МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТУКРАЇНИ

«Київський політехнічний інститут

Імені Ігоря Сікорського

ЗАДАЧНИК

З курсу математичного аналізу

для студентів технічних вузів

ЧАСТИНА 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.

КИЇВ – 2019

Задачник з курсу математичного аналізу для студентів технічних вузів. Частина 3. Інтегральне числення функцій багатьох змінних. Елементи теорії поля/ Укл.: Ю.П. Буценко, О.О.Дем‘яненко, К.Ю. Мамса, М.М. Перестюк. – К.:2019.-КПІ ім. Ігоря сікорського. – 88с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від 30.05.19) за поданням Вченої ради факультету (протокол № 5 від 29.05.19)

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЗАДАЧНИК

З КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

ТЕХНІЧНИХ ВУЗІВ

ЧАСТИНА 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Укладачі: *Буценко Юрій Павлович,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.*

Дем‘яненко Ольга Олегівна ,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Мамса Катерина Юріївна ,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Перестюк Марія Миколаївна ,кандидат фіз.-мат. наук.

Рецензенти: *Великоіваненко Г.І., професор, к.ф.-м.н*

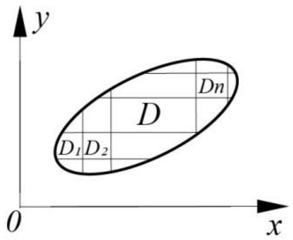
Репета В.К., доцент, к.ф.-м.н.

Дане навчальне видання може використовуватись як на практичних заняттях з математичного аналізу, так і для самостійної роботи студентів при підготовці до модульної контрольної роботи та до іспиту з кредитного модуля «Математичний аналіз – 2»

КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

Подвійні інтеграли.

Нехай D- обмежена замкнена область на координатній площині xOy, $z=f(x,y)$ - функція, визначена в усіх точках цієї області. Розіб’ємо цю область на елементарні підобласті $D_1, D_2, ..., D_n$ так, що $\bigcup_{k=1}^{n} D_k = D, \quad S(D_i \cap D_j) = 0$ при $i \neq j$. Вибравши у кожній з цих областей точку $M_k(x_k, y_k)$, складемо інтегральну суму $S=\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) S(D_k)$, де $S(D_k)$ - площа відповідної підобласті.



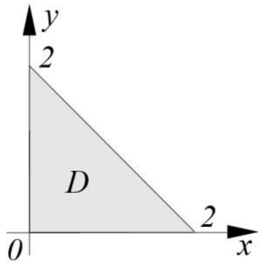
Будемо вважати, додатково, що $z=f(x,y)$ - функція неперервна в області D, а сама ця область обмежена простою кривою γ (тобто, ця лінія неперервна, не має точок само перетинів та самодотиків і замкнена). Тоді, якщо при прямуванні діаметра розбиття $\delta = \max_k S(D_k)$ до нуля інтегральна сума для будь-яких розбиттів області D на під області D_k та способів вибору точок M_k прямує до однієї і тієї ж границі I, то цю границю називають подвійним інтегралом функції $f(x,y)$ по області D і позначають $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Властивості подвійного інтеграла:

1. $\iint_D 0 dxdy = 0, \quad \iint_D 1 dxdy = S(D)$.
2. Лінійність:
$$\iint_D [\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)]dxdy = $$
$$= \alpha \iint_D f_1(x,y)\,dxdy + \beta \iint_D f_2(x,y)\,dxdy,$$
для довільних чисел α, β та довільних неперервних функцій $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$.
3. Адитивність: $\iint_{D_1 \cap D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$, для областей D_1, D_2 таких, що $S(D_1 \cap D_2) = 0$.
4. Оцінка подвійного інтеграла: якщо $m \leq f(x,y) \leq M$ для всіх точок $M(x,y) \in D$, то $mS(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq MS(D)$.
5. Інтегральне середнє: $\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x^*, y^*) \cdot S(D)$, де точка $M^*(x^*, y^*) \in D$, значення $f(x^*, y^*)$ називається інтегральним середнім значенням функції $f(x,y)$ у області D.

Приклад 1. Оцінити інтеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x=0,\quad y=0,\quad x+y=2$.

Розв'язок: тут $f(x,y)=x+y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=1\neq 0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=1\neq 0$, тобто найменше та найбільше



значення функції досягаються на границі області. Таким чином:

а) при $y=0,\quad 0\le x\le 2,\quad f(x,y)=x,\quad m_1=0,\quad M_1=2$;

б) при $x+y=2,\quad f(x,y)=2,\quad m_2=M_2=2$;

в) при $x=0,\quad 0\le y\le 2,\quad f(x,y)=y,\quad m_3=0,\quad M_3=2$;

таким чином $m=0,\quad M=2,\quad S(D)=2,\quad 0\le I\le 4$.

Способи обчислення подвійних інтегралів.

Обчислення подвійних інтегралів зводиться до знаходження відповідних їм повторних, тобто до двократного знаходження визначених інтегралів, межі інтегрування у яких визначаються областю D .

Найпростішим є випадок, коли область D являє собою прямокутник зі сторонами паралельними координатним осям: $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$, тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

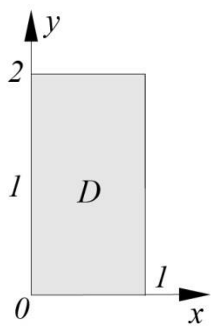
При цьому:

а) обчислення починають завжди з «внутрішнього» («правого») інтеграла;

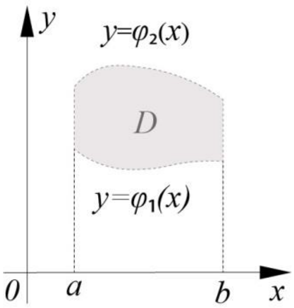
б) при інтегруванні $f(x,y)$ по одній із змінних, іншу вважають сталою;

в) вибір порядку інтегрування залежить від вигляду функції $f(x,y)$ та області D.

Приклад 2. Знайти інтеграл функції $z=x^2+y^3$ по прямокутнику $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2\}$.



Розв'язок: оскільки залежність функції z від змінних x та y має однаковий характер, то



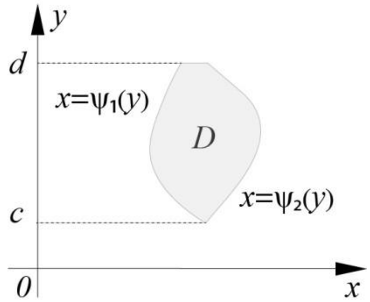
можна вибрати довільний порядок інтегрування, наприклад

$$I_1=\iint\limits_D (x^2+y^3)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x^2+y^3)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\left(x^2y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}=\int\limits_0^1 (2x^2+4)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^3+4x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{14}{3}.$$

Будемо називати область D правильною у напрямку осі Oy, якщо вона визначається умовами: $D=\{(x,y)\,|a\le x\le b,\ \ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всіх $x\in[a,b]$.

У цьому разі будь-яка пряма, яка паралельна осі Oy, перетинає межу області D не більше ніж у двох точках.



Аналогічно, область G будемо називати правильною в напрямі осі Ox, якщо вона визначається умовами: $G=\{(x,y)\,|c\le y\le d,\ \ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ для всіх $y\in[c,d]$, а будь-яка пряма, яка паралельна осі Ox, перетинає межу області G не більше ніж у двох точках.

В цих випадках маємо:

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ і, відповідно, $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_D xydxdy$, якщо область D обмежена лініями

$x=0,\ \ y=x,\ \ y=2-x.$

Розв’язок.

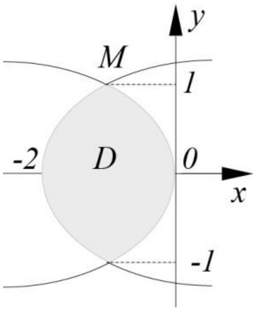
Прямі $y=x$ та $y=2-x$ перетинаються в точці $M(1,1)$. Таким чином, область D є правильною в напрямі осі Oy: $0\le x\le 1,\ \ x\le y\le 2-x$. Тому

$$I=\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x} xydy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_x^{2-x} ydy=\int\limits_0^1 xdx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{2-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left((2-x)^2-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(4x-4x^2\right)dx=2\left(\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx\right)=$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Приклад 4. Знайти площу області D, обмеженої лініями $y^2=-x,\ \ y^2=2+x$.



Розв'язок. Відповідно до першої властивості подвійного інтеграла $S(D)=\iint\limits_D 1dxdy$. Оскільки область D є правильною в напрямі осі Ox :

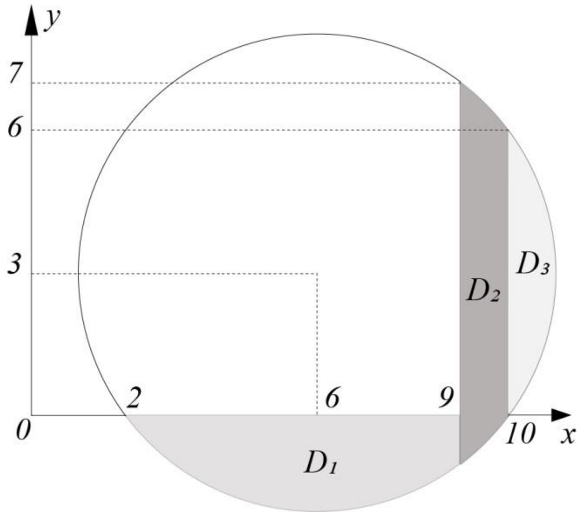
$-1\le y\le 1,\quad y^2-2\le x\le -y^2$, то

$$S(D)=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2-2}^{-y^2}dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2y^2\right)dy=\left(2y-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$ (од.площі).

Якщо область D не є правильною в напрямі осі Ox або Oy, то її можна представити у вигляді об'єднання двох чи більше таких областей. Цей прийом використовується також у випадках, коли межі областей інтегрування визначаються різними аналітичними виразами на різних проміжках зміни аргументів. За таких обставин інтеграл по області, відповідно до третьої властивості подвійного інтеграла, перетворюється на суму інтегралів.

Приклад 5. Записати у вигляді повторного подвійний інтеграл $I=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$, якщо область D визначено нерівностями $\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2\le 25\\ \left[\begin{array}{l}y\le 0\\ x\ge 9\end{array}\right.\end{cases}$.

Розв'язок.



Таку область можна представити у вигляді об’єднання областей:

$$D_1 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 2 \le x \le 9,\;\; 3-\sqrt{25-(x-6)^2} \le y \le 0 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 9 \le x \le 10,\;\; 3-\sqrt{25-(x-6)^2} \le y \le 3+\sqrt{25-(x-6)^2} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le y \le 6,\;\; 10 \le x \le 6+\sqrt{25-(y-3)^2} \right\}.$$

Отже, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy =$

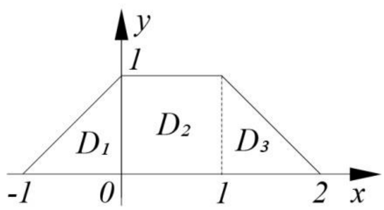
$$= \int_2^9 dx \int_{3-\sqrt{25-(x-6)^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_9^{10} dx \int_{3-\sqrt{25-(x-6)^2}}^{3+\sqrt{25-(x-6)^2}} f(x,y)\,dy + \int_0^6 dy \int_{10}^{6+\sqrt{25-(y-3)^2}} f(x,y)\,dx.$$

У деяких випадках зміна порядку інтегрування дозволяє, навпаки, звести суму інтегралів до єдиного.

Приклад 6. Змінити порядок інтегрування:

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{x+1}^{0} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_1^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Розв’язок.



Область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ можна задати нерівностями:

$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\;\; y-1 \le x \le 2-y\}$, таким чином

$$I = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

Заміна змінних є одним з основних прийомів обчислення подвійних інтегралів, оскільки дозволяє, серед іншого, найпростішим чином задати область інтегрування, тобто є, фактично, переходом до нових координат.

Формула заміни змінних у подвійному інтегралі: якщо змінні x та y пов'язані із запроваджуваними змінними $u,\ v$ формулами $\begin{cases} x = x\ \ u,v \\ y = y\ \ u,v \end{cases}$, то

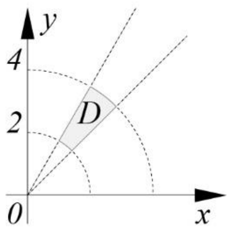
$$\iint\limits_{D_{xOy}} f\ \ x,y\ \ dxdy = \iint\limits_{D_{uOv}} f\ \ x\ \ u,v\ \ ,y\ \ u,v \left|J\right|\ \ dudv,$$ де $J\ \ u,v\ = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ - визначник Якобі (Якобіан), D_{xOy} - область інтегрування на координатній площині xOy, D_{uOv} - та ж область на площині, де в якості прямокутних декартових координат виступають змінні u та v.

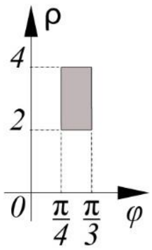
Найчастіше користуються переходом до полярних $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \left|J\right| = \rho \end{cases}$ та узагальнених полярних $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ \left|J\right| = ab\rho \end{cases}$ координат.

Приклад 7. Обчислити інтеграл за допомогою переходу до полярних координат:
$I = \iint\limits_{D}\ x^2 + y^2\ \ dxdy$, область D обмежена лініями

$y = x,\quad y = x\sqrt{3},\quad x^2 + y^2 = 4,\quad x^2 + y^2 = 16,\quad x > 0,\quad y > 0$.

Розв'язок.

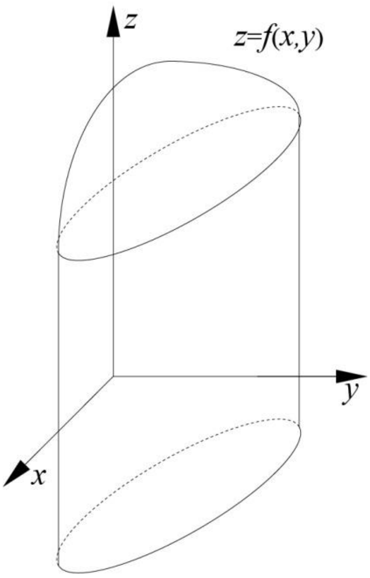




Переходячи до полярних координат у рівняннях ліній, отримуємо:
$\operatorname{tg}\varphi = 1,\quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3},\quad \rho = 2,\quad \rho = 4,$ таким чином, на координатній площині $\varphi O\rho$ маємо прямокутник $\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{3},\quad 2 \le \rho \le 4,$ що дозволяє записати

$$I = \iint\limits_{D_{\varphi O\rho}} \rho^2 \cdot \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2}^{4} \rho^3 d\rho = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_2^4 = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{4}\ \ 256 - 16\ \ = 5\pi\ .$$

Застосування подвійних інтегралів.

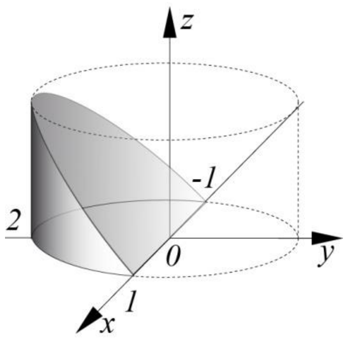


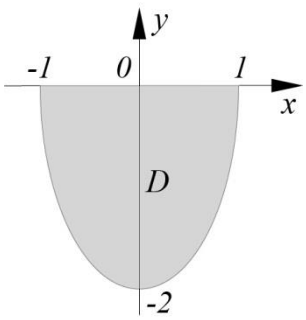
До основних геометричних застосувань подвійних інтегралів належать, крім обчислення площ плоских фігур, також обчислення площ поверхонь та об'ємів циліндричних тіл.

Площа частини поверхні $z=f(x,y)$, обмежена циліндричною поверхнею, яка утворена рухом твірної паралельно осі Oz із перетином межі області D, обчислюється за формулою $S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$.

Приклад 8. Знайти площу S частини площини $z=-y$, яка знаходиться всередині циліндричної поверхні $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ і розташована вище координатної площини xOy.

Розв'язок.





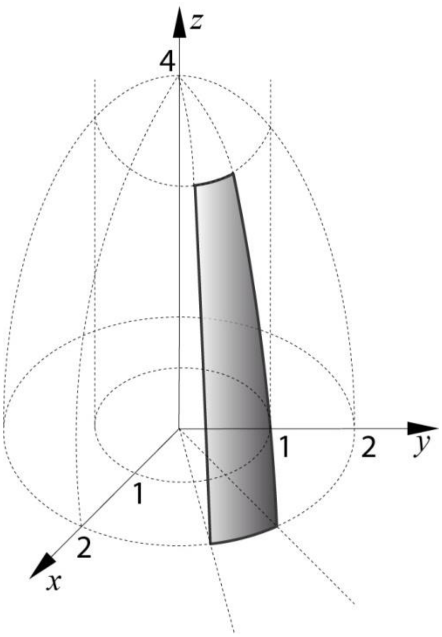
Маємо тіло, обмежене зверху площиною $z=-y$, знизу – площиною $z=0$, а з боків – еліптичною циліндричною поверхнею $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. Проекцією цього тіла на координатну площину xOy є область D, обмежена лініями

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1,\quad y=0\quad (y\le 0),\quad f(x,y)=-y,\quad f'_x=0,\quad f'_y=-1.$$

Таким чином, $S=\iint\limits_D \sqrt{1+0^2+(-1)^2}\,dxdy$. Перейдемо до узагальнених полярних координат:

$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=2\rho\sin\varphi. \\ |J|=2\rho \end{cases}$ Тоді $S=\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 2\rho d\rho=\sqrt{2}\pi\rho^2\Big|_0^1=\pi\sqrt{2}$ (од. площі).

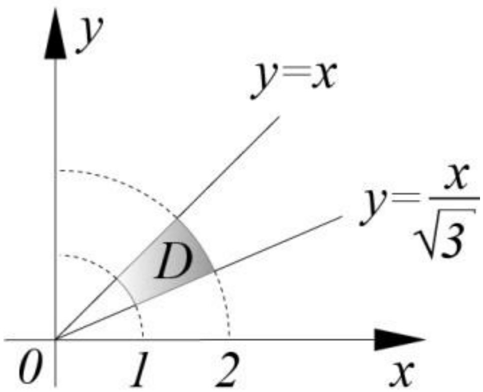
Якщо $z=f(x,y)\geq 0$, то об’єм циліндричного тіла , обмеженого поверхнями $z=0,\quad z=f(x,y)$ та циліндричною поверхнею, утвореною рухом твірної паралельно Oz із перетином межі області D визначається за формулою $V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.



Приклад 9. Знайти об’єм тіла , розташованого у першому октанті та обмеженого поверхнями

$z=4-x^2-y^2,\;\; x^2+y^2=1,\;\; y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\;\; y=x$.

Розв’язок.



Тіло обмежене згори параболоїдом $z=4-x^2-y^2$, знизу – площиною $z=0$, бічну поверхню складають частини площин $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\;\; y=x$ та циліндру $x^2+y^2=1$. Проекцією тіла на площину xOy є кільцевий сектор, тому переходимо до полярних координат:

$$V=\iint\limits_D 4-x^2-y^2 \;\; dxdy=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ |J|=\rho \end{vmatrix}=$$

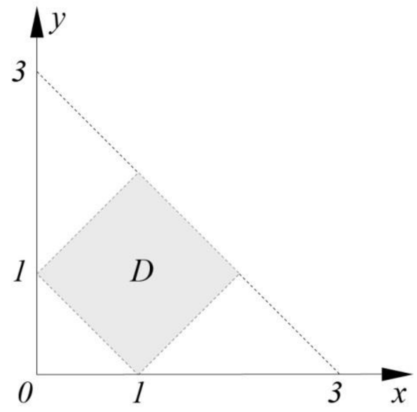
$$=\iint\limits_D 4-\rho^2 \;\; \rho d\varphi d\rho=\begin{vmatrix} 1\le\rho\le 2 \\ \dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4} \end{vmatrix}=$$

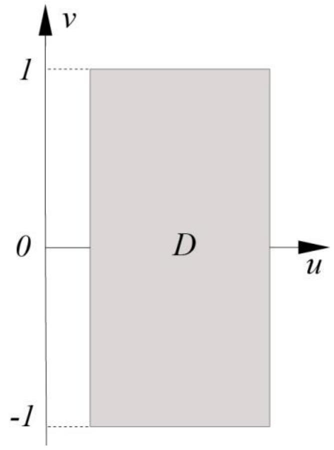
$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_1^2 4\rho-\rho^3 \;\; d\rho=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{9}{4}=\frac{\pi}{16}.$$

Найпростішим застосуванням подвійних інтегралів у фізиці є знаходження мас та зарядів плоских пластинок за відомих поверхневих густин їх розподілів. При цьому $M=\iint\limits_D \gamma\;\, x,y\;\, dxdy,\;\; Q=\iint\limits_D \gamma\;\, x,y\;\, dxdy$, де M,Q - відповідно, маса та заряд пластинки, що має форму області D, $\gamma\;\, x,y$ - поверхнева густина розподілу маси (заряду).

Приклад 10. Знайти заряд пластинки, обмеженої прямими $x+y=1,\;\; x-y=1,\;\; x+y=3,\;\; x-y=-1$, якщо густина розподілу заряду $\gamma\;\, x,y\;=\;x+y\;^3\;\, x-y\;^2$.

Розв’язок.





Запровадимо заміну змінних $u = x + y \in [1,3]$ $v = x - y \in [-1,1]$, з якої маємо

$$x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2} \quad |J| = \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right|.$$

Тоді $Q = \iint\limits_{D_{xOy}} \gamma(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_{uOv}} u^3 v^2 \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 du \int_{-1}^{1} v^2 dv =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4}\Big|_1^3 \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(3^4 - 1\right)\left(1^3 - (-1)^3\right) = \frac{20}{3}$ (кулонів).

Для описаної вище пластинки форми D з поверхневою густиною маси $\gamma(x,y)$ справедливі наступні формули:

статичний момент відносно осі Ox $\quad M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)\, dxdy$;

статичний момент відносно осі Oy $\quad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)\, dxdy$;

координати центра мас C пластинки $\quad x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}$, де m - маса пластинки;

величина моменту інерції пластинки відносно точки $M_o(x_o, y_o)$

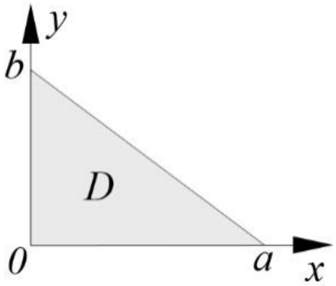
$I_M = \iint\limits_D \left[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\right] \gamma(x,y)\, dxdy$;

величина моменту інерції пластинки відносно прямої l, рівняння якої $Ax+By+C=0$

$$I_l=\iint\limits_D \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}\gamma(x,y)\,dxdy.$$

Приклад 11. Знайти координати центра мас пластинки, обмеженої лініями $x=0,\quad y=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad (a>0,\ b>0)$, якщо поверхнева густина в кожній точці є ордината цієї точки.

Розв’язок.



Знайдемо спочатку масу пластинки

$$m=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} ydy=\frac{1}{2}y^2\Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx=\frac{b^2}{2}\int\limits_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(\int\limits_0^a dx-\frac{2}{a}\int\limits_0^a xdx+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^a x^2dx\right)=\frac{b^2}{2}\left(a-a+\frac{a}{3}\right)=\frac{ab^2}{6}$$ (одиниць маси).

Статичні моменти

$$M_x=\iint\limits_D y^2dxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} y^2dy=\frac{1}{3}\int\limits_0^a y^3\Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx=\frac{b^3}{3}\int\limits_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^3dx=$$

$$=\frac{b^3}{3}(-a)\int\limits_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^3d\left(1-\frac{x}{a}\right)=\frac{b^3}{3}(-a)\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\Bigg|_0^a=\frac{ab^3}{12},$$

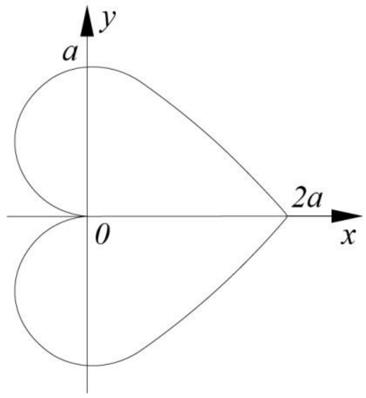
$$M_y = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^a xdx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_0^a xy^2 \Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx =$$

$$= \frac{b^2}{2}\left(\int\limits_0^a xdx - \frac{2}{a}\int\limits_0^a x^2dx + \frac{1}{a^2}\int\limits_0^a x^3dx \right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{4}a^2 \right) = \frac{a^2b^2}{24}.$$

Таким чином, $x_c = \dfrac{a}{4}, \quad y_c = \dfrac{b}{2}$.

Приклад 12. Знайти момент інерції однорідної пластинки ($\gamma(x,y) = \gamma_0$), що обмежена кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$ відносно осі абсцис.

Розв’язок.



$$I = \iint\limits_D y^2\gamma_0 dxdy = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = \rho\sin\varphi & 0 \le \rho \le a(1+\cos\varphi) \\ \|J\| = \rho & \end{matrix} \right| =$$

$$= \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho d\rho = \frac{\gamma_0}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \cdot \rho^4 \Bigg|_0^{a(1+\cos\varphi)} =$$

$$= \frac{a^4\gamma_0}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi (1+\cos\varphi)^4 d\varphi =$$

$$= \frac{a^4\gamma_0}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi (1 + 4\cos\varphi + 6\cos^2\varphi + 4\cos^3\varphi + \cos^4\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^4\gamma_0}{4}\int\limits_0^{2\pi\pi} \sin^2\varphi d\varphi + \frac{a^4\gamma_0}{4} 4\int\limits_0^{2\pi\pi} \sin^2\varphi d\sin\varphi + \frac{a^4\gamma_0}{4} 6\int\limits_0^{2\pi\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{a^4\gamma_0}{4} 4\int\limits_0^{2\pi\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\sin\varphi + \frac{a^4\gamma_0}{4}\int\limits_0^{2\pi\pi} \sin^2\varphi\cos^{4\varphi} d\varphi = \frac{21}{32}\pi\gamma_0 a^4.$$

Задачі

3.1 Обчислити повторні інтеграли;

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 xdx \int\limits_0^4 ydy$ 2) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2dx \int\limits_0^{\pi} \sin^2 ydy$

3) $\int\limits_0^1 \sqrt{y}dy \int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x}$ 4) $\int\limits_1^4 \frac{dy}{y} \int\limits_0^3 x^3 dx$

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_2^4 xy^2 dy$ 6) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 x^3 y\ dx$

7) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^2 \sin^2 \varphi dr$ 8) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R r \sin^4 \varphi dr$

9) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x} (x+y)\ dy$ 10) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} (x-y)\ dy$

3.2 Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного, якщо область D задовольняє наступним умовам:

1) D - прямокутник, що обмежений прямими $x=1,\ \ x=3,\ \ y=-1,\ \ y=2$;

2) D - прямокутник, що обмежений прямими $x=-1,\ \ x=1,\ \ y=2,\ \ y=4$;

3) D - прямокутник з вершинами $A(-1,-1),\ B(-1,2),\ C(5,2),\ H(5,-1)$;

4) D - прямокутник з вершинами $A(-2,-1),\ B(-2,3),\ C(4,3),\ H(4,-1)$;

5) D - трикутник з вершинами $A(0,0),\ B(2,0),\ C(0,1)$;

6) D - трикутник з вершинами $A(0,0),\ B(-1,0),\ C(0,3)$;

7) D - трикутник , що обмежений прямими $y=x,\ \ y=2x,\ \ y=2$;

8) D - трикутник , що обмежений прямими $y=x,\ \ y=\frac{1}{2}x,\ \ y=1$;

9) D - чотирикутник з вершинами $A(-1,-2),\ B(-1,1),\ C(1,3)\ \ H(1,0)$;

10) D - чотирикутник з вершинами $A(-2,-3),\ B(-2,1),\ C(1,4)\ \ H(3,0)$;

11) D - область , що обмежена лініями $y=\sqrt{9-x^2},\ \ y=0$;

12) D - область , що обмежена лініями $y=\sqrt{4-x^2},\ \ y=0$;

13) D - область , що обмежена лініями $y=x^2,\ \ x+y-2=0$;

14) D - область , що обмежена лініями $y=x^2,\ \ x-y+2=0$;

15) D - область , що обмежена лініями $y^2 = 8x, \quad x = 2$;

16) D - область , що обмежена лініями $y^2 = -4x, \quad x = -4$;

17) D - область , що обмежена лініями $x = 0, \quad x = 1, \quad y^2 = x, \quad y = e^x$;

18) D - область , що обмежена лініями $y = x^2, \quad y = \ln x, \quad x = 1, \quad x = e$;

19) D - область , що обмежена лініями $x = \sqrt{1 - y^2}, \quad x = \sqrt{2y - y^2}, \quad y = 1$;

20) D - область , що обмежена лініями $x = -\sqrt{4 - y^2}, \quad x = -\sqrt{4y - y^2}, \quad y = 2$;

21) D - область , що обмежена лініями $xy = 2, \quad y \leq 2x, \quad 2y \geq x$;

22) D - область , що обмежена лініями $xy = 2, \quad y \geq 2x, \quad 2y \leq x$.

3.3 Обчисліть подвійні інтеграли:

1) $\iint\limits_D \cos 2x + \sin y \;\; dxdy \qquad D: x = 0, \quad y = 0, \quad 4x + 4y - \pi = 0$;

2) $\iint\limits_D \cos 2x + \sin \;\; x + y \;\; dxdy \qquad D: x = 0, \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad y = x$;

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy \qquad D: x = 2, \quad xy = 1, \quad y = x$;

4) $\iint\limits_D xy^2 dxdy \qquad D: y = x^2, \quad y = x$;

5) $\iint\limits_D x^2 y dxdy \qquad D: y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x + y = 2$;

6) $\iint\limits_D xydxdy \qquad D: y = x, \quad y = 0, \quad x + y = 2$;

7) $\iint\limits_D e^{x^2} dxdy \qquad D: y = x, \quad y = 0, \quad x = 1$;

8) $\iint\limits_D \sin \;\; x^3 - 1 \;\; dxdy \qquad D: y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$;

9) $\iint\limits_D y \cos xydxdy \qquad D: y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \pi, \quad x = 1, \quad x = 2$;

10) $\iint_D 2y\sin 2xy\,dxdy \quad D: y=\frac{\pi}{12},\ \ y=\pi,\ \ x=3,\ \ x=2;$

11) $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}}dxdy \quad D: y=2,\ \ y=x,\ \ x=0;$

12) $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}}dxdy \quad D: y=\sqrt{2},\ \ y=x,\ \ x=0.$

3.4 Змініть порядок інтегрування:

1) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$

2) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$

3) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

4) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y)\,dx$

5) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$

6) $\int_0^3 dx\int_{3-x}^{4} f(x,y)\,dy$

7) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y^2+3} f(x,y)\,dx$

8) $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)\,dx$

9) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^3 dy\int_{-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$

10) $\int_1^3 dy\int_0^{\log_3 y} f(x,y)\,dx+\int_3^4 dy\int_0^{4-y} f(x,y)\,dx$

11) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx\int_0^{x} f(x,y)\,dy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

12) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

3.5 Оцініть інтеграли:

1) $I=\iint_D (xy-2x-y)\,dxdy \quad D: x=0,\ \ y=0,\ \ x=3,\ \ y=4;$

2) $I=\iint\limits_{D}\left(3x^2+3y^2-2x-2y\right)dxdy \qquad D: x=0,\quad y=0,\quad x+y=1;$

3) $I=\iint\limits_{D}\left(x+y+1\right)dxdy \qquad D: x^2+y^2\le 9;$

4) $I=\iint\limits_{D}\left(x^2-y^2\right)dxdy \qquad D: x^2+y^2\le 2x.$

3.6 Обчисліть подвійні інтеграли, перейшовши до полярної системи координат:

1) $\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)^2 dxdy \qquad D: y=\sqrt{4-x^2},\quad y=0;$

2) $\iint\limits_{D}\sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D: x^2+y^2=9,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0;$

3) $\iint\limits_{D}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D: \frac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le \pi^2;$

4) $\iint\limits_{D}2e^{\left(x^2+y^2\right)}dxdy \qquad D: 1\le x^2+y^2\le 4;$

5) $\iint\limits_{D}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy \qquad D: 4\le x^2+y^2\le 9,\quad x\le y\le x\sqrt{3};$

6) $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: 1\le x^2+y^2\le 16,\quad y\ge -x,\quad x\le 0;$

7) $\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad D: \left(x-1\right)^2+y^2=1,\quad \left(x-2\right)^2+y^2=4,\quad y\le x,\quad x\ge 0;$

8) $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: \left(x-1\right)^2+y^2\le 1,\quad x^2+\left(y-1\right)^2\le 1;$

9) $\iint\limits_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: \left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;$

10) $\iint\limits_{D}y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad D: \left(x^2+y^2\right)^2=a^2xy,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;$

11) $\iint\limits_{D}xydxdy \qquad D: \rho=1,\quad \rho=\sqrt{\cos 2\varphi},\quad \frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\pi;$

12) $\iint\limits_D y\,dxdy \qquad D:\ \rho=2,\quad \rho=\cos\varphi+1,\quad \pi\le\varphi\le2\pi$;

13) $\iint\limits_D dxdy \qquad D:\ \left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\right)^2=4xy,\quad x\ge0,\quad y\ge0$;

14) $\iint\limits_D dxdy \qquad D:\ \left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\right)^2=\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16},\quad x\ge0,\quad y\ge0$;

15) $\iint\limits_D \dfrac{9x}{y^3}dxdy \qquad D:\ 1\le\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\le36,\quad x\ge0,\quad 2y\ge3x$;

16) $\iint\limits_D \dfrac{x}{y}dxdy \qquad D:\ 1\le\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}\le5,\quad x\ge0,\quad y\ge\dfrac{2}{3}x$.

3.7 Обчисліть площу області D:

1) $D:\quad x+y=4,\quad y=x^2-2x+2$;

2) $D:\quad x+y=2,\quad y=x^2-2x$;

3) $D:\quad y=x^2-x-1,\quad y=4-x^2+2x$;

4) $D:\quad y=x^2+3x+1,\quad y=2-x^2-2x$;

5) $D:\quad y+\ln\ x+1\ =0,\quad y=2ex-x^2-e^2,\quad y=0$;

6) $D:\quad y+\sqrt{-x}=0,\quad x^2+y^2=2,\quad y=0$;

7) $D:\quad y=\operatorname{tg}x,\quad y=\dfrac{2}{3}\cos x,\quad x=0$;

8) $D:\quad y=\ln x,\quad y=\ln^2 x$;

9) D: зовні $\rho=3+\cos4\varphi$, обмежена $\rho=2-\cos4\varphi$;

10) D: зовні $\rho=2+\cos2\varphi$, обмежена $\rho=2+\sin\varphi$;

11) D: зовні $\rho=2-\cos\varphi$, обмежена $\rho=3\cos\varphi$;

12) D: зовні $\rho=2-\sin\varphi$, обмежена $\rho=3\sin\varphi$.

3.8 Обчисліть об'єм циліндричного тіла:

1) $V:\quad x=2y^2,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+2y+z=4$;

2) $V:\quad x=\sqrt{y},\quad x=0,\quad z=0,\quad x+y+z=2$;

3) $V:\quad z=x^2+y^2,\quad y=x^2,\quad y=1,\quad z=0$;

4) $V:\quad z=4-x^2,\quad 2x+y=4,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=0$;

5) $V:\quad x^2+y^2=8,\quad x+y+z=4,\quad y=0,\quad z=0,\quad x=0$;

6) $V:\quad x^2+y^2=9,\quad z=5x,\quad z\geq 0$.

3.9 Обчисліть площу частини поверхні:

1) $z^2=2xy$, що проектується в прямокутник $x=0,\quad y=0,\quad x=3,\quad y=6$;

2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що вирізана циліндром $y=x^2,\quad y=1$;

3) $z^2=x^2+y^2$, що вирізається поверхнею $z^2=2py$;

4) $z=xy$, що вирізається циліндром $x^2+y^2=R^2$;

5) $x^2+y^2+z^2=R^2$, що вирізається циліндром $\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$;

6) $x^2+y^2+z^2=R^2$, що вирізається циліндром $x^2+\left(y-\dfrac{R}{2}\right)^2=\dfrac{R^2}{4}$;

7) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, що вирізається циліндром $x^2+y^2\ ^2=R^2\ x^2-y^2$;

8) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, що вирізається циліндром $x^2+y^2\ ^2=a^2xy$.

3.10 Для пластини D з густиною розподілу мас $\gamma\ x,y$ знайдіть а) масу; б) координати центру мас; в) статичні моменти відносно осей:

1) $D:\quad x-1\ ^2,\quad y=5-x^2,\quad \gamma\ x,y\ =x^2$;

2) $D:\ y=x^2,\quad y=6-4x-x^2,\quad \gamma\ x,y\ =x^2$.

3.11 Знайдіть моменти інерції пластини D з густиною розподілу мас $\gamma\ x,y$ відносно точки M, якщо:

1) $D:\ y=x^2-2x+2,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=2,\quad \gamma\ x,y\ =x,\quad M\ 1,2$;

2) $D:\ y=x+2,\quad y=0,\quad x=-1,\quad \gamma\ x,y\ =x^2,\quad M\ 1,1$.

3.12 Знайдіть моменти інерції пластини D з густиною розподілу мас $\gamma\ x,y$ відносно прямої l:

1) $D:\ y=-3x-2,\ \ y=0,\ \ x=-1,\ \ x=-2,\ \ \ \gamma\ x,y\ =x^2,\ \ \ l:\ y=x$;

2) $D:\ y=3x-2,\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=2,\ \ \ \gamma\ x,y\ =x^2,\ \ \ l:\ y=-x$.

Відповіді:

3.1 1) 6π; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{81}{2}$; 5) $\dfrac{28}{3}$; 6) 2; 7) $\dfrac{\pi R^3}{3}$; 8) $\dfrac{3\pi R^2}{16}$; 9) $\dfrac{8}{35}$; 10) $-\dfrac{1}{60}$.

3.2

1) $\int\limits_{1}^{3}dx\int\limits_{-1}^{2}fdy$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{2}^{4}fdy$; 3) $\int\limits_{-1}^{5}dx\int\limits_{-1}^{2}fdy$; 4) $\int\limits_{-2}^{4}dx\int\limits_{-1}^{3}fdy$; 5) $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{1-x}fdy$;

6) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{3-3x}fdy$; 7) $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{y}^{\frac{y}{2}}fdx$; 8) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2y}^{y}fdx$; 9) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x-1}^{x+2}fdy$; 10) $\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{x-1}^{x+3}fdy$;

11) $\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}}fdy$; 12) $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}fdy$; 13) $\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{2-x}fdy$; 14) $\int\limits_{-1}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{x+2}fdy$;

15) $\int\limits_{-4}^{4}dy\int\limits_{\frac{y^2}{8}}^{2}fdx$; 16) $\int\limits_{-4}^{4}dy\int\limits_{-4}^{-\frac{y^2}{4}}fdx$; 17) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{e^x}fdy$; 18) $\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{\ln x}^{x^2}fdy$;

19) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}fdx$; 20) $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-\sqrt{4-y^2}}fdx$; 21) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x}fdy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}fdy$;

22) $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{\frac{2}{x}}^{\frac{x}{2}}fdy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{2x}^{\frac{x}{2}}fdy$;

3.3

1) $\dfrac{1-2\sqrt{2}+\pi}{4}$; 2) $\dfrac{3}{2}$; 3) 2,25; 4) $\dfrac{1}{40}$; 5) $\dfrac{47}{120}$; 6) $\dfrac{1}{3}$; 7) $\dfrac{e-1}{2}$;

8) $\dfrac{\cos 1-1}{3}$; 9) -2; 10) $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{24}$; 11) $6+\dfrac{2}{e}$; 12) $\dfrac{2\ 1+e}{e}$.

3.4

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}} fdx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} fdx$; 3) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} fdy$; 4) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} fdy$;

5) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} fdx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} fdx$; 6) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-y}^{3} fdx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^3 fdx$;

7) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} fdy + \int\limits_{\sqrt{2}}^3 dx \int\limits_0^2 fdy + \int\limits_3^7 dx \int\limits_{\sqrt{x-3}}^2 fdy$; 8) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} fdy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} fdy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^2 fdy$;

9) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} fdy$; 10) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3^x}^{4-x} fdy$; 11) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} fdx$; 12) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} fdx$.

3.5

1) $-72 \le I \le 24$; 2) $-\frac{1}{3} \le I \le \frac{1}{2}$; 3) $9\pi\ 1-3\sqrt{2}\ \le I \le 9\pi\ 1+3\sqrt{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2} \le I \le 4\pi$ 3.6

1) $\frac{32\pi}{3}$; 2) $\frac{61\pi}{6}$; 3) 2π; 4) $2\pi\ e^4-e$; 5) $\frac{35\pi^2}{576}$; 6) $\frac{21\pi}{4}$; 7) $\sqrt{2}$;

8) $\frac{4\ 8-5\sqrt{2}}{9}$; 9) $\frac{a^4\sqrt{2}}{30}$; 10) $\frac{2a^4}{15}$; 11) $-\frac{1}{24}$; 12) 4; 13) 18; 14) 3;
15) $2\sqrt{2}-2\ \ln 6$; 16) $9\ln 2$.

3.7

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{343}{24}$; 4) $\frac{343}{24}$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) $1+\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $3-e$;
9) $\frac{5\ 3\sqrt{3}-\pi}{12}$; 10) $\frac{27\sqrt{3}}{8}$; 11) $3\sqrt{3}$; 12) $3\sqrt{3}$.

3.8

1) $\frac{367}{30}$; 2) $\frac{17}{20}$; 3) $-\frac{8}{35}$; 4) $\frac{40}{3}$; 5) $8\pi-\frac{32\sqrt{2}}{3}$; 6) 90.

3.9

1) 36; 2) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; 3) $2\sqrt{2}\pi p^2$; 4) $\dfrac{2\pi}{3}\left(\ 1+R^2\ ^{\frac{3}{2}}-1\right)$; 5) $2R^2\ \ \pi-2\ $; 6) $2R^2\ \ \pi-2\ $;

7) $4R^2\left(1-\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 8) $4a^2\left(1-\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.10

1) $m=\dfrac{63}{10}$, $M_x=-\dfrac{23}{10}$, $M_y=\dfrac{36}{5}$, $x_c=\dfrac{8}{7}$, $y_c=-\dfrac{23}{63}$;

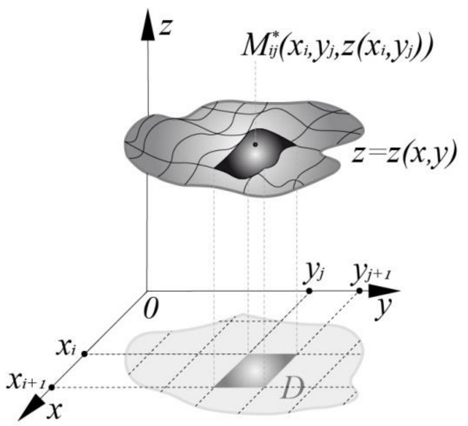
2) $m=\dfrac{192}{5}$, $M_x=\dfrac{3904}{15}$, $M_y=-\dfrac{1088}{15}$, $x_c=-\dfrac{17}{9}$, $y_c=\dfrac{61}{9}$.

3.11

1) $-\dfrac{32}{7}$; 2) $\dfrac{41}{30}$.

3.12

1) $\dfrac{1789}{180}$; 2) $\dfrac{1789}{180}$.



Потрійний інтеграл

Нехай функція $f\ \ x,y,z$ неперервна у замкненій просторовій області V. Запровадивши розбиття цієї області на під області $V_1,V_2,...,V_n$, так, що

1) $V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$;

2) Об'єм $V_i\bigcap V_j=0$ при $i\neq j$, запровадимо потрійний інтеграл функції $f\ \ x,y,z$ по області V наступним чином:

$$\iiint\limits_V f\ \ x,y,z\ \ dxdydz=\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\ \ x_i^*,y_i^*,z_i^*\ \ \Delta V_i \tag{1}$$

де $M_i^*\ \ x_i^*,y_i^*,z_i^*\ \in V_i$, ΔV_i - об'єм області V_i, $\Delta V_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta V_i$.

Має місце наступна теорема:

Для неперервної у обмеженій області V функції $f\;\; x,y,z$ границя (1) існує та не залежить від

- способу розбиття області V на під області V_i;
- вибору точок M_i^* у цих під областях;
- від характеру прямування ΔV_i (діаметру розбиття) до 0.

Основні властивості потрійних інтегралів аналогічні властивостям подвійних інтегралів.

Зауваження: потрійні інтеграли $\iiint\limits_V f\;\; x,y,z\;\; dxdydz$ часто записують у вигляді $\iiint\limits_V f\;\; x,y,z\;\; dV$.

При обчисленні потрійних інтегралів найпростішим є випадок бруса $x,y,z\;\left|a \le x \le b;\; c \le y \le d;\; l \le z \le m\right.$, що дозволяє шляхом групування доданків у (1) за умови розбиття V на «підбруси» $x,y,z\;\left|x_{k-1} \le x \le x_k;\; y_{i-1} \le y \le y_i;\; z_{j-1} \le z \le z_j\right.$ перетворити інтегральну суму на трикратну $\sum\limits_{k=0}^{m} \Delta x_k \sum\limits_{i=0}^{n} \Delta y_i \sum\limits_{j=0}^{p} f\;\; x_k^*, y_i^*, z_j^*\;\; \Delta z_j$,де

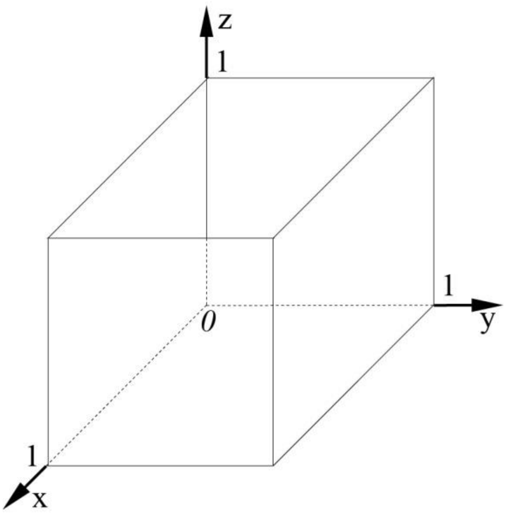
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\; \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\; \Delta z_j = z_j - z_{j-1},\; x_k^* \in \;\; _{k-1}, x_k\;\; ,\; \Delta y_i \in \;\; y_{i-1}, y_i\;\; ,\; z_j^* \in \left[z_{j-1}, z_j\right]$

.

У такому випадку

$$\iiint\limits_V f\;\; x,y,z\;\; dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_l^m f\;\; x,y,z\;\; dz\,, \qquad (2)$$

Тобто, потрійний інтеграл обчислюється шляхом зведення до трикратного (послідовним обчисленням трьох визначених інтегралів).



Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл функції $f\;\; x,y,z\;\; = xy^2z^3$ по одиничному кубу $x,y,z\;\left|0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,\; 0 \le z \le 1\right.$.

Зауважимо, що задачі пов'язнані з обчисленням потрійних інтегралів обов'язкоио супроводжуються рисунками, що зображують область інтегрування.

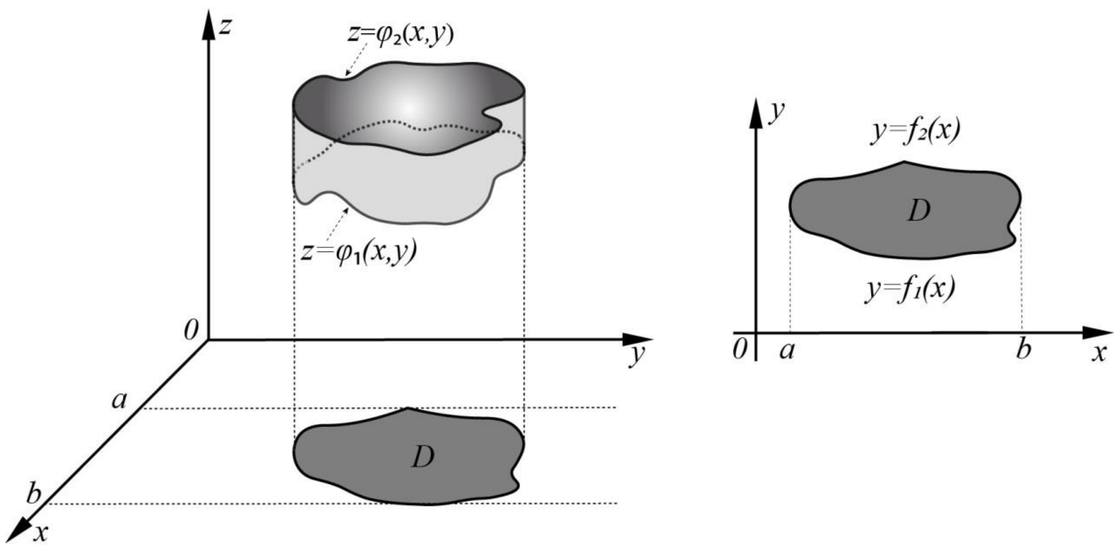
В нашому випадку, позначивши область інтегрування через Q, маємо

$$\iiint\limits_Q xy^2z^3dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 xy^2z^3dz = \int\limits_0^1 xdx\cdot\int\limits_0^1 y^2dy\cdot\int\limits_0^1 z^3dz =$$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_0^1\cdot\frac{z^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

У процесі обчислення даного інтегралу ми скористались тим, що при інтегруванні по одній із змінних решта вважається сталими. Це дозволяє виносити їх за знак відповідного інтегралу (наслідок формули (2)).

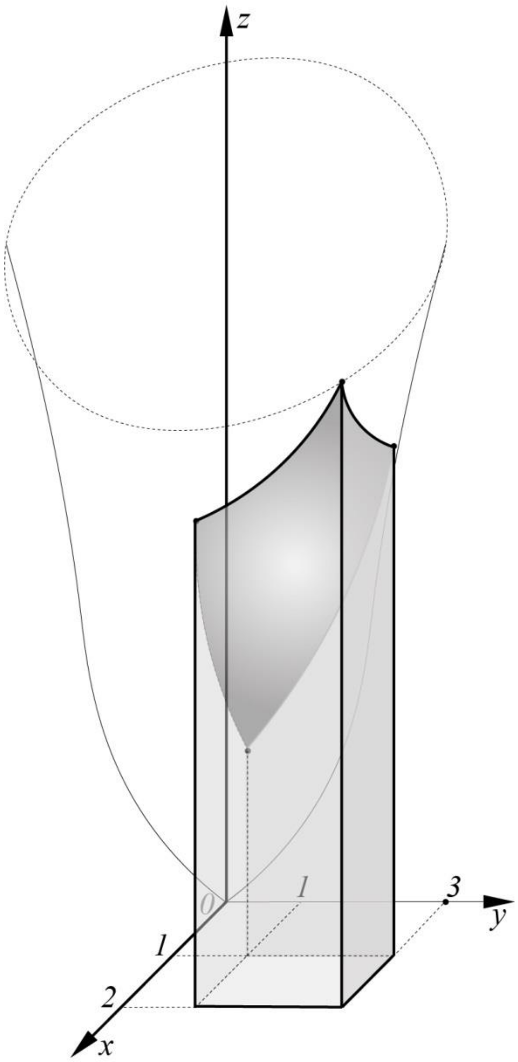
У випадку, коли область інтегрування V є правильною в напрямі осі Oz,

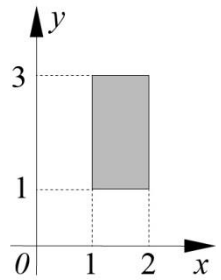


тобто її проекція на координатну площину xOy є правильною в напрямі осі Oy і при цьому $\varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)$, то маємо $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.

Приклад 2. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=1,\quad x=2,\quad y=1,\quad y=3,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2$.

Зобразимо область інтегрування V у тривимірній системі координат та доповнимо це зображення її проекцією на площину xOy.





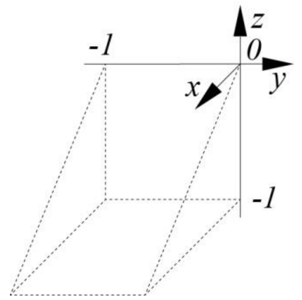
Такі зображення обов'язкові при знаходженні потрійних інтегралів. Може змінюватись лише площина, на яку проектуємо область.

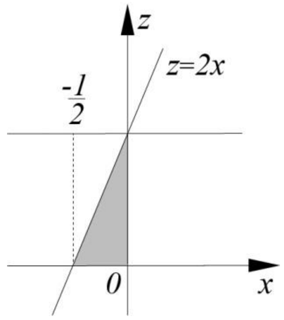
Бачимо, що область V являє собою « прямокутний стовпчик», обмежений знизу площиною xOy, а зверху параболоїдом $z = x^2 + y^2$. Таким чином

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_1^2 dx \int_1^3 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz .$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \iiint_V 6y^2z^2e^{\frac{xz}{2}}\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x = 0, \quad z = -1, \quad z = 2x, \quad y = 0, \quad y = -1$.

Зобразивши область V у тривимірній системі координат виберемо для її проектування площину xOz.





Таким чином, отримуємо трикратний інтеграл

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{-1}^{2x}dz\int_{-1}^{0}6y^2z^2e^{\frac{xz}{2}}dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{-1}^{2x}6z^2e^{\frac{xz}{2}}dz\int_{-1}^{0}y^2dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{-1}^{2x}6z^2e^{\frac{xz}{2}}dz\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{0}=$$

$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dx\int_{-1}^{2x}z^2e^{\frac{xz}{2}}dz=\left|\begin{matrix}u=z^2\\ dv=e^{\frac{xz}{2}}dz\\ du=2zdz\\ v=\frac{2}{x}e^{\frac{xz}{2}}\end{matrix}\right|=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(z^2\ \frac{2}{x}e^{\frac{xz}{2}}\Bigg|_{-1}^{2x}-\frac{4}{x}\int_{-1}^{2x}ze^{\frac{xz}{2}}dz\right)dx=\left|\begin{matrix}u=z\\ dv=e^{\frac{xz}{2}}dz\\ du=dz\\ v=\frac{2}{x}e^{\frac{xz}{2}}\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(8xe^{x^2}-\frac{2}{x}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{4}{x}\left(z\frac{2}{x}e^{\frac{xz}{2}}\Bigg|_{-1}^{2x}-\frac{2}{x}\int_{-1}^{2x}e^{\frac{xz}{2}}dz\right)\right)dx=$$

$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(8xe^{x^2}-\frac{2}{x}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{4}{x}\left(4e^{x^2}+\frac{2}{x}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{4}{x^2}e^{\frac{xz}{2}}\Bigg|_{-1}^{2x}\right)\right)dx=$$

$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(8xe^{x^2}-\frac{16}{x}e^{x^2}+\frac{16}{x^3}e^{x^2}-\frac{2}{x}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{8}{x^2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{16}{x^3}e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

Отриманий інтеграл є досить складним. Обчислення його як суми інтегралів доданків підінтегральної функції вимагає розгляду невласних інтегралів другого роду, первісні яких не виражаються в елементарних функціях. Змінимо порядок інтегрування щодо змінних x та z. Маємо

$$I=2\int_{-1}^{0}dz\int_{\frac{z^2}{2}}^{0}z^2e^{\frac{xz}{2}}dx=2\int_{-1}^{0}z^2\left(\frac{2}{z}e^{\frac{xz}{2}}dz\Bigg|_{x=\frac{z^2}{2}}^{x=0}\right)=4\int_{-1}^{0}z\left(1-e^{\frac{z^2}{4}}\right)dz=4\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}ze^{\frac{z^2}{4}}dz\right)=$$

$$=4\left(-\frac{1}{2}-2\int_{-1}^{0}e^{\frac{z^2}{4}}d\left(e^{\frac{z^2}{4}}\right)\right)=4\left(-\frac{1}{2}-2e^{\frac{z^2}{4}}\Bigg|_{-1}^{0}\right)=4\left(-\frac{1}{2}-2+2e^{\frac{1}{4}}\right)=8e^{\frac{1}{4}}-10.$$

Як і у подвійних інтегралів , заміна змінних у потрійних інтегралах може бути пов'язана як із знаходженням первісних при інтегруванні, так і з найзручнішим представленням областей інтегрування.

Нехай для інтегралу $I=\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz$ запроваджується заміна змінних

$\begin{cases} x=x\left(u,v,w\right) \\ y=y\left(u,v,w\right) \\ z=z\left(u,v,w\right) \end{cases}$ так, що область V_{xyz} переходить у область V^*_{uvw}.

Тоді має місце теорема: за умов, що

- вказані функції встановлюють взаємно однозначну відповідність між областями V_{xyz} та V^*_{uvw};
- області V_{xyz} та V^*_{uvw} правильні та кубовані (об'єм може бути знайдений шляхом покриття системою кубів, об'єми яких прямують до нуля);
- функція $f\left(x,y,z\right)$ - неперервна за сукупністю змінних у області V_{xyz};
- функції $\begin{cases} x=x\left(u,v,w\right) \\ y=y\left(u,v,w\right) \\ z=z\left(u,v,w\right) \end{cases}$ диференційовані,

має місце рівність

$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f\left(x\left(u,v,w\right),y\left(u,v,w\right),z\left(u,v,w\right)\right)\left|J\left(u,v,w\right)\right|dudvdw$, де

$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ - якобіан переходу до змінних $u,\ v,\ w$, $\left|J\right|$ - його абсолютна величина (модуль).

Слід пам'ятати наступне: при використанні

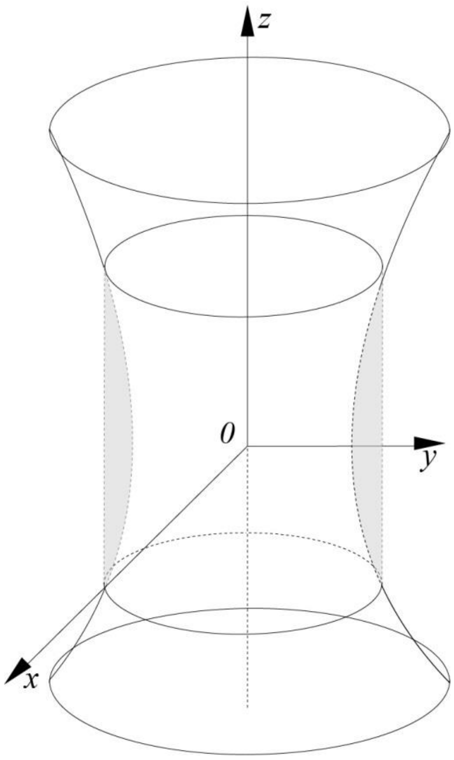
- циліндричної системи координат $\left(\rho,\ \varphi,\ z\right)$: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$ $\left|J\right|=\rho$;
- узагальненої циліндричної системи $\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi, \\ y=b\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$ $\left|J\right|=ab\rho$;

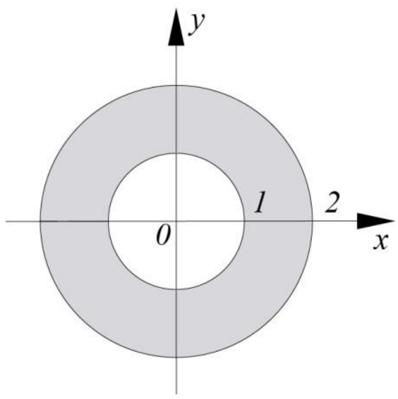
- сферичної системи $\rho,\ \varphi,\ \theta$: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad |J| = \rho^2\sin\theta; \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$

- узагальненої сферичної системи $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, \quad |J| = abc\rho^2\sin\theta. \\ z = c\rho\cos\theta, \end{cases}$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_V x^2 + y^2 \ dxdydz$, де область V є скінченого об'єму множина точок, обмежена поверхнями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ та $x^2 + y^2 = 4$.

Зобразимо однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ та циліндр $x^2 + y^2 = 4$.





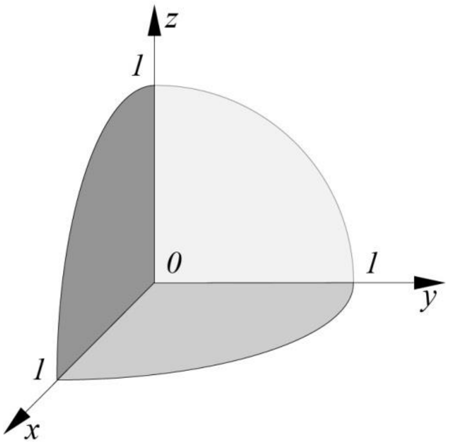
Оскільки область інтегрування є симетричною відносно осі Oz, перейдемо до циліндричних координат: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \quad |J| = \rho \\ z = z, \end{cases}$. При цьому рівняння поверхонь, що обмежують область інтегрування набудуть вигляду $\rho^2 - z^2 = 1$ та $\rho^2 = 4$, або $z = \pm\sqrt{1-\rho^2}$ та $\rho = 2$. Враховуючи, що область інтегрування обмежена знизу поверхнею $z = -\sqrt{1-\rho^2}$, зверху - поверхнею $z = +\sqrt{1-\rho^2}$, а її проекція на площину xOy є кільце з центром у початку координат, внутрішнім радіусом 1 та зовнішнім 2 маємо:

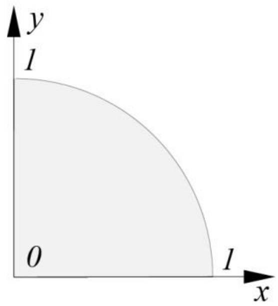
$$I=\iiint\limits_V \rho^2\cdot\rho d\varphi d\rho dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\rho^3 d\rho\int\limits_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}}dz=2\pi\int\limits_1^2\rho^3 2\sqrt{1-\rho^2}d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_1^2 \;\rho^2-1+1\;\; \rho^2-1^{\frac{1}{2}}d\;\rho^2-1\;=2\pi\left(\int\limits_1^2\;\rho^2-1^{\frac{3}{2}}d\;\rho^2-1\;+\int\limits_1^2\;\rho^2-1^{\frac{1}{2}}d\;\rho^2-1\right)=$$

$$=2\pi\left(\frac{2}{5}\;\rho^2-1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}\;\rho^2-1^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^2=2\pi\left(\frac{2}{5}\cdot 9\sqrt{3}+\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}\right)=\frac{56}{5}\pi\sqrt{3}.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\iiint\limits_V \; x+y \; dxdydz$, де V - частина кулі $x^2+y^2+z^2=1$ розташована у першому октанті.





Зазначимо, що така область інтегрування однозначно вказує на доцільність переходу до сферичних координат.

Маємо $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \quad |J|=\rho^2\sin\theta \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases}$, у межах області

$V:\; 0\le\rho\le 1,\;\; 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\;\; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Таким чином

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^1\;\rho\cos\varphi\sin\theta+\rho\sin\varphi\sin\theta\;\rho^2\sin\theta d\rho=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi+\sin\varphi \;\; d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \;\; \sin\varphi-\cos\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

Задачі і вправи для аудиторної та самостійної роботи

4.1 Обчисліть повторні інтеграли:

1) $\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^2 \;\; x+y+2z \;\; dz$

2) $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^1 \;\; 2x+y+z \;\; dz$

3) $\int_0^3 dx \int_0^{9-3x} dy \int_0^{9-3x-y} \;\; 6y+2z \;\; dz$

4) $\int_0^1 dx \int_0^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{2-2x-3y} \;\; 5+y+2x \;\; dz$

5) $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{1-y} dx \int_0^1 \;\; y+2x \;\; zdz$

6) $\int_0^2 dy \int_y^{1-y^2} dx \int_0^1 3 \;\; x-2y \;\; zdz$

4.2 Розставте межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_G f \;\; x,y,z \;\; dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями:

1) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad 2x+y+3z-6=0$

2) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad 4x+3y+6z-12=0$

3) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y=1, \quad z=x^2+y^2+1$

4) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y=2, \quad z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

5) $x^2+y^2=4, \quad z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \quad z=-1$

6) $y=x^2, \quad z=-2, \quad y=1, \quad 2y+z=2$

4.3 Обчисліть потрійні інтеграли

1) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(2x+y+z)^3}$, де область G обмежена поверхнями

$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=2$

2) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(2x+y+z)^3}$, де область G обмежена поверхнями

$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad 2x+y+z=4$

3) $\iiint\limits_G (x+z)\,dxdydz, \qquad G: \ x+y=1, \quad x-y=1, \quad x+z=1, \quad z=0, \quad x=0$

4) $\iiint\limits_G (2y+z)\,dxdydz, \qquad G: \ x+y=2, \quad y-x=2, \quad y+z=2, \quad z=0, \quad y=0$

5) $\iiint\limits_G 2x^2yzdxdydz, \qquad G: \ z=-1, \quad x=0, \quad y=0, \quad x+y=2, \quad x^2+y^2=1$

6) $\iiint\limits_G 3xyzdxdydz, \qquad G: \ z=-2, \quad x=0, \quad y=0, \quad x-y=1, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$

7) $\iiint\limits_G 2xdxdydz, \qquad G: \ y=-1, \quad x=0, \quad z=0, \quad x+z=1, \quad y=x^2+z^2$

8) $\iiint\limits_G y^2dxdydz, \qquad G: \ y=0, \quad x=0, \quad z=0, \quad x+y=2, \quad x=\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}$

4.4 Обчисліть потрійні інтеграли, перейшовши до циліндричної або узагальненої циліндричної системи координат:

1) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad G: \ z^2=x^2+y^2, \ x^2+y^2=4, \quad y\ge x, \quad y\le x\sqrt{3}$

2) $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,zdxdydz, \qquad G: \ x^2+y^2-z^2=-1, \quad x^2+y^2=9, \quad y\le x, \quad y\ge \frac{x}{\sqrt{3}}$

3) $\iiint\limits_G \sqrt{(x^2+z^2)^3}dxdydz, \qquad G: \ y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=0, \quad x^2+z^2=4, \quad x\ge 0$

4) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{y^2+z^2}}, \qquad G: \ x=-\sqrt{y^2+z^2}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \ y^2+z^2=9$

5) $\iiint\limits_G z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}dxdydz, \qquad G: \ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \quad z=1, \quad z=3$

6) $\iiint\limits_G \frac{2zdxdydz}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+y^2}}, \qquad G:\ \frac{x^2}{9}+y^2-z^2=1, \quad z=-2, \quad z=1$

7) $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{4}\right)dxdydz, \qquad G:\ \frac{x^2}{25}+y^2+\frac{z^2}{4}=4, \quad \frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1, \quad y\geq 0$

8) $\iiint\limits_G 2x\sqrt{\frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{9}}dxdydz, \qquad G:\ \frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{9}=x^2, \quad x\geq 0, \quad 4y^2+9z^2=36$

4.5 Обчисліть потрійні інтеграли, перейшовши до сферичної системи координат:

1) $\iiint\limits_G\ x^2+y^2+z^2\ dxdydz \qquad G:\ x^2+y^2+z^2=9, \quad z\geq\sqrt{x^2+y^2}$

2) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz \qquad G:\ x^2+y^2+z^2=16, \ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\iiint\limits_G\ x^2+y^2+z^2\ {}^2dxdydz \qquad G:\ x^2+y^2+z^2=9, \quad z\geq\sqrt{3x^2+3y^2},$

$$y\leq x, \quad y\geq x\sqrt{3}$$

4) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad G:\ z\sqrt{3}\leq\sqrt{y^2+x^2}, \quad y\geq x, \quad y\leq x\sqrt{3},$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

5) $\iiint\limits_G \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}}dxdydz, \qquad G:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

6) $\iiint\limits_G \left(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dxdydz, \qquad G:\ \frac{x^2}{9}+z^2+\frac{y^2}{4}=1$

7) $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}, \qquad G:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z\geq 0$

8) $\iiint\limits_G \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz, \qquad G:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y\geq 0$

4.6 Знайдіть об'єм тіла, що обмежене поверхнями:

1) $y=\sqrt{x},\quad y=x,\quad z=-1,\quad z=3$

2) $y=e^{x},\quad y=1,\quad x=1,\quad z=1,\quad z=4$

3) $y\geq \arcsin x,\quad y\leq \frac{\pi}{2}x,\quad z=0,\quad z=x^{2}+y^{2}$

4) $y=\ln x,\quad y=\ln^{2}x,\quad z=0,\quad z+x=1$

5) $z=\frac{1}{x},\quad z=0,\quad x=1,\quad x=2,\quad y=0,\quad y=4-x^{2}-z^{2}$

6) $z=y^{2},\quad z=1,\quad x=-1,\quad x=y^{2}+z^{2}$

Застосування потрійних інтегралів

Найпростішим та найприроднішим є використання потрійних інтегралів для обчислення об'ємів тіл. При цьому маємо $V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, де через Ω позначаємо просторове тіло, $V(\Omega)$ - його об'єм.

У випадках, коли існує густина розподілу $\mu(x,y,z)$ по об'єму тіла Ω деякої «субстанції» (маси, електричного заряду, ймовірності) маємо, відповідно

$$m(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}\mu_M(x,y,z)\,dxdydz\,;$$

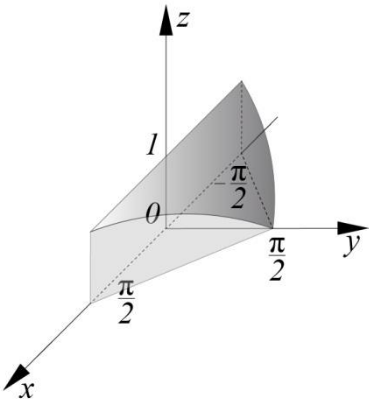
$$q(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}\mu_Q(x,y,z)\,dxdydz\,;$$

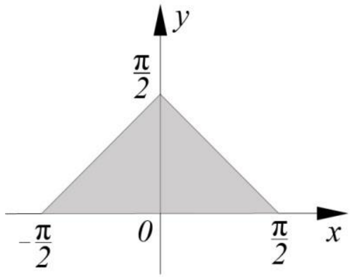
$$p(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}\mu_P(x,y,z)\,dxdydz,$$

де $\mu_M(x,y,z)$ - об'ємна густина розподілу маси, $m(\Omega)$ - маса тіла Ω, $\mu_Q(x,y,z)$ - об'ємна густина розподілу електричних зарядів, $q(\Omega)$ - заряд тіла Ω, $\mu_P(x,y,z)$ - об'ємна густина розподілу ймовірностей попадання випадкової точки (x,y,z) у тіло Ω, $p(\Omega)$ - ймовірність попадання випадкової точки у тіло Ω.

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\cos y,\quad y=x+\frac{\pi}{2},$ $y=\frac{\pi}{2}-x,\quad y=0,\quad z=0.$

Зобразимо тіло.





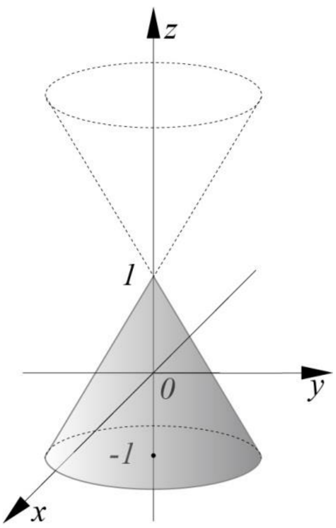
Маємо, як видно з малюнку, обмеженість його зверху циліндричною поверхнею $z=\cos y$, вертикальні «бокові стінки» та трикутну проекцію на площину xOy. Таким чином

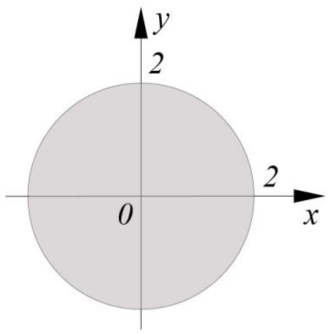
$$V=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dy\int_{y-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-y}dx\int_{0}^{\cos y}dz=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dy\cos y\int_{y-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-y}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \pi-2y\ \ \cos y dy=$$

$$=\begin{vmatrix}u=\pi-2y\\ du=-2dy\\ dv=\cos y dy\\ v=\sin y\end{vmatrix}=\ \pi-2y\ \ \sin y\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin y dy=2 \text{ (од. об'єму).}$$

Приклад 2. Знайти заряд тіла Ω, обмеженого поверхнями $z-1\ ^{2}=x^{2}+y^{2},\quad z=-1$, якщо об'ємна густина заряду у кожній точці пропорційна кубу відстані її до осі Oz.

Зобразимо тіло.





Враховуючи його симетрію відносно осі Oz та обмеженість знизу площиною $z=-1$ та зверху конічною поверхнею $z=1-\sqrt{x^{2}+y^{2}}$, перейдемо до циліндричної системи координат у інтегралі $q=\iiint\limits_{\Omega}\mu\ \ x,y,z\ \ dxdydz$, маючи

$$\mu\ \ x,y,z\ \ =k\ \ \sqrt{x^2+y^2}\ ^3,\quad x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad |J|=\rho.$$

Отримуємо $q=\iiint\limits_{\Omega}k\rho^3\cdot\rho d\varphi d\rho dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^4d\rho\int\limits_{-1}^{1-\rho}dz=k\cdot 2\pi\int\limits_0^2\rho^4\ \ 2-\rho\ \ d\rho=$

$$=2k\pi\left(2\int\limits_0^2\rho^4d\rho-\int\limits_0^2\rho^5d\rho\right)=2k\pi\left(\frac{2}{5}\rho^5\Big|_0^2-\frac{1}{6}\rho^6\Big|_0^2\right)=2k\pi\left(\frac{64}{5}-\frac{64}{6}\right)=\frac{64}{15}\text{ (од.заряду).}$$

Статичні моменти тіла Ω відносно координатних осей у випадку густини маси $\mu\ \ x,y,z$ визначаються за формулами:

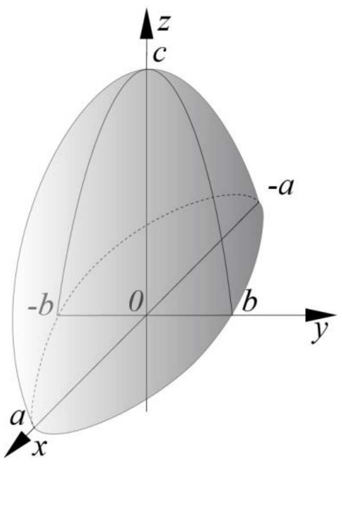
$$M_{xOy}=\iiint\limits_{\Omega}z\mu\ \ x,y,z\ \ dxdydz,\quad M_{xOz}=\iiint\limits_{\Omega}y\mu\ \ x,y,z\ \ dxdydz,$$

$$M_{yOz}=\iiint\limits_{\Omega}x\mu\ \ x,y,z\ \ dxdydz.$$

Відповідно координати центра мас C знаходяться із співвідношень

$x_C=\dfrac{M_{yOz}}{m},\quad y_C=\dfrac{M_{xOz}}{m},\quad z_C=\dfrac{M_{xOy}}{m}$, де m - маса тіла.

Приклад 3. Знайти координати центра мас верхньої половини однорідного $\mu\ \ x,y,z\ \ =\mu_0$ еліпсоїда $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z\geq 0\end{cases}$.



Зобразимо тіло на малюнку та перейдемо до узагальненої сферичної системи координат:

Док однорідності тіла $\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi\sin\theta,\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=c\rho\cos\theta,\end{cases}\quad |J|=abc\rho^2\sin\theta.$

Внаслідок однорідності тіла його маса є $\mu_0\cdot V=\mu_0\cdot\dfrac{2}{3}\pi abc$.

Обчислимо статичні моменти враховуючи, що в межах даного тіла Ω: $0\leq\varphi\leq 2\pi,\quad 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2},\quad 0\leq\rho\leq 1$.

$$M_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} c\rho\cos\theta \cdot abc\rho^2 \sin\theta \cdot \mu_0 d\varphi d\theta d\rho = abc^2\mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta =$$

$$= abc^2\mu_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mu_0 \cdot \frac{1}{4}\pi abc^2.$$

$$M_{xOz} = \iiint\limits_{\Omega} b\rho\sin\theta\sin\varphi \cdot abc\rho^2 \sin\theta \cdot \mu_0 d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= ab^2c\mu_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = 0.$$

$$M_{yOz} = \iiint\limits_{\Omega} a\rho\sin\theta\cos\varphi \cdot abc\rho^2 \sin\theta \cdot \mu_0 d\varphi d\theta d\rho =$$

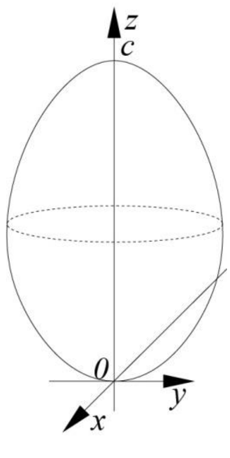
$$= a^2bc\mu_0 \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = 0.$$

Таким чином, $C\left(0, 0, \frac{3}{8}c\right)$.

Якщо для вищезгаданого тіла Ω з об'ємною густиною маси $\mu\ x,y,z$ обчислюється момент інерції I (відносно даної площини, прямої або точки), то застосовується формула $I = \iiint\limits_{\Omega} \mu\ x,y,z\ d^2\ x,y,z\ dxdydz$, де $d\ x,y,z$ - відстань біжучої точки тіла $M\ x,y,z$ до вказаної площини, прямої, точки.

Приклад 4. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, обмеженого поверхнею $x^2 + y^2 + z^2\ ^3 = cz,\quad c > 0$.

Зобразимо тіло, перейшовши у його рівнянні до сферичних координат (внаслідок наявності виразу) отримуємо $\rho^6 = c\rho\cos\theta$, тобто $\rho^5 = c\cos\theta$, оскільки $\rho \geq 0$, то $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, тіло має вигляд, зображений на малюнку.



Поклавши об'ємну густину маси рівною μ_0 і зауваживши, що $d^2 = x^2 + y^2 = \rho^2\sin^2\theta$ у межах тіла $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, маємо

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\sin^2\theta\rho^2\sin\theta\cdot\mu_0 d\varphi d\theta d\rho=\mu_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^{\sqrt[5]{c\cos\theta}}\rho^4 d\rho=$$

$$=\frac{\mu_0}{5}\cdot 2\pi c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=\frac{2}{5}\pi c\mu_0\left.\frac{\sin^4\theta}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{10}\pi c\mu_0 .$$

Задачі і вправи

4.7 Знайдіть об'єм тіла, що обмежене поверхнями:

1) $x^2+y^2=a^2,\quad z-a=\dfrac{y^2}{a}\quad z=0,\quad a>0$

2) $y^2+z^2=16,\quad x=0,\quad z=x^2$

3) $x^2+y^2=16,\quad z-y=2\quad z=0$

4) $x^2+y^2=3,\quad z=2-x-y\quad z=4-x-y$

5) $az=x^2+y^2,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$

6) $z=16-x^2-y^2,\quad z=6\sqrt{x^2+y^2}$

7) $z=2-18\ \ x^2+y^2\ \ ,\quad z=2-44y$

8) $z=4-14\ \ x^2+y^2\ \ ,\quad z=4-28x$

9) $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=3z^2,\quad y\geq x,\quad y\leq x\sqrt{3}$

10) $y=\sqrt{16-x^2-z^2},\quad y\geq\sqrt{3x^2+3z^2}$

11) $z=0,\quad z=ae^{-\ x^2+y^2}\ ,\quad x^2+y^2=R^2$

12) $z=1,\quad z=4e^{-2\ x^2+y^2}\ ,\quad x^2+y^2=25$

13) $x^2+y^2=4y,\quad z=x^2+y^2,\quad z=-1$

14) $x^2+y^2=4x,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$

4.8 Нехай густина розподілу мас задається функцією $\mu=\mu\ \ x,y,z\ \ $. Знайдіть масу тіла, якщо воно обмежене заданими поверхнями:

1) $V: z = y^2, \quad z = 2y^2, \quad y > 0, \quad z = x, \quad z = 2x, \quad z = 2, \quad \mu = x^2$

2) $V: z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2, \quad \mu = x$

3) $V: y = x^2, \quad x = y^2, \quad z = xy, \quad z = 0, \quad \mu = z$

4) $V: y = x^2 + y^2, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = 2x, \quad z = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$,

$\mu = x$

5) $V: z = xy, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 3x, \quad \mu = x^2$

6) $V: z = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0, \quad a > 0, \quad \mu = y^2$

7) $V:\ x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0, \quad x^2 - z^2 = 2y, \quad \mu = xy$

8) $V:\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad \mu = xy^2$

9) $V:\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad \mu = yz$

10) Знайдіть масу сферичного шару між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, якщо густина в кожній його точці обернено пропорційна відстані точки від початку координат.

11) Знайдіть масу половини сферичного шару між поверхнями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ та $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 2$ при $z \geq 0$, якщо густина в кожній точці тіла пропорційна квадрату відстані точки від початку координат.

12) Знайдіть масу циліндра з радіусом основи r та висотою h, якщо густина в кожній точці пропорційна висоті та дорівнює на нижній основі 1.

13) Знайдіть масу конуса з висотою H, якщо його твірні в центральному перерізі перпендикулярні, а густина пропорційна різниці $H - h$, де h - відстань від точки до основи конуса.

4.9 Знайдіть координати центра мас однорідного тіла, що обмежене поверхнями:

1) $x + y + \frac{z}{2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

2) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

3) $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

4) $x^2+y^2=4, \quad x=5, \quad y=5, \quad z=0$

5) $z=\dfrac{y^2}{2}, \quad 2x+3y-12=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$

6) $z^2=xy, \quad x=5, \quad y=5, \quad z=0$

7) Знайдіть координати центра мас тіла, обмеженого поверхнями, якщо густина в кожній точці рівна ординаті цієї точки.

8) Знайдіть координати центра мас тіла, що обмежене поверхнями $x^2+y^2-z^2=4, \quad z=2, \quad z=0$, , якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті цієї точки.

4.10

1) Знайдіть момент інерції однорідного тіла, що обмежене поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2=R^2, \quad z=0$ відносно осі Ox.

2) Знайдіть момент інерції однорідного циліндра $x^2+y^2\le R^2, \quad 0\le z\le H$ відносно осі Oy.

3) Знайдіть момент інерції однорідного тіла, для якого $R^2\le x^2+y^2+z^2\le 4R^2$ відносно осі Oz.

4) Знайдіть момент інерції однорідного тіла, що обмежене поверхнями $x+y+z=2\sqrt{2}, \; x^2+y^2=4, \quad z=0$ відносно осі Oz.

5) Знайдіть момент інерції однорідного тіла, що обмежене поверхнями $z=x^2+y^2, \; z=5$ відносно почату координат.

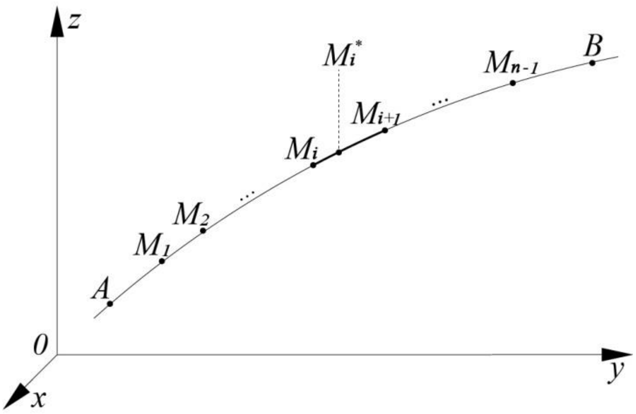
6) Знайдіть момент інерції однорідного шару радіусу 1 відносно його центра.

7) Знайдіть статичний момент відносно площини xOy тіла, що обмежене поверхнями $z=4-x^2, \quad 2x+y=4, \quad x\ge 0, \quad y=0, \quad z=0$.

8) Знайдіть статичний момент відносно площини xOy спільної частини однорідних куль $x^2+y^2+z^2\le R^2, \quad x^2+y^2+z^2\le 2Rz$.

9) Знайдіть статичний момент кулі $x^2+y^2+z^2\le 2Rx$ відносно площини yOz, якщо щільність розподілу мас в кожній точці рівна відстані точки від точки до початку координат.

10) Знайдіть статичний момент кулі $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ відносно площини xOy, якщо щільність розподілу мас в кожній точці рівна відстані точки від точки до початку координат.



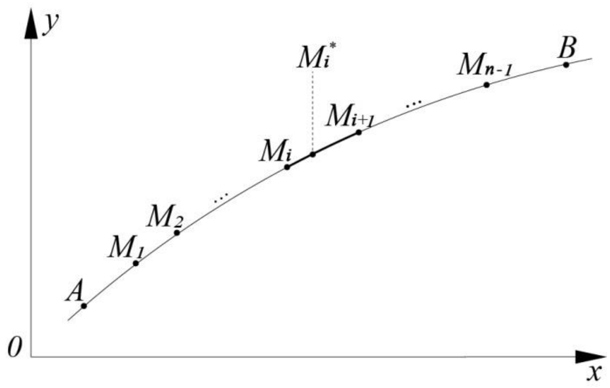
Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай маємо гладку (тобто таку, яка допускає однозначну побудову дотичної в кожній своїй точці) лінію γ у просторі R^3 та функцію $f(M)=f(x,y,z)$ визначену в усіх точках дуги γ_{AB} цієї лінії.

Вибравши на цій дузі послідовні точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$, як це показано на рисунку (M_0 співпадає з A, а M_n з B) та точки $M_0^*, M_1^*, \ldots, M_n^*$, які належать відповідно відрізкам лінії $\gamma_{M_0M_1}, \gamma_{M_1M_2}, \ldots, \gamma_{M_{n-1}M_n}$, складемо інтегральну суму $\sum_{k=1}^{n} f(M_k^*)\, l(\gamma_{M_{k-1}M_k})$, де $l(\gamma_{M_{k-1}M_k})$ - довжина відрізку кривої $\gamma_{M_{k-1}M_k}$.

Якщо така сума збігається до границі (незалежної від вибору $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$ та $M_1^*, M_2^*, \ldots, M_n^*$ при $\mu=\max_k l(\gamma_{M_{k-1}M_k}) \to 0$) то ця границя називається криволінійним інтегралом першого роду від функції $f(x,y,z)$ по дузі γ_{AB} і позначається символом $\int_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl$.

Зауваження: Частинним випадком криволінійного інтегралу першого роду є криволінійний інтеграл вздовж плоскої лінії. Наприклад, якщо дуга γ_{AB} лежить на координатній площині xOy, то маємо $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, l(\gamma_{M_{k-1}M_k}) \xrightarrow[\mu\to 0]{} \int_{\gamma_{AB}} f(x,y)\,dl$, де $\mu=\max_k l(\gamma_{M_{k-1}M_k})$.



До поняття криволінійного інтегралу першого роду приводить, наприклад, задача обчислення маси неоднорідної дротини, форма якої є дуга γ_{AB}, а функція $f(x,y,z)$ визначає лінійну густину матеріалу дротини: $m=\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl$.

Інтегральна сума збігається до інтеграла, наприклад, у випадку неперервної функції $f(x,y,z)$.

Властивості криволінійних інтегралів першого роду:

1) Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму інтегрування:
$\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\gamma_{BA}} f(x,y,z)\,dl$;

2) $\int\limits_{\gamma_{AB}} cf(x,y,z)\,dl=c\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl$;

3) $\int\limits_{\gamma_{AB}} \left[f_1(x,y,z)\pm f_2(x,y,z)\right]dl=\int\limits_{\gamma_{AB}} f_1(x,y,z)\,dl\pm\int\limits_{\gamma_{AB}} f_2(x,y,z)\,dl$;

4) якщо точка C знаходиться на γ_{AB} між точками A та B**, то**
$\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\gamma_{AC}} f(x,y,z)\,dl+\int\limits_{\gamma_{CB}} f(x,y,z)\,dl$;

5) $\int\limits_{\gamma_{AB}} 0\,dl=0,\quad \int\limits_{\gamma_{AB}} 1\,dl=l(\gamma_{AB})$ **;**

6) $m\cdot l(\gamma_{AB})\le\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl\le M\cdot l(\gamma_{AB})$, де m,M - відповідно, умовний мінімум та умовний максимум функції $f(x,y,z)$ на дузі γ_{AB};

7) $\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y,z)\,dl=f(M^*)\cdot l(\gamma_{AB})$ у випадку неперервної функції $f(x,y,z)$, причому $M^*\in\gamma_{AB}$, $f(M^*)$ - середнє значення функції $f(x,y,z)$ на дузі γ_{AB}.

Обчислення та застосування криволінійних інтегралів першого роду.

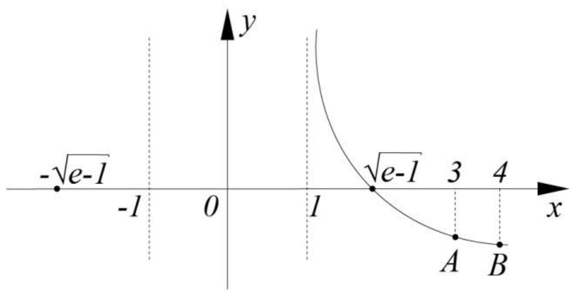
Обчислення криволінійних інтегралів першого роду здійснюється за допомогою визначених інтегралів, причому формули переходу до останніх визначаються способом задання кривої γ:

1) Випадок плоскої кривої, заданої рівнянням $y=\varphi(x)$. В цьому випадку маємо

$\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$, де x_1 та x_2 - абсциси, відповідно, точок A та B.

Приклад 1. Знайти довжину відрізка графіка функції $y=1-\ln(x^2-1)$ при зміні x від 3 до 4.

Розв’язок.



Поклавши, відповідно до властивості 5) $f(x,y)=1$, маємо

$$l=\int\limits_{\gamma_{AB}} dl=\int\limits_3^4\sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx=\int\limits_3^4\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\,dx=\int\limits_3^4\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=$$

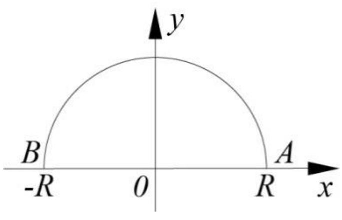
$$=\int\limits_3^4(1+\frac{2}{x^2-1})dx=\left.\left(x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\right|_3^4=1+\ln\frac{6}{5}\text{ (лінійних одиниць).}$$

2) Випадок плоскої кривої, заданої у полярній системі координат рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$. Тоді інтеграл обчислюється за формулою

$\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$, де φ_1,φ_2- полярні кути, які відповідають точкам A та B.

Приклад 2. Знайти заряд верхнього півкола $x^2+y^2=R^2$, якщо лінійна густина заряду визначається формулою $\mu=x^2$.

Розв’язок.



Маємо, що $Q=\int\limits_{\gamma_{AB}}\mu\,dl=\int\limits_{\gamma_{AB}}x^2\,dl$.

Переходячи до полярної системи координат $\begin{cases}x=R\cos\varphi\\ y=R\sin\varphi\end{cases}$, $\begin{cases}\rho=R\\ 0\le\varphi\le\pi\end{cases}$ отримаємо

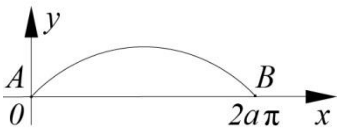
$$\int\limits_{\gamma_{AB}}x^2\,dl=\int\limits_0^{\pi}R^2\cos^2\varphi\sqrt{R^2+0}\,d\varphi=$$

$$=R^3\int\limits_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{R^3}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi R^3}{2}$$ (од. заряду).

3) Випадок плоскої кривої, заданої параметрично. Якщо лінію γ задано параметрично системою рівнянь $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$, то обчислення криволінійного інтегралу першого роду здійснюється за формулою
$$\int\limits_{\gamma_{AB}}f(x,y)\,dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}f(\varphi(t),\phi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\phi'(t))^2}\,dt,$$
де t_1,t_2 – значення параметра для точок A та B відповідно.

Приклад 3. Знайти координати центра мас для першої арки однорідної циклоїди
$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$.

Розв'язок.



Координати центра мас матеріального об'єкту визначаються за формулами
$x_C=\dfrac{M_y}{m}$, $y_C=\dfrac{M_x}{m}$, де m - маса цього об'єкту,

M_x,M_y – його статичні моменти відносно відповідних осей. Поклавши, в силу однорідності розподілу маси вздовж лінії, $\mu=\mu_0$, отримуємо:

$$m=\int\limits_{\gamma_{AB}}\mu_0\,dl=\int\limits_0^{2\pi}\mu_0\sqrt{\left(a(1-\cos t)\right)^2+\left(a\sin t\right)^2}\,dt=a\mu_0\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$=2a\mu_0\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\mu_0\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=8a\mu_0;$$

$$M_x=\int\limits_{\gamma_{AB}}\mu_0 y\,dl=a\mu_0\int\limits_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt=4a^2\mu_0\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=4a^2\mu_0\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=-8a^2\mu_0\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-8a^2\mu_0\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{32}{3}a^2\mu_0;$$

$$M_y=\int\limits_{\gamma_{AB}}\mu_0 x\,dl=a\mu_0\int\limits_0^{2\pi}a(t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a^2\mu_0\int\limits_0^{2\pi}(t-\sin t)\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=2a^2\mu_0\left(\left(\int\limits_0^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\int\limits_0^{2\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt\right)\right)=$$

$$=2a^2\mu_0\left(-2t\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}+2\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)=2a^2\mu_0\left(4\pi-4\sin\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)=8a^2\pi\mu_0.$$

Таким чином, $x_C=\dfrac{8a^2\pi\mu_0}{8a\mu_0}=a\pi,\quad y_C=\dfrac{\frac{32}{3}a^2\mu_0}{8a\mu_0}=\dfrac{4}{3}a.$

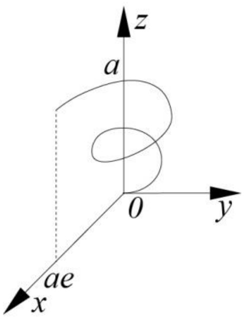
4) Випадок просторової кривої. Як випливає з попереднього, найраціональнішим є задання просторової кривої параметрично (тобто як годографа вектор-функції скалярного аргумента). Тоді маємо

$$\int\limits_{\gamma_{AB}}f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt,$$

де γ визначена системою рівнянь $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, значення t_1 та t_2, як і у попередньому випадку, співвідносяться з точками A та B відповідно.

Приклад 4. Знайти момент інерції конічної спіралі $\begin{cases} x = ae^t \cos t \\ y = ae^t \sin t \\ z = ae^t \end{cases}$ відносно осі аплікат, якщо лінійна густина маси складає $2z$, $t \in (-\infty, 0)$.

Розв'язок.



Маємо

$$I_z = \int\limits_{\gamma_{AB}} (x^2 + y^2)\mu dl = \int\limits_{-\infty}^{0} a^2 e^{2t} ae^t \sqrt{(ae^t(\cos t - \sin t))^2 + (ae^t(\cos t + \sin t))^2 + (ae^t)^2}\, dt =$$

$$= a^4 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{4t} \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1}\, dt = a^4 \sqrt{3} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{4t} dt.$$

Знайдемо головне значення цього інтеграла:

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{0} e^{4t} dt = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_{A}^{0} e^{4t} dt = \lim_{A \to -\infty} \left(\frac{1}{4} e^{4t} \Big|_{-A}^{0} \right) = \frac{1}{4} \lim_{A \to -\infty} (1 - e^{4A}) = \frac{1}{4}.$$

Отже, $I_z = \dfrac{a^4 \sqrt{3}}{4}$.

Задачі і вправи

5.1 Обчисліть криволінійні інтеграли:

1) $\int\limits_L \dfrac{dl}{x + y}$, де L - відрізок прямої $y = 2x + 3$ від точки $A(0,3)$ до точки $B(1,5)$;

2) $\int\limits_{L} \frac{dl}{2x-y}$, де L - відрізок прямої $y=3x+2$ від точки $A\ \ 0,2$ до точки $B\ \ 1,5$;

3) $\int\limits_{C} x\ \ 2y+1\ \ dl$, де C - контур трикутника OAB з вершинами

$O\ \ 0,0\ ,\quad A\ \ 2,4\ ,\quad B\ \ 2,0\ ;$

4) $\int\limits_{C} y\ \ 3x+1\ \ dl$, де C - контур трикутника OAB з вершинами $O\ \ 0,0\ ,\quad A\ \ 1,1\ ,\quad B\ \ 2,0$

;

5) $\int\limits_{L} xdl$, де L - частина параболи $y=2x^2$, що міститься між точками перетину з прямою

$y=6x-4$;

6) $\int\limits_{L} \frac{x^4}{y}dl$, де L - частина гіперболи $y=\frac{1}{x}$, що міститься між точками її перетину з прямою

$x+2y=5$;

7) $\int\limits_{L} \sin^3 x\cos xdl$, де L - дуга кривої $y=\ln\sin x,\quad x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$;

8) $\int\limits_{L} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dl$, де L - дуга кривої $y=\ln\cos x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$;

9) $\int\limits_{L} \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, де L - дуга кривої $y=\sin x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;

10) $\int\limits_{L} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, де L - дуга кривої $y=\cos x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;

11) $\int\limits_{L} x^2 ydl$, де L - частина кола $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, що лежить у першій чверті;

12) $\int\limits_{L} \frac{x}{y^3}dl$, де L - частина кола $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, що лежить у першій чверті;

13) $\int\limits_{L} \sqrt{2y}dl$, де L - перша арка циклоїди $\begin{cases} x=a\ \ t-\sin t \\ y=a\ \ 1-\cos t \end{cases}$;

14) $\int\limits_{L} ydl$, де L - перша арка циклоїди $\begin{cases} x=a\ \ t-\sin t \\ y=a\ \ 1-\cos t \end{cases}$;

15) $\int\limits_{L} \sqrt[3]{axy}dl$, де L - дуга астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 x \\ y=a\sin^3 x \end{cases},\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;

16) $\int\limits_{L} \sqrt[3]{\frac{x}{y}}dl$, де L - дуга астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 x \\ y=a\sin^3 x \end{cases},\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;

17) $\int\limits_{L} xydl$, де L - дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, що лежить в першій чверті;

18) $\int\limits_L \frac{ab\ \ x+y}{\sqrt{a^4y^2+b^4y^2}}dl$, де L - дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, що лежить в першій чверті;

19) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+1}dl$, де L - дуга спіралі Архімеда $\rho=\varphi$ між точками $A\ \ 0,0$ та $B\ \ 1,1$;

20) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L - дуга логарифмічної спіралі $\rho=ae^{\varphi}$ від точки $A\ \ a,0$ до точки $O\ \ 0,-\infty$;

21) $\int\limits_L \ x+y\ \ dl$, де L -коло $x^2+y^2=ax$;

22) $\int\limits_L \ x-y\ \ dl$, де L -коло $x^2+y^2=ay$;

23) $\int\limits_L \ x+y\ \ dl$, де L - та частина лемніскати $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, що лежить у першій чверті;

24) $\int\limits_L \ x^2+y^2\ ^{\frac{3}{2}}dl$, де L - та частина лемніскати $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, що лежить у першій чверті;

25) $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl$, де L - частина спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, що розташована всередині круга радіуса R з центром в початку координат;

26) $\int\limits_L \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2+4}}dl$, де L - частина спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, що розташована всередині круга радіуса 1 з центром в початку координат;

27) $\int\limits_L \sqrt{a^2-2xy}dl$, де L - чверть кола $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x=y$, яке лежить у першому октанті;

28) $\int\limits_L x^2y dl$, де L - чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2=\frac{3R^2}{4}$, яке лежить у першому октанті;

29) $\int\limits_L \ 3x+2y-z+5\ \ dl$, де L - відрізок прямої AB, якщо $A\ \ 1,1,-1$, $B\ \ 2,0,1$;

30) $\int\limits_L \ 2x+3y-2z+3\ \ dl$, де L - відрізок прямої AB, якщо $A\ \ 0,2,1$, $B\ \ 2,-1,3$;

31) $\int\limits_L \ x^2+y^2+z^2\ \ dl$, де L - дуга гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t, \quad t\in\ 0,2\pi \\ z=bt \end{cases}$;

32) $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L - дуга гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t, \quad t\in\ 0,2\pi \\ z=bt \end{cases}$;

33) $\int\limits_L 2zdl$, де L - перший виток конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$;

34) $\int\limits_L \; 2z - \sqrt{x^2 + y^2} \;\; dl$, де L - перший виток конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$;

Застосування криволінійних інтегралів

5.2 Знайдіть довжину лінії:

1) $y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$;

2) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x \in \; 0,1$;

3) $y = 1 - \ln \; x^2 - 1 \; , \quad x \in \; 3,4$;

4) $y = \ln\cos x + 2, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$;

5) $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x = x^2}, \quad x \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$;

6) $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x = x^2} + 4, \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$;

7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, що лежить у верхній півплощині;

8) $\begin{cases} x = a \; t - \sin t \\ y = a \; 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in \; 0, 4\pi$;

9) $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t, \quad t \in \; 0, 2\pi \\ z = t \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \quad t \in \; -\infty, 0 \\ z = e^t \end{cases}$;

11) $\rho = 4 \; 1 - \sin t \; , \quad \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$;

12) $\rho = 8 \; 1 - \cos t \; , \quad \varphi \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, 0\right]$;

13) $\rho = 2a \; 1 + \cos t \;$, що лежить у верхній півплощині;

14) $\rho = a\varphi, \quad \varphi \in \; 0, 2\pi$;

15) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, що лежить у першій чверті;

16) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, що лежить у другій чверті.

5.3 Знайдіть масу кривої L з густиною розподілу мас $\mu \;\; x,y$, якщо:

1) $L:\quad y=\sqrt{x},\quad x\in[1,3],\quad \mu=y;$

2) $L:\quad y=2x,\quad x\in[1,3],\quad \mu=\dfrac{y}{x};$

3) $L:\quad y=\ln x,\quad x\in[1,e],\quad \mu=\sqrt{1+x^2};$

4) $L:\quad y=\dfrac{1}{x},\quad x\in[1,2],\quad \mu=y\sqrt{1+x^4};$

5) $L:\quad x=2\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \mu=y;$

6) $L:\quad x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t,\quad t\in[0,2\pi],\quad \mu=y^{\frac{3}{2}};$

7) $L:\quad x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=at,\quad t\in[0,2\pi],\quad \mu=\dfrac{z^2}{x^2+y^2};$

8) $L:\quad x=\dfrac{1}{2}\cos t,\quad y=\dfrac{1}{2}\cos t,\quad z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\quad \mu=xyz;$

9) $L:\quad x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad z=t,\quad t\in[0,2\pi],\quad \mu=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$

10) $L:\quad x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t,\quad t\in[-\infty,0],\quad \mu=2z.$

5.4 Знайдіть координати центра мас кривої L з густиною розподілу мас γ, якщо

1) L - перший виток однорідної ($\gamma=const$) гвинтової лінії $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases};$

2) L - чверть кола $x^2+y^2=R^2$, що лежить у третій чверті, $\gamma=xy$;

3) L - перша арка однорідної циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases};$

4) L - чверть однорідного еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, що лежить у першій чверті;

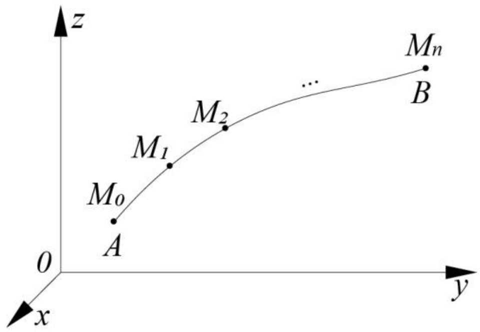
5) L - однорідна кардіоїда $\rho=a(1-\cos\varphi)$;

6) L - права половина однорідної лемніскати $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Криволінійні інтеграли другого роду

(криволінійні інтеграли по координатах, лінійні інтеграли векторних полів).

Нехай задане векторне поле $\overrightarrow{F(M)}=\left\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right\},\quad M(x,y,z)$, у тривимірному просторі.



Розглянемо просторову лінію γ_{AB}, де A – початкова точка, B – кінцева точка. Визначимо на цій лінії точки $M_0, M_1, ..., M_n$ послідовно від A до B (так, що M_0 співпадає з A, а M_n з B), вибравши між ними точки $M_0^*, M_1^*, ..., M_n^*$ так, що M_k^* знаходиться між M_{k-1} та M_k на лінії γ_{AB} (можливо, співпадаючи з M_{k-1} або M_k). Складемо інтегральну суму $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{F(M_k^*)},\overrightarrow{M_{k-1}M_k}\right)$, де $(...,...)$ є скалярним добутком відповідних векторів. Позначивши через δ максимальну із довжин відрізків лінії δ $\gamma_{M_{k-1}M_k}$, назвемо границю S_n при $\delta\to 0$ криволінійним інтегралом поля $\overrightarrow{F(M)}$ вздовж лінії γ_{AB} : $\lim\limits_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{F(M_k^*)},\overrightarrow{M_{k-1}M_k}\right)=\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)$.

Зазначимо, що така границя напевне існує і є єдина незалежно від вибору точок $M_0, M_1, ..., M_n$, $M_0^*, M_1^*, ..., M_n^*$, за умов, що

- функції $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ є неперервними;
- лінія γ_{AB} має скінченну довжину;
- лінія γ_{AB} є гладкою, тобто в кожній її точці існує єдина дотична до неї.

Зауваживши можливість запису векторів $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ у вигляді $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=\left\{x_k-x_{k-1},y_k-y_{k-1},z_k-z_{k-1}\right\}=\left\{\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k\right\}$, де $M_{k-1}\left(x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1}\right),\ M_k\left(x_k,y_k,z_k\right)$, маємо

$$\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{\gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Останній запис дозволяє називати інтеграл такого типу криволінійним інтегралом поля $\overrightarrow{F(M)}$ вздовж лінії γ_{AB} по координатах. У випадку плоского поля $\overrightarrow{F(M)}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ на площині xOy та плоскої лінії γ_{AB} на цій площині, маємо

$$\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{\gamma_{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Властивості криволінійного інтегралу другого роду:

1. Лінійність: якщо поле $\overrightarrow{F(M)}$ є лінійною комбінацією полів $\overrightarrow{F_1(M)}$ та $\overrightarrow{F_2(M)}$, тобто $\overrightarrow{F(M)}=\alpha\overrightarrow{F_1(M)}+\beta\overrightarrow{F_2(M)}$, то $\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{\gamma_{AB}}\alpha\left(\overrightarrow{F_1(M)},\overrightarrow{dl}\right)+\beta\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F_2(M)},\overrightarrow{dl}\right)$.
2. Адитивність за областю інтегрування: якщо точка C - проміжна між A та B на лінії γ_{AB}, то $\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{\gamma_{AC}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)+\int\limits_{\gamma_{CB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)$.
3. Криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напряму інтегрування на протилежний: $\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=-\int\limits_{\gamma_{BA}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)$.
4. $\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{\gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+\int\limits_{\gamma_{AB}}Q(x,y,z)dy+\int\limits_{\gamma_{AB}}R(x,y,z)dz$.

Обчислення криволінійного інтегралу другого роду спирається на його запис як інтегралу по координатах та, як і у випадку інтегралу першого роду, залежить від способу задання лінії γ_{AB}:

- якщо γ_{AB} лежить на площині xOy та задана рівнянням $y=f(x)$, точці A відповідає значення $x=a$, точці B значення $x=b$, то
$$\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_{\gamma_{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b P(x,f(x))dx+Q(x,f(x))f'(x)dx;$$
- якщо γ_{AB} лежить на площині xOy та задана параметрично рівностями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, причому точці A відповідає значення $t=\alpha$, точці B - значення $t=\beta$, то
$$\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=\int\limits_\alpha^\beta P(x(t),y(t))x'(t)dt+Q(x(t),y(t))y'(t)dt;$$
- якщо γ_{AB} - просторова лінія, задана рівностями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$, причому точці A відповідає значення $t=\alpha$, точці B значення $t=\beta$, то $\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{dl}\right)=$

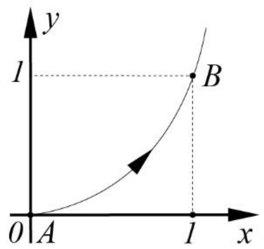
$$=\int_{\alpha}^{\beta} P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)dt+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)dt+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)dt$$

Наведемо відповідні приклади:

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{\gamma_{AB}} xdx+ydy$, де γ_{AB} - відрізок параболи $y=x^2$,

$A(0,0)$, $B(1,1)$.

Розв'язок:

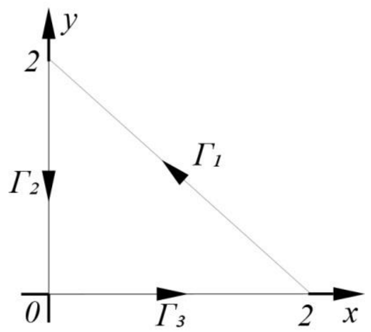


маємо випадок явного задання плоскої лінії рівнянням $y=f(x)$, тому

$$I=\int_0^1 xdx+x^2\cdot 2xdx=\int_0^1\left(x+2x^3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=1.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{\gamma_{AB}}(x-xy)dx+(y+xy)dy$, якщо лінія γ_{AB} є контур трикутника, утвореного прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=2$, який обходиться проти руху годинникової стрілки.

Розв'язок:



Відповідно до другої властивості криволінійних інтегралів другого роду, розіб'ємо контур інтегрування на три частини $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$, як вказано на рисунку. Отримуємо $I=I_1+I_2+I_3$, де

$$I_1=\int_{\Gamma_1}(x-xy)dx+(y+xy)dy=\left\|\begin{matrix}y=2-x\\ dy=-dx\\ x\big|_2^0\end{matrix}\right|=\int_2^0\left(x-x(2-x)\right)dx-\left(2-x+x(2-x)\right)dx=$$

$$=-\int_0^2\left(x-2x+x^2-2+x-2x+x^2\right)dx=-\int_0^2\left(2x^2-2x-2\right)dx=-\left(\frac{2}{3}x^3-x^2-2x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=-\left(\frac{16}{3}-4-4\right)=\frac{8}{3},$$

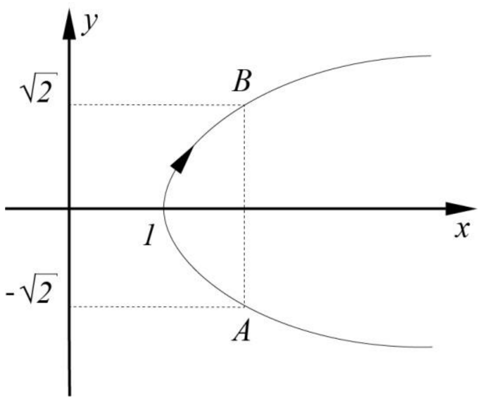
$$I_2=\int_{\Gamma_2}(x-xy)dx+(y+xy)dy=\left|\begin{matrix}x=0\\ dx=0\\ y\big|_2^0\end{matrix}\right|=\int_2^0 ydy=-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2=-2,$$

$$I_3=\int_{\Gamma_3}(x-xy)dx+(y+xy)dy=\left|\begin{matrix}y=0\\ dy=0\\ x\big|_0^2\end{matrix}\right|=\int_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=2.$$

Таким чином, $I=\frac{8}{3}-2+2=\frac{8}{3}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{\gamma_{AB}} xdx-ydy$, якщо лінія γ_{AB} є відрізок правої гілки гіперболи $x^2-y^2=1$, точка A має абсцису (-1), а точка B - $(+1)$.

Розв’язок:

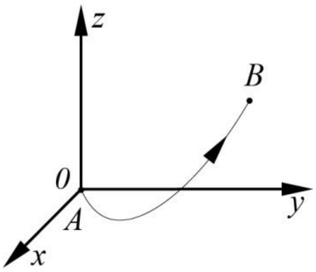


скористаємось параметричним заданням гіперболи $(x=a\,\mathrm{ch}\,t,\quad y=b\,\mathrm{sh}\,t)$, у даному випадку $x=\mathrm{ch}\,t,\quad y=\mathrm{sh}\,t,\quad arc\,\mathrm{sh}(-1)\le t\le arc\,\mathrm{sh}\,1$, отже,

$$I=\int\limits_{arc\,\mathrm{sh}(-1)}^{arc\,\mathrm{sh}\,1}\mathrm{ch}\,t\cdot\mathrm{sh}\,tdt-\mathrm{sh}\,t\cdot\mathrm{ch}\,tdt=\int\limits_{arc\,\mathrm{sh}(-1)}^{arc\,\mathrm{sh}\,1}0dt=0.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(5y^2-z^2\right)dx-\frac{13}{2}yzdy+\frac{4}{3}x^2dz$, якщо лінію γ_{AB} задано параметрично співвідношеннями $x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3,\quad A(0,0,0),\quad B(1,1,1)$.

Розв'язок:



користуючись відповідним даному випадку просторової лінії способом обчислення інтегралу, маємо, враховуючи змінну t від 0 до 1:

$$I=\int_0^1\left(5t^4-t^6\right)dt-\frac{13}{2}t^5\cdot 2tdt+\frac{4}{3}t^2\cdot 3t^2dt=\int_0^1\left(t^4-t^6-13t^6+4t^4\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(5t^4-14t^6\right)dt=\left(t^5-2t^7\right)\Big|_0^1=-1.$$

На практиці часто доводиться зустрічатись з обчисленням криволінійних інтегралів другого роду вздовж замкнених ліній (контурів) γ. Відповідний інтеграл поля $\vec{F}=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$ називається циркуляцією цього поля вздовж контуру γ та має відповідне позначення $C_\gamma\left(\vec{F}\right)=\oint_\gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ (коло при символі інтеграла означає інтегрування вздовж замкненого контуру, напрямок обходу зручно позначати стрілкою на колі).

Для функцій та контурів, які розглядаються нижче, за початкову (вона ж кінцева) точку інтегрування можна вибрати довільну точку контуру.

Якщо

- плоский (належить площині xOy) контур γ є замкненим, простим і гладким;
- область D, границею якої є контур γ, є обмеженою і однозв'язною ;
- для поля $\overrightarrow{F(x,y)}=\{P(x,y);Q(x,y)\}$ функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні у області, що містить контур інтегрування разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$;

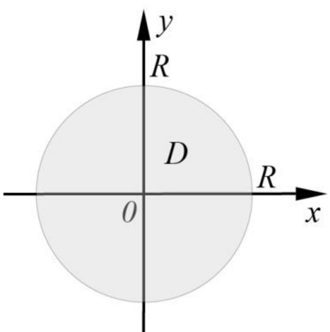
то має місце формула Остроградського -Гріна: $\oint_\gamma P(x,y,)dx+Q(x,y,)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

Приклад 5. Розглянемо інтеграл $I=\oint_\gamma\left(-x^2y\right)dx+xy^2dy$, де γ - коло $x^2+y^2=R^2$.

За формулою Остроградського -Гріна маємо $I=\iint_D\left(\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(-x^2y\right)}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$

.

Враховуючи,що областю D в даному випадку є круг $x^2+y^2\le R^2$,



та переходячи до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad |J|=\rho, \quad 0\le\rho\le R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi$

, отримуємо $I=\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho^3 d\rho=2\pi\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R=\frac{\pi R^4}{2}$.

Наслідок формули Остроградського-Гріна: якщо виконуються умови, за яких справедлива формула Остроградського-Гріна для всіх контурів γ вказаного типу у деякій області D^*, і при цьому $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ для всіх $(x,y)\in D^*$ (або, що те ж саме, існує така функція $u(x,y)$, що при $(x,y)\in D^*$ справедливі рівності $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, то $\oint\limits_\gamma P(x,y,)dx+Q(x,y,)dy=0$, а вираз $P(x,y,)dx+Q(x,y,)dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$.

Аналогічно, якщо для поля $\overrightarrow{F(x,y,z)}=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$ при $(x,y,z)\in D^*$ виконується рівність $\overrightarrow{rot\vec{F}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0$, то $\oint\limits_\gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$, а вираз $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y,z)$.

Криволінійні інтеграли другого роду, для яких підінтегральні вирази є повними диференціалами, мають важливу властивість: їх значення не залежать від шляху інтегрування і визначаються лише початковою та кінцевою точками цього шляху: $\int\limits_{\gamma_{AB}}du=u(B)-u(A)$ (формула Ньютона-Лейбніца для функцій багатьох змінних).

Застосування криволінійних інтегралів другого роду.

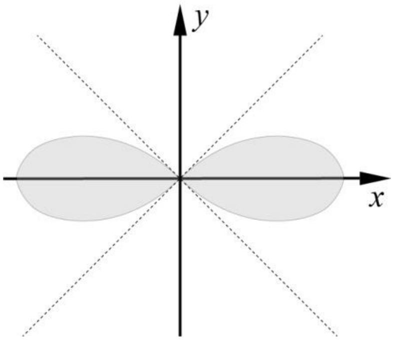
1. Обчислення площ плоских фігур.

Відповідно до формули Остроградського-Гріна

$$\frac{1}{2}\oint\limits_\gamma(-y)dx+xdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D(1+1)dxdy=\iint\limits_D dxdy=S(D).$$

Приклад 6. Обчислити площу, обмежену лемніскатою, рівняння якої $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right), \quad a>0$.

Розв’язок:



переходячи до полярної системи координат $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$, маємо $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$, звідки $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. Помічаючи, що область, обмежена лемніскатою, симетрична відносно осі ординат, запишемо $S=2S_1=2\cdot\frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma}(-y)dx+xdy$, де γ - контур правої пелюстки лемніскати.

Враховуючи, що $x=a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$ маємо

$$S=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(-a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\right)\left(-a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}-a\cos\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)d\varphi+$$

$$+a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\left(a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}-a\cos\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2\varphi\cos 2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\varphi+\cos^2\varphi\cos 2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\varphi\right)d\varphi=$$

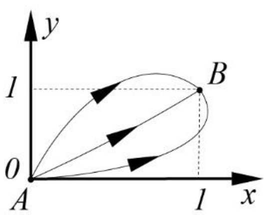
$$=a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=a^2 \text{ (од. площі).}$$

Знаходження функції за її повним диференціалом.

Якщо $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, то функція $u(x,y)$ може бути знайдена як значення інтеграла, для якого кінцева точка інтегрування $B(x,y)$. Довільність вибору початкової точки інтегрування вказує на те, що функція $u(x,y)$ знаходиться при цьому з точністю до довільної сталої.

Приклад 7. Перевірити, що вираз $3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy$ є повним диференціалом, знайти $u(x,y)$ та обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma_{AB}}3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy$, де $A(0,0),\quad B(1,1)$.

Розв'язок:

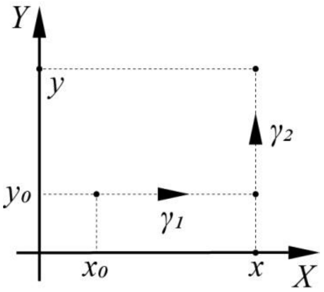


маємо $P(x,y)=3x^2-3y,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-3,\quad Q(x,y)=3y^2-3x,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-3$.

Таким чином, при $(x,y)\in R^2$ має місце рівність $3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy=du$. Оскільки $3x^2-3y=\frac{\partial u}{\partial x}$, то $u=\int\left(3x^2-3y\right)dx=x^3-3xy+C_1(y)$, відповідно $3y^2-3x=\frac{\partial u}{\partial y}$, тому $u=\int\left(3y^2-3x\right)dy=y^3-3xy+C_2(x)$. Звідси $y^3-3xy+C_2(x)=x^3-3xy+C_1(y)$, тобто

$C_2(x)=x^3+C,\quad C_1(y)=y^3+C,\quad u(x,y)=x^3+y^3-3xy+C,$

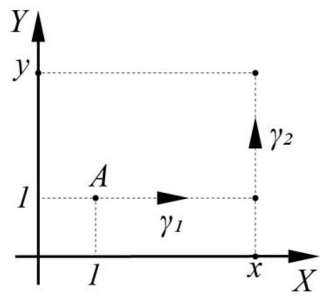
$\int\limits_{\gamma_{AB}} 3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy=u(1,1)-u(0,0)=-1$.



Враховуючи формулу Ньютона-Лейбніца для функцій багатьох змінних, можемо записати, що $u(x,y)=\int\limits_{\gamma_1} P(X,y_0)dX+\int\limits_{\gamma_2} Q(x,Y)dY+C$, відповідно до наведеного рисунку,враховуючи, що на відрізку γ_1 маємо $Y=y_0=const,\quad dY=0$, а на відрізку γ_2, відповідно, $X=x=const,\quad dX=0$.

Приклад 8. Відновити функцію $u(x,y)$ за її повним диференціалом $du=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}+2\right)dx+\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}-3\right)dy$, знаючи,що $u(1,1)=2$.

Розв’язок:



розглянемо інтеграл $I=\int\limits_{\gamma_{AB}}\left(\frac{1}{Y}-\frac{Y}{X^2}+2\right)dX+\left(-\frac{X}{Y^2}+\frac{1}{X}-3\right)dY$, де шлях $\gamma_{AB}=\gamma_1\cup\gamma_2$ відповідно до рисунку. Маємо $I=I_1+I_2$, де

$$I_1=\int\limits_{\gamma_1}\left(\frac{1}{Y}-\frac{Y}{X^2}+2\right)dX+\left(-\frac{X}{Y^2}+\frac{1}{X}-3\right)dY=\begin{vmatrix}1\le X\le x\\ Y=1\\ dY=0\end{vmatrix}=\int\limits_0^x\left(1-\frac{1}{X^2}+2\right)dX=$$

$$=\left(3X+\frac{1}{X}\right)\Bigg|_1^x=3x-3+\frac{1}{x}-1=3x+\frac{1}{x}-4;$$

$$I_2=\int\limits_{\gamma_2}\left(\frac{1}{Y}-\frac{Y}{X^2}+2\right)dX+\left(-\frac{X}{Y^2}+\frac{1}{X}-3\right)dY=\begin{vmatrix}X=x\\ dX=0\\ 1\le Y\le y\end{vmatrix}=\int\limits_1^y\left(-\frac{x}{Y^2}+\frac{1}{x}-3\right)dY=$$

$$=\left(\frac{x}{Y}+\frac{Y}{x}-3Y\right)\Bigg|_1^y=\frac{x}{y}-x+\frac{y}{x}-\frac{1}{x}-3y+3.$$

Таким чином, $I=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2x-3y-1$. В той же час, $I=u(x,y)-u(1,1)=u(x,y)-2$, звідки $u(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2x-3y+1$.

Якщо для просторового поля $\overrightarrow{F(x,y,z)}=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$ у деякій області $D\subset R^3$ виконується рівність $\overrightarrow{rot F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0$, то , аналогічно попередньому, існує така функція $u(x,y,z)$, що вираз $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ є її повним диференціалом du, інтеграл $\int\limits_{\gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ не залежить від шляху інтегрування γ_{AB} $(\gamma, A, B\subset D)$, справедлива формула Ньютона-Лейбніца $\int\limits_{\gamma_{AB}}du=u(B)-u(A)$, а функція $u(x,y,z)$ може бути знайдена за формулою

$u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}P(X,y_0,z_0)dX+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,Y,z_0)dY+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,Z)dZ+C$ відповідно до рисунку.

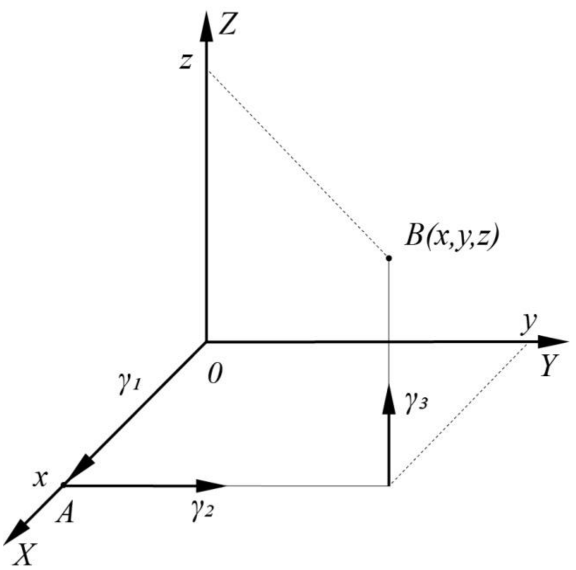
Приклад 9. Перевірити, чи є вираз $\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ повним диференціалом функції $u(x,y,z)$ та знайти цю функцію.

Розв'язок: у даному випадку $\overline{F(x,y,z)}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$;

$$\overrightarrow{rot\vec{F}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z};\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}.$$

Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, то $\overrightarrow{rot\vec{F}}=0$, даний вираз є повним диференціалом.



Нехай $u(1,0,0)=C$, розглянемо інтеграл

$$I=\int\limits_{\gamma_{AB}}\frac{XdX+YdY+ZdZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=I_1+I_2+I_3.$$

$$I_1=\int\limits_{\gamma_1}\frac{XdX+YdY+ZdZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\begin{vmatrix}1\le X\le x\\ Y=Z=0\\ dY=dZ=0\end{vmatrix}=\int\limits_1^x\frac{XdX}{\sqrt{X^2}}=x-1;$$

$$I_2=\int\limits_{\gamma_2}\frac{XdX+YdY+ZdZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\begin{vmatrix}X=x, & dX=0\\ 0\le Y\le y & \\ Z=0, & dZ=0\end{vmatrix}=\int\limits_0^y\frac{YdY}{\sqrt{x^2+Y^2}}=\sqrt{x^2+Y^2}\Big|_0^y=\sqrt{x^2+y^2}-x;$$

$$I_3=\int\limits_{\gamma_3}\frac{XdX+YdY+ZdZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\begin{vmatrix}X=x, & dX=0\\ Y=y, & dY=0\\ 0\le Z\le z & \end{vmatrix}=\int\limits_0^z\frac{ZdZ}{\sqrt{x^2+y^2+Z^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+Z^2}\Big|_0^z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Таким чином,

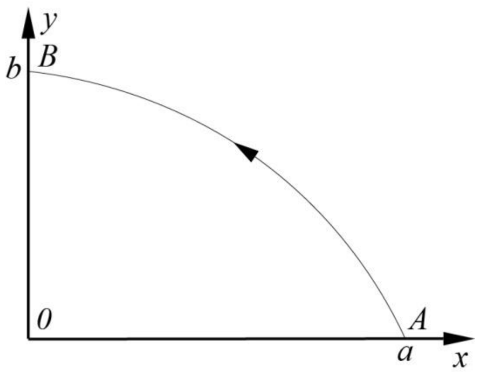
$$I=u(x,y,z)-u(1,0,0)=u(x,y,z)-C=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C-1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C_1.$$

3. Знаходження роботи, що виконується при переміщенні точки вздовж лінії γ_{AB} у силовому полі $\overrightarrow{F(x,y,z)}=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$. Робота поля сили $\overrightarrow{F(x,y,z)}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії γ_{AB} знаходиться за формулою

$$A=\int\limits_{\gamma_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\ .$$

Приклад 10. Знайти роботу сили $\vec{F}$ пружності, спрямованої у кожній точці до початку координат, $|\vec{F}|=\frac{k}{|\vec{r}|}$, де k - коефіцієнт пружності $r=\sqrt{x^2+y^2}$, при переміщенні матеріальної точки вздовж чверті еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad A(a,0),\quad B(0,b).$

Розв'язок:



оскільки $\vec{F}=-K\cdot\{x,y\}$, то

$$|\vec{F}|=\sqrt{Kx^2+Ky^2}=K\sqrt{x^2+y^2}=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad K=\frac{k}{x^2+y^2};$$

$$\vec{F}=\left\{\frac{-kx}{x^2+y^2},\frac{-ky}{x^2+y^2}\right\}.$$

$$A=\int\limits_{\gamma_{AB}}\frac{-kxdx}{x^2+y^2}-\frac{kydy}{x^2+y^2}=\left|\begin{array}{l} x=a\cos t,\quad dx=-a\sin tdt \\ y=b\sin t,\quad dy=b\cos tdt \\ \qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=-k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(a^2-b^2\right)\cos t\sin tdt}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t\right)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\frac{k}{2}\ln\left|a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k}{2}\left(\ln b^2-\ln a^2\right)=k\ln\frac{b}{a}.$$

Приклад 11. Знайти роботу сили тяжіння при переміщенні одиничної маси з точки $A(x_1,y_1,z_1)$ до точки $B(x_2,y_2,z_2)$, вважаючи притягаючу масу розташованою в початку координат.

Розв'язок: маємо, аналогічно до попередньої задачі $\left|\vec{F}\right| = \frac{\gamma M \cdot 1}{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{F} = -K\cdot\{x,y,z\}$;

поклавши $k=\gamma M$, отримуємо $\vec{F} = \left\{ -\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right\}$.

Покажемо, що $\overrightarrow{rot\vec{F}} = 0$, дійсно, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{3xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$,

$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{3zy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$, таким чином, існує $u(x,y,z)$ така,що

$du = -\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}(xdx+ydy+zdz)$. Знайдемо цю функцію, вибравши за $M_0(1,0,0)$:

$$u(x,y,z) = \int_1^x \left(-\frac{k}{X^2}\right)dX + \int_0^y \left(-\frac{kY}{\left(x^2+Y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)dY + \int_0^z \left(-\frac{kZ}{\left(x^2+y^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)dZ + C =$$

$$= \frac{k}{X}\Bigg|_{X=1}^{X=x} + \frac{k}{\sqrt{x^2+Y^2}}\Bigg|_{Y=0}^{Y=y} + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+Z^2}}\Bigg|_{Z=0}^{Z=z} + C =$$

$$= k\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + C = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C_1.$$

Звідси шукана робота $A = u(B) - u(A) = \left(\frac{k}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + C_1\right) - \left(\frac{k}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} + C_1\right) =$

$$= k\left(\frac{k}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{k}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\right).$$

Задачі і вправи.

6.1 Обчисліть інтеграли:

1) $\int_L 3ydx - \left(2y+x^2\right)dy \qquad L: y = x^2+5x, \quad x\in[0,5]$;

2) $\int\limits_L xy^2dx + x^3dy \qquad L: y^2 = 4x, \quad x \in [0,1], \quad y \geq 0$;

3) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx \qquad L: y = 2x^2, \quad x \in [2,4]$;

4) $\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx \qquad L: y = 2x^3, \quad x \in [0,1]$;

5) $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + xdy \qquad L: y = \ln x, \quad x \in \left[1, e^2\right]$;

6) $\int\limits_L \frac{2y}{\sqrt{x}}dx + 3x^{\frac{3}{2}}dy \qquad L: y = \sqrt{x}, \quad x \in [1,4]$;

7) $\int\limits_L (2x - y)dx + (x + 3y)dy \qquad L -$ відрізок прямої $AB, \quad A(1,2), \quad B(2,5)$;

8) $\int\limits_L (x + 2y)dx + (y - 3x)dy \qquad L -$ відрізок прямої $AB, \quad A(2,1), \quad B(4,3)$;

9) $\int\limits_L \sqrt[3]{x}\,ydy - \sqrt[3]{y}\,xdx \qquad L: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

10) $\int\limits_L x^4 ydy - y^4 xdx \qquad L: \begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

11) $\int\limits_L x^2dx - y\sqrt{x}dy \qquad L -$ дуга кола $x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$ що пробігається проти годинникової стрілки;

12) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy \qquad L -$ верхня половина еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$ що пробігається проти годинникової стрілки;

13) $\int\limits_L ydx + zdy + xdz \qquad L: \ x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad t \in [0, 2\pi]$;

14) $\int\limits_L 2xdx + 3ydy + (x + y - 5)dz \qquad L: \ x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = 5, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

15) $\int\limits_L 2xydx + 5xydy + 3zdz \qquad L -$ відрізок прямої $AB, \quad A(0,1,5), \quad B(2,1,3)$;

16) $\int\limits_L 2yzdx + 3xydy + 2xzdz$ $\quad L-$ відрізок прямої AB, $A(1,-1,0)$, $B(2,3,7)$.

6.2 Обчисліть криволінійні інтеграли уздовж кривої L, використовуючи формулу Остроградського-Гріна. Обхід контура проти годинникової стрілки.

1) $\int\limits_L (2x+y)dx + 2xdy$ $\quad L-$контур прямокутника $1 \le x \le 3;\quad 0 \le y \le 4$;

2) $\int\limits_L \left(3x^2 + 2y\right)dx + 4xdy$ $\quad L-$ контур прямокутника $-2 \le x \le 5;\quad 1 \le y \le 3$;

3) $\int\limits_L (4x+y)dx - (x+3y)dy$ $\quad L-$контур ΔABC, $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,5)$;

4) $\int\limits_L (3x-y)dx - (2y-3x)dy$ $\quad L-$контур ΔABC, $A(-3,-1)$, $B(-1,-2)$, $C(-2,-5)$;

5) $\int\limits_L x^2y^3dx - xydy$ $\quad L-$ контур, що обмежений параболами $y = x^2$, $y^2 = x$;

6) $\int\limits_L 2x^3dx + (2x+3y)dy$ $\quad L-$контур, обмежений параболою $y = (x-1)^2$ і прямою $y = 3x+1$

;

7) $\int\limits_L \left(2xy + e^x \cos x\right)dx + \left(4xy + y^2 \sin y\right)dy$ $\quad L-$еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

8) $\int\limits_L \left(x^2y + \ln x\right)dx + \left(xy^2 - e^{2y}\right)dy$ $\quad L-$ коло $x^2 + y^2 = 2ax$.

6.3 Переконайтесь, що підінтегральний вираз є повним диференціалом і обчисліть інтеграл:

1) $\int\limits_{(-2,1)}^{(2,3)} ydx + xdy$

2) $\int\limits_{(1,2)}^{(4,5)} 4xydx + 2x^2dy$

3) $\int\limits_{(2,1)}^{(5,6)} \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

4) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,2)} \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

5) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,5)} \left(4xy - 15x^2y\right)dx + \left(2x^2 - 5x^3 + 4\right)dy$

6) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} \left(4x^3y^3 + 3x^2y^2 + 2xy\right)dx + \left(3x^4y^2 + 3x^3y + x^2\right)dy$

Застосування криволінійного інтеграла другого роду

6.4 Знайдіть роботу сили $\vec{F}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж контура L від точки A до точки B, якщо:

1) $\vec{F}=\left(3y^2+4y\right)\vec{i}+\left(6xy+4x-4y\right)\vec{j},\quad L-$відрізок прямої $AB,\quad A(0,1),\quad B(2,5)$;

2) $\vec{F}=\left(2xy^2+3x^2\right)\vec{i}+\left(2x^2y+3y^2\right)\vec{j},\quad L-$ відрізок прямої $AB,\quad A(1,2),\quad B(2,1)$;

3) $\vec{F}=y\cos^3 x\vec{i}+\dfrac{1}{y^2}\vec{j},\quad L-$дуга кривої $y=\operatorname{tg}x,\quad A\left(\dfrac{\pi}{4},1\right),\quad B\left(\dfrac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$;

4) $\vec{F}=3x^2\vec{i}+\dfrac{2}{y^2}\vec{j},\quad L-$ дуга кривої $y=\dfrac{1}{x},\quad A(1,1),\quad B\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$;

5) $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j},\quad L:\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\quad A(0,0),\quad B(\pi a,2a)$;

6) $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j},\quad L:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases},\quad A(a,0),\quad B(0,a)$;

7) $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\vec{i}+\left(2x^2+2y^2\right)\vec{j},\quad L-$дуга кола $x^2+y^2=R^2,\quad (y\ge 0),\quad A(R,0),\quad B(-R,0)$;

8) $\vec{F}=xy\vec{i}+2y\vec{j},\quad L-$ дуга кола $x^2+y^2=25,\quad (x,y\ge 0),\quad A(5,0),\quad B(0,5)$;

9) $\vec{F}=z\vec{i}-4x\vec{j}+5y\vec{k},\quad L-$лінія перетину поверхонь $z=x^2+y^2-10$ та $z=-1$;

10) $\vec{F}=2y\vec{i}-3x\vec{j}+z\vec{k},\quad L-$ лінія перетину поверхонь $x^2+y^2+z^2=4$ та $x^2+y^2=z^2,\quad z>0$.

6.5 Обчисліть з використанням криволінійного інтеграла другого роду площу плоскої фігури, що обмежена:

1) еліпсом $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$;

2) колом $x^2+y^2=16y$;

3) астроїдою $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$;

4) кардіоїдою $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$.

6.6 Відновіть (або знайдіть) функцію за її повним диференціалом:

1) $du = \left(y^4 + 2xy\right)dx + \left(4xy^3 + x^2 - 3y^2\right)dy$;

2) $du = \left(y^3 + 2y - 3x^2\right)dx + \left(3xy^2 + 2x\right)dy$;

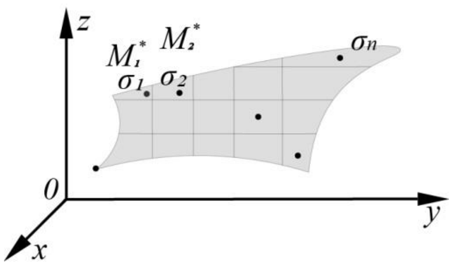
3) $du = \left(x\,\mathrm{arctg}\,y + \ln\dfrac{x+1}{2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{2\left(y^2+1\right)} + \sin 3y\right)dy$;

4) $du = \left(e^y + (4x+2)\sin 2x\right)dx + \left(xe^y + 2y\right)dy$;

5) $du = \left(y^2z^3 + 2\right)dx + \left(2xyz^3 + 1\right)dy + \left(3xy^2z^2 + 2z\right)dz$;

6) $du = \left(yz^2 + 1\right)dx + \left(xz^2 + 2y\right)dy + \left(2xyz + 3z^2\right)dz$.

Поверхневі інтеграли першого роду (інтеграли по площі поверхні).



Нехай в усіх точках поверхні σ визначено функцію $f(M) = f(x, y, z)$. Розбивши поверхню на частини $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ та визначивши для кожної з цих частин (довільним чином) точки $M_1^* \in \sigma_1, ..., M_n^* \in \sigma_n$, побудуємо інтегральну суму $I_\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(M_k^*\right)S\left(\sigma_k\right)$, де $S\left(\sigma_k\right)$- площа частини поверхні σ_k, причому $S\ \ \sigma_i \cap \sigma_j\ \ = 0$ при $i \neq j$.

Якщо величина I_σ має скінченну границю при прямуванні всіх $S\left(\sigma_k\right)$ одночасно до 0, причому така границя не залежить від способу розбиття поверхні та вибору точок $M_1^*, ..., M_n^*$, то вона називається поверхневим інтегралом першого роду функції $f(M)=f(x,y,z)$ по поверхні σ та позначається $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds$.

Інша назва такого інтегралу – інтеграл функції $f(M)=f(x,y,z)$ по площі поверхні σ.

Існування такого інтегралу забезпечується, наприклад, виконанням наступних умов:

- поверхня σ гладка (у кожній її точці існує єдина дотична площина);
- площа поверхні σ скінченна;
- функція $f(x,y,z)$ неперервна в області простору R^3, що містить поверхню σ.

Властивості поверхневих інтегралів першого роду:

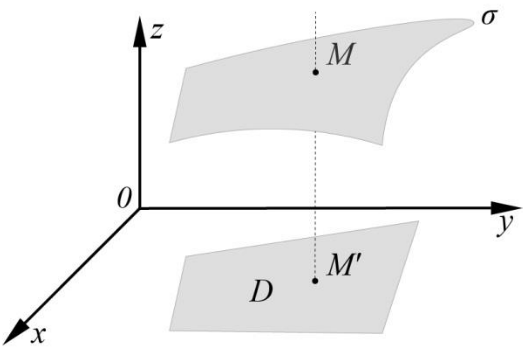
1. Лінійність: $\iint\limits_{\sigma}\left[\alpha f_1(x,y,z)+\beta f_2(x,y,z)\right]ds=\alpha\iint\limits_{\sigma} f_1(x,y,z)ds+\beta\iint\limits_{\sigma} f_2(x,y,z)ds$.

2. Адитивність: якщо $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, причому $S(\sigma_1\cap\sigma_2)=0$, то
$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{\sigma_1} f(x,y,z)ds+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y,z)ds$.

3. $\iint\limits_{\sigma} 1ds=S(\sigma)$.

Обчислення поверхневих інтегралів першого роду.

Нехай



- поверхню σ задано рівнянням $z=\varphi(x,y)$;
- поверхня σ перетинається з кожною прямою, паралельною осі Oz не більше ніж в одній точці;
- проекція поверхні σ на координатну площину xOy є область D.

Тоді має місце рівність $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}dxdy$.

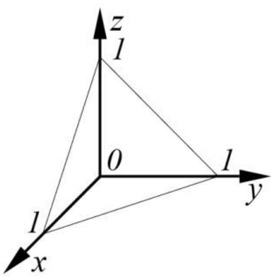
Таким чином, обчислення поверхневого інтегралу першого роду зводиться до обчислення подвійного інтегралу. Аналогічно розглядаються випадки задання поверхні рівняннями $y=\varphi(x,z)$ (проектування на площину xOz) та $x=\varphi(y,z)$ (проектування на площину yOz).

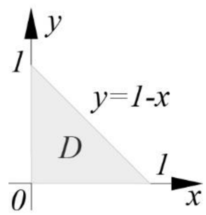
При цьому

- вибір сторони поверхні, по якій ведеться інтегрування, є неістотним;
- якщо одній точці проекції поверхні σ на координатну площину відповідає дві або більше точок на самій поверхні, то останню розбивають на частини, для кожної з яких операція проектування взаємно однозначна.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xyzds$, де σ - частина площини $x+y+z=1$, розташована в першому октанті.

Розв'язок:





з рівняння площини маємо $z=1-x-y$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-1,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-1$. Тоді

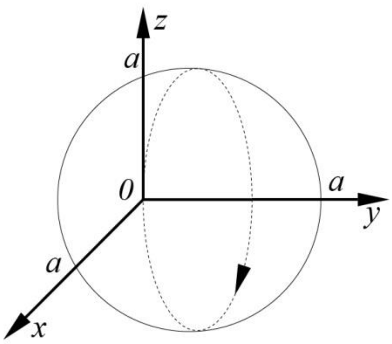
$$I=\iint\limits_{D} xy\left(1-x-y\right)\sqrt{1+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}\,dxdy=\sqrt{3}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}\left(y-xy-y^2\right)dy=$$

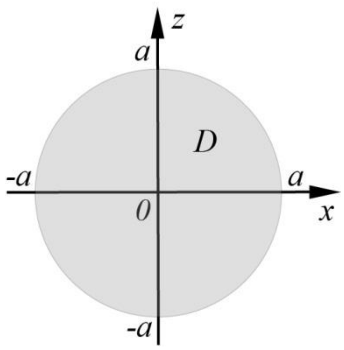
$$=\sqrt{3}\int\limits_0^1 xdx\left(\frac{y^2}{2}-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}=\sqrt{3}\int\limits_0^1 x\left(\frac{\left(1-x\right)^2}{2}-x\frac{\left(1-x\right)^2}{2}-\frac{\left(1-x\right)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1 x\left(1-x\right)^3dx=-\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1\left(1-x\right)^4dx+\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_0^1\left(1-x\right)^3dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_{\sigma} x^2yds$, де σ -права півсфера $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$.

Розв'язок:





оскільки поверхня σ може бути взаємно однозначно спроектована на площину xOz, то, записавши її рівняння у вигляді $y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$, маємо

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}},$$

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-z^2}+\frac{z^2}{a^2-x^2-z^2}}dxdz=\frac{adxdz}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}.$$ Тоді

$$I=\iint\limits_D x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\frac{adxdz}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}=\begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, & 0\le\rho\le a\\ z=\rho\sin\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi\\ |J|=\rho & \end{vmatrix}=$$

$$=a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho d\rho=a\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int\limits_0^a\rho^3 d\rho=\frac{\pi a^5}{4}.$$

Застосування криволінійних інтегралів першого роду.

За допомогою інтегрування по площі поверхні можна обчислювати масу поверхні (підінтегральна функція є поверхнева густина розподілу маси), заряд, розподілений по поверхні (підінтегральна функція є поверхнева густина розподілу заряду), координати центра мас поверхні з розподіленою по ній масою

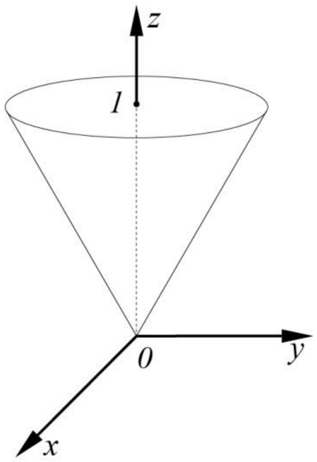
$$x_c=\frac{m_{yz}}{m}=\frac{\iint\limits_\sigma x\gamma(M)ds}{\iint\limits_\sigma \gamma(M)ds};\quad y_c=\frac{m_{xz}}{m}=\frac{\iint\limits_\sigma y\gamma(M)ds}{\iint\limits_\sigma \gamma(M)ds};\quad z_c=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{\iint\limits_\sigma z\gamma(M)ds}{\iint\limits_\sigma \gamma(M)ds};$$ де $M(x_c,y_c,z_c)$ - центр мас поверхні σ, m - маса поверхні σ, $\gamma(M)$ - поверхнева густина маси, розподіленої по поверхні σ у точці M, m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} - статичні моменти поверхні σ відносно координатних площин yOz, xOz, xOy відповідно.

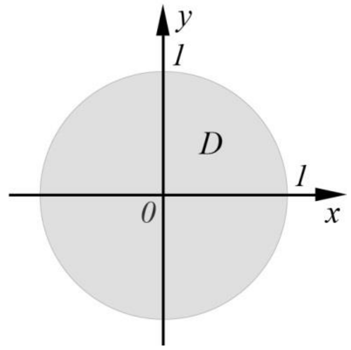
Також за допомогою поверхневих інтегралів першого роду можна обчислювати моменти інерції поверхні з розподіленою масою відносно точок, прямих та площин, компоненти сил при тяжіння такої поверхні до точкової маси та ньютонівський потенціал відповідного гравітаційного поля.

Приклад 3. Знайти момент інерції бічної поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$ відносно координатної площини xOy за умови рівномірного розподілу маси по ній.

Розв'язок: оскільки момент інерції точкової маси відносно площини є добуток величини маси на квадрат відстані від цієї маси до площини, то виходячи із означення поверхневого інтегралу першого роду, маємо для моменту інерції поверхні σ відносно площини P наступний вираз $I=\iint\limits_\sigma d^2(M)\gamma(M)ds$, де $\gamma(M)$ - густина розподілу маси по поверхні, обчислена у точці M, $d(M)$ - відстань точки M від площини P.

У даному випадку $I=\iint\limits_{\sigma} z^2\mu_0 ds$, де μ_0 - густина розподілу маси.





Враховуючи, що проектування бічної поверхні конуса на площину xOy є взаємно однозначною операцією, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $z'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $ds=\sqrt{2}dxdy$ маємо $I=\iint\limits_{D} z^2\mu_0 dxdy=\mu_0\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy$. Переходячи до полярних координат на площині xOy,

отримуємо $\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi, & 0\le\rho\le 1 \\ z=\rho\sin\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ \|J\|=\rho & \end{matrix}\right|$, $\quad I=\mu_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho=\dfrac{\pi\mu_0}{2}$.

Задачі і вправи.

Поверхневі інтеграли першого роду.

7.1 Обчисліть інтеграли:

1) $\iint\limits_{\sigma} z^2 y ds \qquad \sigma: 2x+y+z=1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$;

2) $\iint\limits_{\sigma}(2x+y+z)ds \qquad \sigma: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z=1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$;

3) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)ds \qquad \sigma: x^2+y^2+z^2=R^2,\quad z\ge 0$;

4) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+z^2\right)ds \qquad \sigma: y=\sqrt{16-x^2-z^2}$;

5) $\iint\limits_{\sigma}\dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2} \qquad \sigma: x^2+y^2=25,\quad z\in[-1,2]$;

6) $\iint_{\sigma} xds \qquad \sigma: z = x^2 + y^2, \quad z \in [0,1]$;

7) $\iint_{\sigma} xzds \qquad \sigma: y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y \in [0,2]$;

8) $\iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + z^2} ds \qquad \sigma: x^2 - \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1, \quad y \in [1,2]$;

9) $\iint_{\sigma} \left(4z^2 - x^2 - y^2\right) ds$, де σ - частина поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 2y$;

10) $\iint_{\sigma} \left(2z + x^2 + y^2\right) ds$, де σ - частина поверхні $z = x^2 + y^2$, що вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 9$;

7.2 Обчисліть площу

1) конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4x$;

2) сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$;

3) півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, що міститься всередині конуса $z^2 = x^2 + y^2$;

4) параболоїда $z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4$;

5) параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

7.3 Обчисліть масу поверхні σ, якщо густина розподілу мас вздовж поверхні задано функцією $\gamma = \gamma(x, y)$:

1) $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \leq 0, \quad \gamma = \gamma_0 = const$;

2) $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0, \quad \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$;

3) σ - частина поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) σ - частина поверхні $4z = x^2 + y^2$, що обмежена поверхнею $z^2 = x^2 + y^2, \quad \gamma = x^2 + y^2$;

5) σ - частина поверхні $y=\sqrt{x^2+z^2}$, що обмежена поверхнею $x^2+z^2=x$, $\gamma=\sqrt{x^2+z^2}$;

6) σ - частина поверхні $x=y^2+z^2$, що обмежена поверхнею $y^2+z^2=y$, $\gamma=y^2+z^2$.

7.4

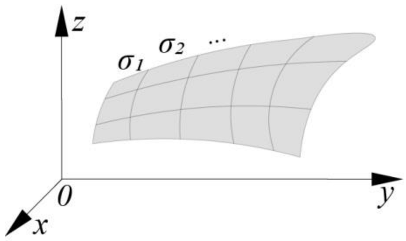
1) Знайдіть заряд, що розподілений на сфері $x^2+y^2+z^2=9$, якщо густина розподілу заряду обернено пропорційна до квадрату відстані точки сфери до точки $A(0,0,5)$.

2) Знайдіть заряд, що розподілений на частині поверхні гіперболічного параболоїда $z=xy$, що відтинається циліндром $x^2+y^2=4$, якщо густина розподілу заряду обернено пропорційна відстані від точки поверхні до осі Oz.

7.5 Знайдіть координати центра мас однорідної поверхні σ, що обмежена поверхнею S:

1) $\sigma: x^2-y^2=4z$, $S: x^2+y^2=4$;

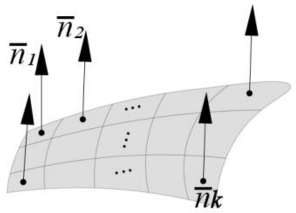
2) $\sigma: z=\sqrt{2x}$, $S: x^2+y^2=2x$.



Поверхневі інтеграли другого роду (поверхневі інтеграли по координатах, потоки векторних полів).

Розглянемо поверхню σ у тривимірному просторі R^3 та запровадимо її розбиття на частини $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ із вибором у кожній з них точок $M_1^* \in \sigma_1, ..., M_n^* \in \sigma_n$ (аналогічно тому, як це робилось у випадку поверхневого інтегралу першого роду). Будемо вважати цю поверхню гладкою (в кожній точці визначена єдина дотична площина) та двосторонньою (побудувавши в її точці M нормаль до цієї поверхні та пересуваючи цю точку разом із нормаллю вздовж замкненої лінії, що не виходить за межі поверхні, повертатимемось у початкову точку із незмінним напрямом нормалі). Надалі односторонні поверхні (наприклад, стрічка Мьобіуса) не розглядатимуться. Виберемо одну із сторін поверхні та побудуємо у точках $M_1^*, ..., M_n^*$ одиничні вектори нормалей $\overrightarrow{n_1}=\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\},...,\overrightarrow{n_k}=\{\cos\alpha_k,\cos\beta_k,\cos\gamma_k\}$, відповідно до обраної сторони поверхні.

Нехай у кожній точці поверхні визначене векторне поле



$\overrightarrow{F(M)}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$. Визначимо функцію $f\left(M_k^*\right)$ у точці M_k^* як скалярний добуток векторів $\overrightarrow{n_k}$ та $\overrightarrow{F\left(M_k^*\right)}$. Тоді (аналогічно до запровадження поверхневого інтегралу першого роду), можемо розглянути границю (при $\delta=\max\limits_k S(\sigma_k)\to 0$) інтегральної суми $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(M_k^*\right)S(\sigma_k)$. Якщо така границя існує, то вона називається поверхневим інтегралом другого роду векторного поля $\overrightarrow{F(M)}$ по відповідній стороні поверхні σ. Таким чином, маємо

$$I=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{F\left(M_k^*\right)},\overrightarrow{n_k}\right)S(\sigma_k)=\iint_{\sigma}\left(\vec{F},\vec{n}\right)ds \quad .$$

Важливо, що при проектуванні елементу площі поверхні $d\sigma$ на координатні площини маємо $dxdy=\cos\gamma d\sigma,\quad dxdz=\cos\beta d\sigma,\quad dydz=\cos\alpha d\sigma$, де α, β, γ – кути утворені відповідною нормаллю до поверхні σ із координатними осями Oz, Oy, Ox відповідно. Таким чином, враховуючи запис одиничного вектора нормалі до поверхні σ у вигляді $\vec{u}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, отримуємо можливість запису інтегралу I у вигляді

$$I=\iint_{\sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy.$$

Відповідно, альтернативною назвою для поверхневого інтегралу другого роду є «поверхневий інтеграл по координатах» (поля $\overrightarrow{F(M)}$ по поверхні σ).

Властивості поверхневих інтегралів другого роду:

1. Лінійність: якщо $\overrightarrow{F(M)}=\alpha\overrightarrow{F_1(M)}+\beta\overrightarrow{F_2(M)}$, то

$$\iint_{\sigma}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds=\alpha\iint_{\sigma}\left(\overrightarrow{F_1(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds+\beta\iint_{\sigma}\left(\overrightarrow{F_2(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds;$$

2. Адитивність: якщо сторона поверхні σ, по якій ведеться інтегрування, розділена на частини σ_1 та σ_2, причому $S(\sigma_1\cap\sigma_2)=0$, то

$$\iint_{\sigma}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds=\iint_{\sigma_1}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds+\iint_{\sigma_2}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds;$$

3. При зміні сторони σ^+ поверхні σ, по якій ведеться інтегрування, на протилежну σ^- знак інтеграла змінюється на протилежний: $\iint\limits_{\sigma^+}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds=-\iint\limits_{\sigma^-}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds$.

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду.

Поверхневі інтеграли другого роду можуть обчислюватись шляхом зведення їх до поверхневих інтегралів першого роду. Якщо, наприклад, поверхню σ задано рівнянням $z = f(x,y)$ та операція проектування її на координатну площину xOy є взаємно однозначною, то, для сторони поверхні, нормаль до якої $\overrightarrow{n^*(M)} = \{f'_x(M), f'_y(M), -1\}$ маємо

$$\iint_\sigma \left(\overrightarrow{F(M)}, \overrightarrow{n(M)}\right) ds =$$

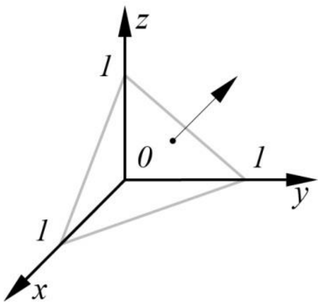
$$\iint_D (P(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{f'_x(M)}{\sqrt{1+(f'_x(M))^2+(f'_y(M))^2}} + Q(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{f'_y(M)}{\sqrt{1+(f'_x(M))^2+(f'_y(M))^2}} +$$

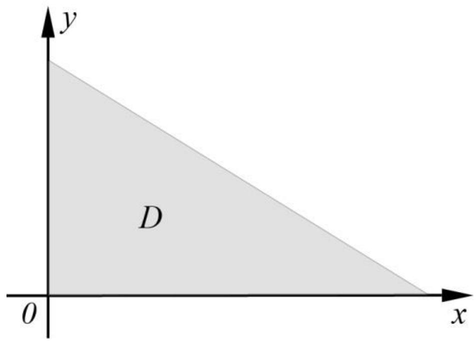
$$+R(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1+(f'_x(M))^2+(f'_y(M))^2}}) \cdot \sqrt{1+(f'_x(M))^2+(f'_y(M))^2}\, dxdy =$$

$= \iint_D \left[P(x,y,f(x,y)) f'_x(M) + Q(x,y,f(x,y)) f'_y(M) - R(x,y,f(x,y))\right] dxdy$, де область D є проекцією поверхні σ на координатну площину xOy.

Приклад 1. Знайти інтеграл поля $\vec{F} = \{x^2, y^2, z^2\}$ по частині поверхні $x + y + z = 1$, розташованій у першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю аплікат).

Розв’язок.





Як випливає з умови, інтегрування ведеться по” верхній “стороні частини площини.

Нормаль до площини $\vec{N} = \{1,1,1\}$. Одиничний вектор нормалі $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad z = 1 - x - y, \quad ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy.$$

Поверхня, по якій ведеться інтегрування, взаємно однозначно проектується у область D, зображену на рисунку. Таким чином, маємо

$$I = \iint_\sigma \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) ds = \iint_D \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2\right)\sqrt{3}\, dxdy =$$

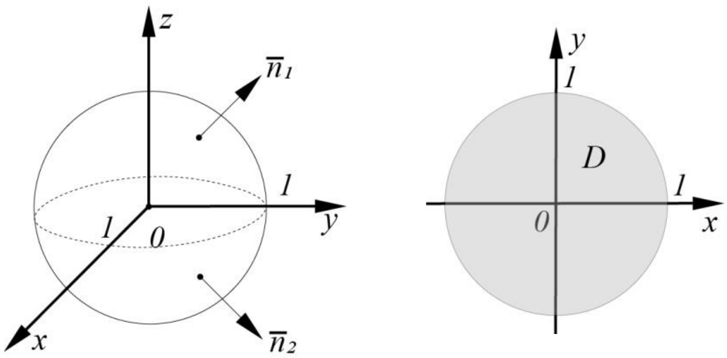
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(2x^2(1-x)+\frac{2}{3}(1-x)^3+x(1-x)^2-2x(1-x)-(1-x)^2+1-x\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{7}{3}x^3+3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx=\left(\frac{7}{12}x^4+x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл поля $\vec{F}=\{x,0,z\}$ по зовнішній стороні сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язок:



розділимо поверхню інтегрування на верхню $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ та нижню $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ півсфери. Кожна з них взаємно однозначно проектується в круг $x^2+y^2=1$ на площині xOy.

Розглянемо спочатку інтеграл по верхній півсфері:

$$z-\sqrt{1-x^2-y^2}=0,\quad \overrightarrow{n_1^*}=\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right\},\quad \overrightarrow{n_1}=\left\{x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right\},$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}_1=x^2+z\sqrt{1-x^2-y^2}=x^2+1-x^2-y^2=1-y^2,$$

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$I_1=\iint_{\sigma_1}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_1}\right)ds=\iint_D\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi & 0\le\rho\le1\\ y=\rho\sin\varphi & 0\le\varphi\le2\pi\\ |J|=\rho & \end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{1-\rho^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho=2\pi\int_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}-\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^1\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=$$

$$=-2\pi\sqrt{1-\rho^2}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos2\varphi)d\varphi\int_0^1\rho^2\left(-d\sqrt{1-\rho^2}\right)=\begin{vmatrix}u=\rho^2 & du=2\rho d\rho\\ dv=d\sqrt{1-\rho^2} & v=\sqrt{1-\rho^2}\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi+\pi\left(\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1-2\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\right)=2\pi+\pi\int\limits_0^1\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1-\rho^2\right)=2\pi+\frac{2\pi}{3}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}$$

Аналогічно, для нижньої півсфери маємо

$$z+\sqrt{1-x^2-y^2}=0,\quad \overrightarrow{n_2^*}=\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},-1\right\},\quad \overrightarrow{n_1}=\left\{x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}\right\},$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}_2=x^2-z\sqrt{1-x^2-y^2}=x^2+1-x^2-y^2=1-y^2,$$

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$I_2=\iint\limits_{\sigma_2}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_2}\right)ds=\iint\limits_{D}\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{4\pi}{3}.$$ Отже, $I=I_1+I_2=\dfrac{8\pi}{3}$.

Інший спосіб підрахунку поверхневих інтегралів другого роду спирається на їх запис в координатній формі. При цьому послідовно розглядаються інтеграли

$$I_1=\iint\limits_{\sigma}R\left(x,y,z\right)dxdy,\quad I_2=\iint\limits_{\sigma}Q\left(x,y,z\right)dxdz,\quad I_3=\iint\limits_{\sigma}P\left(x,y,z\right)dydz.$$

Наприклад, при обчисленні інтегралу $I_1=\iint\limits_{\sigma}R\left(x,y,z\right)dxdy$ маємо

а) визначити знак перед інтегралом, який співпадає зі знаком третьої координати (аплікати) вектора нормалі до тієї сторони поверхні, по якій ведеться інтегрування;

б) записати рівняння поверхні у вигляді $z=f\left(x,y\right)$ та підставити в підінтегральну функцію замість z його вираз через x,y;

в) знайти область D, що є взаємно однозначною проекцією поверхні σ на площину xOy.

Таким чином $I_1=\pm\iint\limits_{D}R\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)dxdy$.

В разі неможливості виконання якоїсь із цих дій, вдаються до розбиття поверхні σ на частини.

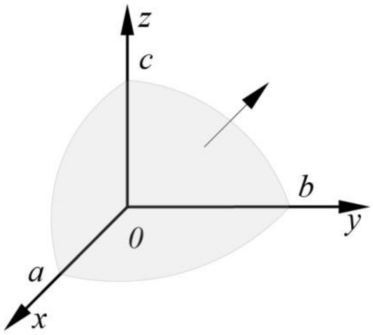
Аналогічним чином обчислюються інтеграли I_2 та I_3.

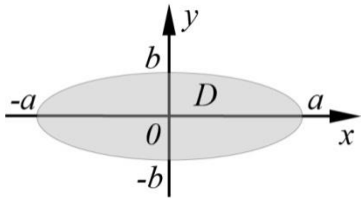
Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_{\sigma}\dfrac{dxdy}{z}$, де σ - верхня частина еліпсоїда

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\quad \left(z>0\right)$ по зовнішній стороні поверхні.

Розв’язок.

Оскільки





нормаль утворює гострий кут з віссю Oz, то

$$I=+\iint_D \frac{dxdy}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

Перейшовши до узагальнених полярних координат

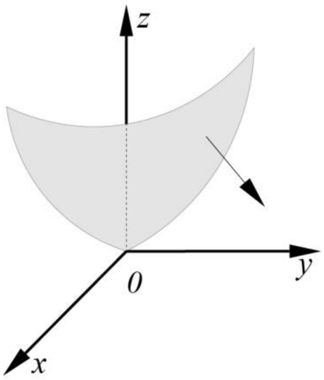
$x=a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi,\quad |J|=ab\rho,\quad 0\le\rho\le1,\quad 0\le\varphi\le2\pi$, отримуємо

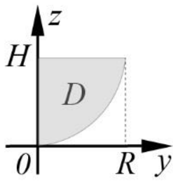
$$I=\frac{1}{c}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{ab\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{ab}{c}\cdot2\pi\left(-\sqrt{1-\rho^2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\pi ab}{c}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\iint_\sigma x^2dydz$, де σ - зовнішня частина поверхні параболоїда

$$z=\frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right),\quad x\ge0,\quad y\ge0,\quad z\le H.$$

Розв’язок:





враховуючи, що вектор нормалі утворює гострий кут з віссю Ox, маємо

$$I=\iint_D\left(\frac{R^2z}{H}-y^2\right)dydz=\int_0^R dy\int_{\frac{Hy^2}{R^2}}^{H}\left(\frac{R^2z}{H}-y^2\right)dz=\int_0^R\left(\frac{R^2z^2}{2H}\Bigg|_{\frac{Hy^2}{R^2}}^{H}-y^2z\Bigg|_{\frac{Hy^2}{R^2}}^{H}\right)dy=$$

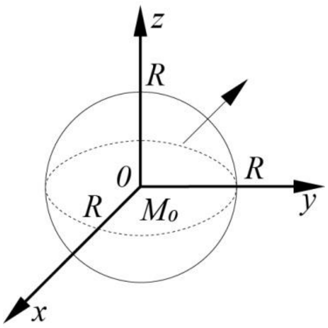
$$=\int_0^R\left(\frac{R^2H}{2}-\frac{Hy^4}{2R^2}-y^2H+\frac{Hy^4}{R^2}\right)dy=\frac{R^3H}{2}+\frac{R^3H}{10}-\frac{R^3H}{3}=\frac{4R^3H}{15}.$$

Застосування поверхневих інтегралів другого роду.

Якщо поле $\overrightarrow{F(M)}$ є полем векторів швидкостей "часток "(елементарних об'єктів) рідини або газу, які знаходяться в точці M, то поверхневий інтеграл такого поля по поверхні σ є кількістю рідини або газу, що проходять через цю поверхню за одиницю часу у вибраному напрямку, який визначається напрямком нормалі. В зв'язку з цим, поверхневі інтеграли другого роду називають також потоками відповідних полів (через задані поверхні у визначеному напрямку).

Приклад 5. Знайти потік електростатичного поля, утвореного точковим зарядом, розміщеним у точці $M_0\left(x_0, y_{0,} z_0\right)$ через зовнішню сторону поверхні сфери $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$.

Розв'язок.



Оскільки , відповідно до закону Кулона $\overrightarrow{E(M)}=\frac{kq}{\left|\vec{r}\right|^3}\vec{r}$, де $\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$,

то, розташувавши початок координат у точці M_0, маємо

$$\overrightarrow{n(M)}=\left\{\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right\},\quad \left(\overrightarrow{E(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)=\frac{kq}{\left|\vec{r}\right|^3 R}\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{kq}{R^2},$$

оскільки на сфері $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|=R$.

Таким чином, потік $\Pi_\sigma\left(\vec{E}\right)=\iint\limits_\sigma\left(\vec{F},\vec{n}\right)ds=\frac{kq}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi kq=\frac{q}{\varepsilon}$, де $\varepsilon=\frac{1}{4\pi k}$ − діелектрична характеристика середовища.

Зауважимо, що потік у цьому випадку повністю визначається величиною заряду та характером середовища, не залежачи від радіусу сфери, яка оточує заряд.

Задачі і вправи.

Поверхневі інтеграли другого роду.

8.1 Обчисліть інтеграли:

1) $\iint\limits_\sigma (x+y)dydz+(y-x)dxdz+(z-2)dxdy,\quad \sigma: x^2+y^2=z^2,\quad z\in[0,2]$,

нормаль зовнішня;

2) $\iint\limits_\sigma (x+xz)dydz+ydxdz+\left(z-x^2\right)dxdy,\quad \sigma: z>\sqrt{4-x^2-y^2}$, нормаль зовнішня;

3) $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + xdxdz + xzdxdy, \quad \sigma: z = \sqrt{x^2+y^2}, \ z \in [0,1], \quad x, y \geq 0,$

нормаль зовнішня;

4) $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy, \quad \sigma: x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x, y, z \geq 0,$ нормаль зовнішня;

5) $\iint\limits_{\sigma} (zx+y)dydz + (xy-z)dxdz + \left(x^2+yz\right)dxdy, \quad \sigma: x^2+y^2 = 2, \quad z \in [0,1],$

нормаль зовнішня;

6) $\iint\limits_{\sigma} 3x^2dydz - 2x^2ydxdz + (2xz-z)dxdy, \quad \sigma: x^2+y^2 = 1, \quad z \in [0,1],$

нормаль зовнішня.

8.2 Знайдіть потік векторного поля $\vec{F}$ крізь поверхню σ (нормаль зовнішня):

1) $\vec{F} = \left(e^y + 2x\right)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (2z-1)\vec{k}, \quad \sigma: x+2y+z = 2, \quad x, y, z > 0;$

2) $\vec{F} = 2x\vec{i} + 5y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad \sigma: \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + z = 1, \quad x, y, z > 0;$

3) $\vec{F} = y\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + x\vec{k}, \quad \sigma: z = x^2+y^2, \quad x^2+y^2 = 2x, \quad z = 0,$ (поверхня замкнена);

4) $\vec{F} = 5x\vec{i} + z\vec{j} + (x-y+3z)\vec{k}, \quad \sigma: z = x^2+y^2, \quad y = x, \quad y = x\sqrt{3}, \quad z = 2x^2+2y^2, \quad z = 1,$

(поверхня замкнена);

5) $\vec{F} = \left(0, 0, x^2y^2z\right) \quad \sigma: z = -\sqrt{16-x^2-y^2}, \quad z \in [0,4];$

6) $\vec{F} = \left(0, 0, z^2\right) \quad \sigma: z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad z < 0.$

Елементи теорії поля.

Співвідношення між деякими характеристиками скалярних та векторних полів.

Нехай $\overrightarrow{F(M)}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ - векторне поле, причому функції $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ є неперервно диференційованими у області $D\subset R^3$. Тоді має місце теорема Остроградського-Гаусса:

Потік поля $\overrightarrow{F(M)}$ через зовнішню сторону простої гладкої замкненої поверхні σ дорівнює потрійному інтегралу дивергенції поля по об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею $(\Omega\subset D)$:

$$\oiint\limits_{\sigma}\left(\overrightarrow{F(M)},\overrightarrow{n(M)}\right)ds=\iiint\limits_{\Omega} div\overrightarrow{F(M)}dxdydz$$

(символ $\oiint$ тут означає поверхневий інтеграл по замкненій поверхні),

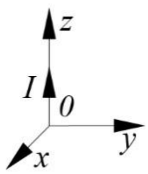
$$div\overrightarrow{F(M)}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Еквівалентним теоремі Остроградського-Гаусса є наступне твердження:
$div\overrightarrow{F(M)}=\lim\limits_{\sigma\to\{M\}}\frac{1}{V(\Omega)}\oiint\limits_{\sigma}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds$, тобто значення дивергенції поля $\vec{F}$ у точці M є питома (віднесена до одиниці об'єму) потужність потоку поля в цій точці. При цьому:

- якщо $div\overrightarrow{F(M)}>0$, то точка M є джерелом потоку;
- якщо $div\overrightarrow{F(M)}<0$, то точка M є стоком потоку;
- якщо $div\overrightarrow{F(M)}\equiv 0$ при $\forall M\in D$, то поле $\vec{F}$ називається соленоїдальним в області D.

Приклад 1. Перевірити соленоїдальність магнітного поля , породженого електричним струмом величини I, що тече по нескінченному дроту, який співпадає з віссю аплікат.

Розв'язок. Відомо, що напруженість такого поля визначається формулою



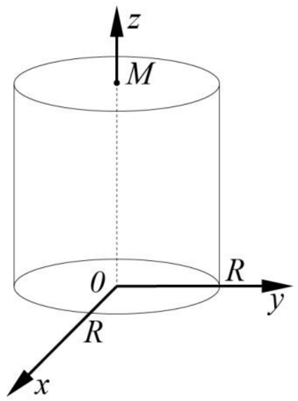
$\overrightarrow{H(M)}=2I\cdot\left\{-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right\}$. Таким чином:

$P(x,y,z)=-\frac{2Iy}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial x}=2I\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$Q(x,y,z)=\frac{2Ix}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=2I\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $R(x,y,z)=0$, $\frac{\partial R}{\partial z}=0$. Звідси випливає, що $div\overrightarrow{H(M)}\equiv 0$ при $x^2+y^2\neq 0$. Тобто, дане поле є соленоїдальним .

Приклад 2. Знайти потік поля $\vec{F}=\left\{x^3,y^3,z^3\right\}$ через зовнішню сторону повної поверхні циліндра $\sigma: x^2+y^2=R^2,\quad 0\le z\le H$.

Розв’язок.



Скористаємось теоремою Остроградського-Гаусса :

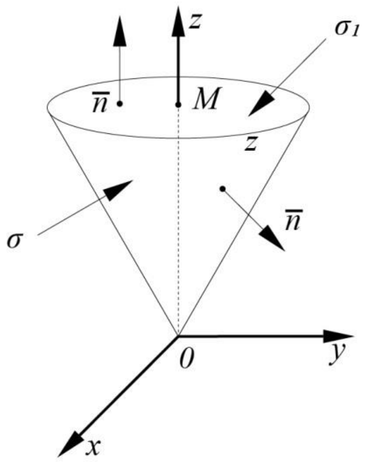
$$div\vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2, \qquad \Pi_\sigma\left(\vec{F}\right) = \iint_\sigma \left(\vec{F}, \vec{n}\right) ds = \iiint_\Omega \left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) dxdydz.$$

Перейшовши до циліндричних координат $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \quad |J| = \rho, \quad 0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le H$, отримуємо

$$\Pi_\sigma\left(\vec{F}\right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_0^H \left(3\rho^2 + 3z^2\right)\rho dz = 2\pi \int_0^R \left(3\rho^2 H + H^3\right)\rho d\rho = \pi H R^2 \left(\frac{3R^2}{2} + H^2\right).$$

Приклад 3. Обчислити потік поля $\vec{F} = \{x, y, 1 - z\}$ через зовнішню сторону бічної поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2, \quad 0 \le z \le H$.

Розв’язок.



Поверхня не є замкненою, тому безпосереднє застосування теореми Остроградського-Гаусса неможливе. В той же час, якщо доповнити потік поля через бічну поверхню конуса потоком через його верхню основу, отримуємо потік через замкнену поверхню, що робить можливим використання вищезгаданої теореми. Таким чином, позначивши через σ зовнішню сторону бічної поверхні конуса, а через σ_1 - верхню сторону його основи, маємо $\Pi_\sigma\left(\vec{F}\right) + \Pi_{\sigma_1}\left(\vec{F}\right) = \oiint_{\sigma \cup \sigma_1} \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) ds = \iiint_\Omega div\vec{F} dxdydz$, звідки $\Pi_\sigma\left(\vec{F}\right) = \iiint_\Omega div\vec{F} dxdydz - \Pi_{\sigma_1}\left(\vec{F}\right)$, де Ω - відповідне конічне тіло. Оскільки $div\vec{F} = 1 + 1 - 1 = 1, \quad \vec{n} = \{0, 0, 1\}$ на поверхні σ_1,

$\left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{\sigma_1} = \left(0 + 0 + 1 - z\right)\Big|_{z=H} = 1 - H$, то $\Pi_\sigma\left(\vec{F}\right) = \iiint_\Omega 1 dxdydz - (1 - H)\iint_\sigma ds =$

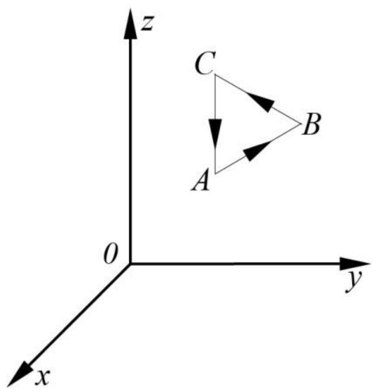
$$= V(\Omega) - (1 - H)S(\sigma_1) = \frac{1}{3}\pi H^2 \cdot H - (1 - H)\pi H^2 = \frac{\pi H^2}{3}(4H - 3).$$

Формула Стокса: циркуляція векторного поля $\vec{F}$ вздовж простого гладкого замкненого контура γ дорівнює потоку ротора цього поля через просту гладку поверхню σ, яка обмежена цим контуром, причому сторона поверхні вибрана так, щоб напрямок обходу γ з кінця вектора нормалі спостерігався проти руху годинникової стріли: $\oint_{\gamma}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\iint_{\sigma^{\pm}}\left(\overrightarrow{rot\vec{F}},\vec{n}\right)ds$, де

$\overrightarrow{rot\vec{F}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$. Ротор векторного поля характеризує, у випадку поля швидкостей, обертальну складову руху. Він може бути запроваджений як вектор, проекція якого на довільний напрям є густиною циркуляції поля у цьому напрямі. Густина ж циркуляції поля в точці M визначається як границя $\rho\left(M\right)=\lim\limits_{\sigma\to\{M\}}\dfrac{\oint_{\gamma}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)}{S\left(\sigma\right)}$, де γ - замкнений контур на поверхні σ, яка стягується у точку M, а нормаль до поверхні σ у точці M к випливає з формули Стокса, максимальною густина циркуляції поля $\vec{F}$ є у напрямі вектора $\overrightarrow{rot\vec{F}\left(M\right)}$, причому $\left|\rho\left(M\right)\right|=\left|\overrightarrow{rot\vec{F}\left(M\right)}\right|$.

Приклад 4. Знайти максимальну густину циркуляції поля $\vec{F}=\left\{z^2-x^2,x^2-y^2,y^2-z^2\right\}$ у точці $M\left(1,1,1\right)$ та напрям, у якому вона досягається.

Розв’язок.



Обчислимо ротор цього поля у даній точці

$$\overrightarrow{rot\vec{F}\left(M\right)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2-x^2 & x^2-y^2 & y^2-z^2\end{vmatrix}==\left\{2y,2z,2x\right\}=\left\{2,2,2\right\}.$$

Таким чином, найбільша густина циркуляції є $\left|\overrightarrow{rot\vec{F}\left(M\right)}\right|=2\sqrt{3}$, напрям, у якому вона досягається, визначається ортом $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Ротор (або ж вихор) поля $\vec{F}$ характеризує його обертальну складову. Наприклад, у випадку поля лінійних швидкостей обертального руху навколо осі, ротор поля є подвоєний вектор кутових швидкостей.

Якщо ротор поля $\vec{F}$ тотожно дорівнює нулю в деякій області, то поле називається безвихровим у цій області.

Наступні твердження є еквівалентними:

- $\overrightarrow{rot\overrightarrow{F(M)}}=0, \quad M\in D$;
- вираз $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ є повним диференціалом функції $U(x,y,z), \quad (x,y,z)\in D$;
- поле $\vec{F}$ є потенціальним, тобто $\overrightarrow{F(M)}=\overrightarrow{gradU(x,y,z)}, \quad (x,y,z)\in D$;
- циркуляція поля $\vec{F}$ вздовж довільного контуру всередині D рівна нулю;
- інтеграл поля $\vec{F}$ вздовж шляху, який належить області D та з'єднує точки A і B, не залежить від форми шляху, причому $\oint\limits_{\gamma}(\vec{F},d\vec{r})=U(B)-U(A)$.

Приклад 4. Обчислити циркуляцію поля $\vec{F}=\{x+3y+2z,2x+z,x-y\}$ вздовж контуру трикутника ABC, де $ABC \quad A(1,1,1), \quad B(2,2,2), \quad C(1,1,3)$,(контур проходиться проти руху годинникової стрілки). Обчислення провести безпосередньо та використовуючи формулу Стокса.

Розв'язок: почнемо з безпосереднього обчислення інтеграла. Відповідно до властивостей криволінійних інтегралів другого роду, маємо:

$$Ц=\oint\limits_{ABC}(\vec{F},d\vec{r})=\int\limits_{AB}(x+3y+2z)dx+(2x+z)dy+(x-y)dz+$$

$$+\int\limits_{BC}(x+3y+2z)dx+(2x+z)dy+(x-y)dz+\int\limits_{CA}(x+3y+2z)dx+(2x+z)dy+(x-y)dz=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Відрізок AB лежить на прямій $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-1}{2-1}=\dfrac{z-1}{2-1}$, тобто $x=y=z, \quad 1\le x\le 2$, тому

$$dx=dy=dz, \quad I_1=\int\limits_1^2 6xdx+3xdx+0dx=\frac{9}{2}x^2\Big|_1^2=\frac{27}{2}.$$

Відрізок BC лежить на прямій $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-1}{2-1}=\dfrac{z-3}{2-3}$, тобто $x-1=y-1=3-z, \quad x=y=4-z$,

$2\le z\le 3$, тому $dx=dy=-dz, \quad I_2=\int\limits_2^3\big(4-z+3(4-z)+2z\big)(-dz)+\big(2(4-z)+z\big)(-dz)+0dz=$

$$=\int\limits_2^3(3z-24)dz=\left(\frac{3z^2}{2}-24z\right)\Bigg|_2^3=-\frac{33}{2}.$$

Відрізок CA лежить на прямій $\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-1}{1-1}=\frac{z-3}{3-1}$, тобто $x=1,\quad y=1,\quad z\Big|_3^1,\ dx=0,\quad dy=0$, $I_3=0$. Таким чином, $Ц=\frac{27}{2}-\frac{33}{2}+0=3$.

Скористаємось тепер формулою Стокса. В якості поверхні σ виберемо площину, проведену через точки $A,B,C.$ Рівняння такої площини має вигляд $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 2-1 & 2-1 \\ 1-1 & 1-1 & 3-1 \end{vmatrix}=0$, тобто

$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x-y=0$. Вектор нормалі $\vec{N}=\{1,-1,0\}$, його орт $\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$. Як видно з рисунку, необхідно вибрати протилежний напряму $\vec{n}$ напрям $-\vec{n}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$.

Знайдемо ротор поля $\vec{F}$: $\overrightarrow{rot\vec{F}}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+3y+2z & 2x+z & x-y \end{vmatrix}=\{-2,1,-1\}$.

Таким чином, $\vec{F}\cdot\left(-\vec{n}\right)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}},\qquad \iint\limits_{\sigma}\left(\vec{F}\cdot\left(-\vec{n}\right)\right)ds=\frac{3}{\sqrt{2}}S_{ABC}$.

Обчислимо S_{ABC} за допомогою векторного добутку $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|=\frac{2}{2}\left|\{1,-1,0\}\right|=\sqrt{2}.$$

Таким чином, $Ц=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=3$, що відповідає попередньому результату.

Якщо векторне поле $\overrightarrow{F(M)}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ є потенціальним (потенціал $u=u(x,y,z)$ і, в той же час, соленоїдальним, то воно називається гармонічним, а його потенціал задовольняє рівнянню Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}=0$.

Приклад 5. Показати, що поле $\vec{F}$, потенціал якого

$$u(x,y,z)=\frac{a}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+b \text{ є гармонічним.}$$

Розв'язок: оскільки $\vec{F}=grad\,u=$

$$=\left\{-\frac{a(x-x_0)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)^3},-\frac{a(y-y_0)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)^3},\right.$$

$$\left.-\frac{a(z-z_0)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)^3}\right\},$$

то $div\vec{F}=0$, що й треба було довести.

Задачі і вправи.

Елементи теорії поля. Формула Стокса. Формула Остроградського.

9.1 Знайдіть градієнт поля u в точці M, якщо

1) $u=y\left(x^2+z^2\right)$, $\quad M(-2,1,1)$;

2) $u=\frac{zy^2}{x^3}$, $\quad M\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2,\frac{1}{3}\right)$;

3) $u=\frac{x-1}{y^2z}$, $\quad M\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

4) $u=x^2(z+y)$, $\quad M(4,-1,0)$.

9.2 Знайдіть кут між градієнтами поля u в точках M_1 та M_2, якщо

1) $u=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$, $\quad M_1(1,1,1)$, $\quad M_2(1,2,2)$;

2) $u=\frac{x^3y^2}{z}$, $\quad M_1\left(1,2,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\quad M_2(0,1,1)$.

9.3 Знайдіть кут між градієнтами скалярних полів u та v в точці M, якщо

1) $u=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+3\sqrt{2}y^2-3\sqrt{2}z^2$, $v=\frac{yx^2}{z^2}$, $M\left(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

2) $u=3x^2+\frac{3}{2}y^2-2z^2$, $v=xy^2z^3$, $M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

9.4 Обчисліть дивергенцію та ротор векторного поля $\vec{F}$, якщо

1) $\vec{F}=\left\{xy^2,z^2y,zx^2\right\}$;

2) $\vec{F}=\left\{y+z,x+z,x+y\right\}$.

9.5 Перевірте чи поле $\vec{F}$ потенціальним та знайдіть його потенціал:

1) $\vec{F}=\left\{2xy+z,x^2+z,x+y\right\}$;

2) $\vec{F}=\left\{2xy+3z^2,4yz+x^2,6xz+2y^2\right\}$;

3) $\vec{F}=\left\{\frac{2x}{x^2+y^2}+yz,\frac{2y}{x^2+y^2}+xz,xy\right\}$;

4) $\vec{F}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+z^2,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},2xz\right\}$.

9.6 Перевірте чи є поле $\vec{F}$ соленоїдальним:

1) $\vec{F}=\left(e^z-x^2\right)\vec{i}+\left(\sin x+2xy\right)\vec{j}+\left(x^2+y^2\right)\vec{k}$;

2) $\vec{F}=\left(y-x^2z\right)\vec{i}+e^z\vec{j}+\left(xz^2+\cos y\right)\vec{k}$;

3) $\vec{F}=\left(y-x+yz\right)\vec{i}+\left(x+y+xz\right)\vec{j}+\left(x+z+xy\right)\vec{k}$;

4) $\vec{F}=\left(x^2+y+z\right)\vec{i}+\left(y^2+x+z\right)\vec{j}+\left(z^2+x+y\right)\vec{k}$.

9.7 Знайдіть потік векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню σ, якщо:

1) $\vec{F}=\left\{2z-x,x-y,3x+z\right\}$, $\sigma: x+y+2z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$;

2) $\vec{F}=\left\{4z,x-y-z,3y+z\right\}$, $\sigma: x-2y+2z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$;

3) $\vec{F}=\{xy,-x^2,z\}$, $\quad \sigma: x^2+y^2+z^2=4, \quad z\ge 0$;

4) $\vec{F}=\{x+z,y,z-x\}$, $\quad \sigma: x^2+y^2+z^2=1, \quad z\le 0$;

5) $\vec{F}=\{x+2y,y-z,z+x\}$, $\quad \sigma: z=x^2+y^2, \quad z=9$;

6) $\vec{F}=\{z^2,0,0\}$, $\quad \sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z\in[0,4]$.

9.8 Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{F}$ вздовж контура L, що обходиться за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з початку координат. Обчислити циркуляцію у два способи:

1) безпосередньо; 2) за формулою Стокса .

1) $\vec{F}=\{xy,x,y^2\}$, $\quad L:(x^2+y^2=1)\cap(z=4)$;

2) $\vec{F}=\{x-2z,x+3y+z,5x+y\}$, $\quad L: x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$;

3) $\vec{F}=\{y-z,z-x,x-y\}$, $\quad L:(x^2+y^2+z^2=9)\cap(z=x)$;

4) $\vec{F}=\{-y,xy,z\}$, $\quad L:(z=x^2+y^2)\cap(x^2+y^2=9)$;

5) $\vec{F}=\{xyz,-x^2z,3\}$, $\quad L:\left(z=\sqrt{x^2+y^2}\right)\cap(x^2+y^2=4)$;

6) $\vec{F}=\{x+z,y+z,z-x-y\}$, $\quad L:(x^2+y^2+z^2=1)\cap(x^2+y^2=1), \quad (z>0)$.

Зміст