МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«Київський політехнічний інститут»

ЗАДАЧНИК
З КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ ВУЗІВ

ЧАСТИНА 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Київ – 2014

Задачник з курсу математичного аналізу для студентів

технічних вузів. Частина 1. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної/

Укл.: Ю.П. Буценко, О.О. Дем'яненко, К.Ю. Мамса, М.М. Перестюк. – К.: , 2014.–НТУУ «КПІ».-124 с.

Гриф надано

Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»

Протокол №8 від 23 червня 2014 року

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЗАДАЧНИК
З КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ ВУЗІВ

ЧАСТИНА 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Укладачі: *Буценко Юрій Павлович, кандидат фіз.-мат наук, доцент.*
Дем'яненко Ольга Олегівна, кандидат фіз.-мат наук, доцент.
Мамса Катерина Юріївна, кандидат фіз.-мат наук, доцент.
Перестюк Марія Миколаївна, кандидат фіз.-мат. наук.

Рецензент: Каніовська І.Ю., доцент, к.ф.-м.н.

Дане навчальне видання може використовуватись як на практичних заняттях з математичного аналізу, так і для самостійної роботи студентів при підготовці до модульної контрольної роботи та до іспиту з кредитного модуля «Математичний аналіз – 1».

Зміст

Частина 1. Вступ до математичного аналізу.

§1. Дійсні числа. Числові множини

Одним із способів означення дійсного числа є представлення його нескінченним десятковим дробом. Якщо такий дріб є періодичним або скінченним, то відповідне число називають раціональним, якщо ж неперіодичним, то ірраціональним. Відомо, що раціональні числа ще можна означити як числа, які можна подати у вигляді нескоротного звичайного дробу. Перехід від звичайного дробу до десяткового легко здійснити діленням чисельника на знаменник “ під куточок“. Зворотній перехід дещо складніший. Серед відомих алгоритмів зупинимось на наступному, який проілюструємо на прикладі.

Нехай x=4,81(324). Помножимо цю рівність на 100 /щоб кома стала перед періодом/. Отримаєм $100x$=481,(324). Помножимо останню рівність на 1000 /кількість нулів дорівнює кількості цифр в періоді/. Будемо мати $100000x$ =481324,(324). Тепер від останньої рівності віднімемо передостанню: $99900x$ =480843 і знайдемо x=480843/99900.

Вправи та задачі

1.1.1. Перетворити в десяткові такі звичайні дроби:

a) 5/32;
b) 2/7;
c) 3/40;
d) 1/6;
e) 1/12;
f) 1/11.

1.1.2. Перетворити в звичайні нескоротні дроби такі періодичні:

a) 0,(27);
b) 0,(309);
c) 15,(3520);
d) 1,0(42);
e) 0,7(25);
f) 0,10(69).

Означення. Абсолютною величиною (або модулем) дійсного числа x називають невід’ємне число

$$|x| = \begin{cases} x, \ якщо\ x \ge 0 \\ -x, \ якщо\ x < 0. \end{cases}$$

§2. Множини, дії над ними

1. $A=\{x\in R \mid x^4-3x^3+2x^2=0\}$;
2. $A=\left\{x\in R \mid x+\frac{1}{x}\le 2,\ x>0\right\}$;
3. $A=\left\{x\in N \mid \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}<3\right\}$;
4. $A=\{x\in N \mid x^2-4x-5\le 0\}$;
5. $A=\{x\in R \mid \sin^2 2x=1,\ 0\le x\le 2\pi\}$;
6. $A=\left\{x\in Z \mid \frac{1}{4}\le 2^x<5\right\}$;
7. $A=\{x\in R \mid x^4-13x^2+36=0\}$;
8. $A=\left\{x\in R \mid x-\frac{6}{x}\le -1,\ x>0\right\}$;
9. $A=\left\{x\in N \mid \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}<4\right\}$;
10. $A=\{x\in N \mid x^2-x+12\le 0\}$;
11. $A=\{x\in R \mid \cos^2 3x-1=0,\ 0\le x\le \pi\}$;
12. $A=\left\{x\in Z \mid \frac{1}{9}\le 3^x<5\right\}$.

Означення. Множиною називають сукупність деяких об'єктів. Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Той факт, що елемент x належить (не належить) множині X записують у вигляді $x\in X.\ (x\notin X)$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначають символом $\varnothing$.

Множина A називається підмножиною множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B і позначають цей факт так $A\subset B$.

Множини A і B вважаються рівними, якщо A є підмножиною B і B є підмножиною A.

Об'єднанням (сумою) множин A і B називають таку множину $C=A\cup B$, яка складається з елементів, які належать множині A або B.

Перерізом (добутком) множин A і B називають таку множину $C=A\cap B$, яка складається з елементів, які належать множинам A і B одночасно.

Різницею множин A і B називається множина $C = A \setminus B$, що складається з елементів, які належать множині A і не належать множині B.

За умови $A \subset B$ доповненням множини A до множини B називають різницю $A \setminus B$ і позначають $\overline{A}$.

Множину можна задати переліком її елементів $A = \{a, b, c\}$,

або як сукупність деяких елементів з більш широкої множини B, які мають властивість $p(x)$:

$$A = \{x \in B \mid p(x)\}.$$

Множини, елементами яких є числа, називаються числовими множинами.

Загально прийняті позначення: N – множина натуральних чисел; Z – множина цілих чисел; Q –множина раціональних чисел; R –множина дійсних чисел.

Вправи та задачі

1.2.1. Описати множину переліком елементів:

1.2.2. Знайти $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,$ якщо

1. $A = \{x \in R \mid |x+1| < 1\}$; $B = \{x \in R \mid |x-1| \geq 2\}$;

2. $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 = 0\}$; $B = \{x \in R \mid x^2 - x - 12 = 0\}$;

3. $A = \{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$; $B = \{x \in R \mid x^2 - 3x - 2 = 0\}$.

4. $A = \{x \in R \mid |x+2| \geq 3\}$; $B = \{x \in R \mid |x+4| < 2\}$;

5. $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 6 = 0\}$; $B = \{x \in R \mid x^2 - 2x - 15 = 0\}$;

6. $A = \{x \in R \mid x^2 + 4 = 0\}$; $B = \{x \in R \mid x^2 - 2x - 24 = 0\}$.

1.2.3. Знайти всі підмножини множини A :

1. $A = \{x \in R \mid x^3 + x - 2 = 0\}$;

2. $A = \{x \in R \mid |x-3| = 5\}$;

3. $A = \{x \in Z \mid |x+1| < 3\}$;

4. $A = \{x \in R \mid x^3 - 3x^2 + 4 = 0\}$;

5. $A=\{x\in R \mid |x+2|=1\}$;

6. $A=\{x\in Z \mid |x-1|\le 2\}$.

1.2.4. Знайти доповнення множини A до множини $B=[1,10]$:

1. $A=\{3\}\cup[4,7)$;

2. $A=\{2\}\cup(3,8)\cup[9,10]$;

1.2.5. Знайти множину розв’язків наступних рівнянь і нерівностей:

1. $x^2+4x+|x+2|-16=0$;

2. $x^2-3x-5|x+1|-5|x-4|+25=0$;

3. $x^2-4x+|x^2-5|-1=0$;

4. $|x-1|-|x+2|=|x+3|$;

5. $|x+2|+|x-3|=5$;

6. $|x^2-2|-|x^2-9|=7$;

7. $|x^2-3x|+x-2=0$;

8. $|x|x+|2x-3|=4$;

9. $x^2+\dfrac{4}{x|x|}=5$;

10. $x^6-4x^2|x|+3=0$;

11. $||x|-1|<2$;

12. $||x|-2|>1$;

13. $|x+1|-|x-2|<|x-3|$;

14. $||x-2|-x+3|<|x-4|$;

15. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 0$;

1.2.6. Знайти множину розв’язків рівнянь:

1. $\sqrt{5-x}=-x-7$;

2. $\sqrt{3x^2-x+2}=-2x-8$;

3. $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x$;

4. $\sqrt{\cos x}=-\sin x$;

5. $\cos^2 x=|\sin x|$;

6. $1-\operatorname{tg} x=2|\operatorname{tg} x|$;

7. $1-\lg x=|\lg x-1|$;

8. $\sqrt{\cos 2x-5\sin x}+2\cos x=0$;

9. $\sqrt{\cos 2x-5\sin x+5\cos^2 x}-3\cos x=0$;

10. $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2$;

11. $\log_2 \sin x+\log_{\frac{1}{2}}(-\cos x)=0$.

1.2.7. Розв'язати нерівності методом інтервалів:

1. $(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)\le 0$;

2. $\dfrac{(x^2-1)(x^2-5x+6)\lg x}{x^2-4x-2}\le 0$;

3. $\dfrac{(x^2-16)(|x|-5)(2^x-16)}{x^2+8x+15}\ge 0$;

4. $\dfrac{(x+3)^3(x+1)^2(x-2)}{(x+2)^5(x-4)^7}\le 0$;

5. $\dfrac{x^2-4}{4|x|-x^2}>0$;

6. $\dfrac{2|x|+1}{x+2}>1$.

1.2.8. Розв'язати нерівності:

1. $\sqrt{x-2}>x-3$;

2. $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$;

3. $\sqrt{-3x^2+25x-22}>12-4x$;

4. $\sqrt{x^2-4x-12} > 9+2x;$

5. $\sqrt{x^2-x-2} < 8+3x;$

6. $\log_{x^2}(x+2) < 1;$

7. $\log_{x-2}(x^2-8x+15) > 0;$

8. $\log_{x^2-6x+8}(x-4) > 0;$

9. $\cos^2 x < \frac{1}{4};$

10. $4\cos^2 x + 2\sin^2 x < 5\cos x;$

11. $\cos x > |\sin x|;$

12. $\sqrt{5-2\sin x} \geq 6\sin x - 1;$

13. $\operatorname{ctg}^2 x > 3;$

14. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x < 0;$

15. $2\cos 2x + 5 \leq 3|2\sin x - 1|;$

16. $\cos x + \cos 2x > 0.$

§3. Комплексні числа, дії над ними. Геометричне тлумачення комплексних чисел

Означення. Комплексним числом z називається впорядкована пара двох дійсних чисел (x,y) (пишуть $z=(x,y)$), в якій перше число x називають дійсною частиною, а друге y – уявною частиною комплексного числа z і позначають, відповідно, символами : $x=\operatorname{Re}z$ і $y=\operatorname{Im}z$.

Два комплексні числа $z_1=(x_1,y_1)$ і $z_2=(x_2,y_2)$ називаються рівними, якщо рівні їх дійсні і уявні частини, тобто

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

Комплексні числа виду $(x,0)$ ототожнюють з дійсними числами x , тобто $(x,0)=x$.

Над комплексними числами вводять арифметичні операції за наступними правилами:

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}).$$

Комплексне число $(0,1)$ називають уявною одиницею і позначають символом i : $i=(0,1)$.

В силу наведеного закону множення, легко переконатись, що $i^2=-1$.

Комплексне число z можна подати у вигляді $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy.$

Отримана форма $z=x+iy$ називається алгебраїчною формою запису комплексного числа.

Число $\bar{z}=x-iy$ називається спряженим до числа $z=x+iy$. Очевидно, що $z\bar{z}=x^2+y^2 \in R$.

Якщо розглядати комплексні числа як лінійні двочлени відносно i з коефіцієнтами x і y , то арифметичні операції над ними можна здійснювати як відповідні операції над двочленами, пам’ятаючи,що $i^2=-1$.

Приклад.

$(5+3i)+(8-5i)=5+3i+8-5i=13-2i;$

$(5+3i)-(8-5i)=5+3i-8+5i=-3+8i;$

$(5+3i)(8-5i)=40+24i-25i-15i^2=40-i+15=55-i;$

$$\frac{5+3i}{8-5i}=\frac{(5+3i)}{(8-5i)}\frac{(8+5i)}{(8+5i)}=\frac{40+24i+25i+15i^2}{64-25i^2}=\frac{40+49i-15}{64+25}=\frac{25}{89}+i\frac{49}{89}.$$

Якщо на площині ввести прямокутну декартову систему координат, то будь-яку точку площини можна визначати впорядкованою парою чисел (x,y), яка є декартовими координатами цієї точки. Саму ж точку можна вважати зображенням комплексного числа $z=(x,y)=x+iy$, а відповідну площину з введеною на ній прямокутною декартовою системою координат називають комплексною площиною. Вісь Ox називають дійсною віссю, а вісь Oy - уявною. Якщо ж на цій же площині ввести полярну систему координат так, щоб полюс її співпадав з початком прямокутної декартової системи координат і полярна вісь була напрямлена вздовж вісі Ox зі збереженням масштабу, то будь-яку точку площини можна визначити впорядкованою парою чисел (ρ,φ), яка є полярними координатами цієї точки. Враховуючи зв'язок між декартовими і полярними координатами: $x=\rho cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, будь-яке комплексне число можна подати у вигляді $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, якщо \quad x>0 \\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi, якщо \quad x<0 \\ \dfrac{\pi}{2}, якщо \quad x=0, \quad y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, якщо \quad x=0, \quad y<0. \end{cases}$$

$\rho\geq 0,\ \varphi\in[0,2\pi)$ називають модулем комплексного числа z і познають $|z|$, а φ - аргументом комплексного числа z і позначають $\arg z$. Запис $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ називають тригонометричною формою комплексного числа z. Зауважимо, що для збереження взаємно-однозначної відповідності між множиною комплексних чисел і множиною точок на площині запроваджені обмеження: $\rho\geq 0,\ \varphi\in(-\pi,\pi]$ або $\rho\geq 0,\ \varphi\in(-\pi,\pi]$.

Мають місце наступні правила множення і ділення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, а саме: якщо $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right),\ \ (\rho_2\neq 0).$$

І, зокрема, $z_1^n = \rho_1^n\left(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1\right),\ \forall n\in N.$

Приклад. Знайти тригонометричну форму добутку і частки чисел $z_1=-1+i,\ z_2=1-i\sqrt{3}$.

Запишемо ці числа в тригонометричній формі, попередньо знайшовши їх модулі і

аргументи:

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\ \arg z_1 = arctg\frac{1}{-1}+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4},$$
$$|z_2| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2,\ \arg z_2 = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3}.$$
$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Тоді, згідно наведених формул, маємо:

$$z_1z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Приклад. Знайти z^{25}, якщо $z=1+i$.

Оскільки $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то

$$z^{25}=\left(\sqrt{2}\right)^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}\right)=2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=4096\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4096+i4096$$

Означення. Коренем n-го степеня $(n\in N)$ з комплексного числа z (позначають $\sqrt[n]{z}$) називають таке комплексне число, n-ий степінь якого дорівнює z.

Існує рівно n різних значень кореня n-го степеня $(n \in N)$ з комплексного числа z, які знаходяться за формулою Муавра: якщо $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

то $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1.$

(під $\sqrt[n]{\rho}$ розуміють арифметичне значення кореня).

Слід зазначити, що цим кореням відповідають точки комплексної площини, які розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат радіуса $\sqrt[n]{|z|}$.

Приклад. Знайти $\sqrt[3]{z}$, якщо $z = 4 - i4\sqrt{3}$.

Оскільки

$$|z| = \sqrt{4^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64} = 8,\ \arg z = arctg\frac{-4\sqrt{3}}{4} = -\frac{\pi}{3}\ ,$$

то $z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Тому $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3}\right),\ k = 0,1,2.$

Маємо три корені:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right),\ z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right),\ z_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right).$$

Вправи та задачі

1.3.1. Знайти дійсну і уявну частини комплексного числа:

1. $i(1+i) - \frac{2}{i};$

2. $(1-i)(-3+2i);$

3. $\frac{1-i}{2+i} + \frac{i}{2-i};$

4. $\dfrac{1-2i}{3+i}+(i-1)^2$;

5. $\left(\dfrac{i^{16}+5}{i^{10}+5}\right)^5$;

6. $\left(\dfrac{i^5+3}{i^{10}+4}\right)^2$.

1.3.2. Подати комплексні числа в тригонометричній формі:

1. $1+i$;

2. $-1+i$;

3. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$;

4. $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$;

5. $\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$;

6. $1-\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$;

7. $\sin\dfrac{\pi}{3}+i(1+\cos\dfrac{\pi}{3})$;

8. $\dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$;

9. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

10. $\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\right)^{12}$;

11. $\dfrac{i-1}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$;

12. $1-\sin\alpha+i\cos\alpha,\ \ 0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$.

1.3.3. Знайти всі значення коренів і зобразити їх на комплексній площині:

1. $\sqrt{-1}$;

2. $\sqrt{4}$;

3. $\sqrt[3]{-1-i}$;

4. $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$;

5. $\sqrt[4]{2+2i}$;

6. $\sqrt[5]{-1-i}$;

7. $\sqrt[5]{-i}$;

8. $\sqrt[5]{i-1}$;

9. $\sqrt[3]{-8}$;

10. $\sqrt[3]{-8i}$.

1.3.4. Знайти множину точок комплексної площини, які задовольняють умовам:

1. $|z+i|=|z-1|$;

2. $|z+1-2i|=|z-1+2i|$;

3. $|z-2+i|=\sqrt{3}$;

4. $1\le|z-i|<2$;

5. $|z-1|\le|z+i|$;

6. $|2z-1|<|2-z|$;

7. $\operatorname{Im} z^2>2$;

8. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}<-\dfrac{1}{2}$;

9. $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$;

10. $\operatorname{Re}|z^2-\overline{z}^2|=2$;

11. $\dfrac{\pi}{2}\le\arg\left(z+1-i\right)\le\dfrac{3\pi}{4}$;

12. $\begin{cases} 1 \le |z+1| \le 2, \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi. \end{cases}$

1.3.5. Розв’язати рівняння:

1. $z^2 - 8iz - 15 = 0;$

2. $z^3 + 8i = 0;$

3. $z^2 - 4z + 20 = 0;$

4. $\bar{z}\,|z| = 4 - 3i;$

5. $z^6 = \dfrac{1}{i};$

6. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0;$

7. $|\bar{z}| - 2z = 2i - 1;$

8. $z^8 - 17z^4 + 16 = 0.$

§4. Многочлени над полем комплексних і дійсних чисел. Раціональні дроби. Розклад правильного дробу в суму простих

Означення. Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) n-го степеня називається функція виду $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n$, де $z \in C,$ а числа $a_0, a_1, ..., a_n$ - коефіцієнти (взагалі кажучи, комплексні), причому $a_0 \neq 0, n \in N$.

Означення. Рівняння $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$, називається алгебраїчним рівнянням n-го степеня.

Означення. Число z_0 , для якого $P_n(z_0) = 0$, називається коренем многочлена $P_n(z)$ або відповідного рівняння.

Теорема Гаусса (основна теорема алгебри). Будь-який многочлен ненульового степеня має хоча б один комплексний корінь.

Число z_0 є коренем многочлена $P_n(z)$ тоді і тільки тоді, коли многочлен ділиться без остачі на двочлен $z - z_0$, тобто $P_n(z) = (z - z_0) Q_{n-1}(z)$,де $Q_{n-1}(z)$ многочлен (n-1)-го степеня. Якщо $P_n(z)$ ділиться без остачі на $(z - z_0)^k,\ k \geq 1$, але не ділиться на $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 називають k-кратним коренем многочлена $P_n(z)$; при цьому $P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$, де $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Наслідок з теореми Гаусса. Многочлен n-го степеня має рівно n коренів, якщо враховувати їх кратність.

Якщо коефіцієнти многочлена є дійсними числами і $z_0 = x_0 + i y_0$ -його комплексний корінь, то спряжене число $\overline{z}_0 = x_0 - i y_0$ також є коренем цього многочлена, причому корені z_0 і $\overline{z}_0$ мають однакову кратність.

Нехай многочлен $P_n(z)$ має корені $z_1, z_2, ..., z_m \ (m \leq n)$ кратності $k_1, k_2, ..., k_m \ (k_1 + k_2 + ... + k_m = n)$ відповідно. Тоді його можна розкласти на лінійні множники, тобто має місце тотожність $P_n(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} ... (z - z_m)^{k_m}$.

Якщо при цьому коефіцієнти многочлена є дійсними числами, то, об'єднуючи дужки, які відповідають комплексно спряженим кореням, можна розкласти цей многочлен в добуток лінійних і квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами.

Приклад. Знайти корені многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ і розкласти його на множники.

Очевидно, що $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$. Коренями цього многочлена є корені 3-го степеня з -1:

$z_1 = -1,\ z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Кратність кожного кореня рівна 2. Тому розклад даного многочлена на лінійні множники має вид $z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2\left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\left(z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2$. Об'єднавши дві останні дужки в один множник, отримуєм розклад многочлена на множники з дійсними коефіцієнтами $z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2\left(z^2 - z + 1\right)^2$.

Вираз виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x),\ Q_m(x)$ -многочлени степеня n та m відповідно називається дробово-раціональною функцією або раціональним дробом. Раціональний дріб називається правильним, якщо $n < m$ і неправильним, якщо $n \ge m$.

З неправильного раціонального дробу завжди можна виділити цілу частину, тобто подати його у вигляді суми многочлена і правильного дробу: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)},\ r < m$.

Таке представлення єдине і здійснюється шляхом ділення чисельника $P_n(x)$ на знаменник $Q_m(x)$.

Означення. Раціональні дроби виду

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k = 2,3,...);\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\ \ (p^2 - 4q < 0);\ \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ \left(p^2 - 4q < 0,\ k = 2,3,...\right)$$

називаються елементарними (найпростішими) дробами першого, другого, третього і четвертого типів відповідно.

Будь-який правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних дробів. Таке представлення є єдиним з точністю до порядку доданків.

Якщо розклад на прості множники многочлена $Q_m(x)$ має вид

$$Q_m(x) = b_0(x-a_1)^{s_1}...(x-a_l)^{s_l}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{t_1}...\left(x^2 + p_kx + q_k\right)^{t_k},$$

де $(s_1 + ... + s_l + 2t_1 + ... + 2t_k = m)$, то розклад в суму простих дробів правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ має наступне представлення

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(l)}}{x-a_l}+\ldots+\frac{A_{s_l}^{(1)}}{(x-a_l)^{s_l}}+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{t_1}^{(1)}x+C_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_1^{(k)}x+C_1^{(k)}}{x^2+p_kx+q_k}+\ldots+\frac{B_{t_k}^{(k)}x+C_{t_k}^{(k)}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}.$$

Коефіцієнти $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ в цьому розкладі знаходять методом невизначених коефіцієнтів (зводячи все до спільного знаменника і прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x) або шляхом надання змінній x штучно підібраних значень.

Приклад. Розкласти в суму простих дробів правильний дріб $\frac{1}{x^3+1}$.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$
$$=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Таким чином, маємо $\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$, звідки $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, і остаточно

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Приклад. Розкласти с суму простих дробів $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

Згідно з вказаним вище правилом $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$.

Помноживши ліву і праву частини останньої рівності на $x-1$ і надавши значення $x=1$маємо $A=\frac{1}{4}$. Якщо помножимо на $x+2$ і покладемо $x=-2$, то знайдемо $B=-1$. Помноживши на $x+3$ і поклавши $x=-3$ знайдемо $C=-\frac{7}{4}$.

Отже $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{x+2}-\frac{7}{4(x+3)}$.

Вправи та задачі

1.4.1. При якому значенні а многочлен x^3+6x^2+ax+5 ділиться без остачі на x^2+x+1 ?

1.4.2. При яких значеннях а і в многочлен $x^4-x^3-9x^2+ax+2$ ділиться без остачі на x^2+2x+b ?

1.4.3. При яких значеннях а і в многочлен $2x^3+ax^2-8x+b$ ділиться без остачі на x^2-6x+5 ?

1.4.4. При яких значеннях а і в многочлен $x^4+ax^3+bx^2+3x-9$ ділиться без остачі на $(x+3)^2$?

1.4.5. Розкласти на множники многочлен $x^4-x^3-3x^2+5x-2$.

1.4.6. Розкласти на множники многочлен $x^4-2x^3-x^2+4x+4$.

1.4.7. Знайти корені многочлена $P_3(x)=x^3+x^2-8x-6$ і розкласти його на множники.

1.4.8. Знайти корені многочлена $P_3(x)=x^3+x^2-15x-9$ і розкласти його на множники.

1.4.9. Розв'язати рівняння:

1. $x^4-7x^3+8x^2+14x+4=0;$

2. $x^4-3x^3-6x^2+12x+16=0;$

3. $x^3+9x^2+23x+15=0;$

4. $x^3-x^2-8x+12=0;$

5. $x^4+5x^3+4x^2-24x-24=0;$

6. $x^4-4x^3+8x+3=0.$

1.4.10. Розкласти в суму простих дробів виділивши попередньо цілу частину:

1) $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)};$

2) $\dfrac{x}{2x^2-3x-2};$

3) $\dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)};$

4) $\frac{x^3-1}{4x^3-x}$;

5) $\frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}$;

6) $\frac{x^2}{\left(x+2\right)^2\left(x+4\right)^2}$;

7) $\frac{x}{x^3-1}$;

8) $\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}$;

9) $\frac{2x}{\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)^2}$;

10) $\frac{1}{x\left(x^2+4\right)^2\left(1+x^2\right)}$;

11) $\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}$;

12) $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$.

§5. Метод математичної індукції

Доведення тверджень, які залежать від натурального аргументу інколи зручно здійснювати методом математичної індукції, який базується на принципі математичної індукції, а саме: якщо твердження $A(n)$ є справедливим при $n=1$ і з справедливості його при $n=k$ випливає його справедливість при $n=k+1$, то воно є справедливим для будь-якого натурального числа.

Вправи та задачі

1.5.1. Довести методом математичної індукції:

1. $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$;

2. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$;

3. $1\cdot 2+2\cdot 5+...+n(3n-1)=n^2(n+1)$;

4. $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

5. $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

6. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(\dfrac{n(n+1)}{2})^2$;

7. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+...+(n-1)n^2=\dfrac{(n^2-1)n(3n+2)}{12}$;

8. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;.

9. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+...+\dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\dfrac{n}{4n+1}$

10. $(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{9})...(1-\dfrac{1}{(n+1)^2})=\dfrac{n+2}{2n+2}$;

11. $n(2n^2-3n+1)\ \vdots\ 6$;

12. $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}\ \vdots\ 11$;

13. $11^{n+1}+12^{2n-1}\ \vdots\ 133$;

14. $n^5-n\ \vdots\ 5$;

15. $n^3+3n^2+2n\ \vdots\ 6$;

16. $n^5-5n^3+4n\ \vdots\ 120$;

17. $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1\ \vdots\ 8$;

18. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

19. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$;

20. $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

21. $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2^n-1}<n$;

22. $(2n!) > \frac{4n}{n+1}(n!)^2$;

23. $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$;

24. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$;

25. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

26. $2^n n! < n^n, \quad \forall n > 2$;

27. $3 + 33 + 333 + \underbrace{3...3}_{n} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$;

28. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \underbrace{...}_{n} + \sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

29. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + ... + \operatorname{arctg}\frac{1}{2^{n^2}} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

30. $n! < (\frac{n+1}{2})^n, \quad \forall n > 1$.

§6. Біноміальна формула Ньютона

Біноміальна формула Ньютона є узагальненням відомих формул скороченого множення

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Виявляється, що для кожного натурального числа n правильною буде формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \quad \text{тобто,}$$

$$(a+b)^n = \sum_0^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad \text{де} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Вправи та задачі

1.6.1. Знайти n:

1. $C_{n+1}^{n-1} = 10$;

2. $C_n^{n-2} = 1$.

1.6.2. Розв'язати рівняння:

1. $C_{x+2}^{4} = x^2 - 1$;

2. $C_x^{x-3} + C_x^{x-2} = 15(x-1)$;

3. $C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x - 10.$

1.6.3. Знайти коефіцієнт при x^8 в розкладі $(x^2 - x^3 + 1)^9$.

1.6.4. Знайти коефіцієнт при $x^3 y^5$ в розкладі $(x + y + 1)^9$.

1.6.5. Знайти раціональні числа в розкладі біномів:

1) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$; 2) $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$; 3) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{8})^{15}$; 4) $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^7$.

1.6.6. Знайти коефіцієнт при x^5 у многочлені

$$x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^2(5+3x^3)^4.$$

1.6.7. Знайти коефіцієнт при x^3 у многочлені

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + ... + (1+x)^{15}.$$

§7. Функції однієї змінної. Основні елементарні функції

Означення. Нехай X і Y – не порожні множини дійсних чисел. Якщо кожному елементу $x \in X$

ставиться у відповідність одне і тільки одне число $y \in Y$, то говорять, що на множині

X задана функція (або відображення) з множиною значень Y. Цей факт записують так:

$f : X \to Y$ або $y = f(x)$ $, x \in X$, де множина X називається областю визначення функції, а множина $Y = \{ \ y = f(x), \forall x \in X \ \}$ – множиною значень функції. Область визначення функції f позначають символом $D(f)$, а область значень символом $E(f)$.

Означення. Основними елементарними функціями називають наступні функції:

1) степенева функція $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$;

2) показникова функція $y = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1$;

3) логарифмічна функція $y = \log_a x,\ a \in R, a > 0, a \neq 1;$

4) тригонометричні функції
$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x,\ y = \sec x,\ y = \operatorname{cosec} x;$

5) обернені тригонометричні функції
$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$

Означення. Елементарними функціями називають функції, які отримуються шляхом застосування скінченної кількості разів операцій додавання, віднімання, множення, ділення і суперпозицій (тобто утворення складних функцій) до основних елементарних функцій.

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називають множину $\Gamma_f = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x \in D(f), y = f(x)\}$.

Означення. Функція $f(x)$, область визначення якої є симетричною відносно нуля, називається парною (непарною), якщо для будь-яких значень $x \in D(f)$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$ (відповідно $f(-x) = -f(x)$). Графік парної функції симетричний відносно вісі ординат, графік непарної функції – відносно початку координат.

Означення. Функція $f(x)$ називається періодичною, якщо існує сталe додатне число T таке, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Найменше додатне число T, яке задовольняє вказану умову, називається періодом функції.

Вправи та задачі

1.7.1. Знайти область визначення функцій:

1) $f(x) = \lg(x^2 - x - 12) + \sqrt{20 + x - x^2}$;

2) $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{12 + 5x - 2x^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{-12 + 11x - 2x^2}$;

4) $f(x) = \arccos(|x| - 2) + \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$.

1.7.2. Знайти множину значень функцій:

1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

3) $f(x)=3\sin x-4\cos x$;

4) $f(x)=\sin x+\sin 3x$;

5) $f(x)=2^{3\sin 2x+4\cos 2x}+5$;

6) $f(x)=2^{\sqrt{\sin x+\cos x}}-3$.

1.7.3. Знайти найменший період функцій:

1) $f(x)=|\sin x|$;

2) $f(x)=\sin \pi x$

3) $f(x)=\sin x-|\sin x|$;

4) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{5\pi x}{3}$;

5) $f(x)=\ln\sin 2x$;

6) $f(x)=\cos(|x|-x)$;

7) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}+\sin 2x$

8) $f(x)=\cos\dfrac{2x}{5}+\sin\dfrac{x}{3}$.

1.7.4. З’ясувати, які з наведених функцій є парними чи непарними:

1) $f(x)=|x-2|+|x+2|-3x^2)$;

2) $f(x)=3x^7-5x$;

3) $f(x)=3x^7-\operatorname{tg} x$;

4) $f(x)=\cos x-\operatorname{tg} x$;

5) $f(x)=\lg(x+\sqrt{2+x^2})$;

6) $f(x)=x\ln\frac{x+1}{x-1};$

7) $f(x)=3^{-|x|}\sin x;$

8) $f(x)=x\sin x;$

9) $f(x)=\arcsin x;$

10) $f(x)=\arccos x-\frac{\pi}{2}$

1.7.5. Побудувати графіки функцій:

1) а) $y=|3-2x|;$ б) $y=3-2|x|;$ в) $y=|3-2|x||;$

2) а) $y=x^2-5x+4;$ б) $y=x^2-5|x|+4;$ в) $y=|x^2-5|x|+4|;$

3) а) $y=\frac{x}{2-x};$ б) $y=\frac{|x|}{2-|x|};$ в) $y=\frac{|x|}{|2-x|};$

4) а) $y=\sqrt{9-x};$ б) $y=\sqrt{9-|x|};$ в) $y=\sqrt{|9-x|};$

5) а) $y=\log_2(2-x);$ б) $y=\log_2(2-|x|);$ в) $y=\log_2(|2-|x||);$

6) а) $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-2);$ б) $y=\log_{\frac{1}{2}}(4|x|-2);$ в) $y=\log_{\frac{1}{2}}(|4|x|-2|)$

7) а) $y=2\sin|x|;$ б) $y=|\sin 2x|;$ в) $y=\sin\frac{|x|}{2};$

8) а) $y=\cos 2(x-\frac{\pi}{8});$ б) $y=\cos 2(|x|-\frac{\pi}{8});$ в) $y=\cos 2|x-\frac{\pi}{8}|;$

9) а) $y=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{4});$ б) $y=\mathrm{tg}(\pi|x|-\frac{\pi}{4})$ в) $y=\mathrm{tg}|\pi x-\frac{\pi}{4}|;$

10) а) $y=\mathrm{ctg}(x+\frac{\pi}{4});$ б) $y=\mathrm{ctg}|x+\frac{\pi}{4}|;$ в) $y=-|\mathrm{ctg}(x+\frac{\pi}{4})|;$

11) а) $y=\arcsin(x-2);$ б) $y=\arcsin(|x|-2);$ в) $y=\arcsin(x-2|;$

12) а) $y=\arccos\frac{x-2}{2};$ б) $y=\arccos\frac{|x-2|}{2};$ в) $y=\arccos\frac{|x|-2}{2};$

13) а) $y=2\,\mathrm{arctg}(x-1);$ б) $y=2\,\mathrm{arctg}|x-1|;$ в) $y=2|\mathrm{arctg}(|x|-1)|;$

14) $y=|||x|-2|-1|;$

15) $y = |||x| - 1| - 2|$;

16) $y = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-1}, & x > 0 \end{cases}$;

17) $y = \begin{cases} 2^x, & x \ge 0 \\ \dfrac{1}{2}(\cos x + |\cos x|), & x > 0 \end{cases}$;

18) $y = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & x \le 1 \\ 1 + \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 1 \end{cases}$;

19) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x, & x \le 1 \\ 1 - \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$;

20) $y = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1 - x), & x < 0 \\ \dfrac{x}{x-1}, & x \ge 0 \end{cases}$;

21) $y = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < 0 \\ |\sin \pi x| - \sin \pi x, & x \ge 0 \end{cases}$;

22) $y = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x < 0 \\ \sqrt{4x - x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$;

23) $y = \begin{cases} \ln(1 - x), & x \le 0 \\ \dfrac{2x}{1-x}, & x > 0 \end{cases}$;

24) $y = \begin{cases} \ln(1 - x), & x > 1 \\ \dfrac{x}{2x-1}, & x \le 1 \end{cases}$;

25) $y = \begin{cases} 3^{-|x|}, & x < 1 \\ |x - 2| - 2, & x \ge 1 \end{cases}$;

26) $y = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\arcsin x, & |x| < 1 \\ 2|x| - x^2, & |x| \ge 1 \end{cases}$;

27) $y = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\arccos x, \ |x| \le 1 \\ x^2 - 2x, \ x > 1 \\ |\sin \pi x| + \sin \pi x, \ x < -1 \end{cases}$.

1.7.6. Встановити графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^2 + \log_{\frac{1}{2}}(1-x) = 1$;

2) $(x-1)\ln(|x|-1) - x = 1$;

3) $x^2 - 2x - \log_2|1-x| = 3$;

4) $x^2 + e^{-|1-x|} = 2x$;

5) $15 \cdot 2^{-|x|}\sin \pi x = 1$;

6) $\arcsin|x| + e^{-|x|} = 1$;

7) $\arccos|x| - \sqrt{2-x} = 0$;

8) $x \operatorname{arctg} x = 1$;

9) $3\operatorname{arctg} x - x^3 = 0$;

10) $\dfrac{x}{3} + \cos \pi x = 0$;

11) $\dfrac{2x}{101\pi} - \sin x = 0$; 12) $\dfrac{|x|}{5} + \cos \pi x = 0$.

1.7.7. На координатній площині зобразити множину точок $M(x, y)$, координати яких задовольняють умовам:

1) а) $|x| - |y| = 1$; б) $|x| + |y| = 1$;

2) а) $|x + y| = 1$; б) $|x - y| = 1$;

3) а) $|y| = |x^2 - 8x|$; б) $|y| = |x^2 - |x||$;

4) а) $|y - x| + |x + y| = 2$; б) $(y-2)^2 = (x-1)^2$;

5) а) $y^2 + (|x|-1)^2 = 4$; б) $(|y|-3)^2 + (x-1)^2 = 1$;

6) а) $(|y|-1)^2 + (|x|-1)^2 \le 1$; б) $y^2 + (|x-1|-2)^2 > 9$;

7) а) $||x|-y|\geq 1$; б) $(y+2)^2 \geq (|x|-1)^2$;

8) а) $|y-x|+|x+y|\leq 2$; б) $|y-2x|+|x+2y|\leq 4$;

9) а) $|y^2+x^2+2y|\leq 2x$; б) $|y^2+x^2-2|\leq 2(x+y)$;

10) а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 25 \\ xy \geq 2 \\ y-x \leq 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x+y<7 \\ 2x+3y \geq 1 \\ y-x \leq 2 \end{cases}$;

11) а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 9 \\ y-|x|+3 \geq 0 \\ |x|\leq 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0<x^2+y^2<1 \\ y-x^2 \geq 0 \\ y-\sqrt{x} \leq 0 \end{cases}$;

12) а) $\sin(\pi(|x|-y|))=0$; б) $\cos \pi xy = 1$;

13) а) $\mathrm{tg}(\pi(x^2-y))=0$; б) $\mathrm{ctg}(x-y)=0$;

14) а) $\sin(\pi(x^2+y^2))=0$; б) $\mathrm{tg}(\pi(|x|+|y|))=0$;

15) а) $\mathrm{ctg}(\pi(|x-y|)=0$; б) $\cos(\pi(|x-y|+|x+y|))=1$;

16) а) $|y|=\sin 2|x|$; б) $|y|=\mathrm{tg}\dfrac{\pi|x|}{3}$;

17) а) $\left|y-\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|=\sin\dfrac{\pi x}{2}$; б) $|y-\mathrm{tg}\,2x|=y$;

18) а) $|\sin \pi x|+|\sin 2\pi x|=0$; б) $\cos^2\dfrac{\pi y}{2}+\cos^2 2\pi x=0$;

19) а) $\left|\sin\dfrac{\pi x}{3}\right|\sin \pi y=0$; б) $\left|\cos\dfrac{\pi x}{2}\right|\cos\dfrac{\pi y}{3}=0$;

20) а) $\dfrac{\sin \pi x}{|y-1|}=0$; б) $\dfrac{\cos 2y}{x^2-4}=0$;

21) а) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\pi x}{\mathrm{tg}\,4y}=0$ б) $\dfrac{y^2-2y-3}{\mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{3}}=0$;

22) а) $\log_{x^2+y^2}(x+y)>1$; б) $\log_{|x|+|y|}(x^2+y^2)\leq 0$;

23) а) $\log_{\sin x \sin y}(\sqrt{\pi}-2)>0$; б) $(1-|y|)^{\log_{1-|y|}\cos x}>0$.

§8. Послідовності та їх границі

Означення. Якщо кожному натуральному числу n за певним законом f поставлено у відповідність деяке число $x_n = f(n)$, то множину чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ називають числовою послідовністю і позначають символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Число x_n називають n-м членом послідовності, а рівність $x_n = f(n)$ називають формулою загального члена цієї послідовності.

Прикладами послідовностей є сукупності членів арифметичної та геометричної прогресій з формулами загальних членів відповідно $a_n = a_1 + d(n-1)$ і $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Означення. Послідовність $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається підпослідовністю послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо всі члени послідовності $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ співпадають з деякими членами послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і притому, взяті ці члени в тому ж порядку.

Означення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається обмеженою зверху (відповідно знизу), якщо існує таке число A (відповідно B), що для всіх натуральних n виконується нерівність $x_n < A$ (відповідно $x_n > B$).

Означення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається обмеженою, якщо вона є обмеженою зверху і знизу одночасно, тобто, якщо існують такі числа A і B, що $B < x_n < A$ для всіх $n \in N$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається зростаючою (відповідно спадною), якщо $x_n < x_{n+1}$ (відповідно $x_n > x_{n+1}$) для всіх $n \in N$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається незростаючою (відповідно неспадною), якщо $x_n \geq x_{n+1}$ (відповідно $x_n \leq x_{n+1}$) для всіх $n \in N$.

Приклад. Якщо члени послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють арифметичну прогресію, то у випадку $d < 0$ (d - різниця прогресії) ця послідовність є обмеженою зверху, так як $a_n < a_1$ для всіх $n \in N$, необмеженою знизу, монотонно спадною; у випадку $d > 0$ відповідна послідовність є обмеженою знизу, необмеженою зверху і монотонно зростаючою.

Приклад. Послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою (так як $0<\frac{1}{n}\le 1$) і спадною (так як $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$) для всіх $n\in N$.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (пишуть $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ або $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що при всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$.

Геометрично це означає, що для довільного ε-околу точки a знайдеться такий номер члена послідовності, починаючи з якого всі її члени потраплятимуть до вказаного ε-околу.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Дійсно, оскільки $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ при $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то $N(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ при довільному $\varepsilon>0$, тобто, згідно з означенням, границею вказаної послідовності дійсно є число 0.

Означення. Послідовність, яка має скінчену границю, називається збіжною.

Границя збіжної послідовності є єдиною.

Означення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Означення. Послідовність $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається нескінченно великою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=\infty$, тобто, для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться номер $N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|X_n|>\varepsilon$.

Має місце наступний зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими послідовностями: якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малою, то $\left\{X_n=\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою; якщо $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою, то $\left\{x_n=\frac{1}{X_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малою.

Мають місце наступні властивості збіжних послідовностей:

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \iff x_n=a+\alpha_n$, де $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n + By_n) = Aa + Bb$, де A, B - довільні дійсні числа;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < \infty\ \Rightarrow\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою;

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - обмежена, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нескінченно мала $\Rightarrow \{\alpha_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$ -нескінченно мала;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\ y_n \neq 0,\ b \neq 0\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+4n+3}$.

Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь знаменника і застосуємо вказані вище властивості. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+4n+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-n!}{(n+1)!-(n+2)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!-(n+2)!} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+1)n!-n!}{(n+1)!-(n+2)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(n^2+3n+2-1\right)}{(n+1)!(1-n-2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(n^2+3n+1\right)}{(n+1)n!(-n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n+1\right)}{\left(-n^2-2n-1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(-1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = -1.$$

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n-1}\right)} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n\right)-\left(n^2-n+1\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)}=1.$$

Означення. Число $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2,71828...$називають числом Ейлера. Це ірраціональне число, яке відіграє важливу роль в багатьох теоретичних та прикладних дослідженнях. Використання наведеного означення дозволяє розкривати невизначеність типу $\left[1^\infty\right]$.

Означення. Натуральним логарифмом числа називають його логарифм по основі e і позначають символом $\ln a$ ($\ln a = log_e a$).

Вправи та задачі

1.8.1. Використовуючи логічну символіку, записати наступні твердження і їх заперечення:

послідовність $\{x_n\}$ не є обмеженою;

послідовність $\{x_n\}$ монотонно спадає;

число a є границею послідовності $\{x_n\}$.

1.8.2. Знайти найменший (найбільший) член обмеженої знизу (зверху) послідовності $\{x_n\}$, якщо:

1. $x_n=n^2-19n+88;$

2. $x_n=-n^2+6n-5;$

3. $x_n=n^2+\frac{100}{n^2};$

4. $x_n=e^{10n-n^2-24};$

5. $x_n=n^2+\frac{\sqrt{n}}{n+9};$

6. $x_n=\frac{1}{n^2-6n+1};$

7. $x_n=\frac{n^2}{2^n};$

8. $x_n = (13 - |7-n|)\cos \pi n;$

9. $x_n = \dfrac{10^n}{n!}.$

1.8.3. Довести, що вказані нижче послідовності є монотонними:

1. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$

2. $x_n = \dfrac{2n}{n+1};$

3. $x_n = (1+\dfrac{1}{n})^n;$

4. $x_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1};$

5. $x_n = 3 - \arcsin \dfrac{1}{n^2+4};$

6. $x_n = \lg(\dfrac{n^4}{n^4+8}+1).$

1.8.4. Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|x_n - a| < \varepsilon$ для всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо:

1. $x_n = 0,\underbrace{33...3}_{n}$, $\varepsilon = 10^{-3};$

2. $x_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$, $\varepsilon = 10^{-4};$

3. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, $\varepsilon = 10^{-4}.$

1.8.5. Використовуючи означення границі послідовності, довести, що

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5}{3n^2+1} = \dfrac{2}{3};$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0;$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n^2} = 0.$

1.8.6. Обчислити границі послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-101}{n+11}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^2+5n-1}{7n^2-2}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n-1}{7n^2-2}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^2+25n-12}{7n-2}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+10}-\sqrt{n}\right)$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^2-2n+1}\right)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2+1}-\sqrt{3n^2-1}}{7n+5}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^3+1}-\sqrt[3]{4n^3-1}}{5n+3}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{2n^2-5n-7}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{5^n}}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^4+n^2-3}}{3+6+9+...+3n}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$;

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n+6}-\sqrt{2n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+n}$;

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+7^n}$;

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n+9^n}$.

§9. Границя функції. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки $x=x_0$ за винятком, можливо, самої точки $x=x_0$.

Означення Число a називається границею функції $f(x)$ при прямуванні x до x_0

(пишуть $a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ або $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}a$), якщо точки a знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що всі значення $f(x)$ для x з δ-околу потраплятимуть до ε-околу точки a.

Таке означення границі функції називається означенням за Коші. Еквівалентним йому є означення за Гейне, а саме: для кожної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до x_0, причому всі її точки належать вищезгаданому околу цієї точки, послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до a.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$.

Дійсно, для виконання нерівності $|3x-1-2|<\varepsilon$, або, що те ж саме $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, достатньо вибрати $\dfrac{\varepsilon}{3}$-окіл точки $x_0=1$, або, що те ж саме, вибрати $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Приклад. Довести, що функція $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі при $x\to 0$.

Дійсно, поклавши $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, отримаємо послідовність значень функції $\{\sin \pi n\}_{n=1}^{\infty}$, яка складається з нулів і має нуль своєю границею. В той же час для з одиниць ікає границею 1. Таким чином, для двох різних послідовностей значень аргументу функції, збіжних до $x_0 = 0$ отримуємо різні границі послідовностей значень функції, що, відповідно до означення границі функції за Гейне, вказує на відсутність границі. Зауважимо, що в наведеному прикладі функція не була визначена безпосередньо в точці $x = x_0$.

Означення Число a називається границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$ (відповідно $x \to -\infty$), якщо функція визначена при $x > A$ (відповідно $x < -A$) при деякому $A > 0$ і для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists D = D(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x > D$ (відповідно $x < -D$) виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$.

Оскільки вказана функція визначена при $x \neq \pm 1$, то вона визначена і при $|x| > 1$. При $\left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1} - 1\right| < \varepsilon$ має виконуватись нерівність $\dfrac{1}{x^2-1} < \varepsilon$, тобто $x^2 - 1 > \dfrac{2}{\varepsilon}$, звідки $|x| > \dfrac{2}{\varepsilon} + 1 = D(\varepsilon)$, що і потрібно було довести.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то така функція називається нескінченно малою в напрямі $x \to x_0$. Тоді функція $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно великою в цьому напрямі.

Приклад. Довести, що $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ прямує до $+\infty$ при $x \to 0$.

Для доведення цього факту достатньо зазначить, що вказана функція визначена і додатна для всіх $x \neq 0$, в той же час $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = x^2$ є нескінченно малою при $x \to 0$.

Означення. Число a називається границею функції $f(x)$ зліва (справа) при $x \to x_0$, якщо ця функція визначена для всіх $x \in (x_0 - c; x_0)$ (відповідно $x \in (x_0; x_0 + c)$), де $c > 0$ і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta(\varepsilon) > 0$ таке,що при $x_0 - \delta < x < x_0$ (відповідно $x_0 < x < x_0 + \delta$) виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Позначається границя зліва (справа) відповідними символами: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$).

Має місце твердження $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a \\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a \end{cases}$.

Приклад. Знайти односторонні границі функції $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ в точці $x=0$.

Якщо $x\to 0-0$, то $\frac{1}{x}\to -\infty$, тому $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$. Якщо ж $x\to 0+0$, то $\frac{1}{x}\to +\infty$ і тому $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty$.

Для функцій, які мають границі в точці, справедливі наступні твердження:

- якщо границя функції в точці існує, то вона є єдиною;
- якщо границя функції в точці існує і є скінченою, то функція обмежена в деякому околі цієї точки;
- якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ і $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$ в деякому околі точки x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=a+\alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$;
- добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою;
- якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(Af(x)+Bg(x))=Aa+Bb$ для довільних чисел A і B;
- якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$;
- якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$, за умови що $b\ne 0$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$.

Оскільки чисельник і знаменник вказаного дробу при $x=2$ перетворюються в 0, то кажуть, що має місце невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, для розкриття якої потрібно їх розкласти на множники і скоротити. Отже маємо: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x-4)}=-\frac{1}{2}$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}$.

Аналогічно до попереднього прикладу маємо справу з невизначеністю виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для її розкриття необхідно дріб перетворити так, щоб скоротились спільні множники чисельника і знаменника, які обертаються в 0 при $x=0$. Отже

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2})}{(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1})(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4-4)(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2})}{(\sqrt{x+4}+2)(x+1+x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2})}{(\sqrt{x+4}+2)2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+5x-6}{2x^3+5x^2-3x+2}$.

Застосуємо прийом аналогічний до використаного при знаходженні границі послідовностей:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+5x-6}{2x^3+5x^2-3x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}}{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{3}{2}.$$

Означення. Перша визначна границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Наслідки: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cos x\cos 2x\cos x}{\sin x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=4.$$

Зауваження. Для знаходження границі тригонометричні вирази у чисельнику і знаменнику були перетворені в добуток, після чого використаний прийом множення чисельника і знаменника на зручний множник, що дало можливість використати першу визначну границю.

Означення. Друга визначна границя: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Наслідки: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln a \lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{\ln a}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$.

Для обчислення границі у вказаному виразі потрібно виділити форму другої визначної границі, а саме: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x} = \left[1^\infty\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x5^x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x5^x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{x\left(2^x-5^x\right)}{1+x5^x}\right)^{\frac{1+x5^x}{x\left(2^x-5^x\right)}}\right)^{\frac{x\left(2^x-5^x\right)}{\left(1+x5^x\right)\sin^2 x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{2^x-5^x}{x}\cdot\frac{1}{1+x5^x}} = \lim_{x\to 0}\exp\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x-1}{x}\right)\cdot 5^x\cdot\frac{1}{1+x5^x}\right\} = e^{1\cdot\ln\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}.$$

Зауваження. Тут використано форму запису $e^{f(x)} = \exp\{f(x)\}$, а також відомий факт, що $e^{\ln a} = a$ при $a > 0$.

Вправи та задачі

1.9.1. Використовуючи логічну символіку, записати твердження:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$;

d) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty;$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0;$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A.$

1.9.2. Використовуючи означення границі функції, довести, що:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4;$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^2+2}=\frac{1}{3};$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2+4}{3x^2-7}=1,$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty;$

1.9.3. Обчислити границі функцій:

1) $a)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1};$

2) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x};$ $b)\ \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6};$

3) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2};$

4) $a)\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$

5) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49};$

6) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2};$

7) $a)\ \lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-5}{4x^2+12};$ $b)\ \lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4+5x^2-1}{x^2+x-5};$

8) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$

9) $a)\ \lim\limits_{x\to \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x);$ $b)\ \lim\limits_{x\to \infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1});$

10) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin 2x};$

11) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x};$ $b)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x};$

12) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\operatorname{tg} x};$

13) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1};$ $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-5x}\right)^{x};$

14) $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3+x^2}\right)^{\frac{2x}{x+2}}$;

15) $a)\ \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x}{3-5x}\right)^{x}$;

16) $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

17) $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x+3}$; $b)\ \lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

18) $a)\ \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x7^x}\right)^{ctg^2x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

1.9.4. Обчислити односторонні границі:

1) $a)\ \lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{5}{x-2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{5}{x-2}$;

2) $a)\ \lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$;

3) $a)\ \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

4) $a)\ \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|\sin x|}{x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|\sin x|}{x}$;

5) $a)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

§10. Порівняння нескінченно малих функцій

Означення. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x\to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ існує, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються порівнянними, якщо ні, то непорівнянними.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються еквівалентними

(позначають $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку малості ніж $\beta(x)$ (позначають $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, $(C\neq 0, C\neq 1, C<\infty)$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку малості (позначають $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x\to x_0$).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою нижчого порядку малості, ніж $\beta(x)$ при $x\to x_0$).

Приклад. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=x^2-x$ та $\beta(x)=\sin\pi x$ при $x\to 1$.

Для цього знайдемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{\sin(\pi-\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{\sin\pi(1-x)}=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}x\cdot\frac{\pi(1-x)}{\sin\pi(1-x)}=-\frac{1}{\pi}.$$

А це означає, що вказані нескінченно малі одного порядку малості при $x\to 1$.

Якщо нескінченно мала $\alpha(x)$ є одного порядку малості з $\left[\beta(x)\right]^k$ в напрямі $x\to x_0$, то кажуть, що вона є нескінченно малою k-го порядку малості відносно $\beta(x)$ в цьому напрямі. Для порівняння в таких випадках найчастіше використовують $\beta(x)=x-x_0$.

Наслідками першої та другої визначних границь є наступні еквівалентності, справедливі для $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$:

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim e^{\alpha(x)}-1\sim\ln\left(1+\alpha(x)\right);$$

$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\alpha^2(x);\qquad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a;\qquad \log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a};$$

$$\left(1+\alpha(x)\right)^a-1\sim a\cdot\alpha(x).$$

Приклад. Порівняти нескінченно малі $\alpha(x)=\cos 3x-\cos x$ та $\beta(x)=\operatorname{arctg}\left(e^{x^3}-1\right)$ при $x\to 0$.

Зауважимо, що $\alpha(x)=\cos 3x-\cos x=2\sin 2x\sin x\sim -4x^2$ при $x\to 0$; $\beta(x)=\operatorname{arctg}\left(e^{x^3}-1\right)\sim e^{x^3}-1\sim x^3$ при $x\to 0$. Тому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^{\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x^2}{x^2}=-4$, тобто $\alpha(x)$ є нескінченно малою одного порядку малості з $\left[\beta(x)\right]^{\frac{2}{3}}$.

Вправи та задачі

1.10.1. Порівняти нескінченно малі у вказаному напрямі функції:

1) $\alpha(x)=x^3+x-2$ *і* $\beta(x)=x-1$ *при* $x\to 1$;
2) $\alpha(x)=\operatorname{ctg} x$ *і* $\beta(x)=\pi-2x$ *при* $x\to \frac{\pi}{2}$;
3) $\alpha(x)=x-\sqrt{x}$ *і* $\beta(x)=x^3-3\sqrt[4]{x}$ *при* $x\to 0$;
4) $\alpha(x)=\arcsin(\sqrt{9+x^2}-3)$ *і* $\beta(x)=x$ *при* $x\to 0$;
5) $\alpha(x)=e^{2x^2}-\cos 2x$ *і* $\beta(x)=\operatorname{arctg} x$ *при* $x\to 0$;
6) $\alpha(x)=\operatorname{tg} 2x-\sin 2x$ *і* $\beta(x)=x\ln(1+x^2)$ *при* $x\to 0$;
7) $\alpha(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2x}-1$ *і* $\beta(x)=\operatorname{arctg} x$ *при* $x\to 0$;
8) $\alpha(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ *і* $\beta(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}$ *при* $x\to \infty$;
9) $\alpha(x)=\ln\cos 6x$ *і* $\beta(x)=e^{\sqrt{x}}-1$ *при* $x\to 0$;
10) $\alpha(x)=\frac{\arcsin(x-2)}{x}$ *і* $\beta(x)=x^3-8$ *при* $x\to 2$.

1.10.2. Визначити порядок малості нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ в напрямі $x\to 0$ відносно x :

1) $\alpha(x)=\sqrt{1+x^6}-1$;
2) $\alpha(x)=\ln\sqrt{1+x^4\sin^6 x}$;
3) $\alpha(x)=\operatorname{tg} x-\sin x$;
4) $\alpha(x)=x\sin\sqrt{x}$;
5) $\alpha(x)=\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{27-2x^2-x}-3)$;
6) $\alpha(x)=\cos 7x-\cos x$;
7) $\alpha(x)=2^{x^2}-1$;
8) $\alpha(x)=\frac{x^3}{\ln(1+x)}$;
9) $\alpha(x)=x^2+1-\cos 2x$;
10) $\alpha(x)=\operatorname{tg}\left(x^3+x\right)$.

§11. Неперервність та розриви функції в точці

Означення Неперервність функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ може бути визначена наступними еквівалентними означеннями:

- функція визначена в деякому околі точки x_0 і має місце рівність $\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$;
- функція визначена в деякому околі точки x_0 і для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при всіх x, для яких $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
- функція визначена в деякому околі точки x_0 і нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta f = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
- функція визначена в деякому околі точки x_0, існують $\lim_{x\to x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0 + 0} f(x)$ і $f(x_0)$, причому $\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

При дослідженні функцій на неперервність використовується те чи інше її означення з міркувань зручності.

Означення. Якщо функція $f(x)$ неперервна в усіх внутрішніх точках інтервалу (a,b), то вона називається неперервною на цьому інтервалі (записують $f(x) \in C_{(a,b)}$).

Означення. Якщо функція $f(x)$ неперервна на (a,b), існують $f(a)$ та $f(b)$, причому $f(a) = \lim_{x\to a+0} f(x)$ і $f(b) = \lim_{x\to b-0} f(x)$, то вона називається неперервною на $[a,b]$ (записують $f(x) \in C_{[a,b]}$).

Такі функції мають наступні властивості:

- їх графіки на проміжку $[a,b]$ є неперервними лініями;
- функція $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ обмежена (теорема Вейерштрасса);
- якщо існують такі x_1, x_2 з проміжку $[a,b]$, для яких $f(x_1) = A \neq B = f(x_2)$, то для довільного $C \in (A,B)$ знайдеться $x_3 \in (x_1, x_2)$ таке,що $f(x_3) = C$ (теорема про проміжні значення);
- функція $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ досягає своїх найменшого та найбільшого значень (теорема про найменше та найбільше значення);
- для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, що $|x_1 - x_2| < \delta$ виконується нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (теорема Кантора про рівномірну неперервність).

Означення. Точки, в яких не виконуються умови неперервності функції, називаються точками розриву. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і, можливо, в самій точці x_0 . Має місце наступна класифікація точок розриву:

- точка x_0 називається точкою усувного розриву для функції $f(x)$, якщо обидві односторонні границі існують, є скінченними і рівними між собою, але не рівними $f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$;
- точка x_0 називається точкою розриву першого роду (розрив типу стрибок) для функції $f(x)$, якщо обидві односторонні границі існують, скінченні,але не є рівними між собою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;
- точка x_0 називається точкою розриву другого роду для функції $f(x)$, якщо вона не належить області визначення функції і при цьому хоча б одна з односторонніх границь в цій точці не існує або є нескінченною.

При дослідженні функцій на неперервність виходять з того, що всі елементарні функції є неперервними їх областях визначення.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ця функція визначена для всіх $x \in R$. Для довільного $x_0 \in R$ маємо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 - 4\lim\limits_{x\to x_0} x + 3 = x_0^2 - 4x_0 + 3 = f(x_0)$. А це означає її неперервність для довільного $x_0 \in R$.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Функція визначена при $x \neq 0$. Для всіх $x_0 \neq 0$ маємо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \dfrac{1}{x_0} = f(x_0)$. Крім того $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$. Таким чином, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ є неперервною для всіх $x \neq 0$, а в точці $x = 0$ має розрив другого роду.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1; \\ 2x+3, & -1 \le x \le 0; \\ 2^{\frac{1}{x}}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ \sin x, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$.

Оскільки функція $y = x^2$ неперервна при всіх $x \in R$, то $f(x)$ неперервна для $x \in (-\infty; -1)$.

В точці $x=-1$ маємо $f(-1)=-2+3=1$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0} x^2=(-1)^2=1$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(2x+3)=-2+3=1$, що означає неперервність функції $f(x)$ в точці $x=-1$.

На проміжку $(-1;0]$ функція $f(x)$ неперервна в силу неперервності функції $y=2x+3$ при $x\in R$.

В точці $x=0$ маємо $f(0)=2\cdot 0+3=3$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(2x+3)=3$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$, що означає наявність розриву другого роду в цій точці.

На проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функція $f(x)$ неперервна, оскільки функція $y=2^{\frac{1}{x}}$ є неперервною при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

В точці $x=\frac{\pi}{2}$ маємо $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{\pi}}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\sin x=1$, що означає наявність розриву першого роду в цій точці.

На проміжку $\left[\frac{\pi}{2};+\infty\right)$ функція $f(x)$ неперервна, так як такою є функція $y=\sin x$ для всіх $x\in R$.

Вправи та задачі

1.11.1. Дослідити функцію $f(x)$ на неперервність, визначити тип точок розриву, зробити схематичний малюнок поведінки графіка функції в околі точок розриву:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$;
2) $f(x)=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$;
3) $f(x)=\dfrac{x+5}{|x+5|}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;
5) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$;
6) $f(x)=\dfrac{2}{1+4^{\frac{1}{x-2}}}$;

7) $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}+5;$

8) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1};$

9) $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x};$

10) $f(x)=\frac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}+2^{\frac{1}{x+1}}};$

11) $f(x)=\begin{cases} x, & якщо\ \ x\le 1 \\ (x-2)^2, & якщо\ \ 1<x\le 3; \\ -x+6, & якщо\ \ x>3 \end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & якщо\ \ -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{4} \\ 1, & якщо\ \ x=\frac{\pi}{4} \\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & якщо\ \ \frac{\pi}{4}<x\le\pi \end{cases};$

1.11.2. При яких значеннях A і B функція $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & якщо\ \ x\le -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x+B, & якщо\ \ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & якщо\ \ x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$

є неперервною? Побудувати її графік.

1.11.3. Довизначити функцію $f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$ в точці розриву так, щоб вона стала неперервною.

1.11.4. Чи можна функцію $f(x)=arctg\,\frac{1}{x-2}$ довизначити в точці $x=2$ так, щоб вона стала неперервною?

1.11.5. При якому значенні A функція $f(x)=\begin{cases} x+1, & якщо\ \ x\le 1 \\ 3-Ax^2, & якщо\ \ x>1 \end{cases}$ є неперервною?

1.11.6. Чи можна функцію $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$ довизначити в точці $x=1$ так, щоб вона стала неперервною?

1.11.7. Довизначити функцію $f(x)=(1=x)^{\frac{1}{x}}$ в точці $x=0$ так, щоб вона стала неперервною.

Частина 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

§1. Похідна функції її властивості і способи обчислення

Означення. Похідною функції однієї змінної $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називають число

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Зазначимо, що похідна функції $f(x)$ може бути обчислена тільки в тих точках $x = x_0$, де ця функція визначена, до того ж, функція має бути визначена ще й у деякому околі цієї точки, для того, щоб можна було обчислити $f(x_0 + \Delta x)$;

якщо обчислено значення похідної функції $y = f(x)$ в усіх точках, де це можливо, то визначається нова <u>похідна</u> функція, яка може позначатися як y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$.

Приклад. Обчислимо похідну функції $y = e^{x^2}$. Оскільки цю функцію визначено для всіх значень x, то маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x+\Delta x)^2} - e^{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2} - e^{x^2}}{\Delta x} = e^{x^2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x(2x+\Delta x)} - 1}{\Delta x} =$$

$$= e^{x^2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x(2x+\Delta x)} - 1}{e^{\Delta x(2x+\Delta x)}}(2x + \Delta x) = e^{x^2} \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = e^{x^2} \cdot 2x$$

Має місце наступна таблиця похідних основних елементарних функцій:

$(C)' = 0$;

$(\mathrm{x}^a)' = ax^{a-1},\ a \in R$;

$(\mathrm{x}^a)' = a^x \ln a,\ a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$;

$(\mathrm{e}^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;

$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;

$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

$(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

Мають місце наступні правила диференціювання:

Сталий множник виноситься за знак похідної: $(Cu)' = C \cdot u'$.

Похідна суми є сума похідних: $(u+v)' = u' + v'$, $(u+v+w)' = u' + v' + w', \ldots$

Похідна добутку знаходиться за формулою: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Похідна частки знаходиться за формулою $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

Похідна складної (складеної) функції визначається $(u(\mathrm{v}(x)))' = \mathrm{v}'(x) \cdot u'(t)\big|_{t=v(x)}$

Приклад. Знайдемо похідну функції $y = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1)$.

Оскільки дана функція є алгебраїчною сумою двох функцій, то

$$y' = \left[(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]' - \left[2\ln(\sqrt{x}+1)\right]',$$

при цьому

$$\left[(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]' = (x+1)'\operatorname{arctg}\sqrt{x} + (x+1)\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{x} + (x+1)\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(диференціюється добуток функцій з врахуванням того, що $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ - складна функція, для неї u (зовнішня - $\operatorname{arctg}(\cdot)$), v (внутрішня - $\sqrt{x}$).

$\left[2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]' = 2\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)' = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ (виносимо сталий множник за знак похідної та враховуємо складеність $\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$ - зовнішня $u = \ln(\cdot)$, внутрішня $v = \sqrt{x}+1$). Таким чином $y' = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Правило логарифмічного диференціювання:

$$y' = y\cdot(\ln y)'$$

Це правило э корисним при диференціюванні функцій, які включають добуток більш ніж двох співмножників, та так званих “показникові-степеневих” функцій.

Приклад. Знайдемо похідну $y = \sqrt{x\cdot\ln x\cdot\sin x}$.

Маємо $\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln\left(x\cdot\ln x\cdot\sin x\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\ln x + \ln\sin x\right)$

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln\left(x\cdot\ln x\cdot\sin x\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\ln x + \ln\sin x\right),$$

$$y' = y\left(\ln y\right)' = \frac{\sqrt{x\ln x\sin x}}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln x} + \operatorname{ctg} x\right)$$

Приклад. Знайдемо похідну $y = \left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

Маємо $\ln y = \ln\left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{ctg} x\cdot\ln\operatorname{tg} x$,

$$\left(\ln y\right)' = \left(\operatorname{ctg} x\right)'\ln\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x\cdot\left(\ln\operatorname{tg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\ln\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1-\ln\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x};$$

$$y' = y\left(\ln y\right)' = \left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{1-\ln\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}.$$

Правило диференціювання оберненої функції: Нехай $y = f(x)$ є функція, що задовольняє умовам існування оберненої до неї $x = \varphi(y)$, тоді $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Приклад. Нехай $y = \operatorname{sh} x$, для такої функції існує обернена $y = \operatorname{arcsh} y$,

Тоді $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arcsh} y\right)}$, але $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}$,

тобто $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\left(\operatorname{arcsh} y\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

Правило диференціювання параметричної заданої функції.

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично співвідношеннями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

тоді її похідна задається параметрично співвідношеннями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$

Приклад. Знайдемо похідну функції $y = f(x)$, заданою системою співвідношень

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

Маємо $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\sin^3 t\right)'}{\left(\cos^3 t\right)'} = \dfrac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 x\left(-\sin t\right)} = \operatorname{tg} t \end{cases}$.

Правило диференціювання неявно заданої функції $y = f(x)$.

Нехай функцію $y = f(x)$ задано неявно співвідношенням $\varphi(x, y) = 0$, то її похідну можна знайти шляхом диференціювання обох частин цієї рівності. При цьому вважаємо, що $y = y(x)$ та виражаємо з отриманого рівняння $\dfrac{dy}{dx}$

Приклад. Знайдемо похідну функції $y = y(x)$ заданої неявно співвідношенням

$e^{x+y} - y + 3x = 0$.

Диференціюючи обидві частини рівності, маємо

$$(e^{x+y} - y + 3x)'_x = (0)'_x$$

$$e^{x+y} \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$e^{x+y} + e^{x+y} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 + e^{x+y}}{e^{x+y} - 1}$$

Вправи та задачі

2.1.1. Користуючись означенням похідної обчислити похідні функцій:

1) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;
2) $y = \operatorname{tg}^2 x$;
3) $y = \sin^2 x$;
4) $y = \arcsin x$;
5) $y = \operatorname{arctg} x$;

6) $y=\ln(x^2-2)$;
7) $y=\arccos\sqrt{x}$;
8) $y=\sqrt{x}$;
9) $y=\arcsin^2 x$;
10) $y=\ln(x+1)$.

2.1.2. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні функцій:

1) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^3}$;
2) $y=\sin 3x$;
3) $y=\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,4x$;
4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;
5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;
6) $y=\sqrt{\sin 3x+\cos 2x}$;
7) $y=e^x(\sin x+\cos x)$;
8) $y=\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{\arcsin x}$;
9) $y=\ln^2\cos^3(5x+3)$;
10) $y=e^{\mathrm{arctg}^2\sqrt{x+5}}$;
11) $y=\dfrac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{e^{\mathrm{arctg}^3 x}+4}$;
12) $y=\ln\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$;
13) $y=e^{\arcsin\sqrt{x}}(\sqrt[3]{5x^2}+1)^2$;
14) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x\sqrt{3}}{1+x^2}$;
15) $y=\sqrt[3]{\dfrac{e^{\sin x+\cos x}}{(5x^2+1)^4}}$;
16) $y=x^x$;
17) $y=\sqrt[3]{\dfrac{e^{-\mathrm{arctg}\,x}(x^2-1)(x+2)^3}{x-2}}$;
18) $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$;
19) $y=\sqrt[x]{(2x\cos x+3)^2}$;
20) $y=x^{x^2}$;
21) $y=(x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$;
22) $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-2)^3(x+5)}{3^{2x}(x+4)^5}}$;

23) $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x-1)^3(x-2)^4}{(x+7)(x^2+4)}}$;

24) $y=\dfrac{(e^x\sin^2 x)5^{3x}}{(\arcsin x)(\operatorname{arctg}^2 4x)}$.

2.1.3. Знайти значення похідних функцій у вказаних точках:

1) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ *при* $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4},\ x=\sqrt{3}$;

2) $y=\dfrac{x\ln x}{e^{x^2}}$ *при* $x=1,\ x=2$;

3) $y=\arcsin\sqrt{x^2-\dfrac{1}{2}}$ *при* $x=1,\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $y=e^x\sin\sqrt{x^2+1}$ *при* $x=0$.

2.1.4. Довести що функція $y(x)$ задовольняє рівняння (*) .

1) $y=3+\dfrac{5}{x}$ $(*):\ xy'+y=3$;

2) $y=x\sin x$ $(*):\ y'-x\cos x=\sin x$;

3) $y=e^x(x+1)$ $(*):\ y'-y=e^x$;

4) $y=e^{-x}x$ $(*):\ xy'=(1-x)y$;

5) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}x$ $(*):\ xy'=(1-x^2)y$;

6) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}x$ $(*):\ xy'=(y\ln x-1)y$.

2.1.5. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ функцій $y(x)$, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^4 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+2} \\ y=\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right)^2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\sqrt[3]{t-1} \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{(t+1)^2+1} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{(t+1)^2+1}} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \end{cases}$;

2.1.6. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ при $t=1$, якщо $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$.

2.1.7. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$, якщо $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$.

2.1.8. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ від неявно заданої функції $y(x)$:

1) $x + y = \sin xy;$
2) $\operatorname{tg} y = xy;$
3) $\ln y + \dfrac{x}{y} = 5;$
4) $e^{x+y} = \operatorname{arctg} xy;$
5) $\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y};$
6) $y^3 = \dfrac{x+y}{x-y};$
7) $y^x = x^y.$

2.1.9. Знайти значення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ неявно заданої функції $y(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

1) $(x+y)^3 = 27(x-y), \quad M(2,1);$
2) $ye^y = e^{x+y}, \quad M(0,1);$
3) $y^2 = x + \ln\dfrac{y}{x}, \quad M(1,1).$

§2. Геометричний сенс похідної функції

Якщо зобразити на координатній площині $x0y$ графік функцій $y = y(x)$, то значення похідної $f'(x_0)$ для довільного x_0 являтиме собою кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу) дотичної до цього графіка в точці $M_0\ \left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ до вісі Ox.

Рівняння дотичної: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Рівняння нормалі: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Приклад. Знайдемо рівняння дотичної та нормалі до графіка функцій $y = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Маємо $y(x_0) = -5,\quad y'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2-\sqrt{x}\right) - \left(2+\sqrt{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$

$y'\left(x_0\right) = \dfrac{2}{3}$

отже, рівняння дотичної $y + 5 = \dfrac{2}{3}\left(x-3\right)$ або $y = \dfrac{2}{3}x - 7$;

рівняння нормалі $y + 5 = -\dfrac{3}{2}\left(x-3\right)$ або $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Вправи та задачі

2.2.1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих у вказаних точках:

1) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3,\quad M(-2{,}5)$;
2) $y = \sqrt[3]{x-1},\quad M(1{,}0)$;
3) $y = tg2x,\quad M(0{,}0)$;
4) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases},\quad при\ t = \dfrac{\pi}{2}$;
5) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases},\quad при\ t = \dfrac{\pi}{4}$;
6) $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases},\quad при\ t = 1$;
7) $y^4 = 4x^4 + 6xy,\quad M(1{,}2)$;
8) $x^2(2x - y) = 2x - y^3,\quad M(1{,}1)$;

9) $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 8, \quad M(8,8).$

2.2.2. Які кути утворюють дотичні до кривої $y = x - x^2$ в точках з абсцисами $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$?

2.2.3. Знайти кут між графіками функцій $y = \sin x$ та $y = \sin 2x$ і віссю Ox в початку координат.

2.2.4. Під яким кутом крива $y = e^{\frac{x}{2}}$ перетинає пряму $x = 2$?

2.2.5. Знайти точки, в яких дотична до кривої $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ перетинає вісь абсцис.

2.2.6. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 7x + 3$ паралельна прямій $5x + y - 3 = 0$?

2.2.7. Знайти рівняння параболи $y = x^2 + bx + c$, яка дотикається до прямої $y = x$ в точці (1,1).

2.2.8. В якій точці кривої $y^2 = 2x^3$ дотична перпендикулярна прямій $4x - 3y + 2 = 0$?

2.2.9. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка паралельна заданій прямій:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad 4x + y = 2;$
b) $f(x) = x^2 - 7x + 3, \quad 5x + y = 3.$

2.2.10. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка перпендикулярна заданій прямій:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x + 8y - 2 = 0;$
b) $f(x) = -x^2 + 7x + 16, \quad x + 3y - 6 = 0.$

2.2.11. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку $M(x, y)$:

a) $f(x) = -x^2 - 5x - 6, \quad M(-1,-1);$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad M(2,-5).$

2.2.12. Скласти рівняння спільних дотичних до графіків функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$:

a) $f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = -x^2 + 2x - 8;$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 5, \quad g(x) = -x^2 + 4x.$

§3. Диференціал функції

Означення. Функція $y = y(x)$ називається диференційовною в точці $x = x_0$, якщо її приріст в цій точці має вигляд

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = A \cdot \Delta x + \alpha\left(x_0, \Delta x\right) \cdot \Delta x \text{ причому } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha\left(x_0, \Delta x\right) = 0.$$

В цьому випадку головна, лінійна відносно приросту аргумента, частина приросту функції називається диференціалом (першим) диференціалом функції: $dy = A \cdot \Delta x$.

Диференціалом може позначатися також df, $A = f'\left(x_0\right)$.

Має місце наступна формула наближених обчислень за допомогою першого диференціала

$$y\left(x_0 + \Delta x\right) \approx y\left(x_0\right) + dy = y\left(x_0\right) + y'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Приклад. Обчислимо наближено $\sqrt[3]{1,003}$. Запровадивши до розгляду функцію $y = \sqrt[3]{x}$ покладемо $x_0 = 1$.

Тоді $y\left(x_0\right) = 1, \quad y'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad y'(x_0) = \frac{1}{3}.$

Таким чином, при $\Delta x = 0,003$ отримуємо

$y\left(x_0 + \Delta x\right) \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,003 = 1,001$ тобто, $\sqrt[3]{1,003} \approx 1,001.$

Вправи та задачі

2.3.1. Знайти диференціали функцій:

1) $y = e^x(5 - x^2);$
2) $y = tg^2 x - \sqrt{\cos x};$
3) $y = \ln \operatorname{arctg} x;$
4) $y = (x-1)^x;$
5) $y = \frac{\arcsin x}{x^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x};$
6) $y = \sqrt[3]{x} + x \log_5 \operatorname{tg} x.$

2.3.2. Знайти диференціал функції в точці $M(x_0, y_0)$:

1) $x^3 + y^3 + 3xy - 15 = 0, \qquad M(1,2);$
2) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \qquad M(0,1).$

2.3.3. Обчислити наближено за допомогою першого диференціала значення виразів:

1) $\sqrt[3]{135}$;
2) $(0{,}95)^{10}$;
3) $\sin 6^{\circ}$;
4) $\operatorname{arctg} 1{,}03$;
5) $\ln 1{,}3$;
6) $\arcsin 0{,}51$.

§4. Похідні вищих порядків

похідні функції $y = f(x)$, вищих порядків визначаються індуктивно, тобто

- похідна другого порядку $\left(y'', f''(x), \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \dfrac{d^2 f}{dx^2} \right)$ є похідна $y' \left(f', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx} \right)$;
- похідна третього порядку $\left(y''', f'''(x), \dfrac{d^3 y}{dx^2}, \dfrac{d^3 f}{dx^3} \right)$ є похідна $y'' \left(f'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \dfrac{d^2 f}{dx^2} \right)$ і так далі.

Приклад. Знайдемо похідну третього порядку функції $y = \ln \sin x$. Маємо

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

$$y'' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y''' = \left(-\sin^{-2} x\right)' = -(-2)\sin x \cdot \cos x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

Для позначення похідних вищих порядків використовується також позначення $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ або відображення порядку похідної римськими цифрами, наприклад $\dfrac{d^{10} y}{dx^{10}} = y^{(10)}$.

При знаходженні похідних вищого порядку функцій, заданих параметрично, використовують наступний алгоритм:

якщо $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{dy^n}{dx^n} = \psi(t) \end{cases}$, то похідна $(n+1)$-го порядку визначається системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{dy^{n+1}}{dx^{n+1}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$$

Приклад. Нехай функцію $y=y(x)$ визначено співвідношеннями $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, тоді для першої похідної

$$\begin{cases} x=\cos t \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} x \end{cases}, \text{ для другої } \begin{cases} x=\cos t \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t}=-\dfrac{1}{\sin^3 t} \end{cases}$$

для третьої $\begin{cases} x=\cos t \\ \dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{\sin^3 t}\right)'}{-\sin t}=-\dfrac{3\cos t}{\sin^5 t} \end{cases}$ і так далі.

При знаходженні похідних вищих порядків, заданих неявно, використовують послідовно той самий прийом, що і при знаходженні першої похідної.

Приклад. Нехай функцію задано співвідношенням $e^{x-y}=x+y$, тоді послідовно $e^{x-y}(1-y')=1+y'$, тому $y'=\dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$, $\quad y''=\dfrac{e^{x-y}(1-y')\left(e^{x-y}+1\right)}{\left(e^{x-y}+1\right)^2}-\left(e^{x-y}+1\right)e^{x-y}(1-y')=$

$$=\frac{2e^{x-y}(1-y')}{\left(e^{x-y}+1\right)^2}=\frac{4e^{x-y}}{\left(e^{x-y}+1\right)^3} \text{ і так далі.}$$

Мають місце загальні формули для похідних довільних порядків деяких основних елементарних функцій:

$\left(a^x\right)^{(n)}=a(a-1)...(a-1+1)x^{a-n}$, якщо $a\in N$, то всі похідні, порядку вищого за a рівні нулю;

$\left(a^x\right)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$;

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

При знаходженні похідних вищих порядків добутків функцій використовують формулу Лєйбніца:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^k\cdot v^{(n-k)}$$

Приклад. Знайдемо похідну восьмого порядку функції $y=\left(x^2+1\right)\cos x$.

Маємо $u = x^2 + 1, \quad v = \cos x$. При цьому $u' = 2x, \quad u'' = 2, \quad u''' = u^{(4)} = u^{(5)} = \ldots = 0,$

за формулою Лєйбніца:

$$y^{(8)} = C_8^0\left(x^2+1\right)\left(\cos x\right)^{(8)} + C_8^1\left(x^2+1\right)'\left(\cos x\right)^{(7)} + C_8^2\left(x^2+1\right)''\left(\cos x\right)^{(6)} + \ldots =$$

$$= \left(x^2+1\right)\left(\cos x + 8\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8!}{1!\cdot 7!}\cdot x\cos\left(x + 7\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 2\cos\left(x + 6\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(x^2+1\right)\cos x + 16x\sin x - 56\cos x = \left(x^2 - 55\right)\cos x + 16x\sin x.$$

Вправи та задачі

2.4.1. Знайти другі похідні функцій:

1) $y = (x^3 - 2)^4;$
2) $y = e^x \sin 2x;$
3) $y = 4^x (x+1);$
4) $y = x^x;$
5) $y = (\ln x)^x;$
6) $y = \ln \operatorname{tg} x.$

2.4.2. Знайти другі похідні функцій, заданих неявно:

1) $3xy = x^3 + y^3;$
2) $e^x + x = e^y + y;$
3) $x = \cos(x+y);$
4) $2px = y^2;$
5) $y = \sin(x+y);$
6) $y - x = \ln(x+y).$

2.4.3. Знайти похідні другого порядку $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases};$

2) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases};$

3) $\begin{cases} x = t^6 \\ y = \ln t \end{cases};$

4) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos 2t \end{cases};$

5) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$.

2.4.4. Знайти похідні $n-го$ порядку для функцій:

1) $y = 3^{-x}$;
2) $y = \ln x$;
3) $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$;
4) $y = \dfrac{x-5}{x^2-4x+3}$;
5) $y = \sin 5x$;
6) $y = \sin x \sin 2x$.

2.4.5. Використовуючи формулу Лєйбніца обчислити похідні $n-го$ порядку для функцій:

1) $y = (x^3-2x+5)\sin x, \qquad n = 10$;
2) $y = (x^2+4x-3)2^x, \qquad n = 8$;
3) $y = x\ln(x^2-3x+2), \qquad n = 6$.

§5. Правило Лопіталя (Лопіталя-Бернулі) розкриття невизначеностей

Нехай треба знайти $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, тобто маємо невизначеність типу$\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Тоді, якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні та диференційовні в деякому околі точки x_0, то, за умови існування $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, має місце рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\dfrac{x^2}{2}}{e^x-e^{-x}-2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$. Оскільки функції в чисельнику та знаменнику неперервні та 64иференційовані, розглянемо границю відношення їх похідних:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Аналогічно, знову розглянемо границю відношення похідних $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$,

Повторивши ще раз цю процедуру, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{e^x - e^{-x}} = \frac{0}{2} = 0$.

У стислому записі розв'язок вказаної задачі виглядає наступним чином

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{e^x - e^{-x} - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{e^x - e^{-x} - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(\Lambda)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{e^x - e^{-x}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Аналогічним способом можуть "розкриватися" і невизначеності типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Приклад. Обчислимо границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\operatorname{ch} x - 1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x} : \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}.$$

Розглянемо границі кожного з співмножників окремо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x}{\cos x} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = 1$, що випливає з попереднього. Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\operatorname{ch} x - 1)} = 1$

Це правило можна використовувати і для невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, які виникають при прямуванні аргументу x до ∞, $(+\infty, -\infty)$.

Приклад. Знайдемо границю

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{6x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\Lambda)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x} = \left(\frac{6}{\infty}\right) = 0.$$

Вправи та задачі

2.5.1. Використовуючи правило Лопіталя, обчислити границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^x + 2}{x^2 + 1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(x^2+1)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x - 1})$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\operatorname{arcctg} x}{x})^{\frac{1}{x}}$.

§6. Формули Тейлора та Маклорена

Означення Формулою Тейлора n-го порядку для функції $y = f(x)$ в околі точки $x = x_0$ називають рівність

$y = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0)$, де

$P_n(x, x_0) + = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{\text{n!}}(x - x_0)^n$ - многочлен Тейлора n-го степеня для функції $y = f(x)$ в околі точки $x = x_0$;

$R_n(x, x_0)$ - залишковий член формули Тейлора n-го степеня для функції $y = f(x)$ в околі точки $x = x_0$.

Ця формула має наступні важливі властивості:

- значення функції $y = f(x)$ та її похідних до n-го порядку, включно в точці $x = x_0$ співпадають зі значеннями її многочлена Тейлора та відповідних його похідних в цій точці.
- залишковий член формули Тейлора за умови існування та неперервності $(n+1)$-ї похідної функції $y = f(x)$, є нескінченно малою не нижче ніж $(n+1)$-го порядку відносно $(x - x_0)$;
- залишковий член, за умови справедливості попереднього твердження, може бути записаний у формі Лагранжа

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\text{c})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, де $c = x_0 + \Theta(x - x_0), \quad 0 < \Theta < 1$.

Формула Тейлора використовується для дослідження поведінки функцій та наближеного обчислення її значень із наперед заданою точністю.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора називається формулою Маклорена, а многочлен Тейлора – многочленом Маклорена. При цьому для $y=\sin x,\quad x_0=0,\quad T_{2n+1}(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

для $y=\cos x,\quad x_0=0,\quad T_{2n}(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$;

для $y=e^x,\quad x_0=0,\quad T_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$;

для $y=\ln(1+x),\quad x_0=0,\quad T_n(x)=x-\dfrac{x^2}{2!}+...+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$;

для $y=(1+x)^\alpha,\quad x_0=0,\quad T_n(x)=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+...+\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n}{n!}$;

Приклад. Запишемо формулу Маклорена n-го порядку для функції $y=2^x$.

Зауважимо, що $y'(x)=2^x\ln 2,\quad y''(x)=2^x\ln^2 2,\ ...\ ,y^{(n)}(x)=2^x(\ln 2)^n$.

Тому $y'(0)=\ln 2,\quad y''(0)=\ln^2 2,\ ...\ ,y^{(n)}(0)=\ln^n 2$,

$$T_n(x,0)=1+\ln 2\cdot x+\frac{\ln^2 2}{2}\cdot x^2+...+\frac{\ln^n 2x^n}{n!},$$

$$R_n(x,0)=\frac{2^c}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},\quad c=\Theta x,\quad \Theta\in(0;1).$$

Приклад. Обчислимо наближено значення функції $\cos^2 x$ при $x=0,01$ з точністю до 10^{-6}.

Зауважимо, що $y(x)=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x,\quad y'(x)=-\sin 2x,\quad y''=-2\cos 2x,...$

$$...,\ y^{(n)}(x)=2^n\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-2,...$$

$$...,\ y^{(n)}(0)=2^n\cos\frac{\pi n}{2},\quad R_n(x,0)=\frac{2^{n+1}\cos\left(2c+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Поклавши $x=0,01$, маємо, що $R_n(0;0,01)=\dfrac{2^{n+1}\cos\left(2c+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)(0,01)^{n+1}}{(n+1)!}$,

Тому

$$\left|R_1(0;0,01)\right| \le \frac{2^2}{2!}\cdot 0,01^2 = 0,0002$$

$$\left|R_2(0;0,01)\right| \le \frac{2^3}{3!}\cdot 0,01^3 = 0,00000133...$$

$$\left|R_3(0;0,01)\right| \le \frac{2^4}{4!}\cdot 0,01^4 = 0,0000000083...$$

Таким чином, поклавши $\cos^2 0,01 \approx T_3(0,01;0) = 1 - \frac{2}{2!}\cdot(0,01)^2 = 0,999999$ отримуємо значення вказаної функції з необхідною точністю.

Вправи та задачі

2.6.1. Розкласти за формулою Маклорена до $o(x^n)$:

1) $y = \frac{1}{x+5}$;
2) $y = \frac{1}{x^2+x-2}$;
3) $y = \frac{x^2+1}{x-2}$;
4) $y = x\sin^2 x$;
5) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$;
6) $y = \ln(x^2-3x+2)$.

§7. Повне дослідження функції однієї змінної та побудова її графіку

Якщо функція неперервна та має похідну на інтервалі (a,b), то вона зростає при $f'(x) \ge 0$, спадає при $f'(x) \le 0$. Таким чином, визначення проміжків монотонності функції вимагає

- знаходження області визначення функції;
- знаходження похідної функції;
- розв'язання нерівностей $f'(x) \ge 0$ та $f'(x) \le 0$ для x, що належать області визначення функції.

Приклад. Знайдемо проміжки монотонності функції $y = x^2\sqrt{1-x}$. Область визначення - $x \in (-\infty;1]$. Похідна $y' = 2x\sqrt{1-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x-5x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{5x\left(\frac{4}{5}-x\right)}{2\sqrt{1-x}}$;

$y' \ge 0$ при $x \in \left[0;\frac{4}{5}\right]$- функція зростає;

$y' \le 0$ при $x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{5}; 1\right)$- функція спадає;

Означення. Функція має локальний внутрішній максимум або мінімум у точці $x = x_0$

якщо вона визначена в цій точці і деякому її околі, причому $f(x) < f(x_0)$ або $f(x) > f(x_0)$ для всіх x з цього околу, відмінних від x_0.

Необхідною умовою екстремальності точки $x = x_0$ для функції $y = f(x)$ є рівність нулю (стаціонарна точка) або розривність (критична точка) її похідної $f'(x)$.

Перша достатня умова наявності екстремуму функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ полягає в тому, що

- для точки максимуму $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$;
- для точки мінімуму $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$;

Іншою формою достатньої умови існування екстремуму є наступна:

- якщо для функції $y = f(x)$ існують неперервні похідні, причому

$f^{(n)}(x_0) \ne 0,\ f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$ то при парному n маємо в точці x_0 максимум для $f^{(n)}(x_0) < 0$ і мінімум для $f^{(n)}(x_0) > 0$, у випадку непарного n в точці $x = x_0$ екстремуму немає.

Приклад. Знайти точки екстремуму функції $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Знайдемо спочатку область визначення функції: $\frac{x-1}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1^2)} > 0$$

для всіх з області визначення, функція екстремумів не має.

Приклад. Знайти точки екстремумів функції $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x.$

Ця функція визначена при $x \in R$. Її похідна $y' = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ також визначена при $x \in R$. Тому функція може мати лише стаціонарні точки: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x_k = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z.$

Знайдемо другу похідну $y''=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ і її значення в стаціонарних точках:

$$y''(x_k)=-\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k\right)+\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k\right)=-(-1)^k\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}(-1)^k\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=(-1)^k\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=2\cdot(-1)^k.$$

Таким чином, при парних значеннях k друга похідна $y''(x_k)>0$ і тому ці точки є точками мінімумів, при непарних k друга похідна $y''(x_k)<0$ і ці точки є точками максимумів.

Означення Крива лінія, яка є графіком функції $y=f(x)$ називається опуклою вгору (вниз) на деякому інтервалі, якщо всі її точки лежать нижче (вище) довільної дотичної на цьому інтервалі.

Для двічі диференційованої функції її графік є опуклим вгору, якщо $f''(x)<0$ і опуклим вниз при $f''(x)>0$.

Точки, в яких графік функції змінює характер опуклості, називаються точками перегину.

Приклад. Знайти точки перегину і проміжки опуклості вгору і вниз для графіку функції $y=x-\sin x$.

Маємо $y'=1-\cos x,\ y''=\sin x$. Оскільки $\sin x>0$ при $x\in(2\pi k,\pi+2\pi k),k\in Z$, то графік функції опуклий вниз на цих проміжках, при $\sin x<0\Leftrightarrow x\in(\pi+2\pi k,2\pi+2\pi k),k\in Z$, маємо проміжки опуклості вгору.

Таким чином, точки перегину є $x_k=\pi k,k\in Z$.

Означення. Асимптотою кривої з нескінченною гілкою (тобто такої, для якої можуть нескінченно зростати абсциси або ординати належних їй точок) називається пряма, відстань до якої прямує до нуля при прямуванні координати точки на кривій до нескінченності.

Розрізняють вертикальні асимптоти (паралельні осі ординат) та похилі. Частинним випадком похилої асимптоти є горизонтальна (паралельна осі абсцис).

Означення. Пряма $x=x_0$ називається вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$,

якщо хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ є нескінченною.

Означення. Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ на $+\infty$ (відповідно, на $-\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$ (відповідно $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$).

Теорема. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ на $+\infty$ (відповідно, на $-\infty$), якщо існують і є скінченними наступні дві границі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$.

Приклад. Визначити асимптоти графіка функції $y=\frac{x}{\sin x}$.

Функція $y=\frac{x}{\sin x}$ має вертикальні асимптоти $x=\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$, оскільки при прямуванні аргументу x до цих значень вона прямує до нескінченності.

Якщо область визначення функції $y = f(x)$необмежена (x може прямувати до $-\infty$ або$+\infty$), то графік такої функції перевіряється на наявність похилих асимптот наступним чином:

1) знаходиться границя $k=\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}$ і,якщо вона існує, то
2) шукають границю , у випадку , коли існує і вона, маємо похилу асимптоту графіка $y = kx + b$ при $x\to+\infty(-\infty)$.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y=\frac{x^2}{x+1}$.

Оскільки $y\to\infty$ при $x\to-1$, то маємо вертикальну асимптоту $x=-1$.

Перевіримо наявність похилої асимптоти у графіка при $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x+1)x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1,\ b=\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2}{x+1}-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=-1,$$

тобто $y=x-1$є похилою асимптотою.

Аналогічно при $x\to+\infty$ маємо $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x+1)x}=1,\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2}{x+1}-x)=-1$, тобто пряма

$y=x-1$ є асимптотою графіка функції як при $x\to-\infty$так і при $x\to+\infty$.

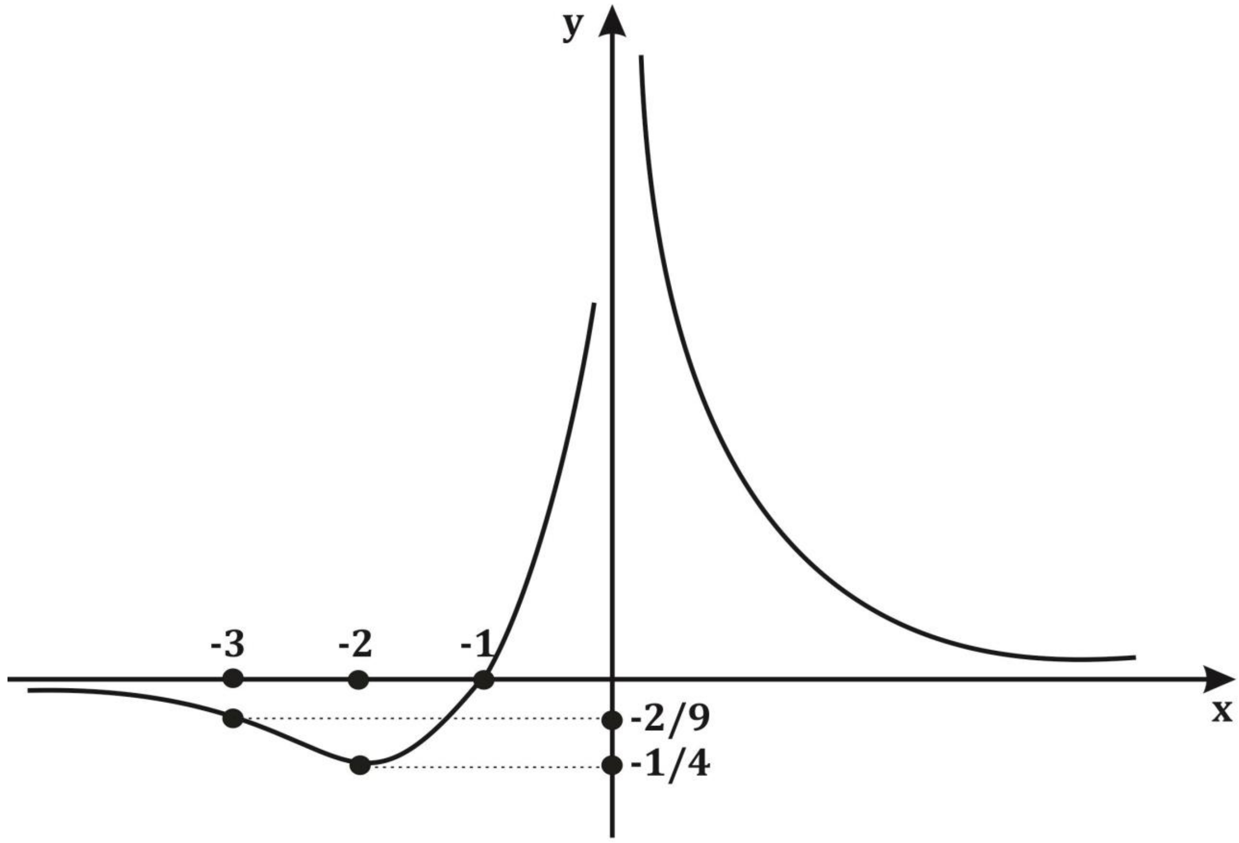
Повне дослідження функції та побудова її графіка.

Повне дослідження функції та побудова її графіка здійснюється за такою схемою:

1) знаходять область визначення функції; область значень (при можливості); досліджують на парність, непарність, періодичність; визначають точки перетину графіка функції з вісями координат; знаходять точки розриву функції,визначають їх тип шляхом обчислення односторонніх границь і встановлюють факт наявності або відсутності вертикальних асимптот; досліджують функцію на наявність у її графіка похилих асимптот;
2) обчислюють першу похідну функції і за її допомогою знаходять інтервали монотонності, стаціонарні та критичні точки, екстремуми функції;
3) обчислюють другу похідну і за її допомогою знаходять проміжки опуклості графіка вгору або вниз та точки перегину;
4) на координатну площину наносяться асимптоти та знайдені вище точки графіка, які з'єднуються з урахуванням отриманих вище результатів дослідження.

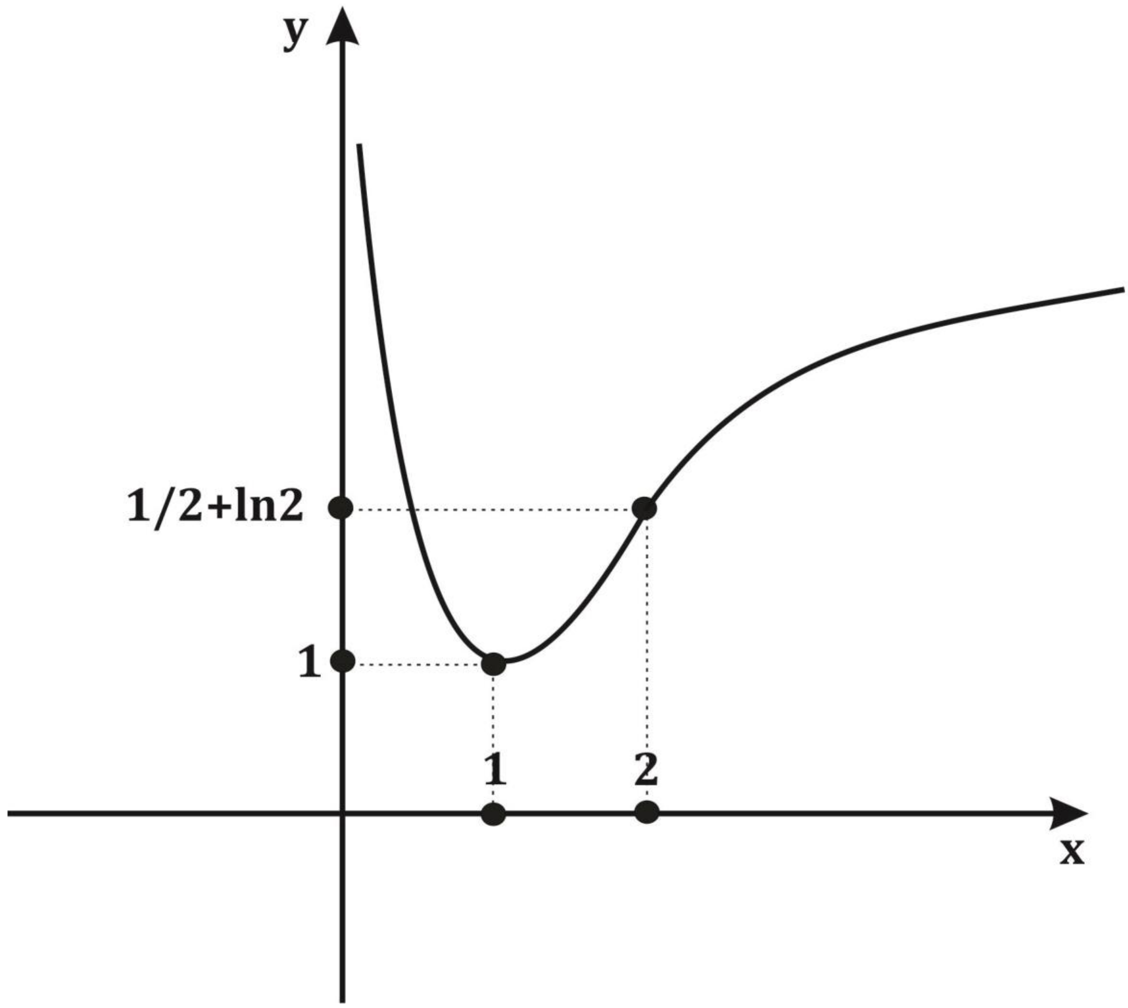
Приклад. Дослідити функцію $y=\frac{x+1}{x^2}$ та побудувати її графік.

1) Область визначення функції $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; функція не є ні парною, ні непарною, ні періодичною; $y=0$ при $x=-1$; $y(0)$ не існує; $x=0$ є точкою розриву другого роду ($\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x+1}{x^2}=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x+1}{x^2}=+\infty$), а це означає що пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою графіка функції; для знаходження похилих асимптот $y=kx+b$ обчислюємо $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x^2x}=0=k$ і $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{x+1}{x^2}-0x)=0=b$, звідки робимо висновок, що пряма $y=0$ є похилою (в даному випадку горизонтальною) асимптотою графіка функції;
2) $y'=\frac{-x-2}{x^3}$; функція зростає на проміжку $(-2,0)$ і спадає на $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$; $x=-2$ є точкою мінімуму і $y_{\min}=y(-2)=-\frac{1}{4}$;
3) $y''=\frac{2x+6}{x^4}$; графік функції опуклий вниз на проміжках $(-3,0)\cup(0,+\infty)$ і опуклий вгору на проміжку $(-\infty,-3)$; точка $x=-3$ є точкою перегину графіка і $y(-3)=-\frac{2}{9}$.
4) Остаточно рис.



Приклад. Дослідити функцію $y=\frac{1}{x}+\ln x$ та побудувати її графік.

1) $D_f=(0,+\infty)$; функція не є ні парною, ні непарною, ні періодичною; при $x=0$ функція невизначена, але $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1+x\ln x}{x}$, при цьому $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0+0}(-x)=0$, отже $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1+x\ln x}{x}=+\infty$, тобто пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою графіка функції; похилих асимптот графік функції не має ($k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{1}=0,\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=\infty$);
2) $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$; функція зростає на проміжку $(1,+\infty)$ і спадає на $(0,1)$; $y_{\min}=y(1)=1$;
3) $y''=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{2-x}{x^3}$; графік функції опуклий вниз на проміжку $(0,2)$ і опуклий вгору на $(2,+\infty)$, точка $x=2$ є точкою перегину і $y(2)=\frac{1}{2}+\ln 2$;
4) Остаточно рис.



Вправи та задачі

2.7.1. Знайти найбільше M і найменше m значення функцій на вказаних відрізках:

1) $y = -3x^4 + 6x^2, \qquad [-2,2];$
2) $y = \frac{x-1}{x+1}, \qquad [0,4];$
3) $y = \frac{1-x-x^2}{1+x-x^2}, \qquad [0,1];$
4) $y = 2\sqrt{x} + x, \qquad [0,4];$
5) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, \qquad [0,1];$
6) $y = \frac{1-x}{x+1}, \qquad [0,1].$

2.7.2. Знайти екстремуми функцій:

1) $y = x^2 - 6x + 8;$
2) $y = x^2(x-4);$
3) $y = x^2 e^{-x};$
4) $y = \sin x + \cos x;$
5) $y = e^x + e^{-x};$

6) $y = -x^2 \sqrt[5]{(x-2)^2}$;
7) $y = \sin x - x$;
8) $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

2.7.3. Визначити проміжки монотонності функцій:

1) $y = 1 - 4x - x^2$;
2) $y = x^2(x-3)$;
3) $y = \dfrac{x}{x-2}$;
4) $y = \sin x + x$;
5) $y = x \ln x$;
6) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

2.7.4. Визначити інтервали опуклості і точки перегину графіків функцій:

1) $y = 4 + 12x + 6x^2 + x^3$;
2) $y = \dfrac{1}{x+3}$;
3) $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$;
4) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$;
5) $y = x^2 \ln x$;
6) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

2.7.5. Визначити асимптоти кривих:

1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$;
2) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} + x - 2$;
3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$;
4) $y = \dfrac{1}{1-e^x}$;
5) $y = e^{\frac{1}{x}}$;
6) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2\operatorname{arctg} t \end{cases}$.

2.7.6. Виконати повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

2) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$;

3) $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$;

4) $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$;

5) $y=2x+2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

6) $y=\dfrac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$;

7) $y=xe^{-x}$;

8) $y=(2+x^2)e^{-x^2}$;

9) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\dfrac{x}{\ln x}$;

11) $y=(1+x)^2\ln^2(x+1)$;

12) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\ln(x^2-1)$;

13) $y=\dfrac{\sin 2x}{2}+\sin x$;

14) $y=\dfrac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$;

15) $y=x+\sin x$;

16) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

17) $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$;

18) $y=x+2\,\mathrm{arctg}\,x$;

19) $y=\ln\sin x$;

20) $y=\cos x-\ln\cos x$.

Частина 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

§1. Невизначений інтеграл. Основні поняття. Найпростіші методи знаходження невизначених інтегралів

Якщо диференціальне числення пов'язане, перш за все, із задачами знаходження похідних даних функцій, то первинною ціллю інтегрального числення є "відновлення" функцій за відомою її похідною.

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, якщо $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$.

Наприклад, оскільки

а) $(x)'=1$, то $F(x)=x$ є первісна для $f(x)=1$;

б) $(\cos x)'=-\sin x$, то $F(x)=\cos x$ є первісна для $f(x)=-\sin x$.

Зрозуміло, що якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, то $F(x)+C$ - також первісна для функції $f(x)$, тому загальний вигляд первісної для $f(x)$ є $F(x)+C$, де $F(x)$ - довільна первісна (функція, для якої $F'(x)=f(x)$).

Означення 2. Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається множина всіх первісних цієї функції.

Надалі, враховуючи все зазначене вище, будемо писати:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

при цьому, функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, величину C - (довільною) *сталою інтегрування.* Операцію знаходження невизначеного інтегралу називають *інтегруванням функції.*

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$,

(ці властивості дозволяють перевіряти правильність обчислення інтегралів);

3) $\int df(x)=f(x)+C$;

4) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

5) $\int af(x)dx = aF(x) + C$;

6) $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = F_1(x) \pm F_2(x) + C$,

(вказані властивості дозволяють обчислювати невизначені інтеграли функцій, що є похідними відомих функцій, інтегрувати функції, представляючи їх у вигляді лінійних комбінацій більш простих);

7) якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то а) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$;

б) $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = F\left(\varphi(x)\right) + C$

(ці властивості дозволяють обчислювати невизначені інтеграли *вносячи під знак диференціала* вираз $u = ax + b$ або, у більш загальному випадку, $u = \varphi(x)$;

8) якщо $x = \varphi(t), x \in [a,b]$ - диференційована функція , то для неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$$

(ця формула називається *формулою заміни змінної* у невизначеному інтегралі).

1. Інтеграл степеневої функції має вигляд:

а) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, при $\alpha \neq -1$;

б) $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

2. Інтеграл показникової функції має вигляд:

а) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

б) $\int e^x dx = e^x + C$.

3. Інтеграли тригонометричних функцій:

а) $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

б) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,

г) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,

д) $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$,

є) $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$.

4. Інтеграли, що визначаються оберненими тригонометричними функціями:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$;

б) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc}\,tg\,\frac{x}{a} + C = -\mathrm{arc}\,ctg\,\frac{x}{a} + C$.

5. Інтеграли гіперболічних функцій:

а) $\int shxdx = chx + C$;

б) $\int chxdx = shxdx + C$;

в) $\int thxdx = \ln chx + C$;

г) $\int cthxdx = \ln|shx| + C$;

д) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = cthx + C$;

є) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$ ю

6. Деякі інтеграли, пов’язані з логарифмічними функціями:

а) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$,

(такий інтеграл часто називають *високим логарифмом*);

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,

(такий інтеграл часто називають *довгим логарифмом*);

в) $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C$.

Зазначимо, що по-перше, всі вище наведені співвідношення перевіряються диференціюванням відповідно до першої властивості невизначених інтегралів; по-друге, при обчисленні невизначених інтегралів користуються їх властивостями та таблицею інтегралів, де змінна u може бути як незалежною, так і довільною неперервно-диференційовною функцією від x.

Таблиця інтегралів.

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \int e^u du = e^u + C$.

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

5. $\int \cos u du = \sin u + C$.

6. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.

7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$.

8. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} tg \frac{u}{a} + C$.

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

10. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$.

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

12. $\int shudu = chu + C$.

13. $\int chudu = shu + C$.

14. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$.

15. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$.

Приклад. Обчисліть інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$.

Це табличний інтеграл, $I = \int x^{-1/5} dx = \frac{x^{-1/5+1}}{-1/5+1} + C = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} + C$.

При обчисленні інтегралів часто використовують його властивості 5) та 6), представляючи підінтегральну функцію у вигляді лінійної комбінації більш простих функції (*метод розкладу*).

Приклад **.** $\int \frac{(x+1)\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{x^{4/3}} dx = \int \frac{x^{4/3} - 2x + x^{1/3} - 2}{x^{4/3}} dx = \int dx - 2\int x^{-1/3} dx + \int \frac{dx}{x} -$

$-2\int x^{-4/3} dx = x - 2\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + \ln|x| - 2\frac{x^{-4/3+1}}{-4/3+1} + C = x - 3x^{2/3} + \ln|x| + 6x^{-1/3} + C$.

За допомогою *методу підведення під знак диференціала* знаходяться інтеграли вигляду $I = \int f(x) g(x) dx$, якщо

а) відомий $\int g(x) dx = u(x) + C$;

б) $f(x) = \varphi(u(x))$; в) $\int \varphi(u) du$ більш простий, ніж початковий.

Часто *формулу піведення під знак диференціала* записують у вигляді:

$\int f(x) g(x) dx = \int \varphi(u(x)) du(x)$.

Приклад **.** Нехай $I = \int e^{\sin x} \cos x dx$. Вибравши $g(x) = \cos x$, маємо:

а) $\int \cos x dx = \sin x + C$, тобто $u = \sin x$,

б) $\int e^u du = e^u + C$, тоді

в) $\int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + C$.

Приклад **.** $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2x+2}(2x+2) dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x+2\right)^{-1} d\left(x^2+2x+2\right) =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + C$.

Методом інтегрування частинами називається застосування для знаходження інтеграла формули:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

При цьому, на відміну від попереднього, при розгляді інтеграла $I = \int f(x)g(x)dx$

вважається, що

а) відомий $\int g(x)dx = v(x) + C$;

б) похідна $f'(x)$ є більш проста функція, ніж $f(x)$;

в) $\int f'(x)v(x)dx$ більш простий, ніж початковий.

Основними випадками, в яких використовується інтегрування частинами, є наступні:

1. $f(x) = P_n(x), g(x) - \sin\alpha x, \cos\alpha x, a^{\alpha x}$. В цьому випадку маємо зниження степеня многочлена $P_n(x)$.

Приклад. $\int (x+2)2^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x+1, du = dx \\ dv = 2^x dx, v = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C \end{array} \right| = \dfrac{(x+1)2^x}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 2}\int 2^x dx =$

$= \dfrac{(x+1)2^x}{\ln 2} - \dfrac{2^x}{\ln^2 2} + C.$

2. $f(x) = \log_a x, \operatorname{arc}tgx, \operatorname{arc}ctgx, \arcsin x, \arccos x$, а $g(x) = P_n(x)$. В цьому випадку маємо ліквідацію трансцендентності в підінтегральній функції.

Приклад. $\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C \end{array} \right| = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^3 \dfrac{1}{x} dx =$

$= \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C.$

3. $f(x) = a^{\alpha x}, g(x) = \sin\beta x, \cos\beta x$. Такий випадок інтегрування частинами називається *інтегруванням по колу.* При довільному виборі $u(x), dv(x)$, двократне послідовне інтегрування частинами веде до появи інтеграла тотожнього первинному, що дозволяє знайти інтеграл з отриманого лінійного рівняння.

Приклад. $I=\int e^x\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=e^x, du=e^xdx \\ dv=\sin xdx, v=\int\sin xdx=-\cos x+C\end{matrix}\right|=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^x, du=e^xdx \\ dv=\cos xdx, v=\int\cos xdx=\sin x+C\end{matrix}\right|=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx.$$

Таким чином, $I=e^x(\sin x-\cos x)-I$, звідки $I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

1. В деяких випадках інтегрування частинами виявляється плідним і тоді, коли $f(x)$ - деяка складна функція, а $g(x)=1$.

Приклад. $I=\int\arccos^2 xdx=\left|\begin{matrix} u=\arccos^2 x, du=-\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx, v=x\end{matrix}\right|=$

$$=x\arccos^2 x+2\int\arccos x\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix} u=\arccos x, du=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, v=\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\dfrac{1}{2}\dfrac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C\end{matrix}\right|=$$

$$=x\arccos^2 x+2\left(-\sqrt{1-x^2}\arccos x-\int\sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x+2x+C.$$

Задачі

3.1.1. Знайдіть інтеграли, зводячи їх до табличних. В разі необхідності скористайтеся методом розкладу.

1. $\int\sqrt[n]{x}dx$
2. $\int\sqrt[5]{x^7}dx$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int\frac{dx}{x^3}$
5. $\int 3^{2x}dx$
6. $\int 2^{3x}dx$
7. $\int\frac{e^x\cdot 4^x}{8^x}dx$
8. $\int\frac{5^{2x}\cdot e^x}{125^x}dx$
9. $\int\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$
10. $\int\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2+x\sqrt{x}\right)dx$

11. $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+xe^x}{x}dx$

12. $\int \frac{x\sqrt{x}-3x^3+x^2e^x}{x^2}dx$

13. $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$

14. $\int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$

15. $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{x}dx$

16. $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3}{x^2}dx$

17. $\int \frac{4\cdot 3^x-3\cdot 4^x}{3^x}dx$

18. $\int \frac{2\cdot 5^x+4\cdot 3^x}{5^x}dx$

19. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

20. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^4-4}}dx$

21. $\int \frac{x^4dx}{x^2+4}$

22. $\int \frac{x^6dx}{x^2+2}$

23. $\int \frac{4+2x^2}{x^2\left(4+x^2\right)}dx$

24. $\int \frac{\left(2+x\right)^2}{x\left(4+x^2\right)}dx$

25. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$

26. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$

27. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$

28. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-\cos 2x}$

29. $\int (\arcsin x+\arccos x)dx$

30. $\int (\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x)\,dx$

31. $\int \operatorname{tg}^2 xdx$

32. $\int \operatorname{ctg}^2 xdx$

33. $\int \frac{4\cos 2xdx}{\sin^2 2x}$

34. $\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos 2x-1}dx$

35. $\int \frac{dx}{3x+1}$

36. $\int \frac{dx}{2-5x}$

37. $\int \sqrt{2x+4}dx$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}}$

39. $\int e^{5x+6}dx$

40. $\int 2^{3x-2}dx$

41. $\int \sin(7-3x)dx$

42. $\int \cos(4x+9)dx$

43. $\int (\cos 2x\sin 3x+\sin 2x\cos 3x)dx$

44. $\int (\cos 5x\cos 2x+\sin 5x\sin 2x)dx$

45. $\int 2\sin 4x\cos x dx$

46. $\int 2\cos 2x\cos 3x dx$

47. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$

48. $\int \frac{dx}{4-25x^2}$

49. $\int \frac{dx}{2x^2-9}$

50. $\int \frac{dx}{16-3x^2}$

51. $\int \frac{dx}{16x^2+9}$

52. $\int \frac{dx}{25+4x^2}$

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

54. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-2x^2}}$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-8x^2}}$

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-25}}$

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+16}}$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+9}}$

61. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

62. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

63. $\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$

64. $\int \frac{dx}{9x^2-6x-8}$

65. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

66. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$

67. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$

68. $\int \frac{dx}{4x^2-4x+10}$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$

70. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{15-6x-9x^2}}$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+15}}$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

75. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$

77. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

78. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+6)}$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x+4)}}$

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)(x+1)}}$

81. $\int \frac{x+2}{2x+3}dx$

82. $\int \frac{3x-1}{2x+3}dx$

83. $\int \frac{2x-1}{4x+6}dx$

84. $\int \frac{x+2}{3x-1}dx$

85. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

86. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

3.1.2. Знайдіть інтеграл методом підведення під знак диференціала.

1. $\int \sin 2x d(2x)$

2. $\int \cos 5x d(5x)$

3. $\int \frac{d(2x)}{4x^2+1}$

4. $\int \frac{d(3x)}{9x^2-4}$

5. $\int \frac{d(4x)}{\sqrt{9-16x^2}}$

6. $\int \frac{d(5x)}{\sqrt{25x^2+4}}$

7. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$

8. $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

9. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$

10. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+6}}dx$

11. $\int 2x\sqrt{x^2-4}dx$

12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$

13. $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$

14. $\int \frac{xdx}{x^2-9}$

15. $\int \frac{x^3dx}{x^4+1}$

16. $\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$

17. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$

18. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^6}}$

19. $\int x^3\sqrt[4]{x^4+7}dx$

20. $\int \frac{x^3dx}{x^8-1}$

21. $\int x\sin(x^2+1)dx$

22. $\int x^2\cos(3+x^3)dx$

23. $\int \cos^4 x\cdot \sin xdx$

24. $\int \sqrt{\sin^3 x}\cdot \cos xdx$

25. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 4}$

26. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 9}}$

27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

28. $\int \frac{\ln^3 x dx}{x}$

29. $\int \sqrt{\ln x + 27}\, \frac{dx}{x}$

30. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 4)}$

31. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x dx}{1 + x^2}$

32. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$

33. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

34. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1 - x^2}}$

35. $\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 x}}{\cos^2 x} dx$

36. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1 + tgx)}$

37. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot tgx}$

38. $\int \frac{\sqrt{ctgx}}{\sin^2 x}$

39. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 4}$

40. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$

41. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$

42. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$

43. $\int e^{x^2} \cdot x dx$

44. $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$

45. $\int (1 + \cos^2 x) \cdot \sin 2x dx$

46. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx$

47. $\int \frac{1 + 2x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

48. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 16} dx$

49. $\int \frac{2x + \left[\operatorname{arctg}^2 x\right]}{x^2 + 1} dx$

50. $\int \frac{2x - \sqrt{\arccos 3x}}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$

51. $\int \frac{\ln(\arcsin 2x) dx}{\arcsin 2x\sqrt{1 - 4x^2}}$

52. $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} 3x) dx}{\operatorname{arctg} 3x(1 + 9x^2)}$

53. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

54. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

55. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

56. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$

3.1.3. Знайдіть інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

1. $\int x\cdot\sin 3xdx$

2. $\int x\cdot\cos 4xdx$

3. $\int (2x+3)e^x dx$

4. $\int (3x-1)2^x dx$

5. $\int x^2e^{-x}dx$

6. $\int \left(x^2-3x+4\right)e^x dx$

7. $\int \left(x^3+2x+5\right)\sin xdx$

8. $\int \left(x^3-3x^2+4\right)\cos xdx$

9. $\int x\cdot\cos^2 xdx$

10. $\int x\cdot\cos^2 xdx$

11. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

12. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

13. $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$

14. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

15. $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$

16. $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$

17. $\int \arcsin xdx$

18. $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx$

19. $\int x\ln xdx$

20. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,xdx$

21. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$

22. $\int \ln\left(x^2-1\right)dx$

23. $\int \ln^2 xdx$

24. $\int \ln^3 xdx$

25. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$

26. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}dx$

27. $\int \arcsin^2 xdx$

28. $\int x\,\mathrm{arctg}^2\,xdx$

29. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$

30. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

31. $\int \sin(\ln x)\cdot dx$

32. $\int \cos(\ln x)\cdot dx$

33. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

34. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

3.1.4. Знайдіть інтеграли, застосовуючи необхідну заміну та інтегрування частинами.

1. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

2. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

3. $\int \sin\sqrt{x}dx$

4. $\int \cos 2\sqrt{x}dx$

5. $\int \frac{3}{x^2}\arcsin\frac{1}{x}dx$

6. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\left(\operatorname{arctg} x\right)dx$

§2. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Інтеграли елементарних дробів I та II типів мають вигляд:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln\left|x-a\right|+C$$

$$\int \frac{Bdx}{\left(x-b\right)^k} = \frac{B\left(x-b\right)^{1-k}}{1-k}+C,\ k\neq 1$$

Для інтегрування елементарних дробів III типу зручно почати з виділення повного квадрату у квадратному тричлені з відповідною заміною змінної. Таким чином, маємо:

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx = \int \frac{C\left(x+\frac{p}{2}\right)+D_1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q_1^2}dx = \begin{vmatrix} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{vmatrix} = C\int \frac{tdt}{t^2+q_1^2}+D_1\int \frac{dt}{t^2+q_1^2} = \frac{C}{2}\ln\left|t^2+q_1^2\right|+$$

$$+\frac{D_1}{q_1}\operatorname{arctg}\frac{t}{q_1}+C = \frac{C}{2}\ln|\,x^2+px+q\,|+\frac{D-\frac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Приклад. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{3\left(x-2\right)+4}{\left(x-2\right)^2+1}dx = \begin{vmatrix} t = x-2 \\ dt = dx \end{vmatrix} = 3\int \frac{tdt}{t^2+1}+4\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$$\frac{3}{2}\ln|\,t^2+1\,|+4\operatorname{arctg} t+C = \frac{3}{2}\ln|\,x^2-4x+5\,|+4\operatorname{arctg}\left(x-2\right)+C.$$

Інтегрування елементарних дробів IV типу також доцільно почати з виділення повного квадрату та відповідної заміни змінної, що дозволяє звести відповідний інтеграл до інтеграла вигляду

$$I_n=\int\frac{at+b}{\left(t^2+c^2\right)^n}dt=a\int\frac{tdt}{\left(t^2+c^2\right)^n}+b\int\frac{dt}{\left(t^2+c^2\right)^n}=\frac{a}{2}\frac{\left(t^2+c^2\right)^{1-n}}{1-n}+bI_n^*,$$ де

$$I_n^*=\int\frac{dt}{\left(t^2+c^2\right)^n}=\frac{1}{c^2}\int\frac{t^2+c^2-t^2}{\left(t^2+c^2\right)^n}dt=\frac{1}{c^2}I_{n-1}^*-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+c^2\right)^n}=\left|\begin{array}{c}u=t\\ du=dt\\ dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+c^2\right)^n}\\ v=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(t^2+c^2\right)^{1-n}}{1-n}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{c^2}I_{n-1}^*-\frac{t}{2(1-n)\left(t^2+c^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{dt}{\left(t^2+c^2\right)n-1}=\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{2(1-n)}\right)I_{n-1}^*-\frac{t}{2(1-n)\left(t^2+c^2\right)^{n-1}}.$$

Така рекурентна процедура дозволяє обчислювати інтеграли вказаних типів, починаючи з $n=2$.

Приклад $\displaystyle\int\frac{5x-3}{\left(x^2-2x+2\right)^3}dx=\int\frac{5x-3}{\left((x-1)^2+1\right)^3}dx=\left|\begin{array}{l}t=x-1\\ dt=dx\end{array}\right|=\int\frac{5t+2}{\left(t^2+1\right)^3}dt=5\int\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^3}+2\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}=$

$$=\frac{5}{2}\int\left(t^2+1\right)^{-3}d\left(t^2+1\right)+2\int\frac{t^2+1-t^2}{\left(t^2+1\right)^3}dt=\frac{5}{2}\frac{\left(t^2+1\right)^{-2}}{-2}+2\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}-\int t\frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^3}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}u=t\\ du=dt\\ dv=\dfrac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^3}\\ v=\dfrac{\left(t^2+1\right)^{-2}}{-2}\end{array}\right|=-\frac{5}{4\left(t^2+1\right)^2}+2\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2t-5}{4\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2+1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=$$

$$=\frac{2t-5}{4\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{3}{2}\int t\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{c}u=t\\ du=dt\\ dv=\dfrac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}\\ v=-\dfrac{1}{2\left(t^2+1\right)}\end{array}\right|=\frac{2t-5}{4\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3}{2}arctgt+\frac{3t}{4\left(t^2+1\right)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{2t-5}{4\left(t^2+1\right)^2}+\frac{3t}{4\left(t^2+1\right)}+arctgt+C=\frac{2x-7}{4\left(x^2-2x+2\right)^2}+\frac{3(x-1)}{4\left(x^2-2x+2\right)}+arctg\,(x-1)+C.$$

В загальному випадку дробово-раціональна функція представляється у вигляді суми многочлена (цілої частини) та елементарних дробів, що дає можливість інтегрувати її.

Приклад. Знайдемо $I=\int\frac{x^3+x}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)}dx$.

Функція $R(x)=\frac{x^3+x}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{x^3+x}{x^3+3x^2+4x+2}$ є неправильним раціональним дробом, тому виділимо спочатку його цілу частину: $R(x)=1-\frac{3x^2+3x+2}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)}$.

Розкладемо дріб $\frac{3x^2+3x+2}{(x+1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$. Маємо

$$3x^2+3x+2=A\left(x^2+2x+2\right)+(Bx+C)(x+1)=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+2A+C.$$

Використаємо метод порівняння коефіцієнтів: $\begin{cases} A+B=3\\ 2A+B+C=3\\ 2A+C=2\end{cases}$, звідки

$B=1, A=2, C=-1$. Таким чином, $I=\int dx-2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=\begin{vmatrix}t=x+1\\ dt=dx\end{vmatrix}=$

$$=x-2\ln|x+1|-\int\frac{t-2}{t^2+1}dt=x-2\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+2arctg\,(x+1)+C.$$

<u>**Задачі.**</u>

3.2.1. Знайдіть інтеграли дробово-раціональних функцій.

І.Знаменник має різні дійсні корені.

1. $\int\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}dx$

2. $\int\frac{2x-22}{(x+1)(x-5)}dx$

3. $\int\frac{-x-5}{x^2+3x+2}dx$

4. $\int\frac{3x-2}{x^2+x-12}dx$

5. $\int \frac{6x^2-x-1}{x^3-x}dx$

6. $\int \frac{4x^2-8x-8}{x^3-4x}dx$

7. $\int \frac{3x^2-4x+23}{x^3+4x^2+x-6}dx$

8. $\int \frac{4x^2-23x+18}{x^3-5x^2+2x+8}dx$

9. $\int \frac{2xdx}{x^4-6x^2+8}$

10. $\int \frac{2x^3-7x}{x^4-7x^2+12}dx$

11. $\int \frac{4x^3+8x^2+6x+1}{2x^2+3x+1}dx$

12. $\int \frac{2x^3-5x^2+2x+2}{2x^2-3x-2}dx$

13. $\int \frac{x^4+6x^3+9x^2-4x-13}{x^3+4x^2+x-6}dx$

14. $\int \frac{2x^4+7x^3-17x^2-51x+13}{2x^3+13x^2+17x-12}dx$

II. Знаменник має дійсні, в тому числі і кратні корені.

1. $\int \frac{x^2+7x+9}{(x+1)^2(x+2)}dx$

2. $\int \frac{4x^2+9x+12}{(x+2)^2(x-3)}dx$

3. $\int \frac{-x^2+11x-6}{x^3+x^2-5x+3}dx$

4. $\int \frac{7x-11}{x^3-3x^2+4}dx$

5. $\int \frac{-2x^2+3x+2}{x^3+x^2}dx$

6. $\int \frac{x^2-x-6}{x^3-2x^2}dx$

7. $\int \frac{x^3-4x^2+9x-4}{(x-1)^2(x^2-1)}dx$

8. $\int \frac{x^3-3x^2-19x-22}{(x+2)^2(x^2-4)}dx$

9. $\int \frac{2x^3-x^2-37x-59}{x^4+3x^3-6x^2-28x-24}dx$

10. $\int \frac{5x^3+20x^2+23x+11}{x^4+7x^3+15x^2+13x+4}dx$

11. $\int \frac{2x^4+7x^3+9x^2+2}{x(x^2+2x+1)}dx$

12. $\int \frac{3x^4-10x^3+6x^2+4x+3}{x^3-3x^2+4}dx$

III. Знаменник може мати дійсні корені та різні комплексні корені.

1. $\int \frac{4x^2+3x+5}{x^3+1}dx$

2. $\int \frac{5x^2+3x+10}{x^3-8}dx$

3. $\int \frac{4x^2+8x+7}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$

4. $\int \frac{8x^2-21x+30}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$

5. $\int \frac{6x^2+5x+39}{x^3+x^2+5x-7}dx$

6. $\int \frac{-x^2-x}{x^3+5x^2+9x+6}dx$

7. $\int \frac{3x^2-2x+5}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+2\right)}dx$

8. $\int \frac{2x^3-4x^2+4x-17}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+x+1\right)}dx$

9. $\int \frac{2x^5+x^4+15x^3+5x^2+28x+7}{x^4+7x^2+12}dx$

10. $\int \frac{x^5-3x^4+13x^3-36x^2+29x-88}{x^4+11x^2+18}dx$

IV. Знаменник може мати кратні дійсні та комплексні корені.

1. $\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$

2. $\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^2}$

3. $\int \frac{3x^4+19x^2-3x+15}{(x-1)\left(x^2+4\right)^2}dx$

4. $\int \frac{3x^4+7x^3+39x^2-65x+102}{(x+3)\left(x^2+9\right)^2}dx$

5. $\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}$

6. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

7. $\int \frac{2x^2+4}{\left(x^2-4x+13\right)^2}dx$

8. $\int \frac{x^2-6}{\left(x^2-2x+10\right)^2}dx$

§3. Інтегрування деяких тригонометричних функцій

У випадку, коли підінтегральний вираз містить тригонометричні функції, для знаходження невизначених інтегралів можуть використовуватись методи розкладу, або підведення під знак диференціалу.

Приклад. $\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx =$

$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$.

Приклад. $\int \sqrt{\cos^5 x}\sin x dx = -\int(\cos x)^{\frac{5}{2}} d\cos x = -\frac{(\cos x)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = -\frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} + C$.

При знаходженні інтегралів вигляду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, де $m, n -$ цілі числа, розглядають наступні випадки.

1. Якщо непарне $|m|$, то роблять заміну $t=\cos x$, якщо ж непарне $|n|$, то заміна $t=\sin x$.

Приклад. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ \sin x=\sqrt{1-x^2} \\ x=\arccos t \\ dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^{3/2} dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = -\int \frac{dt}{t^2} + \int dt = \frac{1}{t}+t+C=$

$=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$.

2. Якщо m та $n-$цілі парні додатні числа , то використовують формули зниження степеня: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Приклад. $\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2x\right)dx=$

$=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int\left(1-\cos 4x\right)dx = \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x + C$.

3. Якщо m та $n-$різних знаків, але обидва парні (за абсолютною величиною), то використовують заміну $t=tgx$.

Приклад. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{tg^2 x}\left(1+ctg^2 x\right)^2 dx = \left| \begin{array}{c} tgx=t \\ x=arctgt \\ dx=\frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| =$

$=\int \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2\frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{t^2+1}{t^6}dt = \int t^{-4}dt + \int t^{-6}dt = \frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-5}}{-5}+C = -\frac{1}{3tg^3 x}-\frac{1}{5tg^5 x}+C$.

4. Якщо m та n від'ємні і мають однакову парність (за абсолютною величиною), то також використовують заміну $t=\operatorname{tg} x$.

Приклад. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \;\; x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \;\; \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3 \sqrt{t^2+1}}{t^3\left(t^2+1\right)} dt =$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^3} dt = \int t^{-1} dt + \int t^{-3} dt = \ln|t| + \frac{t^{-2}}{-2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C .$$

Якщо підінтегральною функцією є раціональний дріб, залежний від $\sin x$ та $\cos x$, то інтеграл зводиться до інтегралу дробово-раціональної функції шляхом використання *універсальної тригонометричної підстановки* :

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \;\; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} .$$

Приклад. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3\right)} = 2\int \frac{dt}{1-t^2+4t+3+3t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2+4t+4} =$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C .$$

Слід зазначити, що використання універсальної тригонометричної підстановки часто веде до громіздких підінтегральних функцій. Якщо, наприклад, підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ задовольняє рівностям

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, або $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то для отримання простішого інтегралу використовують підстановки $t = \sin x$ у першому випадку, та $t = \cos x$ у другому.

Приклад. Розглянемо інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

Оскільки маємо $-\frac{1}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{(-\sin x)(1+\cos x)}$, то використаємо підстановку

$t = \cos x, \sin x = \sqrt{1-t^2}, x = \arccos t, dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Тоді $I = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}\,(1+t)} =$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)\left(t^2-1\right)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2(t-1)} = \int \left(-\frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{2(t+1)^2} + \frac{1}{4(t-1)} \right) dt =$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln|t-1|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+\frac{1}{2(1+\cos x)}+C.$$

У випадку, коли $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, найзручніше використовувати підстановку $t=tgx$.

Приклад. $$\int\frac{\cos dx}{\sin x+\cos x}=\int\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t\\ x=\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{t^2+1}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}=\int\left(\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t-1}{2(t^2+1)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\ln|t^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+1\right)+\frac{x}{2}+C.$$

<u>Задачі.</u>

3.3.1. Знайдіть інтеграли.

1. $\int\cos 2x\cos 5xdx$
2. $\int\sin x\sin 3xdx$
3. $\int\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{5x}{3}dx$
4. $\int\sin 3x\cos\frac{3x}{4}dx$
5. $\int\frac{dx}{1-\cos 3x}$
6. $\int\frac{dx}{1+\cos 4x}$
7. $\int\frac{\cos^4 x}{1-\sin^2 x}dx$
8. $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$
9. $\int\frac{dx}{\sin x}$
10. $\int\frac{dx}{\cos x}$
11. $\int\cos^3 xdx$
12. $\int\sin^5 xdx$
13. $\int\cos^3 x\sin^2 xdx$
14. $\int\sin^5 x\cos^2 xdx$
15. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$
16. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
17. $\int\frac{\cos xdx}{(1-\sin x)^3}$
18. $\int\frac{\sin xdx}{(1+\cos x)^4}$
19. $\int\frac{dx}{\cos x\sin^2 x}$
20. $\int\frac{1+\cos x}{\sin x\cos^2 x}$
21. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$
22. $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$

23. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

24. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

25. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

26. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$

27. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x} dx$

28. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x} dx$

29. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$

30. $\int \frac{dx}{4-3\sin^2 x+5\cos^2 x}$

31. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$

32. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

33. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}$

34. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

35. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

36. $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$

37. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$

39. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$

40. $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x+1} dx$

41. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$

42. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$

43. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos 2x}$

44. $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\cos 2x}$

45. $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}$

46. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$

47. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

48. $\int \frac{dx}{5-3\sin x}$

49. $\int \frac{dx}{3-2\sin x+5\cos x}$

50. $\int \frac{dx}{4+3\sin x-2\cos x}$

51. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$

52. $\int \frac{3+\cos x}{4+\sin x} dx$

53. $\int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$

54. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2}$

§4. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтегрування функцій, що містять ірраціональні вирази, в більшості випадків веде до первісних, які не виражаються через елементарні функції в скінченному вигляді. Виділяють наступні основні типи інтегрованих в скінченному вигляді ірраціональних функцій.

1. *Лінійні та дробово-лінійні ірраціональності.*

Якщо підінтегральна функція має вигляд $R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},...,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$

(лінійна ірраціональність), де числа $n_1,n_2,....,n_k$ – натуральні, а $m_1,...,m_k$ – цілі, то запроваджується заміна $(ax+b)=t^N$, де N – Н.С.К.$(n_1,n_2,...,n_k)$.

Приклад 1. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx=\int \frac{x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{5}{4}}}dx=\left| \begin{array}{c} n_1=6,n_2=4 \\ Н.С.К.(6,4)=12 \\ x=t^{12} \\ dx=12x^{11}dt \end{array} \right| =\int \frac{t^2+1}{t^{14}+t^{15}}12t^{11}dt=12\int \frac{t^2+1}{t^4+t^3}dt=$

$$=12\left(\int \frac{2dt}{t}-\int \frac{dt}{t^2}+\int \frac{dt}{t^3}-\int \frac{2dt}{t+1}\right)=24\ln|t|+\frac{12}{t}-\frac{6}{t^2}-24\ln|t+1|+C=24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+C.$$

Якщо підінтегральна функція має вигляд $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)$, де знову ж $n_1,n_2,....,n_k$ – натуральні, а $m_1,...,m_k$ – цілі числа (дробово-лінійна ірраціональність), то запроваджується заміна $\frac{ax+b}{cx+d}=t^N$, де N – Н.С.К.$(n_1,n_2,...,n_k)$.

Приклад 2. $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}=\left| \begin{array}{c} \frac{x}{x+1}=t^5, t=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/5} \\ x=xt^5+t^5, x=\frac{t^5}{1-t^5} \\ dx=\frac{5t^4dt}{\left(1-t^5\right)^2} \end{array} \right| =5\int \frac{1-t^5}{t^{10}}dt=-\frac{5}{9t^9}+\frac{5}{4t^4}+C=$

$$=-\frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{9/5}+\frac{4}{5}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/5}+C.$$

2. Квадратичні ірраціональності.

Якщо підінтегральна функція має вигляд $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, то кажуть про *квадратичну ірраціональність.* У випадку, коли квадратична ірраціональність має вигляд $\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, відповідні інтеграли знаходять *методом Остроградського*, тобто використовують формулу

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $P_{n-1}(x)$ та число A цю рівність треба продиференціювати та домножити обидві її частини на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Приклад 3. $I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = (Bx+C)\sqrt{x^2-4} + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. Після диференціювання рівності та домноження на $\sqrt{x^2-4}$, маємо: $x^2 = B\left(x^2-4\right) + (Bx+C)x + A$. Звідки визначаємо, що $B = \frac{1}{2}, C = 0, A = 2$, тобто

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C.$$

Якщо квадратична ірраціональність не зводиться до інтегралів попереднього вигляду, то можливе застосування підстановок Ейлера

першої – при $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$;

другої – при $c > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;

третьої – при відомому корені α тричлена ax^2+bx+c, $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, де t - нова змінна інтегрування.

Приклад 4. Знайдіть інтеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

В цьому випадку можливе використання першої або другої підстановки Ейлера.

Якщо оберемо першу підстановку, то $\sqrt{x^2+4} = \pm x + t, t = \sqrt{x^2+4} - x$. Обираючи знак "+" та підносячи обидві частини рівності до квадрату, отримуємо

$x^2+4=x^2+2tx+t^2$, звідки $x=\dfrac{4-t^2}{2t}, dx=\left(-\dfrac{2}{t^2}-\dfrac{1}{2}\right)dt$. Тобто,

$$I=\int\frac{2t}{\left(4-t^2\right)\left(\dfrac{4-t^2}{2t}+t\right)}\left(-\frac{2}{t^2}-\frac{1}{2}\right)dt=-\int\frac{4t^2\left(4+t^2\right)dt}{\left(4-t^2\right)\left(4+t^2\right)2t^2}=-2\int\frac{dt}{4-t^2}=2\int\frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-x-2}{\sqrt{x^2+4}-x+2}\right|+C.$$

Ще один метод інтегрування квадратичних ірраціональностей полягає у використанні тригонометричних підстановок.

Зазначимо, що шляхом виділення повного квадрату під знаком радикала та здійснення відповідної лінійної заміни, підінтегральна функція може бути

зведена до вигляду: $R\left(t,\sqrt{t^2+a^2}\right), R\left(t,\sqrt{t^2-a^2}\right)$, або $R\left(t,\sqrt{a^2-t^2}\right)$. При цьому

- якщо $R\left(x,\sqrt{t^2+a^2}\right)$, тоді використовується підстановка $t=atg\alpha$, або $t=ash\alpha$;
- якщо $R\left(x,\sqrt{t^2-a^2}\right)$, тоді використовується підстановка $t=\dfrac{a}{\cos\alpha}$, або $t=ach\alpha$;
- якщо $R\left(x,\sqrt{a^2-t^2}\right)$, тоді використовується підстановка $t=\sin\alpha$, або $t=ath\alpha$.

Приклад 5 . $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+\sqrt{3-2x-x^2}}=\int\frac{dx}{2x+\sqrt{4-(x+1)^2}}=\left|\begin{matrix}t=x+1\\ dt=dx\\ x=t-1\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{2t-2+\sqrt{4-t^2}}=$

$$=\left|\begin{matrix}t=2\sin\alpha\\ dt=2\cos\alpha d\alpha\\ \alpha=\arcsin\dfrac{t}{2}\end{matrix}\right|=\int\frac{2\cos\alpha d\alpha}{2\sin\alpha-2+2\cos\alpha}=\left|\begin{matrix}r=tg\dfrac{\alpha}{2}\\ \alpha=2arctgr\\ d\alpha=\dfrac{2dr}{1+r^2}\end{matrix}\right|=2\int\frac{\left(1-r^2\right)dr}{\left(1+r^2\right)\left(\dfrac{2r}{1+r^2}+\dfrac{1-r^2}{1+r^2}-1\right)}=$$

$$=2\int\frac{\left(1-r^2\right)dr}{\left(1+r^2\right)\left(2r-2r^2\right)}=\int\frac{(1+r)}{r\left(1+r^2\right)}dr=\int\frac{dr}{r}-\int\frac{r-1}{r^2+1}dr=\ln|r|-\frac{1}{2}\ln\left|r^2+1\right|+arctgr+C=$$

$$=\ln\left|tg\frac{\alpha}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|tg^2\frac{\alpha}{2}+1\right|+arctg\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)+C=\ln\left|tg\frac{\alpha}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\frac{\alpha}{2}+C=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2}+C=$$

$$=\ln\left|tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

3. Інтегрування диференціальних біномів.

Диференціальним біномом називають вираз вигляду $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де $m,n,p-$ раціональні сталі числа, $a,b-$ дійсні сталі числа. Інтеграл від диференціального бінома зводиться до інтеграла раціонального дробу тільки в трьох випадках.

1. Якщо $p-$ціле число, запроваджується підстановка $x=t^s$, де $s-$ найменший спільний знаменник чисел m,n.
2. Якщо $\frac{m+1}{n}-$ціле число, то використовують підстановку $a+bx^n=t^s$, де $s-$ знаменник дробу p.
3. Якщо $\frac{m+1}{n}+p-$ціле число, то використовують підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, $s-$ знаменник дробу p.

Приклад 6. $$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\left|\begin{array}{c} m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}, \frac{m+1}{n}=2\in Z \\ x=\left(t^3-1\right)^4, dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt \\ 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3, t=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(t^3-1\right)^{-2}t\cdot 4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt=12\int t^6dt-12\int t^3dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=$$

$$=\frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{4/3}+C.$$

Задачі.

3.4.1. Знайдіть інтеграли від лінійних ірраціональностей.

1. $\int\frac{dx}{5+\sqrt{x+2}}$

2. $\int\frac{dx}{3-\sqrt{x-1}}$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{x-1}}$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{\sqrt[3]{x+3}+2}dx$

6. $\int \frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x+4}+3}dx$

7. $\int \frac{x+2}{x\sqrt{x-1}}dx$

8. $\int \frac{x+3}{(x-1)\sqrt{x+2}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

10. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}dx$

11. $\int \frac{x+2+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$

12. $\int \frac{x-1+\sqrt{x+3}}{\sqrt[4]{x+3}}dx$

3.4.2. Знайдіть інтеграли від дробово-лінійних ірраціональностей.

1. $\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{x}$

2. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{x}$

3.4.3. Знайдіть інтеграли від квадратичних ірраціональностей.

1. $\int \frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}$

2. $\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\sqrt{25-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2-1}}$

4. $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}$

5. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+16}}$

6. $\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+1}}$

7. $\int \sqrt{2x-x^2}dx$

8. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^5}}$

11. $\int \frac{-3dx}{x\sqrt{10x^2+18x+9}}$

12. $\int \frac{2dx}{x\sqrt{4-8x+5x^2}}$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+2x-3x^2}}$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-2x-8x^2}}$

15. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{15x^2-2x-1}}$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{24x^2+2x-1}}$

17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$

18. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}}$

19. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

20. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-4}}$

21. $\int \frac{4x^2+7x+6}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

22. $\int \frac{6x^2+10x-30}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$

23. $\int \frac{2x^2+2x+1}{\sqrt{15-2x-x^2}}dx$

24. $\int \frac{4x^2+2x+2}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$

25. $\int \sqrt{x^2+4x-5}dx$

26. $\int \sqrt{x^2+2x-24}dx$

27. $\int \sqrt{5-4x-x^2}dx$

28. $\int \sqrt{6x-x^2-5}dx$

29. $\int \frac{3x^3+8x^2+5x+10}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

30. $\int \frac{6x^3+12x^2+x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$

31. $\int \frac{3x^3+8x^2-5x+3}{\sqrt{-x^2-4x}}dx$

32. $\int \frac{-3x^3+14x^2+18x+27}{\sqrt{9+8x-x^2}}dx$

33. $\int \frac{4x^4-8x^3+21x^2+40x+5}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$

34. $\int \frac{4x^4-2x^3-200x^2+360x-186}{\sqrt{10x-x^2-21}}dx$

35. $\int \sqrt[3]{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2 dx$

36. $\int \sqrt[4]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

37. $\int x^{-1/3}\left(1+x^{1/2}\right)^2 dx$

38. $\int x^{-1/2}\left(2-x^{1/4}\right)^3 dx$

39. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

40. $\int x^{-1}\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}dx$

41. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}dx$

42. $\int x^{1/3}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}dx$

43. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}}dx$

44. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$

45. $\int x^{-9}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$

46. $\int x^{-4}\sqrt[5]{1+\sqrt{x^5}}dx$

§5. Визначений інтеграл

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена та неперервна на $[a,b]$. Задамо довільне розбиття відрізка $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$, причому $\max\limits_k (x_k - x_{k-1}) = \delta$. Нехай $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ - довільні числа, такі, що

$x_{k-1} \le x_k^* \le x_k, k = 1, 2, ..., n$. Тоді

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\cdot\left(x_k - x_{k-1}\right) = \int_a^b f(x)dx \text{ -}$$

визначений інтеграл функції $f(x)$ *на проміжку* $[a,b]$ (від a до b).

Основною формулою для обчислення визначених інтегралів є формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(t)$ - довільна первісна функції $f(t)$, а $F(t)\Big|_a^b$ - варіація функції $F(t)$ на проміжку $[a,b]$.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1. *Лінійність:* $\int_a^b \left(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\right)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b f(t)dt$, $\alpha, \beta = const$.

2. *Адитивність:* при $a < c < b$, $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

3. $\int_a^b dt = b - a, \int_a^a f(t)dt = 0$.

4. При $f(t) \le g(t)$ для всіх $t \in [a,b]$, $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$, як наслідок у випадку

$f(t) \ge 0$ для всіх $t \in [a,b]$, $\int_a^b f(t)dt \ge 0$.

5. Якщо $m \le f(t) \le M$ для $t \in [a.b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(t)dt \le M(b-a)$.

(теорема про оцінку визначеного інтеграла).

6. Для будь-яких інтервала $[a,b]$ та неперервної функції $f(t)$, існує число $c \in [a,b]$, таке, що $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt$.

(теорема про середнє для визначених інтегралів). При цьому значення $f(c)$ називається *середнім значенням функції* $f(t)$ *на інтервалі* $[a,b]$.

7. $\int\limits_a^b f(t)dt = -\int\limits_b^a f(t)dt$.

8. Для парної функції $f(t)$ $\int\limits_{-a}^a f(t)dt = 2\int\limits_0^a f(t)dt$;

для непарної функції $f(t)$ $\int\limits_{-a}^a f(t)dt = 0$

9. Для функції $f(t)$, що є періодичною з періодом T $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int\limits_a^b f(t)dt$.

Приклад. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} (3x+1)^2 dx = \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(9x^2+6x+1\right)dx = 9\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} x^2 dx +$

$$6\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} xdx + \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} dx = 9\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{0} + 6\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{0} + x\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{0} =$$

$$= 3\left(0-\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right) + 3\left(0-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right) + \left(0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Приклад 2. Оцінимо інтеграл $I = \int\limits_{-1}^{1} (\arccos t)^{2013} dt$. Оскільки $0 \le \arccos t \le \pi$, при $t \in [-1,1]$, то $0 \le I \le 2\pi$.

Приклад 3. Знайдемо середнє значення $\bar{y}$ функції $y = \frac{1}{t}$ на проміжку $[1,e]$.

Маємо: $\bar{y}=\frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{dt}{t}=\frac{1}{e-1}\ln t\Big|_1^e=\frac{1}{e-1}$.

Приклад 4. Нехай $f(t)=|t|$. Тоді $\int_{-1}^{2} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{2} f(t)dt=\int_{-1}^{0}(-t)\,dt+\int_{0}^{2} tdt=$

$$=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{2}=0+\frac{1}{2}+2-0=\frac{5}{2}.$$

Приклад 5. $\int_{\pi}^{3\pi}\sqrt[3]{\sin t}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt[3]{\sin t}\,dt=0$, оскільки $f(t)=\sqrt[3]{\sin t}$ - періодична з періодом $T=2\pi$ та непарна функція.

Обчислення визначених інтегралів шляхом внесення під знак диференціалу здійснюється наступним чином: якщо $\int f(t)dt=F(t)+C$, то

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt=F(g(t))\Big|_{t=a}^{t=b}=F(g(b))-F(g(a)).$$

Приклад 6. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{\sqrt{3\cos^2 x+\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{12}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{12}}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|1+\sqrt{\frac{13}{12}}\right|-\ln\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right|\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{13}}{\sqrt{3}+2}\right|.$$

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами здійснюється за формулою:

$$\int_a^b u(t)dv(t)=u(t)v(t)\Big|_a^b-\int_a^b v(t)du(t).$$

Приклад 7. $I=\int_0^{\pi}e^x\sin xdx=\left|\begin{matrix}u=e^x, du=e^x dx\\ dv=\sin xdx, v=-\cos x\end{matrix}\right|=-e^x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\cos xdx=$

$$= e^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| = e^{\pi} + e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = e^{\pi} + I ,$$

звідси $I = \frac{1}{2} e^{\pi}$.

Заміна змінної у визначених інтегралах може здійснюватись (як і у невизначених) двома способами.

I. Нехай $t = t(x)$ - неперервно-диференційовна функція, що відображає відрізок $[\alpha, \beta]$ у відрізок $[a, b]$, тоді $\int_a^b f(t) dt = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t(x)) t'(x) dx$.

$$\textit{Приклад 8.}\ \int_{-2}^{5} \frac{dt}{1 + \sqrt[3]{t+3}} = \left| \begin{matrix} t + 3 = x^3, t = x^3 - 3 \\ dt = 3x^2 dx \\ t_1 = -2, x_1 = 1 \\ t_2 = 5, x_2 = 2 \end{matrix} \right| = \int_1^2 \frac{3x^2 dx}{x+1} = 3\int_1^2 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = 3\int_1^2 (x-1) dx +$$

$$+3\int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \frac{3}{2} x^2 \Big|_1^2 - 3x \Big|_1^2 + 3\ln|x+1| \Big|_1^2 = \frac{3}{2}(4-1) - 3(2-1) + 3(\ln 3 - \ln 2) = \frac{3}{2} + 3\ln\frac{3}{2}.$$

II. Нехай $x = x(t)$, причому існує неперервно-диференційовна функція $t = \varphi(x)$, $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$, тоді $\int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$.

$$\textit{Приклад 9.}\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 t dt = \left| \begin{matrix} x = \cos t, t = \arccos x \\ dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ t_1 = 0, x_1 = 1 \\ t_2 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{1}{2} \end{matrix} \right| = \int_1^{\frac{1}{2}} \sin^5(\arccos x) \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^5 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx - 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx = x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{5} x^5 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{32}\right) = \frac{53}{480}.$$

Мають місце наступні корисні формули:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n = 2k, k \in N \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, n = 2k+1, k \in N \cup \{0\} \end{cases}$$, де

$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$, $\quad (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k$.

<u>Задачі.</u>

3.5.1. Обчисліть інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца.

1. $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$

2. $\int_{-1}^0 4(1-3x)^3 dx$

3. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25-4x}}$

4. $\int_3^{22} \frac{2dx}{\sqrt[3]{x+5}}$

5. $\int_0^9 \frac{3dx}{\sqrt{16+x}-\sqrt{x}}$

6. $\int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-2\sqrt{3}x+4}$

9. $\int_1^3 \frac{2dx}{x^2+4x+3}$

10. $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2+6x+8}$

11. $\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

12. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

13. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$

14. $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot \cos 2x dx$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cdot \sin 4x dx$

17. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 24\cos^2 x dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (8\sin^4 x - 2) dx$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (8\cos^4 x - 3) dx$

21. $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{dx}{1-\cos 2x}$

22. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\cos x}$

23. $\int\limits_{0}^{1} 2^{2x+3}dx$

24. $\int\limits_{0}^{1} 3^{3x+1}dx$

25. $\int\limits_{-2}^{2} \left(7-|x|\right)dx$

26. $\int\limits_{-4}^{4} \left(5-|x|\right)dx$

27. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2-2\cos 2x}dx$

28. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{2+2\cos 2x}dx$

29. $\int\limits_{0}^{3} |x-2|dx$

30. $\int\limits_{-3}^{0} |x+2|dx$

31. $\int\limits_{-1}^{2} \left(|x|+|x-1|\right)dx$

32. $\int\limits_{-3}^{1} \left(|x|+|x+2|\right)dx$

33. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2-4}$

34. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{1+x^6}$

35. $\int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$

36. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$

37. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx$

38. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

39. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

40. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$

41. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{ar}\,ctgxdx}{1+x^2}$

42. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{arc}\,tgx}\left(1+x^2\right)}$

43. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 x\cdot\sin 2xdx$

44. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}$

45. $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

46. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

47. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

48. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

3.5.2. Обчисліть інтеграли методом заміни змінної під знаком інтеграла.

49. $\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

50. $\int_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

51. $\int_0^3 \frac{dx}{2x+\sqrt{x+1}}$

52. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

53. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

54. $\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

55. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{2\cos x+3}$

56. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-2\sin x}$

57. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\cos x-2}$

58. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+2\sin x}$

59. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^2 x}$

60. $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x(2+\cos x)}$

61. $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin 2xdx}{\sin x(1-\cos^2 x)}$

62. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x(3+\sin x)} dx$

63. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$

64. $\int_0^{\pi/6} \frac{tgx}{\cos 2x} dx$

65. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^4 xdx$

66. $\int_0^{\pi/3} tg^2 xdx$

67. $\int_0^{\pi/2} \cos^7 xdx$

68. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 xdx$

69. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^2 xdx$

70. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sin^2 xdx$

71. $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x\,dx$

72. $\int_0^{\pi/6} \cos^4 3x\,dx$

73. $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{2}\,dx$

74. $\int_0^{2\pi} \cos^7 \frac{x}{4}\,dx$

75. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$

76. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$

77. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

78. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$

79. $\int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x\,dx$

80. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x\,dx$

81. $\int_{-\pi}^{5\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

82. $\int_{-3\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^5 x\,dx$

83. $\int_0^{3/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

84. $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$

85. $\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx$

86. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5 \cdot \sqrt{x^2-1}}$

87. $\int_{\sqrt[3]{3}}^{2} \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^4}\,dx$

88. $\int_0^{\sqrt{7}} x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

89. $\int_1^{4^3} x^{-3/2} \sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

90. $\int_1^4 x^{-15/8} \sqrt[4]{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}\,dx$

3.5.3. Обчисліть інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

91. $\int_0^{\ln 3} (x+1)e^{3x}\,dx$

92. $\int_0^{\ln 2} (x-2)e^{-2x}\,dx$

93. $\int_0^{\pi/2} \left(x^2+3x-1\right)\cos 2x\,dx$

94. $\int_0^{\pi/3} \left(x^2-2x+3\right)\sin 3x\,dx$

95. $\int_{-2}^{0} \ln(x+3)\,dx$

96. $\int_2^3 x\ln(x-1)\,dx$

97. $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$

98. $\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{x^2} dx$

99. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \operatorname{arctg}(2x+1)\, dx$

100. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin 2x dx$

101. $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$

102. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

103. $\int\limits_1^{e^\pi} \cos\ln x dx$

104. $\int\limits_1^{e^\pi} \sin\ln x dx$

105. $\int\limits_{-3}^{3} \frac{9dx}{\left(9+x^2\right)^2}$

106. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

3.5.4. Дайте оцінку інтеграла.

107. $\int\limits_{-1}^{3} \left(2x^3-6x^2+9\right)dx$

108. $\int\limits_0^{5} \left(2x^3-21x^2+72x\right)dx$

109. $\int\limits_{-4}^{8} \frac{xdx}{x^2+9}$

110. $\int\limits_{-6}^{9} \frac{2xdx}{x^2+25}$

111. $\int\limits_0^{1} \left(x-\ln(1+x)\right)dx$

112. $\int\limits_0^{1} \left(x-\ln\left(1+x^2\right)\right)dx$

113. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin 2x - x\right)dx$

114. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x\right) dx$

115. $\int\limits_{-1}^{1} \left(x-\operatorname{arctg} x\right) dx$

116. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(x+\arcsin x\right)dx$

3.5.5. Порівняйте інтеграли, не обчислюючи їх.

117. а) $I_1=\int\limits_0^1 xdx, I_2=\int\limits_0^1 x^2dx$;

б) $I_1=\int\limits_1^2 xdx, I_2=\int\limits_1^2 x^2dx$

118. а) $I_1=\int\limits_0^1 x^2dx, I_2=\int\limits_0^1 x^3dx$;

б) $I_1=\int\limits_1^2 x^2dx, I_2=\int\limits_1^2 x^3dx$

119. $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx, I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

120. $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx, I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

121. а) $I_1 = \int\limits_0^1 3^{x^2} dx, I_2 = \int\limits_0^1 3^{x^3} dx$;

б) $I_1 = \int\limits_1^2 3^{x^2} dx, I_2 = \int\limits_1^2 3^{x^3} dx$;

в) $I_1 = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} dx, I_2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3} dx$

122. а) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{x^2} dx, I_2 = \int\limits_0^1 e^{x^3} dx$;

б) $I_1 = \int\limits_1^2 e^{x^2} dx, I_2 = \int\limits_1^2 e^{x^3} dx$;

в) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx, I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^3} dx$

§6. Невласні інтеграли першого роду
(Інтеграли по необмежених інтервалах).

Означення. Невласними інтегралами першого роду називаються інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f_1(t)dt$; $\int\limits_{-\infty}^{b} f_2(t)dt$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)dt$, де $f_1(t)$ - неперервна при $t \in [a, +\infty)$ функція, $f_2(t)$ - неперервна при $t \in (-\infty, b]$ функція, $f_3(t)$ - неперервна при $t \in (-\infty, \infty)$ функція.

Невласні інтеграли першого роду називаються *збіжними*, якщо існують (скінченні) границі відповідно:

$$I_1 = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f_1(t)dt,$$

$$I_2 = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f_2(t)dt,$$

$$I_3 = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int\limits_a^b f_3(t)dt.$$

Отримані значення границь називають *значеннями* (або *головними значеннями*) відповідних інтегралів. В протилежному випадку інтеграли називають *розбіжними*, а їх значення не існують.

Приклад. Розглянемо інтеграл $I_1 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$. Тоді за означенням

$$I_1 = \lim_{b\to\infty} \int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_2^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{2} - \operatorname{arctg}1\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Таким чином, досліджуваний інтеграл збіжний і його значення дорівнює $\frac{\pi}{8}$.

В багатьох випадках збіжність або розбіжність невласних інтегралів першого роду досліджується за допомогою наступних ознак збіжності (розбіжності).

1. Якщо для $f_1(t) \ge 0, t \in [a, +\infty)$, $\int\limits_a^b f_1(t)\,dt \le L, \forall b > a$, то $\int\limits_a^{+\infty} f_1(t)\,dt$ - збіжний. Аналогічну ознаку можна сформулювати для інтегралів $\int\limits_{-\infty}^b f_2(t)\,dt$ та $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\,dt$.

2. Якщо $0 \le f_1(t) \le g_1(t), t \in [a, \infty)$, то

а) зі збіжності $\int\limits_a^{+\infty} g_1(t)\,dt$ випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty} f_1(t)\,dt$;

б) з розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} f_1(t)\,dt$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty} g_1(t)\,dt$.

Аналогічну ознаку можна сформулювати для інтегралів $\int\limits_{-\infty}^b f_2(t)\,dt$ та $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\,dt$.

3.Якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f_1(t)|\,dt$, то збіжний і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_1(t)\,dt$, який в такому випадку називається *збіжним абсолютно*. Якщо $I_1 = \int\limits_a^{+\infty} f_1(t)\,dt$ збіжний, а $\int\limits_a^{+\infty} |f_1(t)|\,dt$ розбіжний, то I_1 називається *збіжним умовно.*

Аналогічно для інтегралів $\int\limits_{-\infty}^b f_2(t)\,dt$ та $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\,dt$.

Приклад. Нехай $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3+\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$. Оскільки $f_1(t) = \frac{1}{t^3+\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} < g_1(t) = \frac{1}{t^3}$, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ збіжний, бо $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dt}{t^3} = \lim\limits_{b\to=\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}\Bigg|_1^b\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, то

збіжний і досліджуваний інтеграл.

Приклад. Розглянемо $I = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\sin xdx}{x^4}$. Маємо оцінку:

$\left|f_2(t)\right| = \frac{|\sin x|}{x^4} \le \frac{1}{x^4}$. Оскільки $\overline{I} = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}$ - збіжний: $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{-1} \frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\Bigg|_a^{-1}\right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3a^3}\right) = \frac{1}{3}$, то абсолютно збіжний і досліджуваний інтеграл.

<u>Задачі.</u>

3.6.1. Обчисліть невласні інтеграли, або встановіть їх розбіжність.

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

3. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

4. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx$

5. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$

6. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$

9. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2}$

10. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^3}$

11. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

13. $\int\limits_e^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x}dx$

14. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$

15. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$

16. $\int\limits_0^{\infty} (x+1)e^{-x^2-2x+4}dx$

17. $\int\limits_0^\infty x\sin x dx$

18. $\int\limits_0^\infty x\cos x dx$

19. $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$

20. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

21. $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\sin 3x dx$

22. $\int\limits_0^\infty e^{-3x}\cos 2x dx$

§7. Невласні інтеграли другого роду

(Інтеграли від необмежених функцій).

Означення. Інтеграл $I=\int\limits_a^b f(t)dt$ називається *невласним інтегралом другого роду,* якщо існує точка $c\in[a,b]$ така, що $f(t)\underset{t\to c}{\to}\infty$, а при $t\in[a,b]\setminus\{c\}$ функція $f(x)$ неперервна.

Інтеграл називається *збіжним,* якщо існує (скінченна) границя

при $c=a$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(t)dt$;

при $c=b$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(t)dt$;

при $a<c<b$, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to0+0\\ \varepsilon_2\to0+0}}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(t)dt+\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(t)dt\right)$.

В такому випадку знайдені границі є значеннями відповідних інтегралів. Якщо границя не існує – інтеграл розбіжний, його значення не існує.

Правило.

1. Якщо на проміжку $[a,b]$ існує декілька точок, при прямуванні до яких підінтегральна функція прямує до нескінченності, то проміжок розбивається на частинки так, щоб кожна з них містила тільки одну таку точку. Отримані інтеграли по всіх частинках розбиття досліджуються окремо, вихідний інтеграл збіжний тоді і тільки тоді, коли всі вони збіжні.
2. Якщо проміжок інтегрування нескінченний і при цьому існує хоча б одна точка, при прямуванні до якої підінтегральна функція прямує до нескінченності, то проміжок інтегрування розбивається на скінченний проміжок, який містить вказану точку (або точки) та нескінченний

проміжок. Отримані невласні інтеграли досліджуються окремо. Вихідний інтеграл збіжний тоді і тільки тоді, коли всі вони збіжні.

Приклад 1. Дослідимо на збіжність інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$.

Підінтегральна функція $f(t) = (t-1)^{-2/3} \underset{t\to 1}{\to} \infty$, тому шукаємо границю

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (t-1)^{-2/3}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0+0} 3(t-1)^{1/3}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = 3\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(-\varepsilon^{1/3}+1\right) = 3.$$

Інтеграл збіжний, дорівнює 3.

Приклад 2. Дослідимо на збіжність $I = \int\limits_1^3 \frac{dt}{t^2-4t+3}$.

Підінтегральна функція $f(t) = \frac{1}{t^2-4t+3}$ прямує до нескінченності при $t\to 1$ та при $t\to 3$. Оскільки $[1,3] = [1,2]\cup[2,3]$, розглянемо $I_1 = \int\limits_1^2 \frac{dt}{t^2-4t+3}$ та $I_2 = \int\limits_2^3 \frac{dt}{t^2-4t+3}$.

Маємо: $I_1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dt}{t^2-4t+3} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dt}{(t-2)^2-1} =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln\left|\frac{t-2-1}{t-2+1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln 1 - \ln\left|\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}\right|\right) = -\infty.$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_2^{3-\varepsilon} \frac{dt}{t^2-4t+3} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_2^{3-\varepsilon} \frac{dt}{(t-2)^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2-1}{t-2+1}\right|\Bigg|_2^{3-\varepsilon} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} - \ln 1\right) = -\infty.$$

Таким чином, обидва отримані інтеграли розбіжні, тому розбіжний і вихідний інтеграл.

Приклад 3. Дослідимо на збіжність $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Проміжок інтегрування нескінченний, при цьому $f(t) = \frac{1}{t^2} \to \infty$ при $t \to 0$. Оскільки $[0,\infty) = [0,1]\cup[1,\infty)$, то розглянемо $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2}, I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. Маємо,

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dt}{t^2}=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\left.-\frac{1}{t}\right|_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty$$ - інтеграл розбіжний,

$$I_2=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dt}{t^2}=\lim_{b\to\infty}\left(\left.-\frac{1}{t}\right|_{1}^{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$ - інтеграл збіжний.

В силу того, що один з отриманих інтегралів розбіжний, розбіжний і досліджуваний інтеграл.

Збіжність (розбіжність) невласних інтегралів другого роду також можна досліджувати спираючись на відповідні ознаки.

4. Для збіжності інтеграла $I=\int_a^b f(t)dt$, якщо $f(t)\underset{t\to b}{\to}\infty$, $f(t)\ge0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $\int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt<C$, для $\forall\varepsilon>0$.
5. Якщо $0\le f(t)\le g(t)$ ($f(t)\to\infty, g(t)\to\infty$ при $t\to b$), то зі збіжності інтеграла $\int_a^b g(t)dt$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(t)dt$ і навпаки, з розбіжності інтеграла $\int_a^b f(t)dt$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(t)dt$.
6. Зі збіжності інтеграла $\int_a^b |f(t)|dt$ ($f(t)\to\infty, t\to b$) випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(t)dt$, який при цьому називається *збіжним абсолютно.* Якщо ж $\int_a^b f(t)dt$ - збіжний, а $\int_a^b |f(t)|dt$ - розбіжний, то перший з цих інтегралів називається *збіжним умовно.*

Приклад. Розглянемо інтеграл $I=\int_0^1\frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{t}}dt$. Функція $f(t)=\frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{t}}\to\infty, t\to0$. Але оскільки $\frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{t}}\le\frac{e+1}{\sqrt{t}}$ і $\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{\varepsilon}\frac{e+1}{\sqrt{t}}dt=\lim_{\varepsilon\to0+0}(e+1)2\sqrt{t}\Big|_{\varepsilon}^{1}=(2e+2)\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)=2e+2$, досліджуваний інтеграл є збіжним.

<u>Задачі.</u>

3.7.1. Обчисліть невласні інтеграли, або встановіть їх розбіжність.

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ 2. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

3. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}$ 4. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$

5. $\int\limits_{-1}^{-1/2} \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ 6. $\int\limits_{2}^{10} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$

7. $\int\limits_{0}^{1} x\ln xdx$ 8. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \ln xdx$

9. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ 10. $\int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2-24}}$

11. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+8}$ 12. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-x-2}$

13. $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ 14. $\int\limits_{3}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$

15. $\int\limits_{2}^{4} \frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$ 16. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

17. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x^3+5}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ 18. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

19. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}dx$ 20. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x-3}{\sqrt[5]{x^7}}dx$

§8. Деякі застосування визначених інтегралів

Застосувань визначеного інтеграла досить багато. Одним з найбільш вживаніших застосувань визначеного інтеграла є задача обчислення площ плоских фігур.

Площу криволінійної трапеції, що обмежена прямими $x=a, x=b$, віссю OX та невід'ємною функцією $y=f(x)$ знаходять за формулою

$$S=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Якщо плоска фігура обмежена прямими $x=a, x=b$ та функціями $y_1=f_1(x)$,

$y_2 = f_2(x)$, такими, що $f_2(x) \geq f_1(x), x \in [a,b]$, то її площу знаходять за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

Якщо трапеція обмежена параметрично заданою лінією: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$

(функції $x(t), y(t)$ неперервні та існує неперервна похідна $x'(t), t \in [\alpha, \beta]$), прямими $x(\alpha) = a, y(\beta) = b$ та віссю OX, то її площу шукають за формулою

$$S = \left| \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt \right|.$$

Приклад. Обчисліть площі фігур, що обмежені лініями:

а) $y = x^2 - 2x, y = x$;

б) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}, y \geq 0$.

Розв'язання. а) Знайдемо точки перетину параболи $y = x^2 - 2x$ та прямої $y = x$:

$x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right.$. Для $x \in [0;3]$ виконується нерівність $x^2 - 2x \leq x$, тому

$$S = \int_0^3 \left(x - \left(x^2 - 2x \right) \right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2 \right) dx = \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{1}{6} 27 = \frac{9}{2} \text{ (кв.од.)}$$

б) Умова вимагає знайти площу обмежену верхньою половиною астроїди та віссю OX. Вздовж верхньої половини астроїди $t \in [0;\pi]$. Відповідно,

$$S = \int_\pi^0 3\sin^3 t \cdot \left(3\cos^3 t \right)' dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^3 t \cdot \left(2\cos^3 t \right)' dt = \int_0^\pi 3\sin^3 t \cdot 9\cos^2 t \cdot \sin t \, dt = 27\int_0^\pi \sin^4 t \cos^2 t dt =$$

$$27\int_0^\pi \left(\sin^4 t - \sin^6 t \right) dt = 54\frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) = \frac{54\pi}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{27\pi}{32}$$

При обчисленні інтеграла використано формули Валіса.

Розглянемо випадок, коли порску фігуру задано в полярній системі $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$.

Таку плоску фігуру називають криволінійним сектором і її площу обчислюють за формулою $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Приклад.

Обчисліть площу, що обмежена верхньою половиною кардіоїди $\rho = 1 + \cos\varphi$ та віссю OX.

Розв’язання:

Для точок верхньої половини кардіоїди $\varphi \in [0;\pi]$, тому $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\pi} 1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4}$.

<u>Задачі.</u>

3.8.1. Обчисліть площу фігури, що обмежена заданими лініями.

1. $y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, x \in [0,3]$
2. $y = x\sqrt{36-x^2}, y = 0, 0 \le x \le 6$
3. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1$
4. $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2$
5. $y = \cos x \cdot \sin^2 x, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
6. $y = \sin x \cdot \cos^2 x, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
7. $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
8. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0, x = 1$
9. $y = x^2\sqrt{4-x^2}, y = 0, 0 \le x \le 2$
10. $y = x^2\sqrt{16-x^2}, y = 0, 0 \le x \le 4$
11. $y = x^2 + 3x + 2, y = x + 2$
12. $y = x^2 = x - 2, y = x - 1$
13. $y = 4x - x^2 + 1, y = x + 1$
14. $y = 6x - x^2 - 5, y = x - 1$
15. $y = (x-1)^4, y = x - 1$
16. $y = (x+2)^4, y = x + 2$
17. $y = x^2 - 2x + 1, y = \sqrt{x-1}$
18. $y = x^2 + 4x + 4, y = \sqrt{x+2}$
19. $y = x^2, y = \frac{1}{x}, x = 2$
20. $y = x^3, y = \frac{1}{x}, x = 2$

21. $y=\frac{1}{x^2+1}, y=\frac{x^2}{2}$

22. $y=\frac{1}{1+x^2}, y=\frac{x^3}{2}, x=0$

23. $y=4e^{-x}, y=5-e^x$

24. $y=5e^{-x}, y=6-e^x$

25. $y=\ln(x+6), y=3\ln x, y=0, x=0$

26. $y=\ln(x+2), y=2\ln x, y=0$

27. $y=\sin x, y=\cos x, x=0$

28. $y=\sin x, y=\cos x, y=0, \frac{\pi}{4}\le x\le \pi$

29. $y=\left||x|-2\right|, y=9-x^2$

30. $y=|x|+|x-1|, y=x^2-x-\frac{15}{4}$

31. $y=\ln x, y=\ln^3 x$

32. $y=\frac{\ln x}{4x}, y=x\ln x$

33. $y^2=x^2-x^4$

34. $y^2=\left(1-x^2\right)^3$

3.8.2. Обчисліть площу фігури, що обмежена параболою та дотичною до неї, що проходить через точку A:

35. $y=x^2-2x+12, A(1,2)$

36. $y=1-x^2, A(0,10)$

37. На які площі розбиває парабола $y=x^2$ круг $x^2+y^2=2$.

38. На які площі розбиває лінія $y^3=x^2$ круг $x^2+y^2=2$.

3.8.3. Обчисліть площу фігури, що обмежена заданими лініями.

39. $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $\rho=2\cos\varphi$ (внутрішня частина кола).

40. $\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ (внутрішня частина кола).

41. $\rho=6\cos 3\varphi, \rho=3$ (зовнішня частина кола).

42. $\rho=4\sin 3\varphi, \rho=2$ (зовнішня частина кола).

43. $\rho=2\sqrt{\cos 2\varphi}, \rho=\sqrt{2}$ (внутрішня частина кола).

44. $\rho=3\sqrt{\sin 2\varphi}, \rho=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (внутрішня частина кола).

45. $\rho\le 3\sin\varphi, \rho\le 3\sqrt{2}\cos\varphi$.

46. $\rho\le 6\cos\varphi, \rho\le 6\sqrt{2}\sin\varphi$.

47. $\rho = 4\,\mathrm{tg}\,\varphi, \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

48 $\rho = \varphi, \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Список літератури

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: У 2ч.—К.: Техніка, 2000. – Ч .1. –591с.; Ч.2.—791с.
2. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 3 т. – М.: Наука, 1985.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекцій по высшей математике: В 2 ч. – М.: Рольф, 2000. –Ч.1. –280с.
4. Мордкович А.Г.,Солодовников А.С. Математический анализ. М.: Высшая школа, 1990. – 416с.
5. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. К.: Либідь, 1990. – 322с.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. –446с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2001. –648с.
8. Вища математика: Збірник задач / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін. – К.: Вища школа, 1999. –480с.
9. Сборник задач по математике для втузов: В 3 ч. Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А.Болгов, А.В.Ефимов, А.Ф.Каракулин и др. – М.: Наука, 1986. – Ч.1. – 368с.
10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высшая школа, 2001. – 410с.
11. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика: В 4 ч. Навчальний посібник. Частина 1. –К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. –296с.