МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЗАДАЧНИК З КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ ВУЗІВ

ЧАСТИНА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Київ - 2017

Задачник з курсу математичного аналізу для студентів технічних ВНЗ. Частина 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних/ Укл. Ю.П.Буценко, О.О.Дем'яненко, К.Ю.Мамса, М.М.Перестюк – К.:, 2017.- КПІ ім.. Ігоря Сікорського -56с.

Гриф надано
Методичною радою ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського
Протокол №4 від 26 травня 2017 року
Свідоцтво про надання грифу №22051711

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЗАДАЧНИК
З КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ
ТЕХНІЧНИХ ВУЗІВ

ЧАСТИНА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Укладачі: *Буценко Юрій Павлович,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.*
Дем'яненко Ольга Олегівна ,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.
Мамса Катерина Юріївна ,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.
Перестюк Марія Миколаївна ,кандидат фіз.-мат. наук.
Рецензенти: **Каліновська І.Ю., доцент, к.ф.-м.н.**

Дане навчальне видання може використовуватись як на практичних заняттях з математичного аналізу, так і для самостійної роботи студентів при підготовці до модульної контрольної роботи та до іспиту з кредитного модуля «Математичний аналіз – 2»

Функції багатьох змінних

Будемо називати змінні величини x, y, z (аналогічно $x_1, x_2, \ldots, x_n$) незалежними, якщо кожна з них може приймати довільні значення зі своєї області зміни незалежно від того, які значення приймають при цьому інші змінні.

Якщо кожній системі значень цих змінних у областях їх зміни відповідає деяке значення змінної u, то називатимемо її функцією цих незалежних змінних (її аргументів).

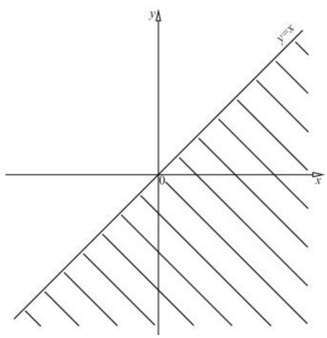
Приклад 1. Нехай $z = x + y$. В цьому випадку x та y незалежні змінні, які можуть приймати довільні дійсні значення, z - функція цих змінних (аргументів). Пишуть $z = f\left(x, y\right)$.

Приклад 2. Нехай $u = x^2 + y^2 + z^2$. В цьому випадку незалежні змінні x, y, z можуть приймати довільні дійсні значення, u - функція аргументів x, y, z. Пишуть $u = f\left(x, y, z\right)$.

Областю визначення функції багатьох змінних називають сукупність значень цих змінних, для яких функція визначена.

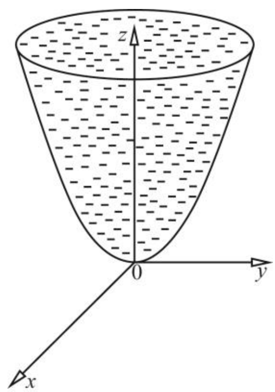
Приклад 3. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{x - y}$.

Оскільки логарифм визначений лише для додатних значень аргументу, маємо: $x - y \geq 0$, отже $y \leq x$, що відповідає заштрихованій на рисунку області координатної площини xOy.



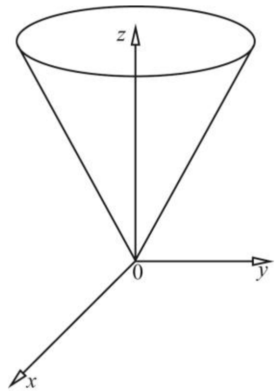
Приклад 4. Знайти та зобразити на координатній площині область визначення функції $u = \sqrt{z - x^2 - y^2}$.

В цьому випадку маємо: $z - x^2 - y^2 \geq 0$, $z \geq x^2 + y^2$, що відповідає зображеній на рисунку області, яка включає точки



$M(x,y,z)$ тривимірного простору, які знаходяться всередині параболоїда $z = x^2 + y^2$ та на самому цьому параболоїді.

Для функцій $z = f(x,y)$ *поверхню у тривимірному просторі, що відповідає такому рівнянню,називають графіком функції двох змінних* $z = f(x,y)$.



Приклад 5. Зобразити графік функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

В цьому випадку маємо верхню частину (оскільки $z \geq 0$) конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$ (див. рисунок).

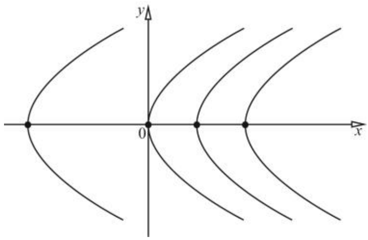
Функції $z = f(x,y)$ *та* $u = f(x,y,z)$ *можуть розглядатись як функції точок відповідно на координатній площині (точка* $M(x,y)$ *) та у тривимірному просторі (точка* $M(x,y,z)$ *), якщо на площині та у просторі визначені системи координат.*

Для функції $z = f(x,y)$ ***лініями рівня*** *називають геометричні місця точок, яким відповідають однакові значення функції (їх рівняння* $f(x,y) = const$, *вони можуть розглядатись як лінії перетину поверхні* $z = f(x,y)$ *площинами* $z = const$.

Для функції $u = f(x,y,z)$ ***поверхнями рівня*** *називають геометричні місця точок, визначені рівняннями* $f(x,y,z) = const$.

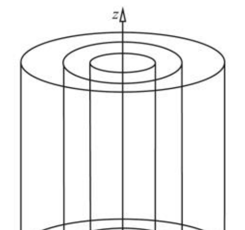
Приклад 6. Побудувати лінії рівня функції $z = y^2 - 2x$.

Переходячи від рівняння $y^2 - 2x = c$ до рівняння $y^2 = 2\left(x + \frac{c}{2}\right)$ отримуємо сімейство парабол, вершини яких мають координати $\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$ при наявності симетрії відносно вісі абсцис та вітках направлених вправо (див. рисунок).



Приклад 7. Побудувати поверхні рівня функції $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

Рівнянням $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c$ відповідає сімейство еліптичних циліндричних поверхонь (див. рисунок).



Границя функції в точці

Границею функції $u = f(M)$ при M що прямує до M_0 називається число A $\left(A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)\right)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при виконанні нерівності $|MM_0| < \delta$ для всіх точок M, які їй задовольняють, матиме місце нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При цьому:

- ✓ під $|MM_0|$ розумітимемо відстань між точками M та M_0 на площині (для функції $z = f(x, y)$), у тривимірному просторі (для функції $u = f(x, y, z)$) або в n - вимірному просторі (для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$);
- ✓ вважатимемо функцію $f(M)$ визначеною принаймні у деякому околі точки M_0 (можливо, за винятком самої цієї точки);
- ✓ для функцій $f_1(M)$ та $f_2(M)$, що прямують до деяких (скінченних) границь при $M \to M_0$ справедливі наступні рівності:

а) $\lim\limits_{M \to M_0} \left[f_1(M) + f_2(M) \right] = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) + \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$;

б) $\lim\limits_{M \to M_0} \left[f_1(M) \cdot f_2(M) \right] = \lim\limits_{M \to M_0} f_1(M) \cdot \lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f_1(M)}{f_2(M)} = \dfrac{\lim\limits_{M \to M_0} f_1(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M)}$, при $\lim\limits_{M \to M_0} f_2(M) \neq 0$.

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{\substack{y\to 1\\ x\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористаємось еквівалентністю $\sin x \sim x$ при $x\to 0$. Отримаємо

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ x\to 0}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{y\to 1\\ x\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\,y=1.$$

Приклад 9. Знайти границю $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Маючи невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, що дозволить обмежитись вимогою прямування до 0 лише полярного радіуса

$$\rho:\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)}{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\cos 2\varphi.$$

В силу того, що для різних значень φ отриманий вираз може приймати різні значення (від -1 до 1), ця границя не існує.

*Функція $u=f(M)$ називається **неперервною в точці** M_0, якщо виконуються одночасно наступні три умови:*

а) існує значення $f(M_0)$;

б) існує границя $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

в) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то функція має розрив в точці M_0.

При цьому:

- ✓ для функцій багатьох змінних можуть існувати **лінії розривів, поверхні розривів**;
- ✓ функція $f(M)$ називається неперервною в області D, якщо вона неперервна у кожній точці цієї області;
- ✓ для неперервних у точці M_0 функцій границі можуть знаходитись шляхом обчислення повторних границь;
- ✓ неперервні функції мають нескінченно малий приріст при нескінченно малих приростах всіх своїх аргументів;
- ✓ функції багатьох змінних, задані за допомогою елементарних функцій однієї змінної, неперервні в усіх точках своїх областей визначення.

Приклад 10. Дослідити на неперервність функцію $z = \arcsin\left(x^2 + y^2\right)$.

Оскільки цю функцію визначено для значень $-1 \le x^2 + y^2 \le 1$, то вона є неперервною в крузі $x^2 + y^2 \le 1$ і не визначена в усіх інших точках площини.

Приклад 11. Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Дана функція не визначена при $x - y = 0$, таким чином її точки розриву утворюють пряму $y = x$.

Приклад 12. Довизначити функцію $z = \dfrac{y^5}{x^4 + y^4}$ в точці $M(0,0)$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці.

Дана функція не визначена в точці $M(0,0)$. Знайдемо її границю

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}}\frac{y^5}{x^4+y^4}\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ \rho\to 0\end{array}\right|=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^5\sin^{5\varphi}}{\rho^4\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\sin^{5\varphi}}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi}=0$$

Таким чином, для того, щоб точка $M\left(0,0\right)$ була точкою неперервності функції $z=\dfrac{y^5}{x^4+y^4}$, необхідно покласти її значення в цій точці рівним 0.

Частинні похідні функцій багатьох змінних пов'язані з частинними приростами цих функцій. Так, якщо $z=z\left(x,y\right)$, то частинний приріст по змінній x є $\Delta_x z=z\left(x+\Delta x,y\right)-z\left(x,y\right)$, частинна похідна по змінній x визначається як $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ (позначається також символом z'_x).

Відповідно, $\Delta_y z=z\left(x,y+\Delta y\right)-z\left(x,y\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=z'_y$.

При цьому:

- ✓ якщо розглядається функція більшого числа змінних (наприклад $u=f\left(x,y,z\right)$ або $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$), то частинні похідні запроваджуються аналогічним чином (через частинні прирости) та аналогічним чином позначаються;
- ✓ при диференціюванні функцій багатьох змінних використовуються ті ж самі правила диференціювання, що й для функцій однієї змінної;
- ✓ якщо функцію визначено за допомогою елементарних функцій, то залишаються в силі формули для їх похідних;
- ✓ при диференціюванні по одній із змінних, інша (або інші) вважаються сталими.

Приклад 13. Знайти частинні похідні функції

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - y.$$

Вважаючи y сталою величиною маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 1$,

відповідно $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1$.

Приклад 14. Знайти частинні похідні функції $z = \frac{x+y}{x^2 - y^2}$.

Спростимо вираз для функції, вважаючи, що $x - y \neq 0$:

$$z = \frac{x+y}{x^2 - y^2} = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x-y}.$$

Таким чином, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{(x-y)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x-y)^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{(x-y)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(x-y)^2}.$$

Зауважимо, що при $x^2 - y^2 = 0$ функція не є неперервною, тому її похідна в цьому випадку не існує.

Приклад 15. Знайти частинні похідні функції

$$z = (x+y)\cos(xy).$$

Маємо

$$z'_x = (x+y)'_x \cdot \cos xy + (x+y) \cdot (\cos xy)'_x =$$

$$1 \cdot \cos xy + (x+y) \cdot (-\sin xy) \cdot (xy)'_x =$$

$$= \cos xy - y(x+y)\sin xy.$$

$$z'_y = (x+y)'_y \cdot \cos xy + (x+y) \cdot (\cos xy)'_y =$$

$$= 1 \cdot \cos xy + (x+y) \cdot (-\sin xy) \cdot (xy)'_y =$$

$$= \cos xy - x(x+y)\sin xy.$$

Приклад 16. Знайти частинні похідні функції $z = x^y$.

В цьому випадку $z'_x = yx^{y-1}$ (як похідна степеневої функції), $z'_y = x^y \ln x$ (як похідна показникової функції).

Приклад 17. Знайти частинні похідні функції $z = \ln\frac{x-y}{x+y}$.

Маємо

$$z'_x = \frac{1}{\frac{x-y}{x+y}} \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_x = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{x^2-y^2};$$

$$z'_y = \frac{1}{\frac{x-y}{x+y}} \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_y = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{x^2-y^2}.$$

Приклад 18. Знайти частинні похідні функції

$$u = z + xy + \operatorname{arctg}(xyz).$$

В цьому випадку $u'_x = y + \frac{1}{1+(xyz)^2} \cdot (xyz)'_x = y + \frac{yz}{1+x^2y^2z^2}$;

$$u'_y = x + \frac{1}{1+(xyz)^2} \cdot (xyz)'_y = x + \frac{xz}{1+x^2y^2z^2};$$

$$u'_z = 1 + \frac{1}{1+(xyz)^2} \cdot (xyz)'_z = 1 + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}.$$

Приклад 19. Довести, що функція $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin xy$ задовольняє рівнянню $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}$;

Звідки

$$x^2\left(-\frac{y^2}{3x^2}+\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\right)-xy\left(\frac{2y}{3x}+\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\right)+y^2=$$

$$=-\frac{y^2}{3}+\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{2y^2}{3}-\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y^2=0.$$

Якщо функцію багатьох змінних задано неявно, то для знаходження її частинних похідних використовуються наступні формули:

- ✓ *у випадку* $f(x,y,z)=0$ *частинні похідні функції* $z=z(x,y)$

  дорівнюють $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$; $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$;

- ✓ *у випадку* $f(x,y,z,u)=0$ *частинні похідні функції*

  $u=u(x,y,z)$ *дорівнюють*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial u}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}}.$$

Приклад 20. Знайти частинні похідні функції $z=z(x,y)$

неявно заданої рівнянням $\sin x-\sin(x+y)+\sin(y-z)=0$.

Тут $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos x-\cos(x+y)=2\sin\dfrac{y}{2}\sin\left(x+\dfrac{y}{2}\right)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\cos(x+y)+\cos(y-z)=-2\sin\frac{x+z}{2}\sin\frac{x+2y-z}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\cos(y-z).$$

Тому $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\sin\dfrac{y}{2}\sin\left(x+\dfrac{y}{2}\right)}{\cos(y-z)}$; $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2\sin\dfrac{x+z}{2}\sin\dfrac{x+2y-z}{2}}{\cos(y-z)}$.

Приклад 21. Знайти частинні похідні функції $u=u(x,y,z)$ неявно заданої рівнянням $\operatorname{tg}\left(x^2+y^2+z^2\right)=\ln(u-xyz)$.

Маємо $\operatorname{tg}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\ln(u-xyz)=0$.

Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}+\dfrac{yz}{u-xyz}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}+\frac{xz}{u-xyz};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}+\frac{xy}{u-xyz};\quad \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{-1}{u-xyz};$$

таким чином $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x(u-xyz)}{\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}+yz$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y(u-xyz)}{\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}+xz;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z(u-xyz)}{\cos^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}+xy.$$

Зауважимо, що аналогічним чином може бути знайдена похідна $\dfrac{dy}{dx}$ *функції однієї змінної* $y=y(x)$, *заданої неявно рівнянням* $f(x,y)=0$. *В цьому випадку* $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$.

Приклад 22. Із рівності $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

маємо $x^4 + y^4 - x^2 y^2 = 0$. Звідки $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2xy^2$;

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x^2 y$. Тому $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 - 2xy^2}{4y^3 - 2x^2 y} = \frac{x\left(y^2 - 2x^2\right)}{y\left(2y^2 - x^2\right)}$.

***Функція багатьох змінних називається складеною**, якщо її аргументи є, в свою чергу, функціями однієї або багатьох змінних. Для функції $z = z\left(x, y\right)$ можливі (серед іншого) наступні випадки:*

- ✓ *якщо $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$, то функція $z = z\left(x, y\right)$ є функцією однієї змінної t, причому* $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$;
- ✓ *якщо $x = x\left(u, v\right)$, $y = y\left(u, v\right)$, то функція $z = z\left(x, y\right)$ є функцією двох змінних u та v, причому* $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$;

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} .$$

Приклад23. Нехай $z = x^3 + y^3$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Знайдемо $\frac{dz}{dt}$.

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$,

то

$$\frac{dz}{dt} = 3x^2 \cdot \left(-\sin t\right) + 3y^2 \cdot \cos t = -3\cos^2 t \sin t + 3\sin^2 t \cos t = \\ = \frac{3}{2}\sin 2t\left(\sin t - \cos t\right) .$$

Приклад 24. Для функції $z = \sin(x+y)$ знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ по змінній x та повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$ по змінній x, якщо $y = \arcsin x$.

Аналогічно до попереднього $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+y)$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)\cdot 1 + \cos(x+y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \cos(x+y)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Приклад 25. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ функції $z = \sqrt{x^2+y^2}$, якщо $x = u+v,\ y = uv$.

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial x}{\partial v} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial u} = v,\ \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Таким чином

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot v =$$
$$= \frac{u+v}{\sqrt{(u+v)^2+(uv)^2}} + \frac{uv}{\sqrt{(u+v)^2+(uv)^2}}\cdot v = \frac{u+v+uv^2}{\sqrt{(u+v)^2+(uv)^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot u =$$
$$= \frac{u+v}{\sqrt{(u+v)^2+(uv)^2}} + \frac{uv}{\sqrt{(u+v)^2+(uv)^2}}\cdot u = \frac{u+v+u^2v}{\sqrt{(u+v)^2+(uv)^2}}.$$

Приклад 26. Функція $u=u\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ називається однорідною функцією порядку α, якщо для довільного числа $\lambda\neq 0$ справедлива рівність $z\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n\right)=\lambda^{\alpha}\cdot z\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$.

Доведемо, що для однорідної нульового порядку функції $z=z\left(x,y\right)$ справедлива рівність Ейлера $xz'_x+yz'_y=0$.

Дійсно, для такої функції, поклавши $\lambda=\dfrac{1}{x}$, маємо

$$z\left(1;\frac{y}{x}\right)=z\left(x,y\right),$$

тому знайдемо частинні похідні складеної функції $z\left(1;\dfrac{y}{x}\right)$:

$$\left(z\left(1;\frac{y}{x}\right)\right)'_x=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(1;\frac{y}{x}\right)}\cdot 0+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(1;\frac{y}{x}\right)}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right);$$

$$\left(z\left(1;\frac{y}{x}\right)\right)'_y=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(1;\frac{y}{x}\right)}\cdot 0+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(1;\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{1}{x}.$$

Після підстановки переконуємось у справедливості рівності Ейлера.

Геометричні застосування частинних похідних полягають у тому, що при побудові дотичної площині та нормальної прямої до поверхні у тривимірному просторі заданої рівнянням $f\left(x,y,z\right)=0$. *Їх рівняння в точці* $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ *цієї поверхні мають вигляд:*

дотична площина

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\left(x-x_0\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\left(y-y_0\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\left(z-z_0\right)=0,$$

нормальна пряма $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Приклад 27. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z - x - \ln\frac{y}{z} = 0$ в точці $M_0\left(1,1,1\right)$.

В цьому випадку маємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y}, \; \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + \frac{1}{z}, \; \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{M_0} = 2.$$

Таким чином, рівняння дотичної площини

$\left(-1\right)\left(x-1\right) + \left(-1\right)\left(y-1\right) + 2\left(z-1\right) = 0$, або $x + y - 2z = 0$;

Рівняння нормалі (нормальної прямої) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Похідною функції $z = z\left(x, y\right)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ *називається функція*

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \lim_{t\to 0+0} \frac{z\left(x + t\cos\alpha, y + t\cos\beta\right) - z\left(x, y\right)}{t} = \\ = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta ,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta$ *- напрямні косинуси вектора* $\vec{l}$ *.*

Приклад 28. Знайти похідну функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точці $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \left\{1,1\right\}$.

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \; \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = \sqrt{2}; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \; \cos\beta = \frac{1}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \; \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Похідною функції $u = u\left(x, y, z\right)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ *називається функція*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \lim_{t\to 0+0} \frac{u\left(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+\cos\gamma\right)-u\left(x,y,z\right)}{t} = $$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *- напрямні косинуси вектора* $\vec{l}$ *.*

Приклад 29. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ за напрямом вектора $\vec{l} = \{2,-3,6\}$ для всіх значень x, y, z.

Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z;\ \cos\alpha = \frac{2}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{2}{7};$$
$$\cos\beta = -\frac{3}{\left|\vec{l}\right|} = -\frac{3}{7};\ \cos\gamma = \frac{6}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{6}{7}.$$

Таким чином $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{4}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{12}{7}z$ у кожній точці $M\left(x,y,z\right)$.

Градієнтом функції $z = z\left(x,y\right)$ *(*$u = u\left(x,y,z\right)$ *) у точці* $M_0\left(x_0, y_0\right)$ *(*$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ *) називається вектор*

$$\overrightarrow{grad\ z} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\right\}$$

$$\left(\overrightarrow{grad\ u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}\right\}\right).$$

Похідна за напрямом вказує швидкість зміни функції (скалярного поля) при русі у напрямку вектора $\vec{l}$ *. Градієнт у кожній точці є напрямом найшвидшої (за абсолютною величиною відповідної похідної) зміни функції.*

Приклад 30. Знайти градієнти функції $u = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ у точках $M_1(1,1,1)$ та $M_2(1,-2,1)$ і кут між ними.

Обчислимо частинні похідні функції $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yz\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \cdot 2x; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = \frac{1}{9}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_2} = -\frac{2}{9};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \cdot 2y; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = \frac{1}{9}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_2} = -\frac{1}{18};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xy\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \cdot 2z; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = \frac{1}{9}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_2} = -\frac{2}{9};$$

таким чином, $\vec{a} = \left.\overrightarrow{grad\ u}\right|_{M_1} = \left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right\}$;

$\vec{b} = \left.\overrightarrow{grad\ u}\right|_{M_2} = \left\{-\frac{2}{9}, -\frac{1}{18}, -\frac{2}{9}\right\}$;

кут α між цими градієнтами знаходиться з рівності

$$\alpha = \arccos\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \arccos\frac{-\frac{1}{18}}{\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{18}\sqrt{33}} = .$$

$$= \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{\sqrt{11}}$$

Повним приростом функції багатьох змінних *називають:*

- ✓ *у випадку* $z = z(x, y)$ *величину*

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y);$$

- ✓ *у випадку* $u = u(x, y, z)$ *величину*

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z).$$

Приклад 31. Знайти частинні та повний прирости функції $z = x^2 + xy + y^2$ при $x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = -0,2$.

Маємо

$$z(x_0, y_0) = 7; \quad \Delta_x z = z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = 0,41;$$

$$\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = -0,96;$$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = -0,57.$$

Якщо повний приріст функції у точці має вигляд $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + R(x, y, \Delta x, \Delta y)$,

причому $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{R(x, y, \Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$, *то функція* $z = z(x, y)$ *називається* ***диференційовною*** *в цій точці, головна, лінійна відносно приростів аргументів частина приросту функції* $A\Delta x + B\Delta y$ *- її повний диференціал* dz.

В цьому випадку $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \Delta y$.

Аналогічно, для функції $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ *диференційованість означає, що*

$$\Delta u = u(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - u(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \Delta x_k + R(x_1, x_2, ..., x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{R(x_1, x_2, ..., x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}} = 0,$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_M \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_M \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_M \cdot \Delta x_n, \text{ при}$$

$$M(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Приклад 32. Знайти повний диференціал функції $z=(x+y)e^{xy}$ в точці $M_0(0,1)$.

Обчислимо частинні похідні функції у вказаній точці:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}+(x+y)e^{xy}\cdot y; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=2;\\&\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}+(x+y)e^{xy}\cdot x; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=1\end{aligned};$$

$dz=2\Delta x+\Delta y$.

Приклад 33. Знайти повний диференціал функції

$$u=\ln(xy+xz+yz).$$

Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y+z}{xy+xz+yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+z}{xy+xz+yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x+y}{xy+xz+yz};$$

$$du=\frac{1}{xy+xz+yz}\left((y+z)dx+(x+z)dy+(x+z)dz\right).$$

Приклад 34. Знайти повний диференціал функції $z(x,y)$ заданою рівністю $x^2+y^2-2z^2=\ln z$ у точці $M_0(1,-1,1)$.

Маємо співвідношення $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2-\ln z=0$,

що визначає функцію неявно. Тому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{2x}{-4x-\frac{1}{z}}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{2}{5};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{2y}{-4x-\frac{1}{z}}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\frac{2}{5};$$

$$\left.dz\right|_{M_0}=\frac{2}{5}(dx-dy).$$

Повні диференціали функцій багатьох змінних застосовуються для наближених обчислень значень цих функцій за наступною схемою: якщо, наприклад, для функції $z = z(x, y)$ *відомі її значення та значення обох її частинних похідних у точці* $M_0(x_0, y_0)$, *то наближене значення цієї функції в точці* $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ *при малих* $\Delta x, \Delta y$, *знаходять за формулою*

$$z\Big|_{M_1} \approx z\Big|_{M_0} + dz\Big|_{M_0} = z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \Delta y\,.$$

Приклад 35. Обчислити наближено $e^{(1{,}02)^2-(0{,}97)^2}$.

Розглянемо функцію $z = e^{x^2-y^2}$, взявши за $M_0(1{,}1)$ і поклавши $\Delta x = 0{,}02;\ \ \Delta y = -0{,}03$, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2};\ \ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = 2;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2};\ \ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = -2;\ \ z\Big|_{M_0} = 1\,;$$

$$z(1{,}02; 0{,}97) \approx 1 + 2\cdot 0{,}02 - 2\cdot(-0{,}03) = 1{,}1\,.$$

Похідні вищих порядків функцій багатьох змінних визначаються індуктивно: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx}$ *- похідна другого порядку по змінній* x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy}$ *- мішана похідна другого порядку;*

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\right) = u'''_{xyz}$ *- похідна третього порядку.*

Приклад 36. Знайти всі похідні другого порядку функції

$$z = ye^{x+y}\,.$$

Знаходимо спочатку перші похідні:

$$z'_x = y\left(e^{x+y}\right)'_x = ye^{x+y};\qquad z'_y = e^{x+y} + ye^{x+y} = (y+1)e^{x+y}\,.$$

Тепер другі:

$$z''_{xx} = \left(ye^{x+y}\right)'_x = ye^{x+y}; \qquad z''_{xy} = \left(ye^{x+y}\right)'_y = \left(y+1\right)e^{x+y};$$

$$z''_{yx} = \left(\left(y+1\right)e^{x+y}\right)'_x = \left(y+1\right)e^{x+y};$$

$$z''_{yy} = \left(\left(y+1\right)e^{x+y}\right)'_y = e^{x+y} + \left(y+1\right)e^{x+y} = \left(y+2\right)e^{x+y}.$$

Має місце ***теорема Шварца****: якщо всі частинні похідні є неперервними по всіх своїх змінних, то результат частинного диференціювання не залежить від послідовності диференціювання.*

Зокрема, наприклад, якщо похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неперервні, то має місце рівність $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад 37. Знайти похідну $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ для функції

$$u = xy^2 z^3.$$

Оскільки мішана похідна не залежить від порядку диференціювання (в даному випадку легко перевірити існування та неперервність похідних довільного порядку при $\left(x, y, z\right) \in R^3$), то можливо діяти наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yz^3; \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2y \cdot 3z^2 = 6yz^2$$

.

Диференціали вищих порядків для функцій багатьох змінних визначаються теж індуктивно:

$$d^2 u = d\left(du\right); \quad d^3 u = d\left(d^2 u\right); \quad \ldots \quad d^n u = d\left(d^{n-1} u\right).$$

На прикладі функції двох змінних $z = z(x, y)$ *маємо*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

В загальному випадку маємо $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z$

(вираз у дужках формально підноситься до n *-го степеня, після чого до символу* ∂^n *дописується* z *.*

У $n-$*вимірному випадку* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *має місце*

аналогічна символічна формула $d^n u = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^n u$ *.*

Приклад 38. Знайти $d^2 z$ для функції $z = y \ln \frac{x}{y}$.

Для цього необхідно обчислити всі похідні другого порядку даної функції z .

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln\frac{x}{y} + y \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \ln\frac{x}{y} - 1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y}.$$

Звідси $d^2 z = -\frac{y}{x^2} dx^2 + 2\frac{1}{x} dxdy + -\frac{1}{y} dy^2$.

Приклад 39. Знайти d^2u для функції $u = e^{xyz}$.

Маємо функцію трьох змінних, тому

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz \right)^2 u =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz$$

Обчислимо відповідні частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (yz)^2 e^{xyz}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (xz)^2 e^{xyz}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (xy)^2 e^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = ye^{xyz} + xy^2ze^{xyz};$$

.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = xe^{xyz} + x^2yze^{xyz}$$

Таким чином

$$d^2u = (yz)^2 e^{xyz}dx^2 + (xz)^2 e^{xyz}dy^2 + (xy)^2 e^{xyz}dz^2 +$$

$$+2\left(ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz}\right)dxdy +$$

$$+2\left(ye^{xyz} + xy^2ze^{xyz}\right)dxdz + 2\left(xe^{xyz} + x^2yze^{xyz}\right)dydz =$$

$$= e^{xyz}\left((yz)^2 dx^2 + (xz)^2 dy^2 + (xy)^2 dz^2\right) +$$

$$2e^{xyz}(1 + xyz)(zdxdy + ydxdz + xdydz).$$

Нехай функція $u = f(M)$, $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, *неперервна разом зі всіма своїми частинними похідними до* $(n+1)$*-го порядку включно у деякому околі точки* $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, *тоді приріст цієї функції*

$\Delta f\left(M\right)=f\left(M\right)-f\left(M_0\right)$ *може бути представлений у вигляді*

$$\Delta f=df\left(M\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(M\right)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf\left(M\right)+\frac{1}{\left(n+1\right)!}d^{n+1}f\left(M+\Theta\right),$$

де $\Theta\left(x_1^{(0)}+\theta_1\left(x_1-x_1^{(0)}\right),\ldots,x_n^{(0)}+\theta_n\left(x_n-x_n^{(0)}\right)\right)$.

Таке представлення називається ***формулою Тейлора*** n***-го порядку*** *для функції* $u=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ *в околі точки* M_0*. Для функції двох змінних* $z=f\left(x,y\right)$ *в околі точки* $M_0\left(x_0,y_0\right)$ *вона може бути записана у вигляді:*

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}\left(y-y_0\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{M_0}\left(x-x_0\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{M_0}\left(y-y_0\right)^2\right)+$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}d^nf\Big|_{M_0}+\frac{1}{\left(n+1\right)!}d^{n+1}f\Big|_{M_1},\text{ де}$$

$$M_1\left(x_0+\theta_1\left(x-x_0\right),y_0+\theta_2\left(y-y_0\right)\right),\ \theta_1,\theta_2\in\left[0;1\right].$$

Приклад 40. Розвинути за формулою Тейлора третього порядку в околі точки $M_0\left(1,0\right)$ функцію $z=\ln\left(x+y\right)$.

В цьому випадку маємо: $z\left(M_0\right)=\ln 1=0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y};\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}=1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}=1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{\left(x+y\right)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0}=-1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\left(x+y\right)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}=-1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{\left(x+y\right)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0}=-1;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{2}{\left(x+y\right)^3};\quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{M_0}=2;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{1}{\left(x+y\right)^3};\quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right|_{M_0}=2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{1}{\left(x+y\right)^3};\quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right|_{M_0}=2;\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{2}{\left(x+y\right)^3};\quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right|_{M_0}=2;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=-\frac{6}{\left(x+y\right)^4};\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=-\frac{6}{\left(x+y\right)^4};\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}=-\frac{6}{\left(x+y\right)^4};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}=-\frac{6}{\left(x+y\right)^4};\quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=-\frac{6}{\left(x+y\right)^4};$$

Таким чином

$$\ln\left(x+y\right)=\left(x-1\right)+y+\frac{1}{2!}\left(-\left(x-1\right)^2-2\left(x-1\right)y-y^2\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(2\left(x-1\right)^3+6\left(x-1\right)^2 y+6\left(x-1\right)y^2+2y^3\right)+$$

$$+\frac{1}{4!}\left(-\frac{6\left(x-1\right)^4}{\left(1+\theta_1\left(x-1\right)+\theta_2 y\right)^4}-\frac{4\cdot 6\left(x-1\right)^3 y}{\left(1+\theta_1\left(x-1\right)+\theta_2 y\right)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{6\cdot 6\left(x-1\right)^2 y^2}{\left(1+\theta_1\left(x-1\right)+\theta_2 y\right)^4}\right)+$$

$$+\frac{1}{4!}\left(-\frac{4\cdot 6\left(x-1\right)y^3}{\left(1+\theta_1\left(x-1\right)+\theta_2 y\right)^4}-\frac{6y^4}{\left(1+\theta_1\left(x-1\right)+\theta_2 y\right)^4}\right)=$$

$$=\left(\left(x-1\right)+y\right)-\frac{1}{2}\left(\left(x-1\right)+y\right)^2+\frac{1}{3}\left(\left(x-1\right)+y\right)^3-\frac{\left(\left(x-1\right)+y\right)^4}{4\left(1-\theta_1+\theta_1 x+\theta_2 y\right)^4}$$

Екстремуми функцій багатьох змінних.

Функція $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *має в точці* $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ ***локальний екстремум****, якщо така точка належить разом з деяким своїм околом області визначення цієї функції та у вказаному околі для всіх його точок* $M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *крім т.* M_0 *виконується одна з нерівностей* $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) > f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ *(точка локального мінімуму),*
або $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) < f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ *(точка локального максимуму).*

Необхідною умовою існування екстремуму *диференційованої функції в точці є рівність нулю в цій точці всіх її перших частинних похідних:* $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0} = \ldots = \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{M_0} = 0.$
Точки, для яких така умова виконана, називаються стаціонарними точками функції $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$*.*

Якщо $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$- точка екстремуму функції $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, то або $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$- стаціонарна точка, або в цій точці функція недиференційовна.

Достатні умови існування екстремуму в точці.

Нехай $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$- стаціонарна точка функції $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, причому ця функція двічі диференційована в деякому околі точки $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ і всі її другі похідні неперервні в точці $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$. Тоді:

- ✓ якщо другий диференціал $d^2u\big|_{M_0}$ як функція змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ має сталий знак при всіх можливих наборах значень $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, не рівних одночасно нулю, то функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в точці $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ екстремум, а саме – максимум при $d^2u\big|_{M_0} < 0$ і мінімум при $d^2u\big|_{M_0} > 0$;
- ✓ якщо $d^2u\big|_{M_0}$ є знакозмінною функцією змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, тобто, приймає як додатні, так і від’ємні значення, то точка $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ не є точкою екстремуму функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$;
- ✓ якщо $d^2u\big|_{M_0} \geq 0$ або $d^2u\big|_{M_0} \leq 0$, причому існують такі набори значень $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ не рівних одночасно нулю, для яких значення другого диференціалу обертається в нуль, то функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці M_0 може мати екстремум, але може і не мати його (в цьому випадку для з’ясування питання потрібні додаткові дослідження).

Достатньою умовою екстремуму для $2n$ *разів диференційованої функції* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *є тотожня рівність нулю всіх її диференціалів, обчислених у точці* M_0, *до* $(2n-1)$ *порядку виключно разом з знаковизначеністю (додатною у випадку локального мінімуму і від’ємною у випадку локального максимуму) диференціала порядку* $2n$.

Для функцій двох змінних $z = f\left(x, y\right)$ необхідна умова існування екстремуму у найпростішому випадку має вигляд

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 0 \end{cases}, \text{ а достатня } \Delta = \begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} \end{vmatrix} > 0,$$

причому локальний максимум має місце при $\left.d^2 z\right|_{M_0} < 0$, а локальний мінімум – при $\left.d^2 z\right|_{M_0} > 0$.

Приклад 41. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 3xy - x^3 - y^3.$$

Знаходимо стаціонарні точки функції: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3y - 3x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$,

звідки маємо $M_1\left(0,0\right), M_2\left(1,1\right)$ - стаціонарні точки. Складаємо визначник з других похідних: $\Delta = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$. Оскільки $\Delta\left(M_1\right) = -9$, то $M_1\left(0,0\right)$ не є точкою екстремуму,

а точка $M_2\left(1,1\right)$, з урахуванням того, що $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = -6 < 0$ є точкою локального максимуму.

Приклад 42. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + y^4$.

Необхідна умова: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases}$. Стаціонарна точка $M\left(0,0\right)$.

Обчислимо диференціали функції:

$$dz = 2xdx + 4y^3dy, \quad d^2z = 2dx^2 + 0dxdy + 12y^2dy^2,$$

$$d^3z = 0\cdot dx^3 + 0\cdot dx^2dy + 0dxdy^2 + 24ydy^3, \quad d^4z = 24dy^4 .$$

Оскільки в точці $M(0,0)$ перші три диференціали функції рівні 0, а четвертий додатний, то ця точка є точкою локального мінімуму.

Приклад 43. Дослідити на екстремум неявно задану функцію $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Обчислимо та прирівняємо до нуля перші похідні :

$\begin{cases} z'_x = 4x + 8z = 0 \\ z'_y = 4y = 0 \end{cases}$, звідси $\begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$, таким чином після підстановки, маємо рівність $-7z^2 - z + 8 = 0$, звідки $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = -\dfrac{8}{7} \end{array}\right.$, отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(-2,0,1)$ та $M_2\left(\dfrac{16}{7}, 0, -\dfrac{8}{7}\right)$.

Знайдемо другі похідні: $z''_{xx} = 4 + 8z'_x; \quad z''_{xy} = 8z'_y; \quad z''_{yy} = 4$, таким чином $\Delta = \begin{vmatrix} 4+8z'_x & 8z'_y \\ 8z'_y & 4 \end{vmatrix} = 16 + 32z'_x - 64\left(z'_y\right)^2$.

У точках M_1 та M_2 z'_x і z'_y нульові, $\Delta = 16 > 0$, відповідно $z''_{xx} = 4 > 0$, обидві точки –точки локальних мінімумів.

Приклад 44. Знайти екстремуми функції

$$u = x^3 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z.$$

Скористаємось необхідною умовою існування екстремуму:

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y = 2y + 12x = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases},$$

звідси маємо

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y = 2y + 12x = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad z = -1, \quad y = -\frac{x^2}{4}, \quad -\frac{x^2}{2} + 12x = 0.$$

Звідси маємо: $M_1\left(0,0,-1\right)$, $M_2\left(24,-144,-1\right)$ - стаціонарні точки.

Обчислимо похідні другого порядку та відповідний диференціал:

$$u''_{xx} = 6x \quad u''_{xy} = 12 \quad u''_{yy} = 2 \quad u''_{xz} = 0 \quad u''_{zz} = 2 \quad u''_{yz} = 0,$$

таким чином

$$d^2u\Big|_{M_1} = 2dy^2 + 2dz^2 + 12dxdy;$$

$$d^2u\Big|_{M_2} = 144dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 12dxdy.$$

Оскільки $d^2u\Big|_{M_1} = 2(\left(dy + 6dx\right)^2 - 36dx^2 + dz^2)$, тобто цей вираз може бути як від'ємним, так і додатним, то у точці M_1 екстремуму немає.

В той же час $d^2u\Bigg|_{M_2} = \left(12dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{7}{4}dy^2 + 2dz^2 > 0$, тобто у точці M_2 маємо локальний мінімум.

Задача знаходження умовного екстремуму полягає у визначенні екстремумів функції $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ за умови наявності співвідношень $\varphi_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0, ..., \varphi_m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0$.

Такі задачі можуть розв'язуватись або безпосереднього використання вказаних співвідношень, що дозволяє зменшити кількість незалежних змінних функції u або за допомогою функції Лагранжа.

Приклад45. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy$, якщо має місце умова $x^2 + y^2 = 1$.

Зауважимо, що з умови випливає можливість представлення аргументів x та y у вигляді $x=\cos t,\quad y=\sin t$ при $t\in[0;2\pi]$. Це означає, в свою чергу, представлення функції z у вигляді $z=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$. Таким чином $z_{\min}=-\frac{1}{2}$ при

$t\in\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\right\}$,

$z_{\max}=\frac{1}{2}$ при $t\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\right\}$.

Функція має дві точки мінімуму

$$M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

та дві точки максимуму $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Використання функції Лагранжа

$L(x_1,x_2,\dots,x_n\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)+$
$+\dots+\lambda_m\varphi_m(x_1,x_2,\dots,x_n)$

передбачає знаходження звичайних її екстремумів, які визначають своїми координатами відповідні умовні екстремуми.

Приклад 46. Знайти екстремуми функції $u=xyz$ за умов

$x^2+y^2+z^2=1,\quad x+y+z=0$.

Складемо функцію Лагранжа

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xyz+\lambda_1\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\lambda_2(x+y+z)$.

Це функція п’яти аргументів, необхідна умова існування екстремуму для неї

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = yx + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, отримуємо $z(y-x) + 2\lambda_1 (x-y) = 0$, тобто $x = y$ або $z = 2\lambda_1$.

Аналогічно, комбінуючи ці рівняння з третім, маємо випадки $y = 2\lambda_1$ або $x = z$ та $x = 2\lambda_1$ або $y = z$.

В той же час, підносячи до квадрату останню рівність, маємо $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 2(xy + yz + xz) + 1 = 0$,

тобто $xy + yz + xz = -\dfrac{1}{2}$.

Звідси $(xy + yz + xz) + 2\lambda_1 (x + y + z) + 3\lambda_2 = 0$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{6}$.

Таким чином, якщо $x = y$, то з останніх двох рівнянь системи маємо: $\begin{cases} 2y^2 + z^2 = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$,

$z = -2y, \quad 6y^2 = 1, \quad y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, тобто

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Аналогічно в решті випадків маємо

$$M_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ M_5\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Якщо ж $z=2\lambda_1$, то перші три рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} 2\lambda_1\left(x+y\right)+\dfrac{1}{6}=0 \\ 2\lambda_1\left(x+y\right)+\dfrac{1}{6}=0 \\ xy+4\lambda_1^2+\dfrac{1}{6} \end{cases}$$, тобто,

оскільки $x+y=-z=-2\lambda_1$, то $4\lambda_1^2=\frac{1}{6},\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, але тоді не може виконуватись четверте рівняння. Таким чином, маємо шість "умовно стаціонарних" точок. Підстановкою переконуємось, що найбільше значення функції є $\frac{2}{6\sqrt{6}}$, найменше $\left(-\frac{2}{6\sqrt{6}}\right)$.

Приклад47. Знайти екстремуми функції $z=x+y$ за умови $x^2+y^2=1$.

Маємо функцію Лагранжа $L\left(x,y,\lambda\right)=x+y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$.

Необхідна умова існування екстремуму визначається системою

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$, звідки $x=y=-\frac{1}{2\lambda}$,

$M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0$, то

$d^2u=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right)$. Таким чином, при $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ маємо точку

максимуму $\left(d^2u<0\right)$ $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, при $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$ - точку міні-

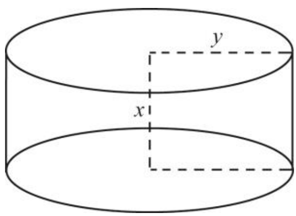
муму $\left(d^2u>0\right)$ $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

При дослідженні на умовний екстремум функцій двох змінних $z=f\left(x,y\right)$ із рівнянням зв'язку $\varphi\left(x,y\right)=0$ можна користуватись також наступним простим правилом: нехай

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x\left(M_0\right) & \varphi'_y\left(M_0\right) \\ \varphi'_x\left(M_0\right) & L''_{xx}\left(M_0,\lambda_0\right) & L''_{xy}\left(M_0,\lambda_0\right) \\ \varphi'_y\left(M_0\right) & L''_{xy}\left(M_0,\lambda_0\right) & L''_{yy}\left(M_0,\lambda_0\right) \end{vmatrix},$$ де

$L\left(M,\lambda\right)=f\left(x,y\right)+\lambda\varphi\left(x,y\right),\quad M_0,\quad \lambda_0$ - розв'язки системи, що являє собою необхідну умову існування екстремуму, тоді при $D>0$ точка M_0 є точкою умовного максимуму, при $D<0$ - умовного мінімуму.

Приклад 48. Визначити, для якого прямокутника даного периметру $2p$, тіло, утворене обертанням його навколо однієї з сторін, матиме найбільший об'єм.



Вважатимемо довжини сторін прямокутника рівними x та y, тобто $2x+2y=2p$. При обертанні прямокутника навколо сторони довжиною x матимемо циліндр з висотою x та радіусом основи y, його об'єм $V=\pi xy^2$. Таким чином, маємо задачу про умовний екстремум функції $V=\pi xy^2$ за умови $x+y=p$.

Будуємо функцію Лагранжа $L(x,y,\lambda)=\pi xy^2+\lambda(x+y-p)$ і складаємо систему $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=\pi y^2+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2\pi xy+\lambda=0 \\ x+y=p \end{cases}$.

Звідси $\lambda=-\pi y^2=-2\pi xy$. Оскільки $x>0,\ y>0$, то $x=\dfrac{y}{2}$, тобто $y=\dfrac{2}{3}p,\ x=\dfrac{1}{3}p,\ \lambda=-\dfrac{4}{9}\pi p^2$.

Скористаємось визначником D:

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\pi x,\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=2\pi y$,

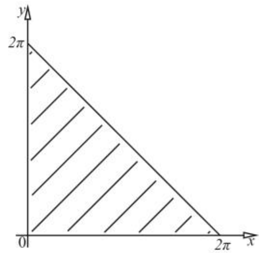
тоді

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dfrac{2\pi p}{3} \\ 1 & \dfrac{2\pi p}{3} & \dfrac{4\pi p}{3} \end{vmatrix}=\frac{4}{9}\pi^2p^2+\frac{2}{3}\pi p>0,$$

тобто матимемо максимальний об'єм при $x=\dfrac{p}{3},\quad y=\dfrac{2p}{3}$.

Якщо функція $u = f\left(x_1,\ldots x_n\right)$ визначена та неперервна у деякій обмеженій та замкненій області D, то вона досягає у ній своїх найменшого та найбільшого значень. Для їх знаходження у випадку неперервно диференційованої функції визначають її екстремуми на межі області D (в цьому випадку маємо задачу про умовний екстремум) та стаціонарні точки всередині D. Після порівняння значень функції у точках умовних екстремумів (на межі) та стаціонарних точках (всередині) визначають найбільше та найменше значення функції в D та точки, в яких вони досягаються. Зазначимо, що у випадку, коли область D не є обмеженою, то серед значень функції $u = f\left(x_1,\ldots x_n\right)$ у ній може й не бути найменшого та найбільшого значень. Питання їх наявності (відсутності) встановлюється окремо у кожній окремій задачі.

Приклад 49. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = \sin x + \sin y - \sin\left(x+y\right)$ в області D площини xOy, обмеженій лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2\pi$.



Дана область являє собою трикутник. Знайдемо стаціонарні точки, що лежать всередині нього:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \cos\left(x+y\right) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \cos\left(x+y\right) = 0 \end{cases}.$$

Оскільки, після перетворень система набуває вигляду

$$\begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{y}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{y}{2} = 0 \\ \sin\left(y + \dfrac{x}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$, то слід розглянути наступні випадки:

1) $\sin\frac{y}{2}=0$, тобто $y=2\pi k,\ \ k\in Z$. Відповідно до вигляду області $y_1=0,\quad y_2=2\pi$, звідки або $\sin\frac{x}{2}=0$ або $\sin\left(2\pi+\frac{x}{2}\right)=0$. Тому стаціонарні точки, що належать D є $M_1\left(0,0\right),\ \ M_2\left(0,2\pi\right),\ \ M_3\left(2\pi,0\right)$. Обчислимо значення функції в цих точках, зауваживши, що вони знаходяться на межі області: $z\Big|_{M_1}=0,\quad z\Big|_{M_2}=0,\quad z\Big|_{M_3}=0.$

2) Якщо $\sin\frac{x}{2}=0$, то як легко бачити, отримуємо ті ж самі точки.

3) При $\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)=0$, тобто $x=\pi k-\frac{y}{2},\ \ k\in Z$, маємо $\sin\left(\frac{3y}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)=0,\quad y=\frac{4}{3}\left(\pi n-\frac{\pi k}{2}\right)$, тобто $y=\frac{2\pi}{3}\left(2n-k\right),\quad x=\frac{2\pi}{3}\left(2k-n\right)\quad n,k\in Z$. Виключивши варіанти $x=0$ та $y=0$ отримуємо точку

$$M_4\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right),\quad z\Big|_{M_4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4) Зауваживши, що на межі області функція тотожно рівна нулю, робимо висновок, що її найменше значення m у даній області дорівнює нулю, а найбільше $M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 50. Дослідити на предмет наявності найбільшого та найменшого значень

функцію $z=\left(1+e^y\right)\cos x-ye^y$.

Запишемо необхідні умови існування екстремуму цієї функції, яка визначена в усіх точках площини xOy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(1+e^{y}\right)\left(-\sin x\right) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{y}\cos x - e^{y} - ye^{y} = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння випливає, що $x=\pi k,\ k\in Z$, тобто $\cos x = \left(-1\right)^{k}$, друге рівняння набуває вигляду $e^{y}\left(\left(-1\right)^{k}-1-y\right)=0$, тобто при парних значеннях k $y=0$, а при непарних - $y=-2$, тобто, стаціонарними є точки вигляду $M_k\left(2\pi k,0\right)$ та $M_n\left(\pi\left(2n+1\right),-2\right)$ і значення функції в них $z\big|_{M_k}=2,\quad z\big|_{M_n}=2e^{-2}-2$.

Перевіримо виконання достатніх умов:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(1+e^{y}\right)\left(-\cos x\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^{y}\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{y}\cos x - 2e^{y} - ye^{y},$$

$\Delta\big|_{M_k} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$, тобто точки M_k є точками максимумів,

$\Delta\big|_{M_n} = \begin{vmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} = -\left(e^{-2}+e^{-4}\right) < 0$, тобто в цих точках екстремумів немає.

Таким чином, функція має найбільше значення рівне 2, а найменшого не має.

Методом найменших квадратів називається побудова функції $f\left(x\right)$ такої,що при відомій таблиці залежності між змінними X та Y

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2		y_n

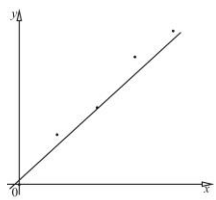
вона найкращим чином (у середньоквадратичному сенсі) відображає цю залежність, тобто значення $\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(x_k\right)-y_k\right)^2$ є мінімальним для функцій з певної множини. Якщо клас функцій, серед яких шукають $f\left(x\right)$, параметризований, то така задача зводиться до задачі знаходження екстремуму на множині вказаних параметрів. Так, наприклад, при лінійному наближенні, тобто виборі функції $f\left(x\right)$ серед функцій вигляду $y=ax+b$, для знаходження коефіцієнтів a і b маємо наступну систему рівнянь $\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot a+\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot b=\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot y_k\\ \sum_{k=1}^{n}x_k\cdot a+nb=\sum_{k=1}^{n}y_k\end{cases}$, яка є наслідком необхідних умов екстремуму, причому цей екстремум існує, єдиний та є мінімумом.

Приклад 51. Побудувати за методом найменших квадратів лінійну апроксимацію наступної експериментальної залежності

X	0	1	2	3	4
Y	2	4,5	6,7	8,9	11,2

Для знаходження коефіцієнтів апроксимуючої функції $y=ax+b$ отримуємо систему

$$\begin{cases}\left(0+1^2+2^2+3^2+4^2\right)a+\left(0+1+2+3+4\right)b=\\ =0\cdot 2+1\cdot 4,5+2\cdot 6,7+3\cdot 8,9+4\cdot 11,2\\ \left(0+1+2+3+4\right)a+5b=2+4,5+6,7+8,9+11,2\end{cases}$$



тобто $\begin{cases}30a+10b=89,4\\ 10a+5b=33,3\end{cases}$, звідки $a=2,28;\ b=2,1;\ y=2,28x+2,1.$

Основні поняття функції кількох змінних. Границя функції в точці. Неперервність.

1. Знайти і зобразити на площині або в просторі область визначення функцій:

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

2) $z=2+\sqrt{-(x+y)^2}$

3) $z=\arcsin\left(2x^2+y^2\right)$

4) $z=\ln\left(y-x^2+3x-2\right)$

5) $z=\sqrt{(x+1)\left(y-x^2\right)}$

6) $z=\sqrt{y\sin x}$

7) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$

8) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\dfrac{1}{x^2-y^2}$

9) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$

10) $z=x+\arccos y$

11) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

12) $u=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{y}$

13) $u=\ln\left(2-x^2\right)+\ln\left(9-y^2\right)+\ln\left(16-z^2\right)$

14) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

15) $u=\arcsin x+\arcsin 2y+\arcsin 3z$

16) $u=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\left(z^2-9\right)}$

2. Побудувати графіки функцій:

1) $z = x + y$

2) $z = x^2 - y^2$

3) $z = e^{-x^2 - y^2}$

4) $z = -\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$

3. Побудувати лінії або поверхні рівня наступних функцій:

1) $z = x^2 + y^2$

2) $z = x^2 - y^2$

3) $z = 1 - |x| - |y|$

4) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

5) $z = \ln\left(y + x^2\right)$

6) $z = \arcsin xy$

7) $u = x + 2y + 3z$

8) $u = x^2 + y^2 + z^2$

9) $u = x^2 + y^2 - z^2$

10) $u = x^2 - y^2 - z^2$

11) $u = x^2 + y^2 - z$

12) $u = \sqrt{1 - -x^2 - y^2 - z^2}$

4. Обчислити границю або довести, що вона не існує:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2x - 3y}{x + y}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{xy}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{x^2+y^2}$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}} \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{xy^2}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to2}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to1}} \dfrac{\sin(x+2y)}{2xy-3}$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} xe^{-\left(x^2+y^2\right)}$

5. Дослідити функції на неперервність:

1) $z=\dfrac{x^2+y^2}{2x-y}$

2) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\neq0 \\ 0, & \text{якщо } x=y=0 \end{cases}$

4) $z=\begin{cases} \dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}, & \text{якщо } x+y\neq0 \\ 1, & \text{якщо } x+y=0 \end{cases}$

5) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$

6) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

7) $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

8) $z = \dfrac{x+y}{x^3-y^3}$

6. Довизначити задані функції в точці $(0,0)$ так, щоб вони стали неперервними в цій точці:

1) $z = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

2) $z = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

3) $z = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

4) $z = \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

5) $z = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$

6) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Похідні та диференціали функцій багатьох змінних.

1. Знайти частинні та повний прирости функції $z = x^2 y$ в точці $M(1,0)$, якщо

   1) $\Delta x = 1, \quad \Delta y = 2$; 2) $\Delta x = 0,1; \quad \Delta y = 0,5$.

2. Знайти частинні та повний прирости функції $z = x^2 + xy - 2y$ в точці $M(1,0)$, якщо $\Delta x = 2, \quad \Delta y = -1$.

3. Знайти всі частинні похідні функцій:

1) $z = x^3 + 2y^3 - 3xy$

2) $z = \dfrac{x-2y}{x+2y}$

3) $z = \dfrac{y-1}{x+2}$

4) $z = \sqrt{x^2 - 4y^2}$

5) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

7) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y+1}{x-1}$

8) $z = (x+y)^{x-y}$

9) $z = \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

10) $z = 2^{\sin x} \arccos y$

11) $z = y^{x+y}$

12) $u = z^{xy}$

13) $e^z + e^{x-y} = e^{y+z}$

14) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

4. Показати, що функція $z(x, y)$ (або $u(x, y, z)$) задовольняє рівняння:

1) $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$

2) $z = \sqrt{y}\sin\dfrac{x}{y}$ $\qquad 2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

3) $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

4) $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$

5. Обчисліть наближено за допомогою першого диференціалу значення виразів:

1) $\sqrt{(7,85)^2 + (5,9)^2}$

2) $(1,05)^{3,07}$

3) $\ln\left(1 + (1,03)^2 - (0,95)^3\right)$

4) $\operatorname{arctg}\dfrac{1,11}{0,98}$

5) $\operatorname{tg} 9^\circ \cdot \sin 86^\circ$

6) $\sin 51^\circ \cdot \cos 5^\circ$

6. Знайти повні диференціали функцій:

1) $z = x^3 + 2y^3 - xy$

2) $z = x^3 y^2$

3) $z = \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$

4) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$

5) $z = 2yx^y$

6) $z = \ln\left(x^2 + 2y^2\right)$

7) $z = \sin z + x + 2y$

8) $x + y + z = \ln z$

9) $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$

10) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$

7. 1) Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ та dz, якщо $\sin(xyz) - 2e^{\frac{x}{y}} + 3xz = 5yz$.

2) Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ та dz, якщо $x^3 + y^3 + z^3 - \operatorname{arctg}\frac{xy}{z} = 2\ln xy$.

3) Знайти $\frac{dy}{dx}$ і dy, якщо $\cos xy + x^2 y - \ln\frac{x}{y} = 0$.

4) Знайти $\frac{dy}{dx}$ і dy, якщо $x^3 y^3 - 2x^2 y + 5y^2 - x = 0$.

8. 1) Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{3x+2y}$, де $x = \cos t, \quad y = t^2$.

2) Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = e^{xy}$, де $y = x \operatorname{arctg} x$.

3) Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, де $x = u\sin v, \quad y = u\cos v$.

4) Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \frac{x}{y}$, де $x = e^t, \quad y = \ln t$.

5) Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, де $x = 3t^2, \quad y = \sqrt{t^2+1}$.

6) Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y = x^2$.

9. Знайти частинні похідні та диференціал другого порядку для наступних функцій:

1) $z = (x-2y)^4 + \cos(x-y)$

2) $z = x^y + y^x$

3) $z = 2x^6 y - 4xy^4 - 3y + 5x - 2$

4) $u = x^3 + y^2 - xz^3 + 2yz^2 - 3(x-y)^3$

5) $u = x^y + y^z + z^x$

6) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)$

10. Розвинути за формулою Тейлора функцію $z\left(x, y\right)$ в околі точки $M\left(x_0, y_0\right)$ до третього порядку:

1) $z = \mathrm{tg}\left(xy\right) \qquad M\left(0,1\right)$

2) $z = e^x \ln\left(1 + y\right) \qquad M\left(0,0\right)$

3) $z = x^3 + 2x^2 y - xy^2 + 3y^3 \qquad M\left(1,1\right)$

4) $\ln z + z + x - y = 1 \qquad M\left(1,1,1\right)$

Дотична площина та нормаль до поверхні

1. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці:

1) $z = x^2 y + xy^3 \qquad M\left(2,1\right)$

2) $x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 z^3 = 4 \qquad M\left(1,1,1\right)$

3) $z = x^2 + 3y^2 \qquad M\left(2,1\right)$

4) $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos^2 z = 2 \qquad M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

5) $xyz = e^{x+y+z} + 1 \qquad M\left(2,-1,-1\right)$

6) $x^2 - 3x + y^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 2 = z^2$

в точках перетину з віссю Ox

7) $z = \sin x \cos y \qquad M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

8) $z = e^{x \cos y} \qquad M\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$

9) $x\left(y + z\right)\left(xy - z\right) + 8 = 0 \qquad M\left(2,1,3\right)$

10) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8 \qquad M\left(2,2,1\right)$

2. Для поверхні $z = 4x - xy + y^2$ записати рівняння дотичної площини, яка паралельна до площини $4x + y + 2z + 9 = 0$.
3. Для поверхні $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 4$ записати рівняння нормалі, яка паралельна прямій $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$.
4. На поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ знайти точки, в яких дотичні площини паралельні координатним площинам.
5. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $xy + yz + xz + 8 = 0$ у точках, в яких дотична площина до цієї поверхні паралельна площині $2x - y + z + 1 = 0$.
6. Написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = x^2 + y^2$, яка перпендикулярна до прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{12} = \frac{z+2}{-1}$.
7. Написати рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 - y^2 - 3z = 0$, яка проходить через точку $A(0,0,1)$ паралельно прямій $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

Похідна за напрямом. Градієнт функції.

1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial \overline{MN}}(M)$, де $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $M(2,1)$, $N(6,4)$.
2. Знайти $\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{n}}$, де $z = x^2 - 3xy + 2y^2$, $M(1,1)$, $\vec{n}$ - напрям градієнта $\overrightarrow{grad\ z(M)}$.
3. Знайти $\overrightarrow{grad\ u(M)}$, де $u = ze^{x-y+2z}$, $M(1,0,0)$.
4. Знайти точки, в яких $\overrightarrow{grad\ z} = \vec{i} + \vec{j}$, де $z = \ln\left(x - y^{-1}\right)$.

5. Знайти кут між градієнтами функції $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ у точках $M_1(1,1)$ та $M_2(-1,-1)$.

6. Знайти кут між градієнтами функції $z = \ln\frac{y}{x}$ у точках $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ і $B(1,1)$.

Екстремуми функцій декількох змінних

1. Знайти екстремуми функцій:

1) $z = (x-3)^2 + 2y^2$

2) $z = (x-2)^2 - 4y^2$

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

4) $z = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

5) $z = e^{x^2-y}(5-2x+y)$

6) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

2. Знайти умовні екстремуми функцій:

1) $z = x^2 - y^2$, якщо $x + 2y - 6 = 0$

2) $z = xy$, якщо $x + y = 1$

3) $z = x + 2y$, якщо $x^2 + y^2 = 5$

4) $z = x^2 + y^2$, якщо $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

5) $z = 4x^2 + y^2$, якщо $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - 4 = 0$

6) $z = 16 - 10x - 24y$, якщо $x^2 + y^2 - 169 = 0$

3. Знайти найбільше та найменше значення функцій у вказаній області:

1) $z = x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y \qquad D = \{(x, y): x \ge 0,\ y \le 0,\ x - y \le 3\}$

2) $z = x^3 + y^3 - 3x - 9y + 9 \qquad D = \{(x, y):\ |x| + |y| \le 3\}$

3) $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y \qquad D = \{(x, y): x \le 5,\ y \ge 0,\ y \le x - 1\}$

4) $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2 \qquad D = \{(x, y): x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6\}$

5) $z = 4 - 2x^2 - y^2 \qquad D = \left\{(x, y):\ y \ge 0,\ y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}$

6) $z = x^3 + y^3 - 3xy \qquad D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$

7) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \qquad D = \left\{(x, y):\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

Метод найменших квадратів

1. Встановити лінійну залежність $y = ax + b$ за даними таблиці, використовуючи метод найменших квадратів:

x_i	0	1	2	4	5
y_i	2,1	2,4	2,6	2,8	3,0

2. Встановіть функціональну залежність між x та y за даними таблиці, використовуючи метод найменших квадратів:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	8,25	10,24	9,31	11,01	8,54	7,51	12,36	10,81	9,89	13,72

3. Торгівельна фірма має мережу з 10 магазинів. Складіть функціональну залежність розміру річного товарообігу (y_i млн. грн. від торгових площ x_i метрів квадратних) за даними таблиці:

x_i	19,76	38,09	40,95	41,08	56,29	68,51	75,01	89,05	91,13	91,26
y_i	0,24	0,31	0,55	0,48	0,78	0,98	0,94	1,21	1,29	1,12

4. Вкажіть перетворення, яке дозволяє перейти від заданої функціональної залежності $u = u(v)$ до лінійної

$y = ax + b, \quad a, b = const$

а) $u = A \cdot v^B, \quad A, B = const$; б) $u = A \cdot e^{Bv}, \quad A, B = const$;

в) $u = \dfrac{Av}{1 + Bv}, \quad A, B = const$.

5. Використовуючи результат задачі 4, встановіть функціональну залежність між x та y за даними таблиці

x_i	1	2	4	5	8	10
y_i	3,01	2,31	2,21	2,19	2,09	2,1

Вказівка: припустити, що залежність гіперболічна

$$y = \frac{c}{x} + d, \quad c, d = const.$$

6. Охолодження води в приміщенні описує формула $\Delta T = \Delta T_0 e^{-\gamma t}$, де ΔT - різниця температур води та повітря в кімнаті; ΔT_0 - та сама різниця в момент часу t_0. Встановіть залежність між кількістю часу від моменту закипання та температурою охолодженої води за даними таблиці

T_i	70	60	50	40	30
t_i	20	25	30	35	40

T_i - температура води в градусах по Цельсію,

t_i - час в хвилинах.

Вказівка: задану формулу можна подати у вигляді $T - T_0 = (T_{kun} - T_0)e^{-\gamma(t+t_0)}$, де T_0 - кімнатна температура; $T_{kun} = 100^0$; t_0 - час від закипання води до початку вимірювань. Зведемо дану функцію до лінійної: $\ln\dfrac{T - T_0}{T_{kun} - T_0} = -\gamma(t + t_0)$. Покладемо $y = \ln\dfrac{T - T_0}{T_{kun} - T_0}$; $x = t$, отримаємо лінійну залежність $y = -\gamma x - \gamma t_0 = ax + b$, яку встановлюємо методом найменших квадратів.

7. Таблиця задає витрати пального (y літрів) на 100км в залежності від пробігу вантажного автомобіля (x тис.км).

x_i	1	5	15	30	50	60	70	100	120	150
y_i	23,026	27,57	22,275	23,18	22,5	22,6	22,9	25	27,4	32,5

Встановити залежність $y = f(x)$ використовуючи метод найменших квадратів.

Вказівка: використати параболічну залежність $y = ax^2 + bx + c$.