Методичні вказівки до модульної контрольної роботи (МКР-1) „Векторна алгебра. Аналітична геометрія.” для студентів технічних спеціальностей /Укл. Ю.П. Буценко, К.Ю. Мамса, О.О. Дем’яненко, Я.В. Симчук.

Навчальною та робочою навчальною програмами курсу “Аналітична геометрія та основи лінійної алгебри” передбачене виконання модульної контрольної роботи (МКР) тривалістю 90 хв. Вона охоплює такі розділи курсу: векторна алгебра, пряма на площині, пряма у просторі, криволінійні системи координат, криві другого порядку на площині.

В перших п’яти розділах даних методичних вказівок розглядаються приклади, типові для кожного з цих розділів, наведені їх розв’язки або вказівки до їх розв’язання. Наведені також 30 варіантів власне МКР, кожний з яких містить п’ять завдань, що відповідають вказаним вище розділам і аналогічні до попередньо розглянутих.

Характерною особливістю наведених варіантів є їх об’єднання в три комплекти: варіанти 1-10, відповідно 11-20 та з 21 по 30. При цьому дотримано подібності варіантів ”за останньою цифрою”: перший відповідає одинадцятому та двадцять першому, другий – дванадцятому та двадцять другому тощо. Це дозволяє використовувати наведені варіанти одночасно в різних групах та уникати ”передбачуваності” конкретних завдань в різних групах одного лекційного потоку при проведенні МКР, наприклад, послідовно, протягом кількох днів.

Оцінювання виконання контрольних робіт.

Передбачено, що за повне і правильне виконання кожного завдання контрольної роботи студент отримує 20% балів, передбачених (максимально) за виконання всієї роботи відповідним положенням РСО. За незначні помилки (описки) знімається до 5% загальної кількості балів, за серйозні (грубі) помилки – до 10%, при неповному виконанні завдання оцінюється виконана частина відносно її відносної трудомісткості. Зароблена студентом таким чином кількість відсотків ділиться на 100, множиться на максимальну кількість балів і округлюється до цілої кількості балів. Отримана таким чином оцінка за дану контрольну роботу включається до індивідуального рейтингу студента.

1. Векторна алгебра.

Приклад 1. Для векторів $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ при умові, що $|\vec{p}| = 1; |\vec{q}| = \sqrt{2}; (\vec{p};\vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$, знайдіть а) косинус кута між ними; б) $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$;

в) довжини діагоналей паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

г) площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (2\vec{p} + 3\vec{q}) = 2\vec{p} \cdot \vec{p} - \vec{p} \cdot \vec{q} - 6\vec{q} \cdot \vec{q} = 2|\vec{p}|^2 - |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\frac{\pi}{4} - 6|\vec{q}|^2 =$$

$$= 2 - 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 6 \cdot 2 = -11;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{p} - 2\vec{q})^2} = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} - 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4\vec{q} \cdot \vec{q}} =$$

$$= \sqrt{|\vec{p}|^2 - 4|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 4|\vec{q}|^2} = \sqrt{1 - 4 + 8} = \sqrt{5};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(2\vec{p} + 3\vec{q})^2} = \sqrt{4\vec{p} \cdot \vec{p} + 12\vec{p} \cdot \vec{q} + 9\vec{q} \cdot \vec{q}} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{p}|^2 + 12|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos\frac{\pi}{4} + 9|\vec{q}|^2} = \sqrt{4 + 12 + 18} = \sqrt{34}.$$

а) Нехай φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Тоді, $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{34}} = \dfrac{-11}{\sqrt{170}}$, $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{11}{\sqrt{170}}$;

б) $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{34}}$;

в) За правилом паралелограма діагоналі $\vec{d}_1$ та $\vec{d}_2$ можна представити як $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q} + 2\vec{p} + 3\vec{q} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q} - 2\vec{p} - 3\vec{q} = -\vec{p} - 5\vec{q}$. Тоді,

$$|\vec{d}_1| = \sqrt{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1} = \sqrt{(3\vec{p} + \vec{q})^2} = \sqrt{9\vec{p} \cdot \vec{p} + 6\vec{p}\vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{q}} = \sqrt{9 + 6 + 2} = \sqrt{17},$$

$$|\vec{d}_2| = \sqrt{\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2} = \sqrt{(\vec{p} + 5\vec{q})^2} = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} + 10\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{q}} = \sqrt{1 + 10 + 2} = \sqrt{13}.$$

г) Площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будемо шукати за формулою $S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{p}-2\vec{q})\times(2\vec{p}+3\vec{q})=2\vec{p}\times\vec{p}-4\vec{q}\times\vec{p}+3\vec{p}\times\vec{q}-6\vec{q}\times\vec{q}=7\vec{p}\times\vec{q}$,

$S=\frac{1}{2}\left|7\vec{p}\times\vec{q}\right|=\frac{7}{2}|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\sin(\vec{p},\vec{q})=\frac{7}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=7/2$.

Приклад 2. З'ясуйте, чи лежать точки $A(1;-1;2), B(3;2;3), C(0;1;6), D(2;3;5)$ в одній площині. Якщо не лежать, то знайдіть об'єми паралелепіпеда та тетраедра, що побудовані на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. Знайдіть кут $\widehat{BAC}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}=(2;3;1), \overrightarrow{AC}=(-1;2;4), \overrightarrow{AD}=(1;4;3)$. Якщо точки A,B,C,D лежать на одній площині, тоді вектори $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ компланарні. Для перевірки векторів на компланарність, знайдемо їх мішаний добуток: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2&3&1\\-1&2&4\\1&4&3\end{vmatrix}=-6\neq 0$. Тобто вектори не компланарні і точки A,B,C,D не лежать на одній площині.

Об'єми паралелепіпеда V та тетраедра V_{ABCD} будемо шукати за формулами:

$V=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=|-6|=6$ (куб. од.), $\quad V_{ABCD}=\frac{1}{6}V=1$(куб.од.).

Кут $\widehat{BAC}$ будемо шукати як кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2(-1)+3\cdot 2+1\cdot 4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+4+16}}=\frac{8}{7\sqrt{6}},\quad \widehat{BAC}=\arccos\frac{8}{7\sqrt{6}}.$$

Приклад 3. Вектор $\vec{x}$ ортогональний до векторів $\vec{a}=(1;2;3)$ і $\vec{b}=(-4;2;1)$. Знайдіть такий вектор $\vec{x}$, що а) його довжина рівна $\sqrt{285}$;

б) $\vec{x}\cdot\vec{c}=30$, якщо $\vec{c}=(2;-1;1)$.

Розв'язання. Якщо вектор $\vec{x}$ ортогональний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то він буде колінеарним до їх векторного добутку.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\-4&2&1\end{vmatrix}=-4\vec{i}-13\vec{j}+10\vec{k}=(-4;-13;10),\quad \vec{x}=(-4\lambda,-13\lambda,10\lambda),\ \lambda=const.$$

а) $|\vec{x}|=\sqrt{16\lambda^2+169\lambda^2+100\lambda^2}=|\lambda|\sqrt{285}$. За умовою $|\vec{x}|=\sqrt{285}$, тому $|\lambda|=1, \lambda=\pm1$.

Отже, векторів, що задовольняють умову існує два: $(-4;-13;10)$ та $(4;13;-10)$.

б) $\vec{x}\cdot\vec{c}=-4\lambda\cdot2-13\lambda\cdot(-1)+10\lambda\cdot1=15\lambda=30$, звідки $\lambda=2$, а отже $\vec{x}=(-8;-26;20)$.

2. Пряма на площині.

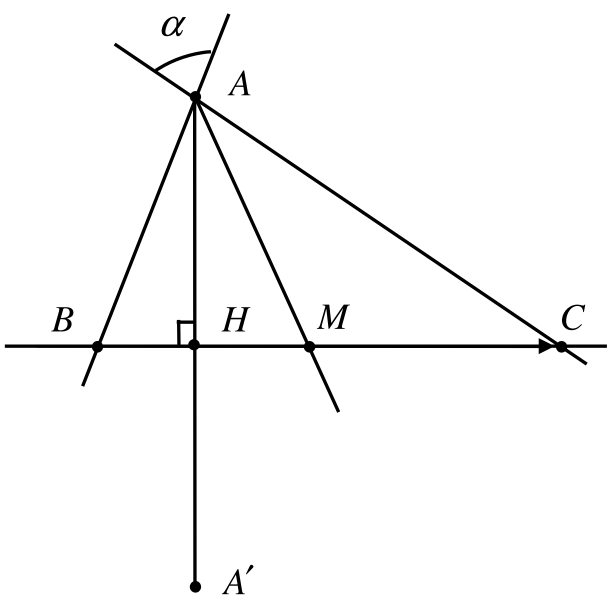
Приклад 4. Дано точки $A(-1;2), B(-2;-5), C(4;1)$. Знайдіть:

а) рівняння прямих AM, AH, на яких лежать медіана та висота трикутника ABC відповідно;

б) координати точки H, що є проекцією точки A на пряму BC і точки A', що симетрична точці A відносно прямої BC;

в) рівняння бісектрис кутів між прямими AB, AC та кут між цими прямими.

Розв'язання. а) Знайдемо координати точки M як середини відрізка BC:



$x_M=\frac{1}{2}(-2+4)=1, y_M\ \frac{1}{2}(-5+1)=-2$, тобто $M(1;-2)$. Тоді рівняння прямої AM знайдемо, як рівняння прямої, що проходить через дві точки. $AM: \frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+2}{2+2}; \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{4}$.

Вектор $\overrightarrow{BC}=(6;6)$ є нормальним до прямої AH, точка $A(-1;2)$ належить прямій AH, тому рівняння прямої

$AH: 6(x+1)+6(y-2)=0, x+y-1=0$.

б) Координати точки H будемо шукати як координати точки перетину двох перпендикулярів BC та AH. Для цього запишемо рівняння прямої BC, як прямої що проходить через дві точки $B(-2;-5)$, $C(4;1)$. $BC : \frac{x+2}{4+2} = \frac{y+5}{1+5}$, $x - y = 3$.

Тоді для координат H маємо систему $H : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$, $\quad H(2;-1)$.

Якщо точка A' симетрична точці A відносно прямої BC, то точка H є серединою відрізка AA':

$x_H = \frac{1}{2}(x_A + x_{A'}) \Rightarrow \ x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, аналогічно

$y_{A'} = 2y_H - y_A = -2 - 2 = -4$. Отже $A'(5;-4)$.

в) Запишемо рівняння прямих AB та AC.

$AB : \frac{x+1}{-2+1} = \frac{y-2}{-5-2} \ \Rightarrow \ \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-7}$ - канонічне рівняння прямої AB,

$7x - y + 9 = 0$ - загальне рівняння прямої AB,

$AC : \frac{x+1}{4+1} = \frac{y-2}{1-2} \ \Rightarrow \ \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-1}$ - канонічне рівняння прямої AC,

$x + 5y - 9 = 0$ - загальне рівняння прямої AC.

З канонічних рівнянь знаходимо напрямні вектори цих прямих : $\vec{s}_{AB} = (-1;-7)$, $\vec{s}_{AC} = (5;-1)$. Кут між прямими рівний куту між напрямними векторами :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{s}_{AB} \cdot \vec{s}_{AC}}{|\vec{s}_{AB}| \cdot |\vec{s}_{AC}|} = \frac{-5+7}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}.$$

Точки, що лежать на бісектрисі кута є рівновіддаленими від сторін кута. Знайдемо відстані від деякої фіксованої точки $M(x;y)$, що належить бісектрисі до прямих AB та AC, використовуючи їх загальні рівняння та прирівняємо ці відстані : $d_1 = \frac{|7x - y + 9|}{\sqrt{49+1}} = \frac{|7x - y + 9|}{\sqrt{50}}$, $d_2 = \frac{|x + 5y - 9|}{\sqrt{1+25}} = \frac{|x + 5y - 9|}{\sqrt{26}}$,

$$\frac{|7x - y + 9|}{\sqrt{50}} = \frac{|x + 5y - 9|}{\sqrt{26}}.$$

Далі, розкривши модулі отримаємо рівняння двох бісектрис.

$$\left[\begin{array}{l} x\left(7\sqrt{26} - 5\sqrt{2}\right) + y\left(-\sqrt{26} - 25\sqrt{2}\right) + 9\sqrt{26} + 45\sqrt{2} = 0 \\ x\left(7\sqrt{26} + 5\sqrt{2}\right) + y\left(-\sqrt{26} + 25\sqrt{2}\right) + 9\sqrt{26} - 45\sqrt{2} = 0 \end{array}\right.$$

Приклад 5. Для двох паралельних прямих $l_1: 6x-8y+5=0$ та $l_2: 3x-4y-2=0$ знайдіть: а) відстань між ними;

б) рівняння прямої рівновіддаленої від l_1 та l_2;

в) рівняння прямих, що паралельні даним і віддалені від прямої l_1 на дві одиниці.

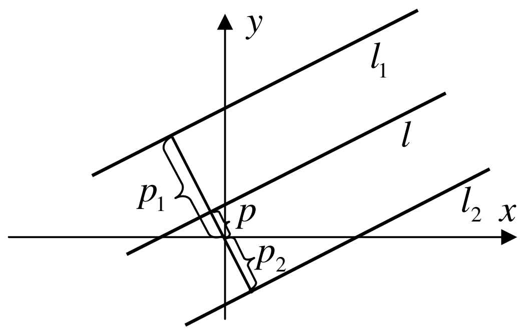
Розв'язання **.**а) Віднормуємо рівняння обох прямих :

$$\mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{36+64}} = -\frac{1}{10},\quad l_1: -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0,\, p_1=\frac{1}{2}=\frac{5}{10},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5},\quad l_2: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0,\, p_2=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}.$$

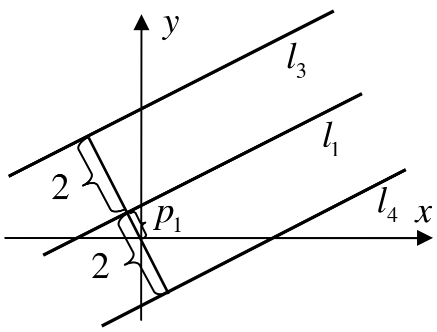
Прямі розташовані по різні боки від початку координат, тому відстань між прямими $d = p_1 + p_2 = \frac{9}{10}$.

б) Пряма, що рівновіддалена від l_1 та l_2 буде розташована від них на відстані $\frac{9}{20}$, а від початку координат на відстані $p = p_1 - \frac{9}{20} = \frac{1}{20}$, тобто



$$l: -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{20}=0,12x-16y+1=0.$$

в) $p_1 = \frac{1}{2} < 2$, тому одна з віддалених на 2 одиниці прямих від прямої l_1 буде лежати по один бік від початку координат з прямою l_1, а інша – по різні боки.



$$p_3 = p_1 + 2 = \frac{5}{2}, l_3: -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{5}{2}=0,6x-8y+25=0,$$

$$p_4 = 2 - p_1 = \frac{3}{2}, l_4: \frac{3}{5}x-\frac{4}{2}y-\frac{3}{2}=0,6x-8y-15=0.$$

Приклад 6. Пряма l проходить через точку $M(-3;2)$. Знайдіть рівняння прямої l, якщо відомо, що вона відтинає від другого координатного кута а) рівнобедрений трикутник; б) трикутник з площею 16 кв.од.

Розв'язання. а) Нехай на обох осях пряма l відтинає однакові відрізки довжиною $a>0$. Тоді її рівняння у відрізках має вигляд : $\frac{x}{-a}+\frac{y}{a}=1$. Точка $M(-3;2)$ лежить на прямій $\Rightarrow$ $\frac{-3}{-a}+\frac{2}{a}=1, a=5$. Тоді $l: -x+y=5$.

б) Нехай пряма l відтинає на осях OX та OY відрізки довжиною $a>0, b>0$ відповідно. Тоді рівняння прямої l має вигляд : $\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$. Точка M прямій належить, тому $\frac{-3}{-a}+\frac{2}{y}=1$. Площа трикутника, що відтинається від координатного кута $S=\frac{1}{2}ab=16$. Отримали систему : $\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1\\ ab=32\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4\\ b=8\end{cases}\\ \begin{cases}a=12\\ b=\frac{8}{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

Отже, шуканих прямих виявилось дві : $\frac{x}{-4}+\frac{y}{8}=1, -2x+y=8$ та

$\frac{x}{-12}+\frac{y}{8/3}=1, \quad -2x+9y=24$.

3. Пряма та площина у просторі.

Приклад 7. З'ясуйте взаємне розташування пар прямих l_1, l_2 та l_1, l_3. Знайдіть:

а) відстань між прямими l_1 та l_2;

б) кут між прямою l_1 та l_3;

в) рівняння площини, в якій лежать прямі l_1 та l_3, якщо

$l_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$; $l_2: \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+3}{-6}$; $l_3: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-7}{0}$.

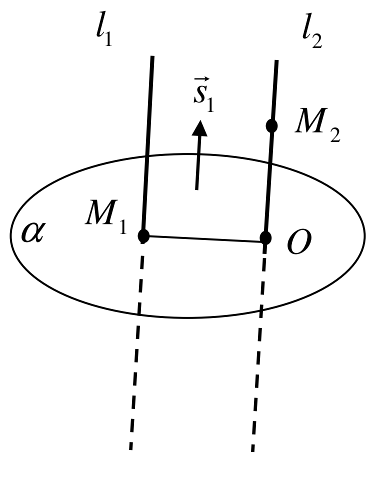
Розв'язання. Вектори $\vec{s}_1=(1;2;3)$, $\vec{s}_2=(-2;-4;-6)$ є напрямними векторами прямих l_1 та l_2 відповідно. Вони колінеарні (їх координати пропорційні), тому прямі l_1 та l_2 є паралельними

Вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_3=(-2;1;0)$ є напрямними векторами прямих l_1 та l_3 відповідно. Ці вектори не колінеарні, тому прямі не паралельні, а можуть бути мимобіжними, або такими, що перетинаються. З рівнянь прямих можна знайти точки, які на прямих лежать: $M_1(1;-1;1)\in l_1$, $M_3(3;3;7)\in l_3$. Задамо вектор $\overrightarrow{M_1M_3}=(2;4;6)$. Якщо трійка векторів $\vec{s}_1,\vec{s}_3,\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарна, то прямі l_1,l_3 перетинаються, якщо ні – мимобіжні. Для перевірки на компланарність обчислюємо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$ вектори компланарні, отже, прямі l_1 та l_3 перетинаються.

а) Для знаходження відстані між паралельними прямими l_1 та l_2 побудуємо площину α, що містить точку M_1 і перпендикулярна до прямих l_1 та l_2.

Вектор $\vec{s}_1$ для площини α – нормальний.



$$\alpha:\ 1(x-1)+2(y+1)+3(z-1)=0$$

$$x+2y+3z-2=0.$$

Знайдемо точку O як точку перетину прямої

$$l_2:\ \begin{cases} x=-2t \\ y=-4t+2 \\ z=-6t+3 \end{cases}$$ з площиною α:

$$-2t-8t+4-18t+9-2=0$$

$$-28t+11=0,\ t=\frac{11}{28}.$$

$$O:\begin{cases} x=-2\cdot\dfrac{11}{28} \\ y=-4\cdot\dfrac{11}{28}+2 \\ z=-6\cdot\dfrac{11}{28}+3 \end{cases}.\ \text{Отже, } O\left(-\frac{11}{14};-\frac{3}{7};-\frac{9}{14}\right)$$

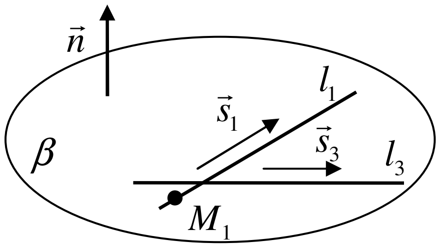
Відстань M_1O є відстанню між прямими l_1 та l_2.

$$M_1O=\sqrt{\left(1-\frac{11}{14}\right)^2+\left(-1-\frac{3}{7}\right)^2+\left(1-\frac{9}{14}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{14}\right)^2+\left(-\frac{10}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{14}\right)^2}=\frac{\sqrt{434}}{14}.$$

б) Кут між прямими, що перетинаються, або є мимобіжними рівний куту між їх напрямними векторами. Тому кут φ між прямими l_1 та l_3 будемо шукати через скалярний добуток їх напрямних векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_3$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_3}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_3|}=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 1+3\cdot 0}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{4+1}}=0\Rightarrow\varphi=0^\circ.$$

в) Нехай β – площина, в якій лежать прямі l_1 та l_3.



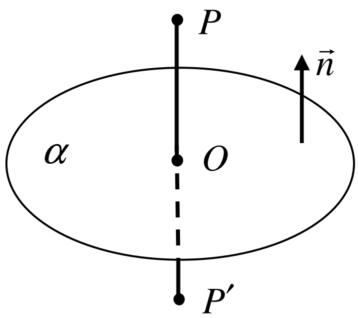
Вектор $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_3=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-3;-6;5)$ – є нормальним до площини β, якій паралельні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_3$. Точка M_1 лежить на прямій l_1, а, отже, і в площині β. Тому рівняння площини β:

$-3(x-1)-6(y+1)+5(z-1)=0$;

$-3x-6y+5z-8=0$.

Приклад 8. Знайти точку P', симетричну точці $P(3;5;-3)$ відносно площини $\alpha: 2x+3y-z+4=0$.

Розв'язання. Нормальний вектор $\vec{n}=(2;3;-1)$ площини α є напрямним для прямої PO. Точка P прямій PO належить, тому



$PO:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$;

$$\begin{cases}x=2t+3\\ y=3t+5.\\ z=-t-3\end{cases}$$

Знайдемо т.O як точку перетину прямої PO та площини α:

$2(2t+3)+3(3t+5)-(-t-3)+4=0$,

$4t+6+9t+15+t+3+4=0$,

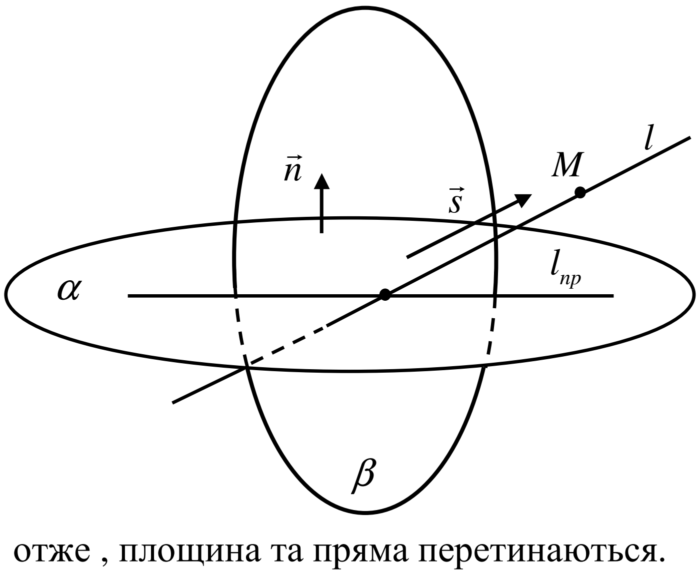
$14t+28=0,\ \ t=-2$.

$O:\begin{cases} x=-4+3=-1 \\ y=-3+5=2 \\ z=2-3=-1 \end{cases}$, $O(-1;2;-1)$. т.O є серединою відрізка PP' $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_P+x_{P'})=x_O \Rightarrow x_{P'}=2x_O-x_P$, для інших координат аналогічно. Отже, $P'(-5;-1;1)$.

Приклад 9. Доведіть, що пряма $l: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{3}$ та площина $\alpha: x-2y+3z-5=0$ перетинаються. Знайдіть рівняння прямої, що є проекцією прямої l на площину α. Знайдіть кут між прямою l та площиною α.

Розв'язання. Вектор $\vec{s}=(2;1;3)$ – напрямний вектор прямої l; вектор $\vec{n}=(1;-2;3)$ – нормальний вектор площини α. Якщо вектори $\vec{s}$ та $\vec{n}$ ортогональні ($\vec{s}\cdot\vec{n}=0$), то пряма та площина паралельні, в протилежному випадку вони перетинаються.



В нашому прикладі:

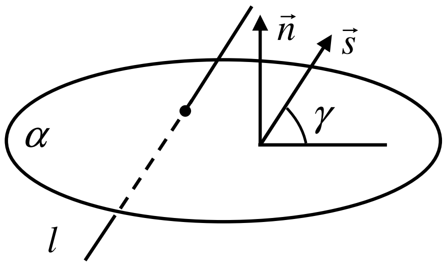
$\vec{s}\cdot\vec{n}=2\cdot1+1\cdot(-2)+3\cdot3=9\neq0$,

отже , площина та пряма перетинаються.

Побудуємо площину β, яка перпендикулярна до площини α і містить пряму l. Вектори $\vec{s}$ та $\vec{n}$ паралельні їй, тому вектор

$$\vec{n}_\beta = \vec{n} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-9;3;5)$$ є нормальним до площини β. Тоді рівняння площини β: $-9(x-1)+3(y+2)+5(z+1)=0$, $-9x+3y+5z+20=0$.

Пряма l_{np} є перетином площин α і β, тому загальне рівняння проекції має вигляд: $\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ 9x-3y-5z-20=0 \end{cases}$.



Для знаходження кута γ між прямою l та площиною α знайдемо кут між векторами $\vec{s}$ та $\vec{n}$, який рівний $90^\circ - \gamma$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \frac{9}{14}.$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{9}{14}.$$

Приклад 10. З’ясуйте взаємне розташування площин $\alpha: 12x+3y+4z+2=0$ та $\beta: x-2y-z+4=0$. Знайдіть кут між ними, якщо вони перетинаються, або відстань між площинами у випадку їх паралельності. Знайдіть рівняння площин, що паралельні до площини α та віддалені від неї на 3 одиниці.

Розв'язання. Вектори $\vec{n}_\alpha = (12;3;4)$ та $\vec{n}_\beta = (1;-2;-1)$ є нормальними векторами площин α та β відповідно. Якщо нормальні вектори колінеарні, то площини паралельні, в протилежному випадку, вони перетинаються. В даному прикладі вектори $\vec{n}_\alpha$ та $\vec{n}_\beta$ не колінеарні, тобто площини перетинаються. Кут φ між ними рівний куту між нормальними векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{12 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{144+9+16} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{13\sqrt{6}}, \ \varphi = \arccos\frac{2}{13\sqrt{6}}.$$

Для знаходження відстані між площинами зручно користуватись нормованим рівнянням площин. Нормуємо рівняння площини α.

$$\mu_\alpha = \frac{-1}{\sqrt{144+9+16}} = -\frac{1}{13}.\ \alpha:\ -\frac{12}{13}x - \frac{3}{13}y - \frac{4}{13}z - \frac{2}{13} = 0,\ p = \frac{2}{13} < 3.$$

Площин, віддалених від площини α на 3 одиниці буде дві. Одна з них розташована по один бік від початку координат з площиною α, друга – з іншого боку.

$$p_1 = \frac{2}{13} + 3 = \frac{41}{13};\ \alpha_1: -\frac{12}{13}x - \frac{3}{13}y - \frac{4}{13}z - \frac{41}{13} = 0;$$

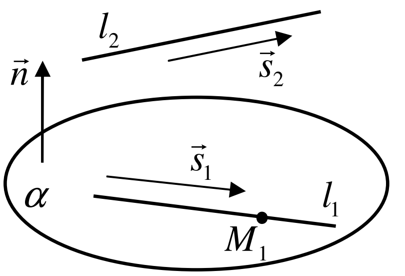
$$p_1 = 3 - \frac{2}{13} = \frac{37}{13};\ \alpha_2: -\frac{12}{13}x - \frac{3}{13}y - \frac{4}{13}z - \frac{37}{13} = 0.$$

Або $\alpha_1: 12x + 3y + 4z + 41 = 0$, $\alpha_2: 12x + 3y + 4z + 37 = 0$.

Приклад 11.

Знайдіть рівняння площини α, що містить пряму $l_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ та паралельна прямій $l_2: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1. \\ z = 3t+3 \end{cases}$

Розв'язання. Напрямні вектори прямих $\vec{s}_1 = (2;1;-1)$, $\vec{s}_2 = (1;2;3)$ паралельні площині α, а, отже, їх векторний добуток є нормальним вектором площини:



$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5;-7;3).$$

Точка $M_1(-1;1;-2)$ лежить на прямій l_1, а отже, і на площині α, тому:

$\alpha:\ 5(x+1) - 7(y-1) + 3(z+2) = 0$, $5x - 7y + 3z + 18 = 0$.

Приклад 12. Дано площини $\alpha: 2x + 3y - 4z + 7 = 0$, $\beta: -x + 2y + 3z - 1 = 0$ і т. $M_1(1;1;1), M_2(-2;0;1)$. Знайдіть рівняння площини, такої, що:

а) перпендикулярна площинам α і β і містить точку M_1;

б) перпендикулярна до площини α і містить точки M_1, M_2.

Розв'язання. а) Нехай шукаємо площину γ. Нормальні вектори $\vec{n}_\alpha$ та $\vec{n}_\beta$ до площин α і β відповідно, є паралельними до площини γ, тому їх векторний добуток визначає нормальний вектор до площини γ:

$$\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (17;-2;7).$$

Точка M_1 належить γ за умовою, тому

$$\gamma:\ 17(x-1) - 2(y-1) + 7(z-1) = 0,\ 17x - 2y + 7z + 12 = 0.$$

Точки M_1 та M_2 лежать в площині, яку шукаємо, тому вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3;-1;0)$ разом з вектором $\vec{n}_\alpha = (2;3;-4)$ (нормальний вектор площини α) будуть паралельні до цієї площини. Відповідно, нормальний вектор площини $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (4;-12;-7)$.

Точка M_1 належить площині, тому рівняння площини має вигляд:

$$4(x-1) - 12(y-1) - 7(z-1) = 0,\ 4x - 12y - 7z + 15 = 0.$$

4. Криві другого порядку.

Приклад 13. Знайдіть геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох даних точок $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ є величина стала і рівна 10.

Розв'язання. Розв’яжемо цю задачу двома способами.

1 спосіб. Нехай точка $M(x;y)$ – довільна фіксована точка, що задовольняє умову задачі. Тоді $|F_1M| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$;

$|F_2M| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$.

За умовою, $|F_1M| + |F_2M| = 10$.

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$, $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$,

$$\left(x+4\right)^2+y^2=100-20\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}+\left(x-4\right)^2+y^2$$

$8x=100-20\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}-8x$, $20\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=100-16x$,

$5\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=25-4x$, $25\left(\left(x-4\right)^2+y^2\right)=625-200x+16x^2$,

$9x^2+25y^2=225$, $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ – канонічне рівняння еліпса.

2 спосіб. Для довільної точки еліпса сума відстаней від цієї точки до фокусів є величина стала і рівна $2a$. Точки F_1,F_2 можна розглядати як фокуси, тоді $c=4;2a=10;a=5$, $b^2=c^2-a^2=25-16=9$.

Маємо рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Приклад 14. Знайдіть рівняння гіперболи, якщо точка $M\left(6;\dfrac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ належить їй і при цьому віддалена від правого фокуса на відстань $\dfrac{7}{2}$, велика вісь гіперболи задається цілим числом і розташована на осі абсцис.

Розв'язання. Точка M лежить на правій гілці гіперболи. Нехай правий фокус $F_2\left(c;0\right)$. Тоді, $\left|MF_2\right|=\sqrt{\left(c-6\right)^2+\dfrac{45}{4}}=\dfrac{7}{2}$.

Точка M належить гіперболі за умовою, тому:

$\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{45/4}{b^2}=1$, $36b^2-\dfrac{45}{4}a^2=a^2b^2$; $b^2=c^2-a^2$. Звідси, маємо систему:

$$\begin{cases} 36b^2-\dfrac{45}{4}a^2=\left(ab\right)^2 \\ \left(c-6\right)^2+\dfrac{45}{4}=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}.$$

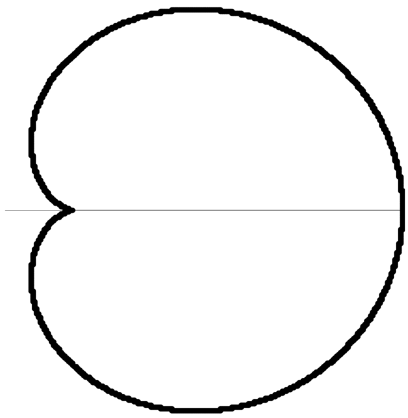
Розв'яжемо систему і, враховуючи, що a – ціле, отримаємо: $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$, тобто рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

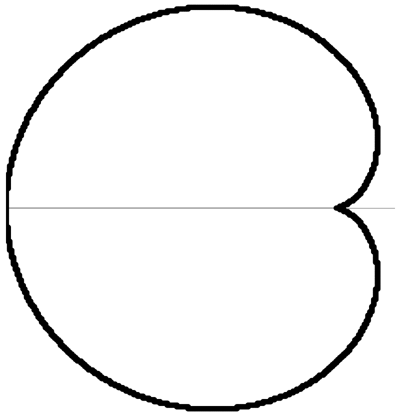
5. Побудова кривих в полярній системі координат.

В даній контрольній пропонуються для побудови в полярній системі криві трьох типів:

1) кардіоїди виду

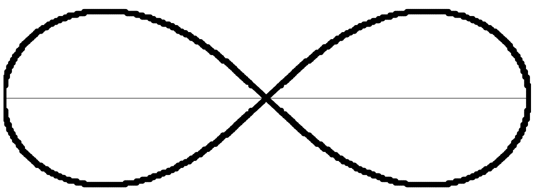
$\rho = a(1 \pm \cos\varphi)$ або $\rho = a(1 \pm \sin\varphi)$;

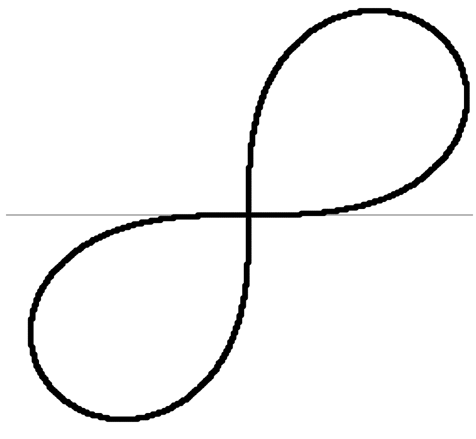




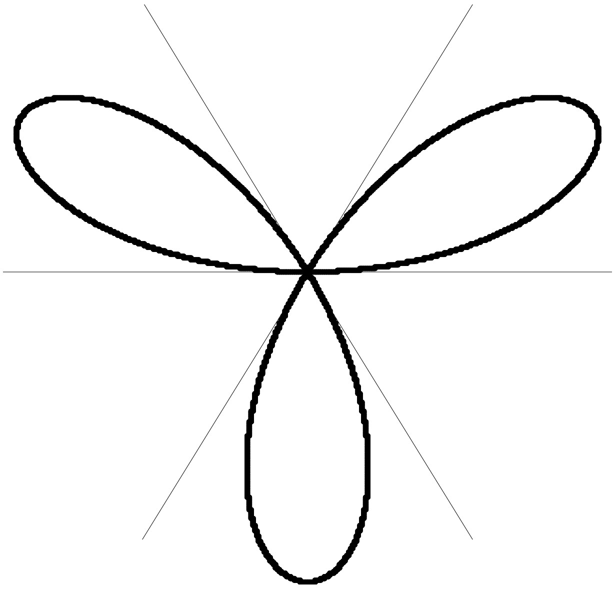
2) лемніскати Бернуллі виду

$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ або $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}; a>0$;

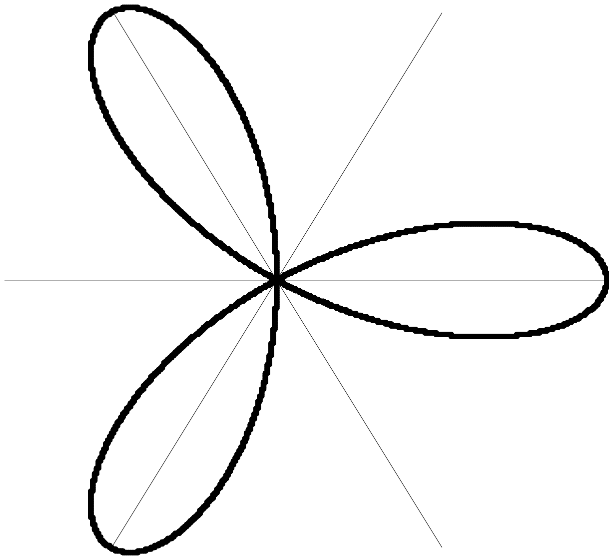




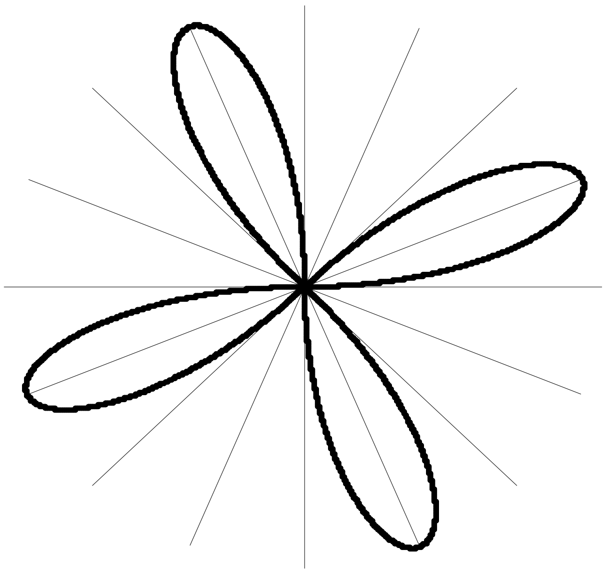
3) m-пелюсткові троянди виду: $\rho = a\cos m\varphi$ або $\rho = a\sin m\varphi$.



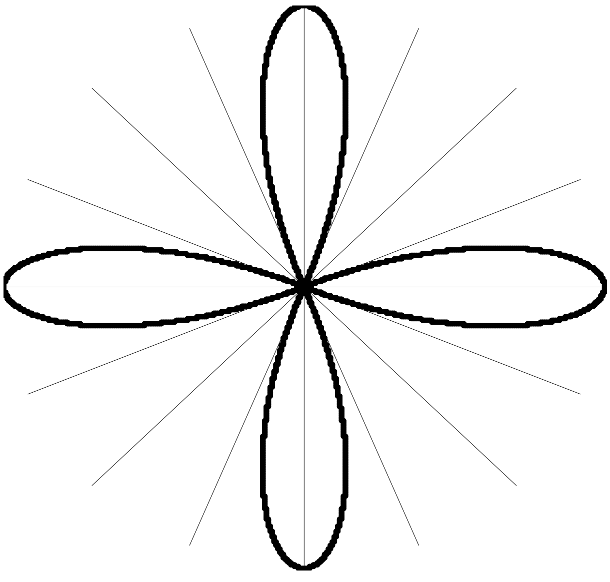
$\rho = a\sin 3\varphi$



$\rho = a\cos 3\varphi$



$\rho = a\sin 4\varphi$



$\rho = a\cos 4\varphi$

АГ МКР-1

Варіант № 1

1. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 2\vec{p}$ та $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = \sqrt{3}; |\vec{q}| = 1; (\vec{p}; \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2. Знайдіть рівняння прямих, які містять медіану AM та висоту AH трикутника ABC, якщо $A(1;1), B(3;5), C(7;3)$.

3. Знайдіть точку P' симетричну точці $P(1;2;-1)$ відносно площини $\alpha: 2x + 3y - z + 5 = 0$.

4. Побудуйте лінію $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох даних точок $F_1(-3;0)$ та $F_2(3;0)$ є величина стала і рівна 10.

АГ МКР-1

Варіант № 2

1. Знайдіть площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ та $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2; |\vec{q}| = 6; (\vec{p}; \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2. Знайдіть точку P' симетричну точці $P(3;6)$ відносно прямої $l: 4x + 7y + 11 = 0$.

3. Доведеть, що прямі $l_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{-2}$ та $l_2: \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$ перетинаються і знайдіть рівняння площини, якій вони належать.

4. Побудуйте лінію $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней від двох даних точок $F_1(-5;0)$ та $F_2(5;0)$ є величина стала і рівна 6.

АГ МКР-1

Варіант № 3

1. Знайдіть об'єм тетраедра $ABCD$, якщо $A(1;1;1), B(3;-1;5), C(7;4;10), D(1;0;5)$.

2. Знайдіть площу прямокутника, дві сторони якого лежать на прямих $l_1: 3x - 2y - 5 = 0$ та $l_2: 2x + 3y + 7 = 0$, а точка $A(-2;1)$ його вершина.

3. З'ясуйте взаємне розташування прямої $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ та площини $\alpha: 2x + 3y - z + 5 = 0$ і знайдіть загальне рівняння прямої, що є проекцією прямої l на площину α.

4. Побудуйте лінію $\rho = 2\cos 3\varphi$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відстань до даної точки $F(3;0)$ дорівнює відстані до даної прямої $x + 3 = 0$.

АГ МКР-1

Варіант № 4

1. Знайдіть $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}; \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, де $|\vec{p}| = 1; |\vec{q}| = 2; (\vec{p}; \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

2. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3;2)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини.

3. Знайдіть рівняння площини, яка містить пряму $l_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ і паралельна прямій $l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$.

4. Побудуйте лінію $\rho = 4(1 + \sin\varphi)$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-4;0)$ і даної прямої $4x + 25 = 0$, дорівнює $\frac{4}{5}$.

АГ МКР-1

Варіант № 5

1. Знайдіть вектори, які ортогональні до векторів $\vec{a} = (2;4;6)$ та $\vec{b} = (-2;1;4)$ і мають довжину $\sqrt{6}$.

2. Знайдіть рівняння бісектрис кутів, що утворені прямими $l_1; 7x + y - 3 = 0$ та $l_2 : 5x - 5y - 6 = 0$.

3. З'ясуйте взаємне розташування прямих $l_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ та $l_2 : \begin{cases} x + 2y - 4z + 3 = 0 \\ -4x + 7y + z - 12 = 0 \end{cases}$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут між ними, якщо вони перетинаються чи мимобіжні.

4. Побудуйте лінію $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-5;0)$ і даної прямої $5x + 16 = 0$ дорівнює $\frac{5}{4}$.

АГ МКР-1

Варіант № 6

1. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}; \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}; \vec{c} = -\vec{j} + 4\vec{k}$.

2. Знайдіть рівняння прямої, що паралельна прямим $l_1 : 7x + y - 5 = 0$ та $l_2 : -14x - 2y - 26 = 0$ і рівновіддалена від них.

3. З'ясуйте взаємне розташування площин $\alpha : 3x - 4y - 12z - 30 = 0$ та $\beta : 3x - 4y - 12z + 22 = 0$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут міх ними, якщо площини перетинаються.

4. Побудуйте лінію $\rho = 4\sin 3\varphi$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть геометричне місце точок, відстані яких до даного кола $(x-5)^2 + y^2 = 9$ і даної прямої $x + 2 = 0$ рівні між собою.

АГ МКР-1

Варіант № 7

1. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ та $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$ якщо $|\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Знайдіть рівняння прямих, які паралельні прямій $4x + 3y - 10 = 0$ і віддалені від неї на 4 одиниці.
3. Знайдіть рівняння площини, що містить точку $M(1;1;1)$ і перпендикулярна до площин $\alpha : 2x - 3y + 4 = 0$ та $\beta : 2x + 2y - 3z + 5 = 0$
4. Побудуйте лінію $\rho = -2(\cos\varphi - 1)$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть геометричне місце точок, які розміщені до точки $A(3;0)$ вдвічі ближче, ніж до прямої $x = 12$.

АГ МКР-1

Варіант № 8

1. Знайдіть вектор $\vec{x}$, який ортогональний до векторів $\vec{a} = (1;-1;0)$ та $\vec{b} = (2;3;1)$ і такий, що $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$, де $\vec{c} = (-2;-3;1)$.
2. З'ясуйте, чи перетинає пряма $l : 4x + 3y - 12 = 0$ відрізок AB, якщо $A(1;1); B(5;2)$.
3. Знайдіть рівняння площин, які паралельні площині $2x + 2y + z - 2 = 0$ і віддалені від неї на 2 одиниці.
4. Побудуйте лінію $\rho = 3\cos 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть геометричне місце точок, для яких відстань від точки $F(0;6)$ у півтора рази більша за відстань від прямої $y = \dfrac{8}{3}$.

АГ МКР-1

Варіант № 9

1. З'ясуйте, чи лежать точки $A(1;1;1), B(3;-1;5), C(7;4;10), D(1;0;5)$ на одній площині.
2. З'ясуйте взаємне розташування прямих $l_1 : 3x + 4y - 5 = 0$ та $l_2 : 3x + 4y + 20 = 0$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут між ними, якщо вони перетинаються.
3. Знайдіть рівняння площини, що містить точки $M_1(3;0;4), M_2(5;2;6)$ та перпендикулярна до площини $\alpha : 2x + 4y + 6z - 7 = 0$.
4. Побудуйте лінію $\rho = 4\sin 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть геометричне місце точок, які рівновіддалені від осі Ox та точки $F(3;4)$.

АГ МКР-1

Варіант № 10

1. Знайдіть кути в трикутнику ABC, якщо $A(2;3;-1); B(4;4;1); C(1;1;1)$.
2. Знайдіть проекцію точки $P(3;6)$ на пряму AB, якщо $A(2;-3); B(-5;1)$.
3. Знайдіть кут між прямою, що проходить через точки $A(2;-1;3)$ і $B(-1;2;4)$ та площиною MNK, якщо $M(1;2;3); N(-1;4;0); K(4;2;5)$.
4. Побудуйте лінію $\rho = -2\cos 3\varphi$ в полярній системі координат.
5. Відстані від одного з фокусів еліпса до кінців його великої осі відповідно дорівнюють 7 та 1. Складіть канонічне рівняння цього еліпса.

АГ МКР-1

Варіант № 11

1. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ та $\vec{b} = 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2; |\vec{q}| = \sqrt{2}; (\vec{p};\vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Знайдіть рівняння прямих, які містять медіану AM та висоту AH трикутника ABC, якщо $A(-2;1), B(2;3), C(5;2)$.
3. Знайдіть точку P' симетричну точці $P(4;3;2)$ відносно площини $\alpha: 3x + 2y + z - 6 = 0$.
4. Побудуйте лінію $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть рівняння гіперболи з ексцентриситетом $\varepsilon = 1{,}25$ і такої, що має спільні фокуси з еліпсом $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$.

АГ МКР-1

Варіант № 12

1. Знайдіть площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ та $\vec{b} = \vec{p} - 4\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}; |\vec{q}| = 3; (\vec{p};\vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Знайдіть точку P' симетричну точці $P(3;1)$ відносно прямої $l: 2x + y + 3 = 0$.
3. Доведіть, що прямі $l_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-4}{-3}$ та $l_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -2t + 3 \end{cases}$ перетинаються і знайдіть рівняння площини, якій вони належать.
4. Побудуйте лінію $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть геометричне місце точок, для кожної з яких відстань від осі Ox та від точки $F(2;2)$ рівні.

АГ МКР-1

Варіант № 13

1. Знайдіть об'єм тетраедра $ABCD$, якщо $A(-1;1;1), B(1;2;0), C(5;5;1), D(2;-2;13)$.

2. Знайдіть площу прямокутника, дві сторони якого лежать на прямих $l_1 : x-2y+3=0$ та $l_2 : 2x+y-8=0$, а точка $A(1;1)$ його вершина.

3. З'ясуйте взаємне розташування прямої $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ та площини $\alpha : 2x+3y-z+5=0$ і знайдіть загальне рівняння прямої, що є проекцією прямої l на площину α.

4. Побудуйте лінію $\rho = 3\cos 3\varphi$ в полярній системі координат.

5. Обчисліть ексцентриситет еліпса, центр якого розташований в початку координат, якщо його малу вісь видно з фокусів під прямим кутом.

АГ МКР-1

Варіант № 14

1. Знайдіть $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, якщо $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}; \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, де $|\vec{p}| = \sqrt{3}; |\vec{q}| = 2; (\vec{p};\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;2)$ і відтинає від першого координатного кута трикутник площею 4 кв.од.

3. Знайдіть рівняння площини, яка містить пряму $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ і паралельна прямій $l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$.

4. Побудуйте лінію $\rho = 3(1-\sin\varphi)$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть рівняння гіперболи, яка проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ та має фокуси у вершинах цього еліпса.

АГ МКР-1

Варіант № 15

1. Знайдіть вектор $\vec{x}$, який ортогональний до векторів $\vec{a} = (-2;4;2)$ та $\vec{b} = (3;1;4)$ і має довжину $\sqrt{3}$.

2. Знайдіть рівняння бісектрис кутів, що утворені прямими $l_1 ; x-3y+5=0$ та $l_2 : 3x-y+15=0$.

3. З'ясуйте взаємне розташування прямих $l_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{0}$ та $l_2 : \begin{cases} 7x-y+7z-20=0 \\ 3x-2y+3z-7=0 \end{cases}$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут між ними, якщо вони перетинаються чи мимобіжні.

4. Побудуйте лінію $\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть рівняння параболи , якщо вісь ординат є її директрисою, а фокус має координати $(5;0)$.

АГ МКР-1

Варіант № 16

1. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}; \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}; \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.
2. Знайдіть рівняння прямої, що паралельна прямим $l_1 : 2x + 3y + 3 = 0$ та $l_2 : -6x - 9y + 5 = 0$ і рівновіддалена від них.
3. З'ясуйте взаємне розташування площин $\alpha : x + 7y - 4 = 0$ та $\beta : 2x + 2z + 5 = 0$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут міх ними, якщо площини перетинаються.
4. Побудуйте лінію $\rho = 5\sin 3\varphi$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть ексцентриситет еліпса, центр якого розташований в початку координат, якщо відстань між його директрисами в 4 рази більша за відстань між його фокусами.

АГ МКР-1

Варіант № 17

1. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ та $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$ якщо $|\vec{p}| = \sqrt{3}, |\vec{q}| = 2, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}$.
2. Знайдіть рівняння прямих, які паралельні прямій $4x - 3y + 15 = 0$ і віддалені від неї на 4 одиниці.
3. Знайдіть рівняння площини, що містить точку $M(1;2;1)$ і перпендикулярна до площин $\alpha : -3x + y + z + 4 = 0$ та $\beta : 2x + y - 3z + 9 = 0$
4. Побудуйте лінію $\rho = -4(\sin\varphi - 1)$ в полярній системі координат.
5. Фокуси гіперболи збігаються з вершинами еліпса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, директриси гіперболи проходять через фокуси цього еліпса. Знайдіть рівняння гіперболи.

АГ МКР-1

Варіант № 18

1. Знайдіть вектор $\vec{x}$, який ортогональний до векторів $\vec{a} = (2;1;1)$ та $\vec{b} = (3;0;2)$ і такий, що $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$, де $\vec{c} = (2;-3;1)$.
2. З'ясуйте, чи перетинає пряма $l : 5x + 4y - 20 = 0$ відрізок AB, якщо $A(1;1); B(-2;1)$.
3. Знайдіть рівняння площин, які паралельні площині $3x + 4y + 12z - 2 = 0$ і віддалені від неї на 2 одиниці.
4. Побудуйте лінію $\rho = 2\cos 4\varphi$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть рівняння параболи, якщо точка $F(-7;0)$ - її фокус, а пряма $x-7=0$ - її директриса.

АГ МКР-1

Варіант № 19

1. З'ясуйте, чи лежать точки $A(-1;1;1), B(1;2;0), C(5;5;1), D(1;1;-3)$ на одній площині.
2. З'ясуйте взаємне розташування прямих $l_1: -6x-8y+20=0$ та $l_2: 3x+4y+25=0$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут між ними, якщо вони перетинаються.
3. Знайдіть рівняння площини, що містить точки $M_1(1;2;1), M_2(-2;3;2)$ та перпендикулярна до площини $\alpha: 2x-y-3z+4=0$.
4. Побудуйте лінію $\rho=3\sin 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{2}{3}$, фокальний радіус точки M, що лежить на еліпсі рівний 10. Обчисліть відстань від точки M до однобічної з фокусом директриси.

АГ МКР-1

Варіант № 20

1. Знайдіть кути в трикутнику ABC, якщо $A(-1;2;3); B(3;2;6); C(2;2;-1)$.
2. Знайдіть проекцію точки $P(3;1)$ на пряму AB, якщо $A(-4;5); B(-2;1)$.
3. Знайдіть кут між прямою, що проходить через точки $A(-2;3;2)$ і $B(1;2;1)$ та площиною MNK, якщо $M(1;-1;1); N(2;0;4); K(3;2;7)$.
4. Побудуйте лінію $\rho=-3\sin 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть кут між асимптотами гіперболи, якщо відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами цієї гіперболи.

АГ МКР-1

Варіант № 21

1. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=4\vec{p}$ та $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=1; |\vec{q}|=2; (\vec{p};\vec{q})=\frac{\pi}{3}$.
2. Знайдіть рівняння прямих, які містять медіану AM та висоту AH трикутника ABC, якщо $A(2;-1), B(7;5), C(3;3)$.
3. Знайдіть точку P' симетричну точці $P(0;-1;0)$ відносно площини $\alpha: x+2y+z-4=0$.
4. Побудуйте лінію $\rho=2(1-\sin\varphi)$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть рівняння параболи, якщо точка $F(4;3)$ - її фокус, а пряма $y+1=0$ - її директриса.

АГ МКР-1

Варіант № 22

1. Знайдіть площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ та $\vec{b} = 3\vec{p} - 5\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 4\sqrt{3}; |\vec{q}| = 3; (\vec{p};\vec{q}) = \dfrac{\pi}{3}$.

2.Знайдіть точку P' симетричну точці $P(1;-20)$ відносно прямої $l: x + 3y - 11 = 0$.

3. Доведіть, що прямі $l_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ та $l_2: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t \\ z = 4t+3 \end{cases}$ перетинаються і знайдіть рівняння площини, якій вони належать.

4. Побудуйте лінію $\rho = 5\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат і такий, що проходить через точку $M(1;1)$ та має ексцентриситет $\dfrac{3}{5}$.

АГ МКР-1

Варіант № 23

1. Знайдіть об'єм тетраедра $ABCD$, якщо $A(1;-1;1), B(-1;5;3), C(3;3;4), D(7;-1;-2)$.

2. Знайдіть площу прямокутника, дві сторони якого лежать на прямих $l_1: x - 3y + 4 = 0$ та $l_2: 3x + y - 9 = 0$, а точка $A(-1;2)$ його вершина.

3. З'ясуйте взаємне розташування прямої $l: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ та площини $\alpha: x + 2y + z - 4 = 0$ і знайдіть загальне рівняння прямої, що є проекцією прямої l на площину α.

4. Побудуйте лінію $\rho = 4\cos 3\varphi$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть рівняння гіперболи, якщо відомі її фокус $F(5;0)$ та рівняння відповідної директриси $5x - 16 = 0$.

АГ МКР-1

Варіант № 24

1. Знайдіть $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}; \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, де $|\vec{p}| = \sqrt{2}; |\vec{q}| = 1; (\vec{p};\vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2;1)$ і відтинає від другого координатного кута трикутник з площею 4 кв.од.

3. Знайдіть рівняння площини, яка містить пряму l_1 і паралельна прямій l_2, якщо $l_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$; $l_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

4. Побудуйте лінію $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$ в полярній системі координат.

5. Знайдіть рівняння параболи з вершиною у початку координат і такою, що симетрична відносно осі Ox та відтинає від прямої $y = x$ хорду завдовжки $4\sqrt{2}$.

АГ МКР-1

Варіант № 25

1. Знайдіть вектори, які ортогональні до векторів $\vec{a}=(4;-2;2)$ та $\vec{b}=(2;2;-5)$ і мають довжину $\sqrt{21}$.
2. Знайдіть рівняння бісектрис кутів, що утворені прямими $l_1; x+2y-11=0$ та $l_2: 3x-6y-5=0$.
3. З'ясуйте взаємне розташування прямих $l_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$ та $l_2: \begin{cases} 3x-y-5z+2=0 \\ 7x+y-5z-2=0 \end{cases}$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут між ними, якщо вони перетинаються чи мимобіжні.
4. Побудуйте лінію $\rho=4\sqrt{\sin 2\varphi}$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть канонічне рівняння еліпса, якщо трикутник з вершинами у фокусах та в кінці малої осі правильний, а велика вісь рівна 16.

АГ МКР-1

Варіант № 26

1. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}; \vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}; \vec{c}=2\vec{i}-\vec{k}$.
2. Знайдіть рівняння прямої, що паралельна прямим $l_1: 3x-4y+8=0$ та $l_2: 9x-12y+8=0$ і рівновіддалена від них.
3. З'ясуйте взаємне розташування площин $\alpha: x+7y+16=0$ та $\beta: 2x+2z-3=0$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут міх ними, якщо площини перетинаються.
4. Побудуйте лінію $\rho=2\sin 3\varphi$ в полярній системі координат.
5. Кут між асимптотами гіперболи, який містить фокус, рівний $60°$, а відстань від директриси до найближчої вершини рівна $\frac{3}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$. Знайдіть канонічне рівняння гіперболи.

АГ МКР-1

Варіант № 27

1. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ та $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$ якщо $|\vec{p}|=\sqrt{2}, |\vec{q}|=1, (\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{4}$.
2. Знайдіть рівняння прямих, які паралельні прямій $6x-8y-5=0$ і віддалені від неї на 4 одиниці.
3. Знайдіть рівняння площини, що містить точку $M(-1;2;1)$ і перпендикулярна до площин $\alpha: 3x+y+3z-7=0$ та $\beta: x-2y+2z+4=0$
4. Побудуйте лінію $\rho=-4(\cos\varphi-1)$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть рівняння параболи, що симетрична відносно осі Ox, якщо відстань від фокуса до її директриси рівна 12.

АГ МКР-1

Варіант № 28

1. Знайдіть вектор $\vec{x}$, який ортогональний до векторів $\vec{a}=(3;1;1)$ та $\vec{b}=(0;2;1)$ і такий, що $\vec{x}\cdot\vec{c}=20$, де $\vec{c}=(-1;-1;1)$.
2. З'ясуйте, чи перетинає пряма $l: 3x+2y-6=0$ відрізок AB, якщо $A(-1;1); B(4;3)$.
3. Знайдіть рівняння площин, які паралельні площині $6x+7y-6z+5=0$ і віддалені від неї на 2 одиниці.
4. Побудуйте лінію $\rho=4\cos 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Ексцентриситет еліпса рівний $\frac{\sqrt{7}}{4}$, а чотирикутник, вершинами якого є вершини еліпса описаний навколо кола радіуса 4,8. Складіть канонічне рівняння еліпса.

АГ МКР-1

Варіант № 29

1. З'ясуйте, чи лежать точки $A(1;-1;1), B(-1;5;3), C(3;3;4), D(7;-1;-2)$ на одній площині.
2. З'ясуйте взаємне розташування прямих $l_1: x+\sqrt{3}y-(2+\sqrt{3})=0$ та $l_2: \frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{y-3}{1}$ і знайдіть відстань між ними у випадку їх паралельності, або кут між ними, якщо вони перетинаються.
3. Знайдіть рівняння площини, що містить точки $M_1(-1;2;1), M_2(2;3;4)$ та перпендикулярна до площини $\alpha: x-2y+2z-5=0$.
4. Побудуйте лінію $\rho=5\sin 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть канонічне рівняння гіперболи, якщо точка $(7;-2\sqrt{3})$ їй належить і віддалена від лівого фокуса на відстань $4\sqrt{7}$.

АГ МКР-1

Варіант № 30

1. Знайдіть кути в трикутнику ABC, якщо $A(-2;1;1); B(2;4;1); C(1;-3;1)$.
2. Знайдіть проекцію точки $P(1;-20)$ на пряму AB, якщо $A(2;3); B(-4;5)$.
3. Знайдіть кут між прямою, що проходить через точки $A(2;3;4)$ і $B(2;-1;3)$ та площиною MNK, якщо $M(0;-2;6); N(-1;3;2); K(5;2;-3)$.
4. Побудуйте лінію $\rho=-5\cos 4\varphi$ в полярній системі координат.
5. Знайдіть канонічне рівняння параболи, якщо довжина її хорди, що проходить через фокус під кутом $\frac{\pi}{4}$ до її осі, рівна $9\sqrt{2}$.

ВІДПОВІДІ.

Варіант № 1. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $AM: 3x-4y+1=0$; $AH: 2x-y-1=0$; 3) $P'(-3;-4;1)$;

5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Варіант № 2. 1) 21; 2) $P'(-5;-8)$; 3) $2x+3y-z+5=0$; 5) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Варіант № 3. 1) 11; 2) 6; 3) l паралельна α, $\begin{cases} 2x+3y-z+5=0 \\ -4x+y-5z-5=0 \end{cases}$; 5) $y^2=12x$.

Варіант № 4. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $x+y=5, x-y=1$; 3) $x-y-z-3=0$; 5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Варіант № 5. 1) $(1;-2;1), (-1;2;-1)$; 2) $2x+6y+3=0$, $12x-4y-9=0$; 3) мимобіжні, $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Варіант № 6. 1) 11; 2) $7x+y+4=0$; 3) α паралельна β, $d=4$; 5) $y^2=20x$.

Варіант № 7. 1) $\sqrt{39}, \sqrt{43}$; 2) $4x+3y-30=0, 4x+3y+10=0$;

3) $9x+6y+10z-25=0$; 5) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

Варіант № 8. 1) $(-2;-2;10)$; 2) так; 3) $2x+2y+z-8=0, 2x+2y+z+4=0$; 5) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$.

Варіант № 9. 1) ні, $\Delta=66$; 2) l_1 паралельна l_2, $d=5$; 3) $x-2y+z-7=0$;

5) $y=\frac{(x-3)^2}{8}+2$

Варіант № 10. 1) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$; 2) $(-1;-1)$; 3) $-\arcsin 3\sqrt{\frac{11}{133}}$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

Варіант № 11. 1) $\frac{5}{\sqrt{34}}$; 2) $AM: 3x-11y+17=0, AH: 3x-y+7=0$; 3) $P'(-2;-1;0)$;

5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Варіант № 12. 1) 27; 2) $P'(-5;-3)$; 3) $3x+2y+z-6=0$; 5) $y=\frac{x^2}{4}-x+2$.

Варіант № 13. 1) 9; 2) 2; 3) α і l перетинаються, $\begin{cases} 2x+3y-z+5=0 \\ -7x+4y-2z+13=0 \end{cases}$; 5) $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Варіант № 14. 1) $\frac{16}{\sqrt{13}}$; 2) $2x+y=4$; 3) $y-z=0$; 5) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$.

Варіант № 15. 1) $(1;1;-1), (-1;-1;1)$; 2) $\left[\begin{array}{l} x+y+5=0 \\ x-y+5=0 \end{array}\right.$; 3) перетинаються,

$\arccos\frac{1}{10}$; 5) $y^2=10x-25$.

Варіант № 16. 1) 9; 2) $6x+9y+2=0$; 3) перетинаються, $\arccos\frac{1}{10}$; 5) $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Варіант № 17. 1) $\sqrt{76}, 2\sqrt{3}$; 2) $4x-3y+35=0, 4x-3y-5=0$; 3) $4x+7y+5z-23=0$;
5) $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$.

Варіант № 18. 1) $(10;-5;-15)$; 2)ні; 3) $3x+4y+12z-28=0, 3x+4y+12z+24=0$;
5) $y^2=-28x$.

Варіант № 19. 1) так; 2) l_1 паралельна l_2, $d=7$; 3) $2x+7y-z-15=0$; 5)15.

Варіант № 20. 1) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$; 2) $(-1;-1)$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{-10}{\sqrt{110}}$; 5) $90°$.

Варіант № 21. 1) $1/2$; 2) $AM: 5x-3y-13=0, AH: 2x+y-3=0$; 3) $P'(2;3;2)$;
5) $y=\frac{x^2}{8}-x+3$.

Варіант № 22. 1)9; 2) $P'(15;22)$; 3) $5x+2y-3z+4=0$; 5) $16x^2+25y^2=41$.

Варіант № 23. 1)20; 2)3; 3) l паралельна α, $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ -x+z+4=0 \end{cases}$; 5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Варіант № 24. 1) $-\sqrt{2}$; 2) $2y-x=4$ 3) $-3x+y+5z-2=0$; 5) $y^2=4x, y^2=-4x$.

Варіант № 25. 1) $(1;4;2), (-1;-4;-2)$; 2) $\left[\begin{array}{l} x-4y+3=0 \\ x-y-4=0 \end{array}\right.$; 3)мимобіжні, $\arccos\frac{1}{6}$;
5) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

Варіант № 26. 1)20; 2) $9x-12y+16=0$; 3)перетинаються, $\arccos\frac{1}{10}$; 5) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.

Варіант № 27. 1) $\sqrt{41}, \sqrt{29}$; 2) $6x-8y-45=0, 6x-8y+35=0$; 3) $8x-3y-7z+21=0$;
5) $y^2=24x$

Варіант № 28. 1) $(-2;-6;12)$; 2)так; 3) $6x+7y-6z+27=0, 6x+7y-6z-17=0$;
5) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$.

Варіант № 29. 1)ні, $\Delta=120$; 2)перетинаються, $\frac{\pi}{3}$; 3) $8x-3y-7z+21=0$;
5) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{2}=1$.

Варіант № 30. 1) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$; 2) $(8;1)$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{5}{\sqrt{51}}$; 5) $y^2=9x$.