-1)$ *-ий диференціал* $d^{n-1} f(x) = g_{n-1}(x)$ *функції*

f в точці x, і він, як функція аргументу x, є диференційованим, то диференціал від цієї функції називається ***диференціалом n-го порядку*** *функції f в точці x, тобто,*

$$d^n f(x) = dg_{n-1}(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

При цьому кажуть, що функція f є n ***разів диференційованою*** *в точці x, або просто* ***n-диференційованою.***

Теорема 12.14 ***(про формулу диференціала вищого порядку).***

1*). Функція f є n разів диференційованою в точці x тоді і тільки тоді, коли вона має в цій точці похідну n-го порядку $f^{(n)}(x)$. При цьому ,*

$$d^n f(x) \ = \ f^{(n)}(x) dx^n \qquad (12.2),$$

де позначено $dx^n := (dx)^n$.

2). *Якщо функція f є двічі диференційованою в точці $g_\circ$, а функція g - двічі диференційована в точці $x_\circ$, де $g_\circ = g(x_\circ)$, то складна функція $f(g(\cdot))$ є двічі диференційованою в точці $x_\circ$, і її диференціал обчислюється за формулою*:

$$d^2 f(g)(x_\circ) = f''(g_\circ) dg(x_\circ)^2 + f'(g_\circ) d^2 g(x_\circ) \ .$$

Доведення. 1). Перше твердження теореми є наслідком **теореми 12.12** та **означення 12.7**. Дійсно, згідно **теореми 12.12** функція f є диференційованою в точці x тоді і тільки тоді, коли вона має в цій точці першу похідну $f'(x)$, при цьому $df(x) = f'(x)dx := g_1(x)$. В свою чергу, функція $g_1(x)$ буде диференційованою в точці x тоді і тільки тоді коли існує похідна функції $g_1(x) = f'(x)dx$. Але множник dx є постійною величиною, тому похідна $g_1'(x)$ існує тоді і тільки тоді, коли функція $f'(x)$ має похідну, тобто існує друга похідна $f''(x)$ функції f . При цьому $g_1'(x) = f''(x)dx$, тому ,

$$d^2 f(x) = dg_1(x) = g_1'(x)dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Застосувавши метод математичної індукції, переконуємось у тому, що формула (12.2) справджується для довільного натурального числа $n \in N$.

2) Нехай тепер функція f є двічі диференційованою в точці $g_\circ$, функція g - двічі диференційована в точці $x_\circ$, і $g_\circ = g(x_\circ)$. Тобто, $f \in D^2(\{g_\circ\})$, $g \in D^2(\{x_\circ\})$, і $g_\circ = g(x_\circ)$. За теоремою про похідну складної функції випливає, що існує похідна композиції $f \circ g$ в точці $x_\circ$ і при цьому

$$(f \circ g)'_x(x_\circ) = f'_g(g(x_\circ)) \cdot g'_x(x_\circ) = \frac{df(g(x_\circ))}{dg} \cdot \frac{dg(x_\circ)}{dx}.$$

В свою чергу, кожний множник останнього добутку має похідну, тому, згідно теореми про похідну добутку функцій, в точці $x = x_\circ$ існує похідна

$$(f'_g(g(x))g'(x))'_x = (f \circ g)''_{xx}(x) = \frac{d^2 f(g(x))}{dx^2}.$$

Отже, за першим твердженням теореми слідує, що функція $h = f \circ g$ буде двічі диференційованою в точці $x_\circ$. Формулу другого диференціалу складної функції можна вивести, застосувавши теорему про інваріантність форми першого диференціалу та теорему про диференціал добутку. Дійсно,

$$d^2 f(g) = d(df(g)) = d(f'(g)dg) = d(f'(g)) \cdot dg + f'(g) \cdot d(dg) =$$

$$= (f''(g)dg) \cdot dg + f'(g) \cdot d^2 g = f''(g) \cdot (dg)^2 + f'(g) \cdot d^2 g.$$

Таким чином, якщо $x = x_\circ$, то

$$d^2 f(g)(x_\circ) = f''(g_\circ)dg(x_\circ)^2 + f'(g_\circ)d^2 g(x_\circ),$$

що і потрібно було довести.

Лекція №13

Невизначений інтеграл

На попередніх лекціях ми навчилися розв’язувати задачі про знаходження похідної від заданої елементарної функції. Але цілком природньо сформулювати обернену задачу: як знайти функцію, якщо відома її похідна?

Означення 13.1. *Нехай на інтервалі (a,b) задано функцію f. Тоді фунція F, похідна якої в кожній точці з інтервалу (a,b) співпадає зі значенням функції $f(x)$, називається* ***примітивною або первісною , чи інтегралом*** *функції f на інтервалі (a,b). Тобто,*

F - ***примітивна*** *функції f на (a,b)* $\Leftrightarrow$ $F'(x)=f(x),\ \mathrm{x}\in(a,b)$ (13.1)

При цьому, операція знаходження примітивної називається інтегруванням, а функція f, для якої існує примітивна на інтервалі (a,b), називають ***інтегрованою*** *на цьому інтервалі. Якщо, примітивна F функції f є елементарною функцією, то функцію f будемо називати* ***елементарно інтегрованою****.*

Приклад 13.1. Функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ є елементарною примітивною функції $f(x)=x^2$ на R. Дійсно,

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2=f(x),\ \mathrm{x}\in\mathrm{R}\quad .$$

Отже, функція $f(x)=x^2$ є елементарно інтегрованою на R.

Легко перевірити, що і функція $G(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$ теж є примітивною цієї ж функції f.

Взагалі, легко помітити, що при довільній дійсній константі $c \in R$ функція

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in (a,b),$$

є примітивною функції *f* на (a,b), якщо F - примітивна функції *f*.

Навпаки, нехай $G(x)$ і $F(x)$ − деякі примітивні функції *f* на інтервалі (a,b). Розглянемо функцію $H(x) = G(x) - F(x), x \in (a,b)$. Тоді,

$$H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 \text{ на } (a,b).$$

Таким чином, за наслідком теореми Лагранжа про скінченний приріст функції на відрізку, функція $H(x)$ є постійною величиною на інтервалі (a,b). Тобто,

$$\exists\, c \in R: \ H(x) \equiv c \text{ на } (a,b) \ \Leftrightarrow \ \exists\, c \in R: \ G(x) = F(x) + c, \ \ x \in (a,b) \ .$$

Отже, справедливе твердження:

Теорема 13.1. *Якщо функція f інтегрована на інтервалі (a,b), то вона має безліч примітивних, множина яких задається формулою*

$$G(x) = F(x) + c, \quad x \in (a,b),$$

де F- будь-яка фіксована примітивна функції f на (a,b), а константа ***с*** *пробігає всю множину дійсних чисел.*

За **теоремою 13.1** , наприклад, слідує, що всі примітивні елементарно інтегрованої функції є елементарними функціями.

Подібним чином означається поняття примітивної функції *f* і на інших проміжках, наприклад, на відрізках $[a,b] \subset R$. У цьому випадку під похідними примітивної F у крайніх точках відрізка $[a,b]$ розуміють відповідно праву і ліву похідну, тобто,

$$F'(a) = F_+^{'}(a) = \lim_{\Delta\to 0,\Delta>0} \frac{F(a+\Delta)-F(a)}{\Delta},$$

$$F'(b) = F_-^{'}(b) = \lim_{\Delta\to 0,\Delta>0} \frac{F(\mathrm{b}-\Delta)-F(\mathrm{b})}{-\Delta}.$$

Означення 13.2. ***Невизначеним інтегралом*** *на проміжку (a,b) (чи, відповідно, на інших проміжках [a,b],(a,b],[a,b)) називається загальна формула її первісної, і позначається*

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \quad x\in(a,b) \qquad (13.2)$$

Наприклад, $\int \frac{x^3}{3}dx = x^2 + c, \;\; x\in R$.

За **теоремою 12.2** існування похідної F' функції F на проміжку (a,b) рівносильно диференційованості функції F на цьому ж проміжку, причому,

$$dF(x) = f'(x)\,dx, \;\; x\in(a,b).$$

Тому наступні твердження є рівносильними:

$$\int fdx = F+c, \;\; x\in(a,b) \;\;\Leftrightarrow\;\; F' = f, \;\; x\in(a,b) \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; dF = f'dx, \;\; x\in(a,b). \qquad (13.3)$$

За співвідношеннями (13.3) легко скласти таблицю найпростіших інтегралів, переписавши відповідну таблицю похідних з права наліво:

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c, \quad \alpha\neq -1, \;\; x\in D(x^\alpha)$; $\qquad$ (13.4)

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c, \quad x \in (0, +\infty) \ ; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \quad x \neq 0 \ ; \qquad (13.5)$$

3. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad x \in R, \ a > 0, \ a \neq 1 \ ;$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad x \in R \ ; \qquad (13.6)$$

4. $$\int \cos x\, dx = \sin x + c, \ \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \ x \in R \ ; \qquad (13.7)$$

$$\int \mathrm{c}hx\, dx = \mathrm{s}hx + c, \ \int \mathrm{s}hx\, dx = \mathrm{c}hx + c, \ x \in R \ ; \qquad (13.8)$$

5. $$\int tgx\, dx = \frac{1}{\cos^2 x} + c, \ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ ; \int ctgx\, dx = -\frac{1}{\sin^2 x} + c, \ x \neq + n\pi \ ; \qquad (13.9)$$

$$\int thx\, dx = \frac{1}{\mathrm{c}h^2 x} + c, \ x \in R \ ; \ \int cthx\, dx = -\frac{1}{\mathrm{s}h^2 x} + c, \ x \neq 0 \ ; \qquad (13.10)$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \dfrac{x}{a} \\ -\arccos \dfrac{x}{a} \end{array} \right. + c, \ x \in (-a, +a) \ ; \qquad (13.11)$$

7. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} \\ -\dfrac{1}{a} arcctg \dfrac{x}{a} \end{array} \right. + c \ , \ x \in R \ ; \qquad (13.12)$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c, \ x \in D(F) \ (\textit{довгий логарифм}) \ ; \qquad (13.13)$$

9. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c \ , \ x \neq \pm a \ (\textit{короткий логарифм}) \ ; \qquad (13.14).$$

Приклад 13.2. За формулою (13.4) маємо:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{\frac{-1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c, \quad x \in (0, +\infty)$;

б) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c, \quad x \in \left[0, +\infty\right)$;

в) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c, \quad x \neq 0$.

Приклад 13.3. Аналогічно, за формулою (13.6) маємо:

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + c = \frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + c, \quad x \in R \quad .$$

Звісно, виникають питання про необхідні та достатні умови інтегрованості функції f на проміжку, або якими методами можна знайти невизначений інтеграл функції, та інші.

Відповіді на деякі з цих питань містять наступні теореми.

Теорема 13.2 ***(теорема Дарбу про необхідні умови інтегрованості функції)***. *Якщо функція* $F(x)$ *диференційована на відрізку [a,b], то її похідна* $f(x) := F'(x)$ *приймає всі проміжні значення між числами* $f(a)$ та $f(b)$.

Отже, наприклад, функція

$$sign\, x = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -1, \ x < 0 \end{cases}$$ та **функція Хевісайда** $$h(x) := \begin{cases} 1, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

не можуть бути інтегрованими на будь- якому проміжку дійсної осі, всередині якого міститься точка $x = 0$.

Теорема 13.3 ***(про достатні умови інтегрованості)***. *Якщо функція f неперервна на відрізку, то вона інтегрована на ньому.*

Звичайно доведення цих теорем можливе тільки при більш поглибленому розвинені теорії інтегрування та диференціювання. Наприклад, **теорема 13.3** буде доведена у розділі про визначений інтеграл.

На попередніх лекціях було з'ясовано, що похідна елементарної функції теж є елементарною функцією. Чи справедлива подібна властивість для невизначених інтегралів? Наступна теорема дає негативну відповідь. Тобто, інтеграл елементарної функції може бути не елементарною функцією.

Теорема 13.4. *Наступні функції не є елементарними:*

а) $\int e^{-x^2}dx$ *- інтеграл Пуассона,* *б)* $\int \frac{dx}{\ln x}$ *- інтегральний логарифм,*

в) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ *-інтегральний косинус,* *г)* $\int \frac{\sin x}{x}dx$ *-інтегральний синус,*

д) $\int \cos x^2 dx,$ $\int \sin x^2 dx$ *- інтеграли Френеля.*

Звичайно, ця теорема не вичерпує всіх елементарних функцій, які не є елементарно інтегрованими.

Теорема 13.4 ***(про найпростіші властивості невизначених інтегралів).***

1. ***Лінійність****. Нехай функції* f *і* g *– інтегровані на інтервалі* (a, b)*, тоді будь-яка їхня лінійна комбінація є також інтегрованою функцією на цьому інтервалі. При цьому, невизначений інтеграл від лінійної комбінації функцій* f *і* g *є такою ж лінійною комбінацією від інтегралів цих функцій. Тобто,*

$$\forall\alpha\in R \ \ \forall\beta\in R \qquad \int(\alpha f+\beta g)dx = a\int fdx+\beta\int gdx \qquad (13.15)$$

*2. **Оберненість операцій диференціювання і інтегрування**. Нехай функція f диференційована на інтервалі (a, b). Тоді:*

а) похідну від невизначеного інтегралу функції f становить функція f на (a,b);

б) невизначений інтеграл від похідної функції f на інтервалі (a,b) становить сума цієї функції і довільної константи. Тобто,

а) $$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \quad x \in (a,b) \qquad (13.16)$$

б) $$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = f(x) + c, \quad x \in (a,b) \qquad (13.17)$$

3. ***Інтеграл від функції лінійного аргументу** . Якщо функція f(x) інтегрована на інтервалі (a,b) і має первісну $F(x)$ на цьому інтервалі, то функція лінійного аргументу $f(kx+\beta)$, $k \neq 0$, є інтегрованою на інтервалі $\left(\frac{a-\beta}{k}, \frac{b-\beta}{k}\right)$ і має первісну $\frac{1}{k}F(kx+b)$ на ньому. Тобто,*

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad x \in (a,b) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int f(kx+\beta)dx = \frac{1}{k}F(kx+\beta) + c, \ k \neq 0, \ x \in \left(\frac{a-\beta}{k}, \frac{b-\beta}{k}\right) \quad , \quad (13.18).$$

Завдання для самостійної роботи 13.1: Довести теорему 13.4.

Приклад 13.4. а) За формулою (13.17), коли $f(x) = x$, маємо:

$$\int dx = x + c, \ x \in R.$$

б) За формулою (13.18) слідує:

$$\int (f+g)dx = \int fdx + \int gdx, \qquad \forall \alpha \in R \qquad \int \alpha f dx = \alpha \int fdx + c.$$

Методи інтегрування

I. Метод безпосереднього інтегрування. Під методом ***безпосереднього інтегрування*** будемо розуміти метод інтегрування, який ґрунтується на наведеній табличці невизначених інтегралів, на властивості їх лінійності та на формулі інтегралу від функції лінійного аргументу.

Суть цього методу з'ясуємо на прикладах:

Приклад 13.5. Знайти інтеграл: $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})^2}{x}dx,\ x\in(0;+\infty)$.

Розв'язання.

$$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}\sqrt{x}+x}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{5}{6}}+x}{x}dx =$$

$$= \int (x^{\frac{-1}{3}}+2x^{\frac{-1}{6}}+1)dx = \left| \begin{array}{l} \textit{використовуємо властивість лінійності}\ (13.15) \\ \textit{та формулу}\ (13.5)\ \textit{зі таблиці інтегралів} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{5}{6}}\frac{6}{5} + x + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + x + c,\ x\in(0;+\infty)\ .$$

Відповідь: $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})^2}{x}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + x + c,\ x>0$

Приклад 13.6. Знайти інтеграл $\int tg^2 xdx, x\in I$, де $I=(a,b)$ - будь-який інтервал, що не містить точок $x_n = \frac{n\pi}{2}, n\in Z$.

Розв'язання.

$$\int tg^2 xdx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \textit{використовуємо властивість лінійності}\ (13.15) \\ \textit{та формулу}\ (13.9)\ \textit{таблиці інтегралів} \end{array}\right| = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

$$= tgx - x + c, \quad x \in I \ .$$

Відповідь: $\int tg^2 x dx = tgx - x + c, \ x \in I$.

Приклад 13.6. Знайти інтеграл: $\int \sqrt[3]{e^{2x}} dx, \quad x \in R.$

Розв'язання.

$$\int \sqrt[3]{e^{2x}} dx = \int e^{\frac{2}{3}x} dx = \left|\begin{array}{l} \textit{використовуємо формулу}\ (13.18)\ \textit{лінійності} \\ \textit{аргументу та та}\ (13.6)\ \textit{таблиці інтегралів} \end{array}\right| = \frac{3}{2} e^{\frac{2}{3}x} + c, \ x \in R.$$

Відповідь: $\int \sqrt[3]{e^{2x}} dx = \frac{3}{2} e^{\frac{2}{3}x} + c, \ x \in R.$

Приклад 13.7. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{(\cos \pi x + \sin \pi x)^2}, \ x \in I$,

де I -інтервал, що не містить точок $x_n = \frac{2n-1}{4}, \ n \in Z$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{(\cos \pi x + \sin \pi x)^2} = \int \frac{dx}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \pi x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(\cos \frac{\pi}{4} \cos \pi x + \sin \frac{\pi}{4} \sin \pi x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 (\pi x + \frac{\pi}{4})} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \textit{використовуємо лінійність аргументу}\ \pi x + \frac{\pi}{4} \\ \textit{та табличний інтеграл}\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c \end{array}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi}\,tg\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)+c=\frac{1}{2\pi}\,tg\frac{\pi(4x+1)}{4}+c,\quad x\in I\ .$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{(\cos\pi x+\sin\pi x)^2}=\frac{1}{2\pi}tg\frac{\pi(4x+1)}{4}+c,\ x\in I.$

II. Метод інтегрування частинами. Цей метод грунтується на наступному твердженні:

Теорема 13.3 (*про інтегрування частинами*) . *Нехай функції* $u=u(x)$ *і* $v=v(x)$ *диференційовані на інтервалі (a,b), та функція* uv' *інтегрована на ньому. Тоді функція* $u'v$ *теж інтегрована на цьому інтервалі, причому,*

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx,\quad x\in(a,b). \qquad (13.19)$$

Або, в термінах диференціалів, маємо:

$$\int udv=uv-\int vdu\ ,\qquad x\in(a,b) \qquad (13.20).$$

Формулу (13.19) –(13. 20) називають ***формулою інтегрування частинами***. За формулою інтегрування частинами слідує, що при перенесенні диференціювання з одного множника $u(x)$ на другий $v(x)$, які стоять під знаком інтегралу, змінюється знак інтегралу та виникає додатковий доданок, що дорівнює добутку uv. Якщо при диференціюванні множник $u(x)$ спрощується, а при інтегруванні другого множника $v'(x)$ добутку $u(x)v'(x)$, виявляється, що функція $v(x)$ теж є “хорошою”, то процедура інтегрування частинами приводить до простішого інтегралу у правій частині формули (13.19) - (13.20).

Наприклад, при диференціюванні функції $\ln x,\ \ arctgx,\ \ x^n\ (n \in N)$ спрощуються. Тому інтегрування частинами застосовують до інтегралів виду:

$$\int x^n \ln^k xdx, \int x^n arctgxdx, \int x^n \cos xdx,$$

$$\int x^n \sin xdx, \int x^n e^x dx,\ (n \in Z, k \in N)$$, тощо.

Причому, процедуру інтегрування частинами інколи доводиться повторювати декілька разів.

Розглянемо суть методу інтегрування частинами на прикладах.

Приклад 13.8. Знайти інтеграл: $\int \ln xdx, \quad x > 0.$

Розв’язання.

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} \textit{застосуємо формулу (13.20):} \\ \textit{нехай} \quad u = \ln x, \quad dv = dx\,, \quad \textit{тоді} \\ du = u'dx = \dfrac{dx}{x}\,, \quad v = \int dv = x \end{array} \right| = uv - \int vdu =$$

$$= x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c, \quad x > 0\,.$$

Відповідь: $\int \ln xdx = x(\ln x - 1) + c, \quad x > 0$.

Приклад 13.9. Знайти інтеграл: $\int x^2 \cos x\,dx, \quad x \in R.$

Розв’язання.

$$\int x^2 \cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{нехай}:\ u = x^2,\ dv = \cos xdx \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ du = 2xdx,\ v = \int dv = \sin x \end{array} \right| = uv - \int vdu =$$

$$= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} \textit{нехай}: \ u_1 = x, \ dv_1 = -\sin x dx \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ du_1 = dx, \quad v_1 = \int dv_1 = \cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2\sin x + 2(u_1v_1 - \int v_1 du_1) =$$

$$= x^2\sin x + 2(x\cos x - \int \cos x dx) = x^2\sin x + 2(x\cos x - \sin x) + c, x \in R.$$

Відповідь: $\int x^2\cos x dx = \left(x^2 - 2\right)\sin x + 2x\cos x + c, \quad x \in R$.

III. Метод внесення під диференціал. Нехай функція F є диференційованою на інтервалі (a,b) і має похідну $F' = f$ на ньому, та нехай функція g диференційована на інтервалі (α,β) і відображає цей інтервал у інтервал (a,b). Тоді за теоремою про диференціювання складної функції слідує, що складена функція $F(g(x)),\ x \in (\alpha,\beta),$ має похідну вигляду:

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x), \ x \in (\alpha,\beta), \qquad (13.21).$$

Отже, справедливе таке твердження:

Теорема 13.4 ***(про внесення функції під диференціал)***. *Якщо функція f має первісну* F *на інтервалі (a,b), і функція g є диференційованою на інтервалі* (α,β) *та відображає його у інтервал (a,b), то складена функція* $F(g(x)), x \in (\alpha,\beta),$ *є первісною функції* $f(g(x))g(x)$ *на інтервалі* (α,β).

Тобто, формулу (13.21) можна подати у такому вигляді:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt\Big|_{t=g(x)} = F(t)\Big|_{t=g(x)} + c \qquad (13.22)$$

У такому позначенні рівність $t = g(x)$, записана праворуч знизу вертикальної риски, означає підстановку у поданий вираз замість змінної t функції $g(x)$.Тому **теорему 13.4** називають інколи ***теоремою про підстановку***.

Зрозуміло, що твердження **теореми 13.4** обгрунтовує метод інтегрування, який називають ***методом внесення під диференціал***. Розглянемо його на наступних прикладах.

Приклад 13.10. Знайти інтеграл: $\int e^{\sin x} \cos x\, dx, \quad x \in R.$

Розв’язання.

Легко бачити, що $\cos x\, dx = (\sin x)'\, dx = d(\sin x)$. Тому, за теоремою про внесення під диференціал, маємо:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = \int e^t dt \Big|_{t=\sin x} = e^t \Big|_{t=\sin x} + c = e^{\sin x} + c, \;\; x \in R\,.$$

Відповідь: $\int e^{\sin x} \cos x\, dx = e^{\sin x} + c, \;\; x \in R.$

Приклад 13.11. Знайти інтеграл: $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\, dx, \;\; x > 0$.

Розв’язання.

Легко побачити, що $\frac{dx}{x} = (\ln x)'\, dx = d(\ln x)$. Тому, за теоремою про внесення під диференціал, маємо:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt[3]{\ln x}\; d(\ln x) \;= \int \sqrt[3]{t} dt \Big|_{t=\ln x} = \;\frac{4}{3}\sqrt[3]{\ln^4 x} + c, \quad x > 0\,.$$

Відповідь: $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx \;=\; \frac{4}{3}\sqrt[3]{\ln^4 x}+c, \quad x>0.$

IV. Метод заміни змінної. Теорема про внесення під диференціал стверджує, що, якщо функція f інтегрована, а функція g диференційована, то складена функція виду $f(g)g'$ теж є інтегрованою. Але при певних додаткових умовах справедливе і обернене твердження: за інтегрованістю складеної функції $f(g)g'$ слідує інтегрованість функції f.

Теорема 13.5 ***(про заміну змінної у невизначеному інтегралі).*** *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функція* $f=f(x)$ *неперервна на інтервалі (a,b);*

2) *функція* $x=x(t)$ *має неперервну похідну на інтервалі (α,β)*

3) *функція* $x=x(t)$ *відображає інтервал (α,β) на інтервал (a,b) і має на ньому обернену функцію* $t=t^{-1}(x):=\varphi(x)$*;*

4) *позначимо первісну функції* $h=h(t)=f(x(t))x'(t)$ *на інтервалі (α,β) як* $G=G(t)$.

Тоді функція $F(x)=G(t)\big|_{t=\varphi(x)}=G(\varphi(x))$ *є первісною функцією* $f(x)$ *на інтервалі (a,b). Тобто:*

$$\int f(x)dx=\int f(x(t))x'(t)dt=G(t)\big|_{t=\varphi(x)}+c \;,\; x \in (a,b) \quad , \qquad (13.23).$$

На останній формулі і ґрунтується ***метод заміни змінно***ї у невизначеному інтегралі. Суть його полягає у тому, щоб підібрати заміну змінної $x=x(t)$ таким чином, щоб функція $h=h(t)=f(x(t))x'(t)$ значно спростилась би і була інтегрованою. Розглянемо даний метод на прикладах.

Приклад 13.12. Знайти інтеграл $\int\sqrt{1-x^2}dx, \quad x\in(-1,1).$

Розв’язання.

Мета полягає в тому, щоб шуканою заміною змінної функції, що стоїть під знаком інтеграла, позбутись квадратного кореня.

Для цього використаємо тотожність: $1-\sin^2 t=\cos^2 t$.

Тоді, якщо покласти $x=\sin t$, $t\ \in\ x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, то квадратний корінь спрощується: $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$.

Обчислимо диференціал функції $x=\sin t$: $\quad dx=(\sin t)'dt=\cos t\,dt$.

Таким чином, маємо:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} \text{заміна}:\ x=\sin t, \\ dx=\cos t dt,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right|=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}(\int dt+\int\cos 2tdt)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+c=\frac{1}{2}(t+\cos t\sin t)+c=$$

$$=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+c,\quad x\in(-1;1)$$

В останній рівності було враховано, що функція $x=\sin t$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ має обернену функцію $t=\arcsin x$, $x\in(-1;1)$, а, також, враховано рівності $\sin t=x$, $\cos t=\sqrt{1-x^2}$.

Відповідь: $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+c,\quad x\in(-1;1).$

Приклад 13.13. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, виконавши у ньому заміну змінної: $\qquad x+\sqrt{1+x^2}=t$, $\qquad$ (13.24).

Розв’язання.

Розв’яжемо рівняння (13.24) відносно змінної x:

$$x+\sqrt{1+x^2}=t\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1+x^2}=t-x\quad\Leftrightarrow\quad 1+x^2=t^2-2xt+x^2,\ \ t-x\geq 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{t^2-1}{2t},\ t\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}),\ t\neq 0 \ , \qquad (13.25).$$

Отже, $\sqrt{1+x^2}= t-x = t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}) = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}) = \frac{t^2+1}{2t}$.

А також, $dx = \frac{1}{2}d(t-\frac{1}{t}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$. Тому,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\frac{(1+t^2)}{2t^2}dt}{\frac{1+t^2}{2t}} = \int\frac{dt}{t} =$$

$$= \ln t+c = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+c, \quad x\in R \ .$$

Зауважимо, що $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+|x^2|} > |x|$, тому

$$t = \sqrt{1+x^2}+x > |x|+x\geq 0, \qquad x\in R.$$

Тобто, змінна t може приймати тільки додатні значення.

Відповідь: $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+c,\ x\in R.$

V. Метод невизначених коефіцієнтів. Іноді вигляд первісної функції можна встановити (вгадати, підібрати) тільки з точністю до невідомих коефіцієнтів, і, в свою чергу, ці коефіцієнти можна визначити за допоміжних міркувань. У цьому і полягає суть методу невизначених коефіцієнтів, який ми розглянемо на наступних прикладах.

Приклад 13.14. Знайти інтеграл: $\int(x^2+3x+2)e^x dx,\ x\in R$.

Розв’язання.

По-перше, помітимо, що диференціюванням многочлена ми отримуємо теж многочлен (але степіня на один менший), а диференціювання експоненти e^x взагалі не змінює її.

По-друге, алгоритм диференціювання добутку функцій містить тільки операції диференціювання цих функцій, і операції добутку та суми.

За даними міркуваннями можна зрозуміти, що для того, щоб при виконанні диференціювання отримати добуток многочлена другого степеня на експоненту, тобто функцію $f(x)=(x^2+3x+2)e^x$, потрібно диференціювати також добуток деякого невідомого многочлена другого степеня ax^2+bx+c та експоненти e^x. Тобто, шуканою первісною є функція виду: $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x, \quad x\in R$.

Тоді за означенням первісної, маємо:

$$F'(x)=f(x), \quad x\in R \quad \Leftrightarrow \quad ((ax^2+bx+c)e^x)'=(x^2+3x+2)e^x, \quad x\in R \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad ax^2+(2a+b)x+(b+c) \;=\; x^2+3x^2+2, \qquad x\in R\,.$$

Далі, прирівнюємо коефіцієнти що стоять при однакових степенях змінної x (тобто, при степенях $x^2,\ x,\ 1$) зліва і справа у останній рівності, отримаємо:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & a=1 \\ x & 2a+b=3 \\ 1 & b+c=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}.$$

Отже, $F(x)=(x^2+x+1)e^x, \quad x\in R.$

Відповідь: $\int (x^2+3x+2)e^x dx=(x^2+x+1)e^x+c, \quad x\in R$.

Приклад 13.15. Знайти інтеграл: $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+4x+13}}dx, \quad x\in R$.

Розв’язання.

По-перше, легко побачити, що методом внесення під диференціал легко обчислюється інтеграл:

$$\int \frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+17}}dx=\int \frac{d(4x^2+4x+13)}{\sqrt{4x^2+4x+17}} \;=\; \int \frac{dt}{\sqrt{t}}\Big|_{t=4x^2+4x+13} \;=$$

$$=2\sqrt{t}\,\Big|_{t=4x^2+4x+13}\ +c=2\sqrt{4x^2+4x+13}+c\,,\quad (13.26).$$

По-друге, у квадратному тричлені, що стоїть під знаком кореня у знаменнику, можна виділити повний квадрат:

$$4x^2+4x+17=(4x^2+4x+1)+16=(2x+1)^2+16$$

Отже, згадавши табличний інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+c$ і теорему про інтеграл від лінійного аргументу (**теорема 13.1**,пункт 3), легко знайти і такий інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+16}}\ =\ \frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+16})+c=$$
$$=\ \frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+17})+c,\quad x\in R\ .\qquad (13.27)$$

Після таких двох спостережень можна поставити і таке питання: а чи не можна подати шуканий інтеграл у вигляді лінійної комбінації інтегралів (13.26) і (13.27) з деякими невизначеними коефіцієнтами, тобто, чи можна визначити коефіцієнти $a\in R, b\in R$ у сумі:

$$\int\frac{(3x+5)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}\ =\ a\int\frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}\ +\ b\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}\ ,\quad (13.28).$$

Наступний крок розв’язання “майже очевидний”: продиференціюємо ліву і праву частини рівності (13.28), отримаємо:

$$\frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+4x+17}}\ =\ a\frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+17}}\ +\ b\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+17}},\quad x\in R.$$

Так як знаменники дробів у лівій і правій частинах останньої рівності співпадають, то повинні співпадати і їх чисельники:

$$3x+5\ =\ a(8x+4)+b,\qquad x\in R,\qquad (13.29).$$

Підставимо у ліву і праву частини співвідношення (13.29) “найпростіші’’ числа (які залежать від нашого вибору) $x=-\frac{1}{2}$ та $x=0$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих чисел $a, b\in R$:

$$\begin{cases} \frac{7}{2}=a\cdot 0+b \\ 5=4a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{7}{2} \\ a=\frac{1}{4}\left(5-\frac{7}{2}\right)=\frac{3}{8} \end{cases}.$$

Таким чином,

$$\int\frac{(3x+5)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}} = \frac{3}{8}\int\frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}} + \frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}} =$$
$$= \frac{3}{8}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+17}) + \frac{7}{4}\sqrt{4x^2+4x+17} + c, \qquad x\in R.$$

Звичайно на цій лекції ,та і у нашому короткому курсі, ми не можемо розглянути всіх можливих методів інтегрування. Розглянувши тільки найпростіші і найпоширеніші, можемо зі почуттям виконаної справи виправдитися словами класика : “Неможливо вичерпати невичерпне”.

Крім того, не було знайдено відповіді на питання про достатні умови інтегрування функцій (за яких умов функція має первісну?), чи на питання про існування елементарної первісної для елементарної функції (якщо функція елементарна, то за яких умов вона має елементарну первісну?). На деякі з цих питань ми отримаємо відповідь під час наступних лекцій.

Лекція №14

Інтегрування дробово-раціональних функцій

За попередньою лекцією можемо прийти до висновку, що інтегрування навіть “простеньких” функцій - це мистецтво. Не так легко підібрати вдалий метод для знаходження первісної у явному вигляді. А мистецтво, талан, - це дар Божий для обраних. Звичайна людина бажає звести мистецтво пізнання до побудови елементарних, очевидних, загальних алгоритмів.

Отже, і ми підемо притаманним людині шляхом: спробуємо знайти загальні алгоритми інтегрування того чи іншого класу елементарних функцій. Зрозуміло, що загальні алгоритми інтегрування перш за все (з точки зору перспективи досягнення успіху) потрібно шукати для функцій найпростішого типу, а саме, для функцій, які називаються раціональними.

Означення 14.1. ***Раціональними дійсними функціями*** *будемо називати функції, які утворені застосуванням до (дійсних) змінних цієї функції та до дійсних чисел тільки скінченого числа разів лише арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення ,ділення).*

Наприклад, якщо до дійсного аргументу x та до дійсних чисел застосувати тільки перші три арифметичні операції (додавання, віднімання і множення), то отримаємо раціональну функцію, яку називають ***многочленом,*** а саме:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad x \in R \quad , \qquad (14.1).$$

При цьому, якщо $a_n \neq 0$, то число $n \in Z^+$ називають ***степенем многочлена***, і число a_n є ***старшим*** його ***коефіцієнтом***.

Отже, інтегрування многочлена не викликає ніяких проблем, оскільки многочлен - лінійна комбінація степеневих функцій.

Якщо ж застосувати скінчену кількість разів всі чотири арифметичні операції, то отримана функція зведеться до відношення двох многочленів. Тому можна означення раціональної функції подати і у такому формулюванні:

Означення 14.2. ***Раціональною функцією*** *дійсного аргумента x називається відношення двох многочленів. При цьому, як правило, раціональну функцію змінної x будемо позначати як* $R = R(x)$. *Тобто,*

$$R(x) := \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} \quad , \qquad (14.2).$$

Точно так можна означити раціональну функцію комплексного аргумента.

Далі згадаємо деякі означення і теореми з алгебри многочленів.

Теорема 14.1 (***про ділення многочленів*****).** *Якщо степінь* $n \in N$ *многочлена* $P_n(x)$ *більший степеня* $k \in N$ *многочлена* $Q_k(x)$ *то знайдуться (єдині) многочлени* $I_{n-k}(x)$ *і* $T_s(x)$ *відповідно степенів* $n-k$ *та* $s \in Z^+$, *при чому* $s < k$, *такі що, многочлен* $P_n(x)$ *запишеться у вигляді суми:*

$$P_n(x) = \mathrm{I}_{n-k}(x) Q_k(x) + T_s(x) \quad , \qquad (14.3).$$

При цьому кажуть, що при діленні многочлена $P_n(x)$ *на многочлен* $Q_k(x)$ *отримано* ***цілу частину*** *від ділення, многочлен* $I_{n-k}(x)$ *та* ***остачу*** *(залишок) від ділення многочлен* $T_s(x)$. *Якщо многочлен* $T_s(x) = 0$, *то кажуть, що многочлен* $P_n(x)$ ***націло ділиться*** *на* $Q_k(x)$. *Рівність (14.3) можна записати у вигляді:*

$$\frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = I_{n-k}(x) + \frac{T_s(x)}{Q_k(x)} \quad .$$

Теорема 14.2 (***теорема Безу*****).** *При діленні многочлена* $P_n(x), n \in \mathrm{N}$, *на двочлен* $x - x_0$ *остача* T *дорівнює значенню многочлена* P_n *у точці* x_0. *Тобто, якщо* $P_n(x) = (x - x_0) I_{n-1}(x) + T$, *то* $T = P_n(x_0)$.

Означення 14.2. *Число* $x_0 \in R$ *(* $x_0 \in C$ *) називається дійсним (комплексним)* ***коренем многочлена*** $P_n(x), x \in N$ *, якщо його значення в точці* x_0 *дорівнює нулю, тобто,* $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 14.3 ***(про наслідок теореми Безу)****. Число* x_0 *є корнем многочлена* $P_n(x), n \in N$ *, тоді і тільки тоді, коли він націло ділиться на двочлен* $x - x_0$.

Означення 14.3. *Корінь* x_0 *многочлена* $P_n(x),\ n \in N$ *, називається* ***коренем кратності*** $k \in N$*, якщо многочлен* $P_n(x)$ *ділиться націло на* $k-$*ий степінь двочлена* $x - x_0$ *і не ділиться на його* $k+1$ *степінь. Тобто,*

$$P_n(x) = (x - x_0)^k I_{n-k}(x), \qquad I_{n-k}(x_0) \neq 0 .$$

Якщо $k = 1$*, то корінь* x_0 *називається* ***простим коренем****.*

Приклад 14.1. Число $x_1 = 1$ є коренем кратності $k = 2$ многочленна $P_3(x) = (x-1)^2(x+2)$, а число $x_2 = -2$ - простий корінь.

Теорема 14.4 ***(основна теорема алгебри).*** *У полі комплексних чисел будь який многочлен* $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n,\ a_n \neq 0$*, степеня* $n \in N$ *має рівно* n *коренів з урахуванням їх кратності, а значить - розкладається у добуток* n *лінійних множників:*

$$P_n(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n) , \qquad (14.4),$$

де числа $z_1, z_2, ..., z_n$ *- це корені многочлена.*

Згадаємо, що ***спряженим*** комплексним числом $\overline{z} \in C$ до числа $z = x + iy$ називається число $\overline{z} = x - iy$, і операція спряження комплексного числа є перестановочною з арифметичними операціями над комплексними числами. Тобто,

$$\forall z_1, z_2 \in C \ : \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \qquad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Звідси легко отримати таке твердження:

Теорема 14.5 ***(про спряжений корінь многочлена).*** *Комплексне число* $z_0 = \alpha + i\beta$, *є коренем кратності* $k \in N$ *многочлена* $P_n(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n, \ \ n \in N,$ *всі коефіцієнти якого є дійсними, тоді і тільки тоді, коли спряжене до числа* z_0 *комплексне число* $\overline{z}_0$ *є коренем цього многочлена, при чому тієї самої кратності.*

Тобто, якщо $P_n(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s x^s, \quad \forall s = 0,1,...,n \colon \ a_S \in R$ *, то*

$$(\quad P_n(x) = (x - z_0)^k Q_{n-k}(x), \ \ Q_{n-k}(z_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P_n(x) = (x - \overline{z}_0)^k I_{n-k}(x), \quad I_{n-k}(\overline{z}_0) \neq 0 \ \ ) \ .$$

Доведення. Нехай всі коефіцієнти $a_s, \ \ s = 0,1,...,n,$ многочлена P_n є дійсними числами. Тоді,

$$z_0 \text{- корінь многочлена } P_n \ \Leftrightarrow \ P_n(z_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{P_n(z_0)} = 0 \Leftrightarrow \overline{\left(\sum_{s=0}^{n} a_s z_0^s\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\sum_{s=0}^{n} a_s \overline{z}_0^s\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ P_n(\overline{z}_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{z}_0 \text{-корінь многочлена } P_n.$$

Отже, за теоремою Безу, многочлен P_n націло ділиться на добуток $(x - z_0)(x - \overline{z_0})$, тобто $P_n(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0}) P_{n-2}(x)$. Але, якщо кратність кореня z_0 більша одиниці, то многочлен $P_{n-2}(x)$, який є часткою від ділення многочлена P_n на добуток $(x-z_0)(x-\overline{z_0})$, також має корінь $z_0 \in C$, а значить має і спряжений до нього корінь $\overline{z_0} \in C$. Тому, у свою чергу , многочлен $P_{n-2}(x)$ також ділиться на добуток $(x-z_0)(x-\overline{z_0})$, тобто,

$$P_n(x) = (x-z_0)^2(x-\overline{z_0})^2 P_{n-4}(x).$$

Продовжуючи ці міркування і отримаємо твердження теореми. Теорема доведена.

Запишемо добуток $(x-z_0)(x-\overline{z_0})$ у канонічному вигляді квадратного тричлена:

$$(x-z_0)(x-\overline{z}_0) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2+\beta^2) = x^2 + px + q, \qquad (14.5),$$

де позначено $p := -2\alpha, \quad q := \alpha^2 + \beta^2$. Легко бачити, що дискримінант такого квадратного тричлена від'ємний:

$$\Delta = p^2 - 4q = (2\alpha)^2 - 4(\alpha^2+\beta^2) = -4\beta^2 < 0.$$

За наведеними теоремами справедливе таке твердження:

Теорема 14.6 ***(про розвинення многочленна на прості множники).*** *У полі дійсних чисел будь який многочлен* $P_n(x), n \in N$*, з дійсними коефіцієнтами розкладається у добуток множників виду* $(x-x_0)^k$*, які відповідають його дійсним кореням кратності* $k \in N$*, та множників виду* $(x^2+px+q)^s$*, де дискримінант* $\Delta = p^2 - 4q < 0$*, і які відповідають парам комплексно спряжених його коренів відповідної кратності* $s \in N$*. Ці множники будемо називати* ***простими****.*

Тобто,

$$P_n(x) = a_n(x - x_0)^k ...(x^2 + px + q)^s ..., \qquad (14.6).$$

Щоб встановити розвинення (14.6) не обов'язково знати всі корені многочлена P_n: інколи результат вдається отримати, застосувавши формули скороченого множення. Розглянемо наступний приклад:

Приклад 14.2. Знайдемо розвинення многочленна $P_4(x) = x^4 + 4$ на прості множники (14.5), застосувавши формулу різниці квадратів:

$$P_4(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Очевидно, що квадратні тричлени $x^2 \pm 2x + 2$ є простими множниками виду (14.5), так як многочлен $P_4(x)$ не має дійсних коренів.

Таким чином, знаменник будь-якої дробово-раціональної функції можна розкласти на прості множники. Звідси один крок до наступного твердження.

Теорема 14.7 ***(про розвинення раціональної функції на елементарні дроби).*** *Будь який правильний раціональний дріб виду:*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{(x - x_0)^k ...(x^2 + px + q)^s ...}, \qquad (\Delta = p^2 - 4q < 0),$$

можна розкласти у суму дробів виду

$$\frac{A_i}{(x - x_0)^i}, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

та дробів виду

$$\frac{B_j x + C_j}{(x^2 + px + q)^j}, \qquad j = 1, 2, ..., s,$$

*які (обох видів) називаються **елементарними дробами**. Тобто,*

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{(x-x_0)^k...(x^2+px+q)^s...} &= \frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+...+\frac{A_k}{(x-x_0)^k}+...+ \\ &+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+px+q)^s}+...\end{aligned}, \qquad (14.7).$$

Таким чином, задача інтегрування раціональних функцій зводиться до інтегрування многочленів та елементарних дробів .

Інтеграл від многочлена є сумою (табличних) інтегралів від степеневих функцій аргументу x.

Розглянемо детальніше задачу про інтегрування елементарних дробів.

Інтеграли від дробів виду $\frac{A}{(x-x_0)^k}$ є табличними інтегралами від степеневої функції лінійного аргументу $x-x_0$ та цілого від'ємного показника степеня, і тому, за правилом інтегрування степеневої функції, маємо:

$$\int\frac{A}{x-x_0}dx = A\ln|x-x_0|+c, \qquad x\neq x_0,$$

$$\int\frac{A}{(x-x_0)^k}dx = \frac{A}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}}+c, \qquad x\neq x_0, \;\; k\neq 1, \;\; k\in Z\,.$$

Далі слід помітити, що довільну лінійну функцію $\varphi(x)=Ax+B$ можна подати як лінійну функцію $\varphi_1(y)=A_1y+B_1$ від іншої лінійної функції $\varphi_0(x)=ax+b,\; a\neq 0$, тобто,

$$\varphi_0(x)=A_1\varphi_0(x)+B_1 \;\;\Leftrightarrow\;\; Ax+B=A_1(ax+b)+B_1 \qquad , \qquad (14.8).$$

Щоб знайти коефіцієнти A_1 і B_1 лінійної функції φ_1 досить використати твердження, яке є наслідком основної теореми алгебри (**теорема 14.4**), а саме:

Теорема 14.8 ***(про рівність многочленів).*** *Два многочлени* $P_n(x)$ *і* $Q_k(x)$ *співпадають на непорожньому інтервалі* $(\alpha,\beta)\subset R$ *тоді і тільки тоді, коли всі їхні коефіцієнти, що стоять при степеневих функціях однакового показника степеня, співпадають.* Тобто,

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \;\equiv\; b_0 + b_1x + ... + b_kx^k \quad \text{на } (\alpha,\beta) \subset \mathrm{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad k = n, \;\; a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \; ..., \; a_n = b_k. \qquad (14.8\text{ а}).$$

За **теоремою 14.8** та співвідношенням (14. 8) маємо:

$$\begin{cases} A = A_1a \\ B = A_1b + B_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{A}{a} \\ B_1 = B - A\dfrac{b}{a} \end{cases}, \qquad (14.\ 9).$$

Система рівнянь (14. 9) задає зв'язок між параметрами лінійних функцій $\varphi(x) = Ax + B$ та $\varphi_1(y) = A_1y + B_1$, якщо задана функція $\varphi_0(x) = ax + b, \;\; a \neq 0$.

Тому, дроби виду $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}$ завжди можна подати у вигляді суми дробів

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} \;=\; \frac{B_1(2x + p)}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{C_1}{(x^2 + px + q)^k} \qquad (14.\ 10),$$

де у дужках чисельника першого дробу справа стоїть похідна квадратного тричлена знаменника, тобто, $2x + p = (x^2 + px + q)'$. Тому, цей дріб легко інтегрується методом внесення під диференціал:

$$\int \frac{B_1(2x + p)}{(x^2 + px + q)^k} \;=\; B_1\int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^k} \;=\; \left[\begin{array}{l} B_1 \ln(x^2 + px + q) + c, \quad k = 1 \\ \dfrac{B_1}{(1 - k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + c, \;\; k > 1 \end{array}\right. .$$

Другий дріб у виразі (14.10) інтегрується наступним чином. Спочатку виділимо повний квадрат у квадратичній функції знаменника:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$$

де дискримінант $\Delta = p^2 - 4q < 0$ - від'ємний. Позначимо число $-\frac{\Delta}{4} := a^2$ і змінну $x + \frac{p}{2} := t$. Тоді,

$$\frac{C_1}{(x^2+px+q)^k} = \frac{C_1}{(t^2+a^2)^k} .$$

Якщо, показник степеня $k=1$, то

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + c = \frac{1}{a} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{a} + c .$$

Якщо, число $k > 1$, то за методом інтегрування частинами складемо рекурентне рівняння відносно невідомого інтеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$, $k \geq 2$. Маємо,

$$I_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \left| \begin{matrix} u := \frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}, & dv := dt \Rightarrow \\ \Rightarrow du = \frac{-(k-1)2tdt}{(t^2+a^2)^k}, & v = t \end{matrix} \right| = uv - \int vdu =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^k}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - 2a^2(k-1)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)I_{k-1} - 2a^2(k-1)I_k .$$

Тобто, $I_{k-1} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)I_{k-1} - 2a^2(k-1)I_k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-3)I_{k-1} \right), \quad k \geq 2, \qquad (14.11).$$

Формула (14.11) дає змогу послідовно знижувати степінь інтеграла I_k, вкінець кінців звівши його до суми раціональних дробів та інтегралу I_1.

Отже, всі елементарні дроби мають елементарні первісні.

Таким чином, можна стверджувати, що:

Теорема 14.9 ***(про первісну раціональної функції).*** *Будь яка раціональна функція має елементарну первісну.*

Продемонструємо алгоритм обчислення інтегралу від раціональної функції на прикладі:

***Приклад 14.3*.** Знайти інтеграл: $\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2+79x-201}{x^3-x^2+x+39}\,dx$.

Розв’язання.

Раціональна функція, що стоїть під знаком шуканого інтеграла, є неправильним дробом. Тому, спочатку розділимо за алгоритмом Евкліда чисельник на знаменник, виділивши цілу частину частки.

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^4-7x^3+7x^2+79x-201 & x^3-x^2+x+39 \\
 & 2x^4-2x^3+2x^2+78x & \\
\cline{1-2}\cline{3-3}
- & -5x^3+5x^2+x-201 & 2x-5 \\
 & -5x^3+5x^2-5x-195 & \\
\cline{2-2}
 & 6x-6 &
\end{array}$$

Отже, при діленні чисельника $P_4(x)=2x^4-7x^3+7x^2+79x-201$ раціональної функції $R(x)=\frac{P_4(x)}{Q_3(x)}$ на знаменник $Q_3(x)=x^3-x^2+x+39$ отримано цілу частину $I_1(x)=2x-5$ та остачу $T_1(x)=6x-6$. Тобто,

$$R(x)=\frac{P_4(x)}{Q_3(x)} = I_1(x)+\frac{T_1(x)}{Q_3(x)} = 2x-5+\frac{6x-6}{x^3-x^2+x+39} .$$

Розвинемо знаменник $Q_3(x)$ правильного дробу $\frac{T_1(x)}{Q_3(x)}$ на прості множники. Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами має цілий корінь $x_0 \in Z$, то цей корінь є дільником вільного коефіцієнта многочлена. Число 39 має своїми цілими дільниками числа: ±1, ±3, ±13, ±39 , тому тільки ці вісім чисел можуть бути цілими коренями многочлена $Q_3(x)$. Почерзі, починаючи з чисел ±1, обчислюємо значення $Q_3(x)$ у цих точках:

$$Q_3(1) = 1-1+1+39 = 40 \neq 0\ ,$$
$$\mathrm{Q}_3(-1) = -1-1-1+39 = 36 \neq 0,$$
$$Q_3(3) = 27-9+3+39 = 60 \neq 0\ ,$$
$$Q_3(-3) = -27-9-3+39 = 0.$$

Отже, число $x_0 = -3$ є коренем многочлена $Q_3(x)$. Щоб розвинути знаменник $Q_3(x)$ на прості множники, розділимо його на двочлен $x - x_0 = x+3$. За алгоритмом Евкліда маємо:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-x^2+x+39 \\ x^3+3x^2 \end{array} & \ \ x+3 \\ \cline{1-2}
-\begin{array}{l} -4x^2+x+39 \\ -4x^2-12x \end{array} & \ \ x^2-4x+13 \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{l} 13x+39 \\ 13x+39 \end{array} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отже, знаменник $Q_3(x)$ розкладається на прості мноники $x+3$ та $x^2-4x+13$.

Далі застосуємо метод невизначених коефіцієнтів для з'ясування розвинення правильного дробу $\frac{T_1(x)}{Q_3(x)}$ на елементарні дроби.

За **теоремою 14.7** та зауваженнями до неї, враховуючи, що

$(x^2-4x+13)' = 2x-4$, маємо :

$$\frac{6x-6}{(x+3)(x^2-4x+13)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B(2x-4)}{x^2-4x+13} + \frac{C}{x^2-4x+13}, \qquad (14.12).$$

Звідки, привівши до спільного знаменника праву частину виразу (14.12), отримаємо

$$\frac{6x-6}{(x+3)(x^2-4x+13)} = \frac{A(x^2-4x+13)+B(2x-4)(x+3)+C(x+3)}{(x+3)(x^2-4x+13)} .$$

Тому, прирівнявши чисельники дробів лівої і правої частини останньої рівності, отримаємо:

$$6x-6 = A(x^2-4x+13)+B(2x-4)(x+3)+C(x+3) , \quad (14.13).$$

Многочлени, що записані у правій і лівій частинах виразу (14.13), співпадають в усіх точках числової осі.

Тому, підставляючи у ліву і праву частину рівністі (14.13) ті чи інші значення змінної x, отримаємо систему лінійних рівнянь для невідомих чисел *A, B, C.* Крім того рівняння відносно цих невідомих (*A, B, C*) можна отримати, пирівнявши коефіцієнти, що стоять при однакових степеневих функціях у многочленах лівої і правої частини співвідношення (14.13). Звичайно, потрібно намагатись отримати якнайпростішу систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів *A, B, C.* Наприклад, у нашому випадку можна помітити, що підстановка значення $x=-3$ (це дійсний корінь знаменника початкового дробу) у правій частині рівності (14.13) зануляє доданки, що містять невідомі *B* і *C,* а значення $x=2$ (це нуль похідної простого множника знаменника) – зануляє доданок, що містить невідоме *B.* Крім того, коефіцієнт при степені x^2 у правій частині (14.13) не містить невідоме *C*. Тому, підставивши у співвідношення (14.13) вказвні значення аргументу $x=-3$ та $x=2$ та прирівнявши коефіцієнти при других степенях у правій і лівій частині виразу (14.13), отримаємо таку систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів *A, B* і *C* :

$$\begin{array}{l|r} x^2 & 0=A+2B \\ x=-3 & -24=34A+0+0 \\ x=2 & 6=9A+0+5C \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\dfrac{12}{17} \\ B=\dfrac{6}{17} \\ C=\dfrac{42}{17} \end{array}\right. .$$

Отже, за лінійністю невизначеного інтеграла маємо:

$$\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2+79x-201}{x^3-x^2+x+39}\,dx =$$

$$= \int(2x-5)\,dx - \frac{12}{17}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{6}{17}\int\frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+13} + \frac{42}{17}\int\frac{dx}{x^2-4x+13} =$$

$$= x^2-5x - \frac{12}{17}\ln|x+3| + \frac{6}{17}\int\frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13} + \frac{42}{17}\int\frac{dx}{(x-2)^2+9} =$$

$$= x^2-5x - \frac{12}{17}\ln|x+3| + \frac{6}{17}\ln(x^2-4x+13) + \frac{14}{17}arctg\frac{x-2}{3} + c, \quad x\neq -3.$$

Відповідь: $\displaystyle\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2+79x-201}{x^3-x^2+x+39}\,dx =$

$$= x^2-5x - \frac{12}{17}\ln|x+3| + \frac{6}{17}\ln(x^2-4x+13) + \frac{14}{17}arctg\frac{x-2}{3} + c, \quad x\neq -3.$$

Метод Остроградського. Як ми бачили процедура інтегрування раціональної функції досить громіздка (але алгоритмічна!). Якщо коефіцієнти цілої частини раціональної функції $R(x)$ доволі просто визначити за алгоритмом Евкліда і, отже, її ціла частина легко інтегрується, то інтегрування дробової частини раціональної функції зводиться до знаходження коефіцієнтів розвинення правильного дробу на елементарні дроби, та інтегрування елементарних дробів. При цьому, якщо знаменник дробової частини є многочленом степеня n, то доводиться розв'язувати систему n–го порядку лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розвинення. Отже, трудоємність алгоритму значно зростає з ростом показники степеня n. Крім того певні складності виникають і при інтегруванні елементарних дробів. Цей процес трохи прискорюється при заміні елементарних дробів виду $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ на елементарні дроби виду $\dfrac{B_1(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}$ і $\dfrac{C_1}{(x^2+px+q)^k}$. Але ітераційна процедура інтгрування останнього дробу теж громіздка. Її можна поліпшити скориставшись методом невизначених коефіцієнтів, яку запропонував відомий математик М. Остроградський. Суть його методу полягає в тому, що інтеграл від дробової частини $\frac{P(x)}{Q(x)}$ раціональної функції $R(x)=I(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}$ шукається у вигляді суми правильного дробу $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ та інтегралу від іншого правильного дробу $\frac{P^{**}(x)}{Q^{**}(x)}$, тобто,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} + \int \frac{P^{**}(x)}{Q^{**}(x)}dx \qquad (14.16)\ .$$

Причому знаменник $Q^{**}(x)$ другого дробу містить тількі перші степені всіх простих множників многочлена $Q(x)$, а знаменник $Q^*(x)$ першого дробу складається з усіх простих множників многочлена $Q(x)$, взятих у степенях на одиницю менше ніж у $Q(x)$. З урахуванням зазначеної заміни елементарних дробів одного виду на інший, маємо:

$$\int \frac{P(x)}{(x-x_0)^k...(x^2+px+q)^s...}dx = \frac{P^*(x)}{(x-x_0)^{k-1}...(x^2+px+q)^{s-1}...} + \int \frac{P^{**}(x)dx}{(x-x_0)^k...(x^2+px+q)^s...} =$$

$$= \frac{P^*(x)}{(x-x_0)^{k-1}...(x^2+px+q)^{s-1}...} + A\int \frac{dx}{x-x_0} + ... + B\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + C\int \frac{dx}{x^2+px+q} + ..., \qquad (14.17),$$

де коефіцієнти многочлена $P^*(x)$ та числа $A, B, C, ...$ є невизначеними коефіцієнтами.

Розглянемо застосування методу Остроградського на прикладі.

Приклад 14.4. Знайдемо інтеграл від елементарного дробу $\frac{4x+8}{(x^2+6x+13)^2}$ методом Остроградського, таким чином, минуючи ітераційну процедуру.

*Розвязання.*За методом Остроградського запишемо інтеграл у вигляді :

$$\int \frac{4x+8}{(x^2+6x+13)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+6x+13} + C\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx + D\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx \ , \quad (14.18).$$

Після диференціювання виразу (14.18) маємо :

$$\frac{4x+8}{(x^2+6x+13)^2}=\frac{A(x^2+6x+13)-(Ax+B)(2x+6)}{(x^2+6x+13)^2}+\frac{C(2x+6)}{x^2+6x+13}+\frac{D}{x^2+6x+13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x+8}{(x^2+6x+13)^2}=\frac{A(x^2+6x+13)-(Ax+B)(2x+6)+C(2x+6)(x^2+6x+13)+D(x^2+6x+13)}{(x^2+6x+13)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+8=A(x^2+6x+13)-(Ax+B)(2x+6)+C(2x+6)(x^2+6x+13)+D(x^2+6x+13),\ (14.19).$$

Точка $x_\circ=-3$ зануляє двочлен $2x+6$, а точка $x_1=-3+2i$ зануляє тричлен $x^2+6x+13$. Тому систему лінійних рівняннь для визначення невідомих коефіцієнтів A,B,C,D складемо таким чином: почергово підставимо у вираз (14.19) значення аргументу $x=-3$ та $x=-3+2i$, а також прирівняємо коефіцієнти у лівій і правій частині виразу (14.19) при степені x^3. Тоді,

$$\begin{array}{l|c}x^3 & 0=2C \\ x=-3 & -4=4A+0+0+4D \\ x=-3+2i & -4+8i=0-(A(-3+2i)+B)4i+0+0\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\ A+D=-1\\ 8A+(12A-4B)=-4+8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\ A+D=-1\\ 8A=-4\\ 12A-4B=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2},\ B=-\frac{7}{2}\\ C=0,\ D=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

.

Отже, враховуючи, що $x^2+6x+13=(x+3)^2+4$, отримаємо:

$$\int\frac{4x+8}{(x^2+6x+13)^2}=-\frac{x+7}{2(x^2+6x+13)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+3)^2+4}dx=$$

$$=-\frac{x+7}{2(x^2+6x+13)}-\frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{2}+c\ ,\quad x\in R.$$

Відповідь: $\int \frac{4x+8}{(x^2+6x+13)^2} = -\frac{x+7}{2(x^2+6x+13)} - \frac{1}{4} arctg \frac{x+3}{2} + c\ , \quad x \in R\ .$

Доведення теорем лекції

Доведення теореми 14.1. Нехай степінь $n \in N$ многочлена $P_n(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s x^s,$ не менше степеня $k \in N$ многочлена $Q_k(x) = \sum_{s=0}^{k} b_s x^s$, тобто $n \geq k$. Тоді, якщо додати і відняти від першого многочлена другий, помножений на $\frac{a_n}{b_n} x^{n-k}$, то многочлен $P_n(x)$ запишеться у вигляді:

$$P_n(x) = \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} Q_k(x) + (P_n(x) - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} Q_k(x)) =$$

$$= \frac{a_n}{b_n} x^{n-k} Q_k(x) + ((a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) - (\frac{a_n b_0 x^{n-k}}{b_k} + \frac{a_n b_1 x^{n-k+1}}{b_k} + .. + a_n x^n)) :=$$

$$:= \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} Q_k(x) + T_{n-1}(x) \ ,$$

де остача

$$T_{n-1}(x) := (a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}) - (\frac{a_n b_0 x^{n-k}}{b_k} + \frac{a_n b_1 x^{n-k+1}}{b_k} + ... + \frac{a_n b_{k-1} x^{n-1}}{b_k})$$

-многочлен степеня не вище ніж $n-1$. Якщо степінь многочлена $T_{n-1}(x)$ менше ніж степінь k дільника $Q_k(x)$, то процес ділення закінчено, і ціла частина від ділення становить $I_{n-k}(x) = \frac{a_n}{b_k} x^{n-k}$. А якщо перша остача $T_{n-1}(x)$ має степінь не менше ніж k, то описану процедуру ділення на дільник $Q_k(x)$ застосуємо до многочлена $T_{n-1}(x)$. І таким чином діємо до тих пір поки степінь остачі не стане менше степеня k. В результаті отримаємо:

$$P_n(x) = I_{n-k}(x) Q_k(x) + T_s(x) \ , \qquad (14.2),$$

де степінь остачі $T_s(x)$ менший степеня дільника $Q_k(x)$, тобто $s<k$. Що й потрібно було довести.

Доведення теореми 14.2. За формулою (14.2) при діленні многочлена $P_n(x), n\in N$, на двочлен $Q_1(x)=x-x_0$ отримаємо суму:

$$P_n(x)=(x-x_0)I_{n-1}(x)+T\,, \qquad (14.20),$$

де остача T - це многочлен нульового степеня, тобто, T є постійним числом. Підставивши у співвідношення (14.20) значення змінної $x=x_0$, маємо:

$$P_n(x_0)\;=\;0\cdot I_{n-1}(x_0)+T \quad\Leftrightarrow\quad P_n(x_0)\;=\;T\;,$$

що і потрібно було довести.

Доведення теореми 14.3. За означенням кореня многочлена та за **теоремою Безу** маємо:

$$x_0 - \textit{корінь многочлена }\; P_n(x) \quad\Leftrightarrow\quad P_n(x_0)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad P_n(x)=(x-x_0)I_{n-1}(x)+T,\quad \textit{де }\, T=P_n(x_0)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad P_n(x_0)=(x-x_0)I_{n-1}(x) \;\Leftrightarrow\; P_n(x)\; \textit{націло ділиться на }\; Q_1(x)=x-x_0\,.$$

Що і потрібно було довести.

Доведення теореми 14.7. Спочатку розглянемо випадок, коли знаменник правильного дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ має простий множник $(x-x_0)^k$, тобто

$$Q(x) = (x - x_0)^k Q^*(x), \qquad \text{де} \quad Q^*(x_0) \neq 0.$$

Покажемо, що тоді знайдеться таке (єдине) число A, що має місце розвинення

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^k Q^*(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{P^*(x)}{(x-x_0)^k Q^*(x)} \ , \qquad (14.21),$$

при чому другий доданок є простим дробом. Дійсно, маємо:

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^k Q^*(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^k} + \left(\frac{P(x)}{(x-x_0)^k Q^*(x)} - \frac{A}{(x-x_0)^k} \right) =$$
$$= \frac{A}{(x-x_0)^k} - \frac{P(x) - AQ^*(x)}{(x-x_0)^k Q^*} \ , \qquad (14.22).$$

По-перше, помітимо, що другий доданок суми (14.22) є правильним дробом, так як кожен доданок різниці $P(x) - AQ^*(x)$ є многочленом степеня меншого ніж степінь знаменника.

По-друге, знайдеться єдине число A таке, що чисельник $P(x) - AQ^*(x)$ ділиться націло на двочлен $x - x_0$. Дійсно, за **теоремою Безу (теорема 14.3)** слідує, що таке число A знаходиться з рівності

$$P(x_0) - AQ^*(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{P(x_0)}{Q^*(x_0)} \ , \qquad (14.23).$$

Отже, поклавши A за відношення (14.23), многочлен $P(x) - AQ^*(x)$ націло ділиться на $x - x_0$, тобто,

$$P(x) - AQ^*(x) = (x - x_0) P^*(x) \ , \qquad (14.24).$$

За рівностями (14.24) і (14.22) слідує потрібне твердження (14.21).

Застосувавши твердження (14.21) $k \in N$ разів до правильного дробу $\frac{P(x)}{(x-x_0)^k Q^*(x)}$ отримаємо його розвинення виду:

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^k Q^*(x)} = \frac{A_1}{(x-x_0)^k} + \frac{A_2}{(x-x_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-x_0} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}, \quad (14.25),$$

при чому останній дріб є правильним.

Аналогічно покажемо, що якщо знаменник $Q(x)$ правильного дробу має простий множник $(x^2+px+q)^s$, що відповідає парі його комплексно спряжених коренів $z_0 = \alpha + i\beta$ та $\overline{z}_0 = \alpha - i\beta$, то правильний дріб єдиним чином допускає розвинення:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s Q(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{s-1} Q(x)} \quad , \qquad (14.26),$$

де другий доданок - правильний дріб і $Q(\mathrm{z}_0) \neq 0$.

Дiємо подібно до попередніх міркувань.

Розглянемо вираз:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s Q(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} + \left(\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s Q(x)} - \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} \right) =$$

$$= \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P(x)-(Bx+C)Q(x)}{(x^2+px+q)^s Q(x)}, \qquad (14.27).$$

Знову легко побачити, що другий доданок виразу (14.26) є правильним дробом.

Покажемо, що сталі B і C можна підібрати таким чином, щоб чисельник цього дробу, тобто, многочлен $P(x)-(Bx+C)Q(x)$ націло ділився на тричлен x^2+px+q Для цього необхідно і достатньо вимагати (за **теоремою 14.3**), щоб число $z_0 = \alpha + i\beta$ було його коренем, тобто,

$$P(z_0)-(Bz_0+C)Q(z_0)=0 \quad , \qquad (14.28).$$

Дійсно, тоді і спряжене комплексне число $\overline{z}_0=\alpha-i\beta$ теж буде його коренем (за **теоремою 14.5**), а значить, він буде ділитись націло на $(x-z_0)(x-\overline{z}_0)=x^2+px+q$.

Перепишемо умову (14.28) у вигляді:

$$Bz_0+C=\frac{P(z_0)}{Q(z_0)} \ , \qquad (14.29),$$

і виділимо у правій частині (14.29) дійсну та уявну частину числа : $\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}=u+iv$.

Тоді формула (14.29) рівносильна рівності: $B(\alpha+i\beta)+C=u+iv$, звідки маємо:

$$\begin{cases} \alpha B+C=u \\ \beta B=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\dfrac{v}{\beta} \\ C=u-\dfrac{\alpha}{\beta}v \end{cases} , \qquad (14.30).$$

(За умовою $z_0=\alpha+i\beta$ - комплексне число, що означає $\beta\neq 0$).

Отже, за вибором чисел B і C згідно (14.30) многочлен $P(x)-(Bx+C)Q(x)$ націло ділиться на тричлен x^2+px+q, тобто,

$$P(x)-(Bx+C)Q(x) \ = \ (x^2+px+q)\ P(x) \ , \ (14.31).$$

Тому, за (14.31) та (14.27) слідує (14.26). Застосувавши правило розвинення дробу (14.26) $s\in N$ разів, отримаємо:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^s Q(x)}=\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^s}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+...+\frac{B_sx+C_s}{x^2+px+q}+\frac{P(x)}{Q(x)} \ , \quad (14.32)$$

де останній дріб правильний.

За розвиненням (14.25) та (14.32) слідує твердження **теореми 14.7**.

Доведення теореми 14.8. Доведемо від супротивного. Нехай многочлен $P_n(x)$ в усіх точках деякого непорожнього інтервалу (α, β) має однакові значення з многочленом $Q_k(x)$, але не всі їх відповідні коефіцієнти, які стоять при однакових степенях $x^s, \quad s = 0,1,...,k \vee n,$ співпадають між собою. Тоді різниця $\Delta(x) = P_n(x) - Q_k(x)$ є многочленом (або ненульовою константою), який приймає значення нуль в усіх точках інтервалу $(\alpha, \beta) \neq \varnothing$. Що не можливо, так як будь який многочлен може мати тільки скінчену кількість коренів.

Теорема доведена.

Лекція 15

Інтегрування раціональних виразів від тригонометричних і гіперболічних функцій

На попередній лекції було з'ясовано, що раціональна функція $R(x)$ завжди має елементарну первісну (звичайно, на інтервалах, що не містять нулів знаменника раціональної функції). За **теоремою про внесення під диференціал**, інтегрування функції $R(\varphi(x))\varphi(x)$ зводиться до знаходження інтегралу $\int R(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}$. Отже, якщо функція $\varphi = \varphi(x)$ - елементарна, то і функція виду $R(\varphi(x))\varphi'(x)$ має елементарну первісну.

Останнє твердження можна сформулювати і в термінах **теореми про заміну змінної** у невизначеному інтегралі. Можна помітити що, якщо в умовах теореми про заміну змінної обернена до функції $x = x(t)$ функція $t = \varphi(x)$ диференційована, то заміна змінної у невизначеному інтегралі рівносильна внесенню у ньому під диференціал функції $t=\varphi(x)$. Дійсно, похідна від тотожної функції $x=x(\varphi(x))$ становить

$$1=(x(\varphi(x))'=x'(\varphi(x))\varphi'(x)\,, \quad \text{і} \quad \varphi'(x)dx=dt\ .$$

Тому,

$$\int R(x)dx=\int R(x(\varphi(x))x'(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int R(x(t))x'(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)} \quad , \quad (15.1).$$

Звичайно можна не приводити такі “занудні міркування” і сказати простіше: якщо можна підібрати таку елементарну функцію $x=x(t)$, яка перетворює вираз $R(x)$ у раціональну функцію $R^*(t):=R(x(t))x'(t)$, то функція $R(x)$ має елементарну первісну.

Під впливом таких сентенцій розглянемо спочатку питання про інтегрування виразів $R(\mathrm{cosx},\mathrm{sinx})$ залежних раціонально від тригонометричних функцій $\cos x$ і $\sin x$.

I. Інтегрування виразів $R(\mathrm{cosx},\mathrm{sinx})$

Теорема 15.1 (про універсальну підстановку). *Підстановки* $t=tg\dfrac{x}{2}$ *та* $t=ctg\dfrac{x}{2}$, *які називаються* ***універсальними підстановками****, зводять інтегрування виразу* $R(\cos x,\sin x)$ *раціонального відносно функцій* $\cos x$ *і* $\sin x$ *до інтегрування деякої раціональної функції* $R^*(t)$.

Доведення. Досить помітити, що тригонометричні функції cosx і sinx, та диференціал $dx=\cos^2\dfrac{x}{2}\dfrac{dx}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ можна раціонально подати в термінах функцій $t=tg\dfrac{x}{2}$ або $t=ctg\dfrac{x}{2}$ відповідно. Дійсно, позначивши $t:=tg\dfrac{x}{2}$, маємо:

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ,$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \ ,$$

$$dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+tg^2\frac{x}{2}}d(tg\frac{x}{2}) = \frac{2dt}{1+t^2} \ , \qquad (15.2).$$

Тому функція $R(\cos x, \sin x)dx = R(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2} := R^*(t)dt$ теж містить тільки арифметичні операції відносно змінної t. Таким чином,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R*(t)dt \Big|_{t=tg\frac{x}{2}} \ , \qquad (15.3),$$

де $R^* = R^*(t)$ - раціональна функція відносно змінної t .

Аналогічно доводиться твердження відносно підстановки $t = ctg\frac{x}{2}$.

Теорема доведена.

Приклад 15.1. Знайти інтеграл : $\int\frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв’язання.

За формулами (15.2) у шуканому інтегралі виконуємо підстановку $t = tg\frac{x}{2}$:

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\Bigg|_{t=tg\frac{x}{2}}=2\int\frac{dt}{t^2+3}\Bigg|_{t=tg\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{t=tg\frac{x}{2}}+c=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{2+\cos x}$ $=$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+c$ на інтервалах, що не містять точок $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$.

Те, що добре для всіх, не завжди добре для кожного. Іншими словами, універсальність обмежує ефективність. Так і в нашому випадку, універсальність підстановки приводить часто до раціональних функцій $R^*(t)$, інтегрування яких потребує громіздких обчислень . Наприклад, якщо раціональна функція $R(\cos t,\sin t)$ є многочленом n-го степеня відносно своїх аргументів $\cos t,\sin t$ то отримана в результаті універсальної підстановки раціональна функція $R^*(t)$ має у знаменнику многочлен $2n+2$ – го степеня, що приводить до необхідності розв'язувати лінійну систему рівнянь $2n+2$ – го порядку відносно невизначених коефіцієнтів розвинення функції $R^*(t)$ в елементарні дроби.

Тому хотілось би знати підстановки, які краще пристосовані до того чи іншого виду раціонального виразу $R(\cos t,\sin t)$.

В нагоді можуть стати наступні твердження.

Теорема 15.2 (про інтегрування виразу $R(\cos t,\sin t)$, що має властивість парності відносно аргументів $\cos t,\sin t$).

1. *Якщо раціональна функція* $R(\cos t,\sin t)$ *непарна по косинусу, тобто задовольняє умову* $R(-\cos t,\sin t)=-R(\cos t,\sin t)$ *, то підстановка* $t=\sin x$ *зводить інтеграл від неї до інтегралу від раціональної функції змінної* t.

2. *Якщо раціональна функція* $R(\cos t,\sin t)$ *непарна по синусу, тобто* $R(\cos t,-\sin t)=-R(\cos t,\ \sin t)$ *, то підстановка* $t=\cos x$ *зводить інтеграл від неї до інтегралу від раціональної функції змінної* t .

3. *Якщо раціональна функція* $R(\cos t,\ \sin t)$ *сумісно парна по косинусу і синусу, тобто* $R(-\cos t, -\sin t) = R(\cos t, \sin t)$ *, то підстановка* $t = tgx$ *або* $t = ctgx$ *зводить інтеграл від неї до інтегралу від раціональної функції змінної t .*

Приклад 15.2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Розв'язання.

Функція $R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{\cos x}$ є непарною по аргументу $\cos x$. Дійсно,

$$R(-\cos x, \sin x) = \frac{1}{-\cos x} = -\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -R(\cos x, \sin x).$$

Тому, за **теоремою 15.2**, виконуємо підстановку $t = \sin x$.

Враховуючи, що $\cos x dx = dt$, тобто, $dx = \frac{dt}{\cos x}$, маємо:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2}\Bigg|_{t=\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Bigg|_{t=\sin x} + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c,$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь: $\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$.

Приклад 15.3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos x \sin x + 5\cos^2 x}$.

Розв'язання.

Функція, що стоїть під знаком інтегралу, є раціональною відносно її аргументів $\sin x$ та $\cos x$, і сумісно парною по ним. Тому, у заданому інтегралі за **теоремою 15.2** можна виконати підстановку $t = tg\,x$. Для цього доцільно винести за дужку у знаменнику підінтегрального дробу множник $\cos^2 x$ щоб отримати диференціал $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx) = dt$. Отже,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos x \sin x + 5\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{4\cos x \sin x}{\cos^2 x} + 5\right)\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{1}{tg^2 x + 4tgx + 5} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}\Bigg|_{t = tg\,x} =$$

$$= \int \frac{dx}{(t+2)^2 + 1}\Bigg|_{t = tg\,x} = arctg(t+2)\Bigg|_{t = tg\,x} + c = arctg(2 + tgx) + c, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{\sin^2 + 4\cos x \sin x + 5\cos^2 x} = arctg(2 + tgx) + c, \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$

II. Інтеграли виду $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx, \int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \int \sin\alpha x \sin\beta x dx$ тощо

Інтеграли даного виду обчислюють спрощенням добутку у суму за допомогою відомих тригонометричних формул:

$$\cos\alpha x \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x], \qquad (15.4)\ ,$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x], \qquad (15.5)\ ,$$

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x], \qquad (15.6)\ .$$

Приклад 15.4. Знайти інтеграл $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$.

Розв’язання.

Застосуємо двічі формулу (15.4) та властивість лінійності, маємо:

$$\int \cos x \cos 2x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 3x)\cos 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \cos 5x dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x \cos 5x dx = \frac{1}{4}\int (\cos 4x + \cos 6x) dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x + \cos 8x) dx =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 8x}{8}\right)+c.$$

Відповідь: $\int \cos x \cos 2x \cos 5x = \frac{1}{8}\left(\sin 2x+\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 6x}{3}+\frac{\sin 8x}{4}\right)+c,\ x\in R.$

III. Обчислення інтегралів виду $\int \cos^{2n} xdx, \int \sin^{2n} xdx, \int \cos^{2k} x \sin^{2n} xdx$.

Обчислення інтегралів такого виду спрощується за допомогою почергового застосування тригонометричних формул пониження степеня тригонометричних функцій:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\quad, \qquad (15.7),$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\quad, \qquad (15.8).$$

Приклад 15.5. Знайти інтеграл $\int \cos^4 xdx$.

Розв’язання.

Після двократного застосування формули (15.7) та властивості лінійності інтегралу, маємо:

$$\int \cos^4 xdx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{4}dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+c$$

Відповідь: $\int \cos^4 xdx = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c, \quad x\in R$.

IV. Обчислення інтегралів виду $\int R(chx, shx)dx$

При інтегруванні раціональних виразів $R(chx, shx)$ від гіперболічних функцій можна застосувати ті ж самі методи, які були розглянуті у пунктах **I - III** для інтегрування тригонометричних функцій. При цьому слід пам’ятати відповідні тотожності для гіперболічних функцій, а саме:

$$ch^2x - sh^2x = 1, \qquad (15.9),$$

$$ch^2x + sh^2x = ch2x, \quad 2chx \cdot shx = sh2x\,, \qquad (15.10),$$

$$sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1), \quad ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1)\,, \qquad (15.11),$$

$$chx = \frac{1 + th^2\frac{x}{2}}{1 - th^2\frac{x}{2}}, \quad shx = \frac{2th\frac{x}{2}}{1 - th^2\frac{x}{2}}\,, \qquad (15.12),$$

$$dx = 2ch^2\frac{x}{2}\frac{dx}{2ch^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1 - th^2\frac{x}{2}}d\left(th\frac{x}{2}\right), \qquad (15.13),$$

$$\begin{cases} ch\alpha x ch\beta x = \frac{1}{2}[ch(\alpha - \beta)x + ch(\alpha + \beta)x] \\ sh\alpha x sh\beta x = \frac{1}{2}[ch(\alpha - \beta)x - ch(\alpha + \beta)x] \\ sh\alpha x ch\beta x = \frac{1}{2}[sh(\alpha + \beta)x + sh(\alpha - \beta)x] \end{cases}, \qquad (15.14).$$

Приклад 15.6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2chx + 3shx + 1}$.

Розв’язання.

Застосуємо ***універсальну гіперболічну підстановку*** $t = th\frac{x}{2}$. Тоді, за формулами (15.12) і (15.13), маємо:

$$\int\frac{dx}{2chx+3shx+1} = \int\frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{2\frac{1+t^2}{1-t^2}+3\frac{2t}{1-t^2}+1}\Bigg|_{t=th\frac{x}{2}} = 2\int\frac{dt}{t^2+6t+3}\Bigg|_{t=th\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\int\frac{dt}{(t+3)^2-6}\Bigg|_{t=th\frac{x}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}}\right|\Bigg|_{t=th\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}-th\frac{x}{2}}{\sqrt{6}+th\frac{x}{2}} + c\ ,$$

де враховано, що $\left|th\frac{x}{2}\right|<1$ *на* R. Зауважимо, що :

$$2chx+3shx+1=0 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+3\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5e^x+2-e^{-x}=0 \Leftrightarrow 5(e^x)^2+2e^x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{\sqrt{6}-1}{5} \Leftrightarrow x=\ln\frac{\sqrt{6}-1}{5} .$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{2chx+3shx+1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}-th\frac{x}{2}}{\sqrt{6}+th\frac{x}{2}}\right)+c, \quad x\neq\ln\frac{\sqrt{6}-1}{5}.$

Звичайно ніхто не заважає використовувати при інтегруванні раціональних виразів від тригонометричних чи, відповідно, гіперболічних функцій інші методи та формули. Потрібно пам’ятати, що у житті завжди є місце професійному мистецтву та кмітливості. Розглянемо приклад:

Приклад 15.7. Знайти інтеграл: $\int\frac{5sh2x\ dx}{2ch^2x+3sh^2x+1}$.

Розв’язання.

Досить помітити, що $d(ch^2x)=d(sh^2x)=2chxshx\ dx=sh2x\ dx$.Тому, $d(2ch^2x+3sh^2x+1)=5sh2xdx$. Отже,

$$\int\frac{5sh2x\,dx}{2ch^2+3sh^2x+1} = \int\frac{d(2ch^2x+3sh^2+1)}{2ch^2x+3sh^2x+1} = \ln(2ch^2x+3sh^2x+1)+c,\ x\in R.$$

Відповідь: $\int\frac{5sh2x\ \ dx}{2ch^2x+3sh^2x+1} = \ln\left(2ch^2x+3sh^2x+1\right)+c, \quad x\in R$.

Приклад 15.8. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{chx+shx}$.

Розв’язання.

Це зовсім “простенький” приклад. Тому, що

$$chx+shx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=e^x.$$

Отже, $\int\frac{dx}{chx+shx} = \int e^{-x}dx = -e^{-x}+c, \quad x\in R.$

Відповідь: $\int\frac{dx}{chx+shx}=-e^{-x}+c, \quad x\in R.$

V. Інтегрування функцій $R(x,\sqrt{x^2\pm a^2})$ та $R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})$ за допомогою тригонометричних або гіперболічних підстановок

Розглянемо, наприклад, вираз $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$ раціонально залежний від аргументів х та $\sqrt{a^2-x^2}$. Поставимо собі за мету підібрати таку підстановку, щоб позбутись у раціональній функції $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$ радикала $\sqrt{a^2-x^2}$, отримавши під знаком кореня повний квадрат. Для цього згадаємо хоч одну тотожність, яка перетворює різницю квадратів у повний квадрат, наприклад,

$$1-\cos^2 t = \sin^2 t, \qquad (15.15).$$

Отже, якщо виконати в інтегралі від функції $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$, підстановку $x=a\cos t$, то на інтервалах $(2\pi n,\ \pi+2\pi n),\ n\in Z,$

отримаємо, що

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\cos^2 t}=a\sin t,\quad dx=-a\sin t\,dt\ .$$

Таким чином,

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dt=\int R(a\cos t,a\sin t)(-a\sin t)dt=\int R^*(\cos t,\sin t)dt,\quad (15.21),$$

де позначена функція $R^*(\cos t,\sin t):=R(a\cos t,a\sin t)(-a\sin t)$ є раціонально залежною відносно змінних *cost, sint.*

Аналогічно, за тотожністю $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ (15.22), підстановка $x=a\sin t$ теж зводять поданий інтеграл до вигляду (15.21).

Так само, за тотожністю $1-th^2t=\dfrac{1}{ch^2t}$ (15.23),

використавши підстановку $x=atht$, маємо $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-th^2t}=\dfrac{a}{cht}$, $dx=\dfrac{a\,dt}{ch^2t}$. Тому,

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\int R\left(atht,\frac{a}{cht}\right)\frac{a}{ch^2t}dt=\int R^*(cht,sht)dt\ ,\quad (15.24).$$

Тут вираз $R^*(cht,sht):=R\left(atht,\dfrac{a}{cht}\right)\dfrac{a}{ch^2t}$ теж є раціональною функцією від гіперболічних змінних *cht, sht.*

Точно так, за тотожністю $1-\dfrac{1}{ch^2t}=th^2t$ (15.25),

підстановка $t=\dfrac{a}{cht}$ теж приводить до інтегралу виду (15.24).

Отриманий результат можемо сформулювати у наступному твердженні:

Теорема 15.3. *Інтеграл* $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ *можна привести до інтегралу виду (15.21) чи, відповідно, (15.24) наступними підстановками:*

1) $x=a\cos t$; 2) $x=a\sin t$;

3) $x=a\,tht$; 4) $x=\dfrac{a}{cht}$.

Міркуючи подібним чином, можна отримати і такі твердження:

Теорема 15.4. *Інтеграл* $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ *можна привести до інтегралу виду (15.21) чи (15.24), використавши в ньому одну із підстановок:*

1) $x=a\,tgt$; 2) $x=a\,sht$;

3) $x=a\,ctgt$; 4) $x=\dfrac{a}{sht}$.

Теорема 15.5. *Інтеграл* $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ *можна привести до інтегралу виду (15.21) чи (15.24), виконавши в ньому одну із підстановок:*

1) $x=\dfrac{a}{\cos t}$; 2) $x=\dfrac{a}{\sin t}$; 3) $x=a\,ctht$; 4) $x=a\,cht$.

Приклад 15.9. Знайти інтеграл $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

Розв’язання.

Виконаємо, наприклад, у шуканому інтегралі підстановку (заміну змінної) $x=2sht$. Тоді, за тотожністю (15.26) маємо,

$$\sqrt{4+x^2}=2cht, \quad dx=2cht\,dt.$$

Отже,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{(2sht)^3 2cht\,dt}{2cht} = 8\int sh^3tdt = 8\int sh^2t(sht\,dt) = 8\int (ch^2t-1)dcht =$$

$$= 8\int (u^2-1)du\Big|_{u=cht} = 8\left(\frac{u^3}{3}-u\right)du\Big|_{u=cht} + c = 8\left(\frac{ch^3t}{3}-cht\right)+c\ .$$

Але, $\sqrt{4-x^2} = 2cht$, тому $cht = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{2}$. Отже,

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4+x^2}} \ = \ 8\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\right)+c \ = \ \frac{1}{3}(x^2-8)\sqrt{4+x^2}+c.$$

Відповідь: $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4+x^2}} \ = \ \frac{1}{3}(x^2-8)\sqrt{4+x^2}+c,\ \ x\in R$.

Лекція №16

Інтегрування деяких ірраціональностей

На попередній лекції було з’ясовано, що за допомогою певних тригонометричних чи гіперболічних підстановок інтеграл від раціонального виразу відносно змінної інтегрування та квадратичного радикала від квадратичного тричлена можна привести до інтегралу раціональної функції відносно тригонометричних чи, відповідно, гіперболічних функцій. Описані процедури заміни змінної ґрунтувались на двох сприятливих обставинах. По-перше, існують тригонометричні та гіперболічні тотожності, які дають змогу подати суму квадратів тригонометричної(чи гіперболічної) функції і числа, як квадрат іншої тригонометричної (гіперболічної) функції. По-друге, диференціал тригонометричної (гіперболічної) функції теж є раціональним виразом від тригонометричних (гіперболічних) функцій. Як наслідок, така процедура не буде “зпрацьовувати” у випадку радикалів вищих (ніж другий) порядків (за відсутності відповідних тотожностей!). Отже, потрібно шукати інші ідеї.

Можна помітити, що обернена функція до радикалу $t=\sqrt[n]{\varphi(x)}$ є раціональною функцією $\varphi(x)=t^n$. Тому, якщо внутрішня функція (що стоїть під знаком радикала) теж має раціональну обернену функцію $\varphi^{-1}(t^n)$, то підстановка

$$t=\sqrt[n]{\varphi(x)} \quad , \qquad (16.1),$$

приводить до раціональної заміни змінної:

$$x=\varphi^{-1}(t^n), \qquad (16.2).$$

При цьому диференціал раціональної функції є також раціональною функцією. Отже, заміна змінної (16.2) приводить інтеграл виду $\int R(x,\sqrt[n]{\varphi(x)})\,dx$ до інтегралу від раціональної функції.

I. Інтегрування функції виду $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$

Наприклад, попередні міркування доречні у випадку, коли підкоренева функція є ***дробово лінійною функцією***, тобто функцією виду $\varphi(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$. Дійсно, функція обернена до дробово лінійної функції теж є дробово лінійною, а значить - раціональною. Таким чином отримано наступне твердження:

Теорема 16.1. *Підстановка*

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \qquad (16.3)$$

зводить інтеграл від функції $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ *до інтегралу від раціональної функції нової змінної. Тобто,*

$$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx=\int R^*(t)dt \ , \qquad (16.4).$$

Доведення. Дійсно, якщо $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то

$$x=\frac{t^n d-b}{a-t^n c}\ ,\quad dx\ =\ \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-t^n c)^2}dt\,.$$

Отже, $$\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R^*(t)dt\Bigg|_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}\ ,$$

де $R^*(t):=\ R\left(\frac{t^n d-b}{a-t^n c},\ t\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-t^n c)^2}$ - раціональна функція змінної t. Що і потрібно було довести.

II. Інтегрування функції виду $R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},...,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Теорему 16.1 можна трохи узагальнити, якщо помітити, що корені різних степенів $n_1,n_2,...n_k\in N$ раціонально залежать від кореня, показник степеня n якого є найменшим спільним кратним цих чисел. Тобто, $n=НСК(n_1,n_2,...,n_k)$. В результаті маємо наступне твердження:

Теорема 16.2. *Підстановка*

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\ ,\qquad \text{де}\qquad n=НСК(n_1,n_2,...,n_k)\,,$$

зводить інтеграл від функції $R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \dots\ ,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ *до інтегралу від раціональної функції змінної t. Тобто,*

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},...,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)=\int R^*(t)dt\ .$$

Доведення. Дане твердження доводиться аналогічно попередньому.

Дійсно, якщо $n = НСК(n_1, n_2, ..., n_k)$, то знайдуться такі натуральні числа $m_1, m_2, ..., m_k \in N$, що $n = m_1 n_1,\ n = m_2 n_2,\ ...,\ n = m_k n_k$.

Тому, якщо $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то

$$\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{m_1},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{m_2},\ ...\ ,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{m_k} .$$

Отже, $$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^n d - b}{a - t^n c},\ t^{m_1}, t^{m_2}, ...\ , t^{m_k} \right) \frac{cnt^{n-1}(b - dt^n)}{(a - t^n c)^2} dt .$$

Легко побачити, що вираз в останньому інтегралі є раціональною функцією змінної t.

Теорема доведена.

Приклад 16.1. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[4]{x+2}}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є раціональною відносно коренів 3-го і 4-го степеня від лінійної функції $g(x) = x + 2$, яка є частковим випадком дробово-лінійної функції $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, якщо покласти $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$.

Тому, за **теоремою 16. 2**, щоб привести даний інтеграл до інтегралу від раціональної функції, потрібно виконати підстановку $\sqrt[12]{x+2} = t$, де показник степеня радикала $n = 12$ є найменшим спільним кратним чисел 3 і 4. Тоді, $x = t^{12} - 2$ і $dx = 12t^{11}dt$.

Отже, маємо :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[4]{x+2}} = \int \frac{12t^{11}dt}{t^4-t^3} = 12\int \frac{t^8dt}{t-1}dt = 12\int\left(\frac{t^8-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$=12\int(t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t+1})\,dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln(t+1)\right)+c =$$

$$= 12(\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{8}+\frac{\sqrt[12]{(x+2)^7}}{7}+\frac{\sqrt{x+2}}{6}+\frac{\sqrt[12]{(x+2)^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{(x+2)}}{4}+$$

$$+\frac{\sqrt[4]{x+2}}{3}+\frac{\sqrt[6]{x+2}}{2}+\sqrt[12]{x+2}+\ln(1+\sqrt[12]{x+2}))+c, \qquad x>-2,\ x\neq-1\ .$$

Шуканий інтеграл знайдено.

Приклад 16.2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+4)^5(x+1)}}$.

Розв’язання.

Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+4)^5(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+4)^6\,\frac{x+1}{x+4}}} = \frac{1}{(x+4)^2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+4}}}\ .$$

Отже, підінтегральна функція раціонально залежна від змінної x та радикала $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+4}}$. Тому, за **теоремою 16.**1 виконаємо підстановку $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+4}}$. Звідки, $\frac{x+1}{x+4}=t^3$, і після диференціювання маємо

$\frac{3dx}{(x+4)^2} = 3t^2 dt$ або $\frac{dx}{(x+4)^2} = t^2 dt$. Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+4)^5(x+1)}} = \int \frac{dx}{(x+4)^2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+4}}} = \int \frac{t^2 dt}{t} = \int t\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^2} + c, \quad x \neq -1,\, x \neq -4 .$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+4)^5(x+1)}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^2} + c, \quad x \neq -1,\, x \neq -4.$.

ІІІ. Інтегрування біноміальних диференціалів

Означення 16.2. Біноміальним диференціалом *називають вираз виду*

$$x^m (ax^n + b)^p\, dx\,, \qquad (16.\,3).$$

Розглянемо випадок, коли показники степенів *m, n* і *p* є раціональними числами, тобто,

$$m = \frac{s_1}{k_1}\,, \quad n = \frac{s_2}{k_2}, \quad p = \frac{s}{k} \qquad (16.\,4),$$

де знаменники дробів – натуральні числа, а чисельники – цілі.

Ясно, що у випадку всіх цілих показників степеня $m, n, p \in Z$ біноміальний диференціал раціонально залежить від змінної $x \in R$, і має, як ми з’ясували на попередніх лекціях, елементарну первісну.

Якщо ж параметри m, n, p не є цілими числами, то інтегрування біноміального диференціала є більш складною задачею.

Ще І.Ньютону було відомо три випадки з раціональними показниками $m, n, p \in Q$, коли інтеграл від біноміального диференціалу певною елементарною підстановкою зводиться до інтегралу від раціональної функції, а значить, є елементарною функцією.

По-перше, нехай число p - ціле, а хоча б одне з чисел $m=\frac{s_1}{k_1}$ або $n=\frac{s_2}{k_2}$ - не ціле, тобто, біноміальний диференціал має вигляд

$$\sqrt[k_1]{x^{s_1}}\,(a\ \sqrt[k_2]{x^{s_2}}+b)^p\,dx \qquad (16.\ 5).$$

Тоді інтеграл від біноміального диференціалу (16.5) приводиться (за **теоремою 16.2**) до інтегралу від раціональної функції змінної t підстановкою $t=\sqrt[k_0]{x}$, де

$$k_0 = НСК(k_1,k_2)\,, \qquad (16.\ 6).$$

По-друге, якщо число $p=\frac{s}{k}$ не є цілим, то після підстановки $u=x^n$ (*тобто,* $x=u^{\frac{1}{n}},\ dx=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$) біноміальний диференціал набуде вигляду

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{1}{n}(au+b)^p u^{\frac{m+1}{n}-1}du\ ,$$

або, після введеного позначення $q:=\frac{m+1}{n}$,

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{1}{n}u^{q-1}(au+b)^p\,du\ , \qquad (16.7)\,.$$

Нехай число q є цілим і $p=\frac{s}{k}$, тобто,

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx \ = \ \frac{1}{n}u^{q-1}\sqrt[k]{(au+b)^s}\,du,\quad q\in Z\,.$$

Тоді (за **теоремою 16.1**) інтеграл від біноміального диференціалу (16.7) зводиться до інтегралу від раціональної функції змінної t підстановкою

$$t = \sqrt[k]{au+b} = \sqrt[k]{ax^n+b} \quad , \qquad (16.8).$$

По-третє, біноміальний диференціал (16.7) можна переписати у вигляді

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{n}u^{p+q-1}\left(\frac{au+b}{u}\right)^p du \quad , \qquad (16.9),$$

за яким слідує, що у випадку цілого числа $(p+q) \in Z$ (а значить $(p+q-1) \in Z$) інтеграл від виразу (16.9) приводиться до інтегралу раціональної функції (знову **теорема 16.1** !) підстановкою

$$t = \sqrt[k]{\frac{au+b}{u}} = \sqrt[k]{\frac{ax^n+b}{x^n}} \quad , \qquad (16.10).$$

Ще у своєму відомому підручнику «Інтегральне числення», том 1, (1768 р.) Л. Ойлер висловив твердження, що біноміальний диференціал інтегрується в елементарних функціях тільки у наведених трьох випадках, але довести це твердження для випадку раціональних параметрів m, n, p вдалося тільки через століття П.Л.Чебишеву. Остаточну крапку у доведенні теореми поставив Д. Д. Мордухай-Болотовський, який розповсюдив доведення і на випадок ірраціональних показників степеня m, n, p у біноміальному диференціалі.

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема 16.3 ***(Ойлера - Чебишева).*** *Біноміальний диференціал* $x^m(a\,x^n+b)^p dx$ *інтегрується в елементарних функціях тільки у трьох випадках:*

1) якщо параметри $m=\frac{s_1}{k_1}$ *і* $n=\frac{s_2}{k_2}$ *є раціональними числами, а* p *- ціле число (підстановкою* $t=\sqrt[k_0]{x}$ *, де* $k_0 = НСК(k_1,k_2)$ *);*

2) якщо параметри $m=\frac{s_1}{k_1}$ *і* $n=\frac{s_2}{k_2}$ *і* $p=\frac{s}{k}$ *є раціональними, а число* $q=\frac{m+1}{n}$ *- ціле число (підстановкою* $t=\sqrt[k]{ax^n+b}$ *);*

3) *якщо числа* m, n *і* p *- раціональні, а число* $p+q$ *є цілим (підстановкою* $t=\sqrt[k]{\frac{ax^n+b}{x^n}}$ *).*

Приклад 16.3. Знайти інтеграл: $\int\frac{x^2}{\sqrt[5]{(1+x^5)^8}}\,dx$.

Розв'язання.

Вираз $\frac{x^2}{\sqrt[5]{(1+x^5)^8}}dx = x^m(ax^n+b)^n dx$ є біноміальним диференціалом з параметрами $m=2, n=5, p=-\frac{8}{5}$. Обчислимо числа q та $p+q$, отримаємо:

$$q=\frac{m+1}{n}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}\ , \qquad p+q=\frac{3}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right)=-1\ .$$

Отже, ми маємо третій випадок, у якому інтеграл від біноміального диференціалу приводиться до інтегралу від раціональної функції підстановкою $t=\sqrt[k]{\frac{ax^n+b}{x^n}}=\sqrt[5]{\frac{x^5+1}{x^5}}$. Тоді, $x=(t^5-1)^{\frac{-1}{5}}$,

$$dx=-\,t^4(t^5-1)^{\frac{-6}{5}}dt \quad \text{і} \quad \sqrt[5]{(1+x^5)^8}=x^8\sqrt[5]{\left(\frac{x^5+1}{x^5}\right)^8}=(t^5-1)^{\frac{-8}{5}}t^8\ .$$

Підставимо знайдені вирази у шуканий інтеграл, отримаємо:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[5]{(1+x^5)^3}}\,dx \;=\; \int\frac{(t^5-1)^{\frac{-2}{5}}(-t^4(t^5-1)^{\frac{-6}{5}}\,dt)}{(t^5-1)^{\frac{-8}{5}}t^8} = -\int\frac{dt}{t^4} \;=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}+c \;=\; \frac{1}{3}\sqrt[5]{\left(\frac{x^5}{x^5+1}\right)^3}+c \;=\; \frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt[5]{(1+x^5)^3}}+c, \quad x\neq-1\ .$$

Відповідь: $\int\frac{x^2}{\sqrt[5]{(1+x^5)^8}}dx \;=\; \frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt[5]{(1+x^5)^3}}+c, \quad x\neq-1.$

IV. Підстановки Ойлера

У першому томі свого підручника «Інтегрувальне числення» Л. Ойлер привів ірраціональні підстановки для інтегрування виразів раціонально залежних від змінної x та квадратних радикалів від квадратного тричлена, тобто для інтегрування виразів виду

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), \qquad a \neq 0 \,, \qquad (16.11)\,.$$

Сформулюємо відповідне твердження:

Теорема 16.*4 (про підстановки Ойлера).* *Інтеграл від виразу (16.11) можна привести до раціональної функції змінної* t *наступними підстановками:*

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm x\sqrt{a}$, *якщо* $a > 0$ *;*

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, *якщо* $c > 0$*;*

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_0)t$, *якщо* x_0 *- дійсний корінь квадратного тричлена* ax^2+bx+c .

(Знаки + або – у вказаних підстановках можна обирати довільним чином).

Доведення. 1). Нехай $a > 0$. Покажемо, наприклад, що підстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$ приводить до інтегралу від раціональної функції змінної t. Дійсно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a} \;\Rightarrow\; ax^2+bx+c = t^2 + 2tx\sqrt{a} + ax^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} \quad dx = \frac{2t(b-2t\sqrt{a})+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt \;.$$

Отже, $$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\, t\right)\frac{2t(b-2t\sqrt{a})+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})}dt = \int R^*(t)\,dt \quad ,$$

де вираз $R^*(t) := R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, t\right)\frac{2t(b-2t\sqrt{a})+(t^2-c)2\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})}$ є раціональною функцією змінної $t=\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}$. Що і потрібно було довести.

Пункти 2) і 3) доводяться аналогічно.

Приклад 16.4. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Розв'язання.

Зручно виконати підстановку

$$t=x-\sqrt{x^2+2x+5} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+2x+5}=-t+x .$$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрату і розв'яжемо його відносно змінної *x*:

$$x^2+2x+5=t^2-2tx+x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{t^2-5}{2+2t}$$

Обчислимо *dx:*

$$dx=\frac{1}{2}\frac{2t(t+1)-(t^2-5)}{(t+1)^2}\ dt=\frac{t^2+2t+5}{2(t+1)^2}\ dt \quad .$$

Тоді,

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2t+5}{t(t+1)^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{4}{t(t+1)^2}\right)dt \quad .$$

Щоб уникнути методу невизначених коефіцієнтів для розвинення підінтегральної функції на елементарні дроби, помітимо що:

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$$

Тоді,

$$\frac{4}{t(t+1)^2}=\frac{4}{(t+1)}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{4}{t+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)=4\frac{1}{t(t+1)}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{4}{t}-\frac{4}{t+1}-\frac{4}{(t+1)^2}$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+\left(\frac{4}{t}-\frac{4}{t+1}-\frac{4}{(t+1)^2}\right)\right)dt=\int\left(\frac{5}{2t}-\frac{2}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{5}{2}\ln|t|-2\ln|t+1|+\frac{2}{t+1}+c=$$

$$=\frac{5}{2}\ln|x-\sqrt{x^2+2x+5}|-2\ln(\sqrt{x^2+2x+5}-x-1)+\frac{2}{x+1-\sqrt{x^2+2x+5}}+c.$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{5}{2}\ln|x-\sqrt{x^2+2x+5}|-$

$$-2\ln(\sqrt{x^2+2x+5}-x-1)+\frac{2}{x+1-\sqrt{x^2+2x+5}}+c,\quad 2x+5\neq 0\ .$$

Звичайно, знаходження найефективнішої підстановки, тобто підстановки, що приводить до найпростіших обчислень - це мистецтво, яке можна розвинути у собі тільки здобувши вагомий математичний досвід.

Так, наприклад, можна помітити, що вираз виду $\frac{dx}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ найкраще інтегрувати підстановкою

$$t=\frac{1}{x-x_0} \tag{16.12}$$

Дійсно, за підстановкою (16.12) слідує, що $x=x_0+\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}$ і

$$ax^2+bx+c=a\left(x_0+\frac{1}{t}\right)^2+b\left(x_0+\frac{1}{t}\right)+c=\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{t^2}\ .$$

Тому, $$\int\frac{dx}{(x-x_0)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{t(-\frac{dt}{t^2})}{\sqrt{\frac{a_1t^2+b_1t+c_1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}\ .$$

Далі після виділення повного квадрату у тричлені $a_1t^2+b_1t+c_1$, отримаємо табличний інтеграл.

З іншими методами інтегрування ірраціональних функцій можна ознайомитись по підручниках, наприклад, Г.М. Фіхтенгольця [3], Л.Д. Кудрявцева [4] і [7], О.М.Тер-Крикорова і М.І. Шабуніна [5], тощо.

Предметний показчик