Лекція 1.

§1. Матриці, визначники і системи лінійних рівнянь.

§1.1. Матриці і дії над ними.

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел a_{ij}, i=1, 2, …m; j=1, 2, …n, складена з m рядків та n стовпців і записана в вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

числа a_{ij} – елементи матриці.

Добуток mxn – розмір матриці, m – кількість рядків, n – кількість стовпців.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною,*** кількість її рядків, або стовпців називається ***порядком***.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ – матриця розміру 2x3.

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ – матриця третього порядку.

Матриця, в якої всього один рядок, називається ***матрицею-рядком***, її розмір (1xn):

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & .... & Y_3 \end{pmatrix}$$

Матриця в якої всього один стовпець, називається ***матрицею-стовпцем.*** Розмірність (mx1):

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .... \\ X_m \end{pmatrix}$$

Дві матриці А (mxn) і В (mxn)) називаються ***рівними***, якщо вони однакових розмірів і мають відповідні рівні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$.

Нульовою називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В квадратних матрицях виділяють ***головну*** і ***побічну діагональ***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Побічна діагональ Головна діагональ

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю:

$$diag(d_1,\ \ d_2,\ \ \ldots\ \ d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною***. Позначається буквою Е або І.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо в матриці А розмірності (mxn) поміняти рядки на стовпці, то отримаємо ***транспоновану*** матрицю A^T розмірністю (mxn):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots. & a_{m2} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці А $a_{ij} = a_{ji}$, то вона називається ***симетричною***:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

§1.2. Дії над матрицями.

Це:

1) додавання матриць;
2) добуток матриці на число;
3) різниця матриць;
4) добуток матриці на матрицю.

1) Додавання матриць.

Вводиться тільки для матриць однакового розміру.

Для того, щоб скласти дві матриці, треба скласти їх відповідні елементи.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 10\\ 1 & 7 & -8\end{pmatrix};\quad A+B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 11\\ 1 & 11 & -3\end{pmatrix}.$$

2) Добуток матриці на число.

Щоб помножити матрицю на число треба всі елементи матриці помножити на це число.

$$2\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -2 & 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 8\\ -4 & 14 & 2\end{pmatrix}.$$

3) Різниця матриць.

Різниця матриць A-B визначається як сума матриць A і матриць B, помноженої на (–1).

$$A-B=A+(-1)B$$

Справедливі такі властивості операцій:

1) A+B=B+A
2) A+(B+C)=(A+B)+C
3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$
4) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$
5) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$
6) A+O=A; A–A=O.

4. Множення матриць.

Операція множення двох матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Матриця A називається ***узгодженою*** з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Якщо матриця A узгоджена з B, то взагалі це не означає узгодженість матриці B з A.

Квадратні матриці взаємно узгоджені.

Добутком $C=A\cdot B$ матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times k}$ називається така матриця, у якої елементи i-го рядка матриці A множаться на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots\ldots a_{in}b_{nj};$$

Це означення називається **правилом множення рядка на стовпець**.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix};\qquad A_{2x2}\cdot B_{2x3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot7+0\cdot1 & 1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot3+0\cdot0\\ 2\cdot7+3\cdot1 & 2\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ 17 & 7 & 6\end{pmatrix};$$

Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця.
Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці A, якщо виконується умова:

$$A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A=I$$

Властивості операції множення:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
2) $(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)= \alpha\cdot(A\cdot B)$
3) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
4) $C\cdot(A+B)= C\cdot A + C\cdot B$.

§1.3. Матричний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+.....+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+.....+a_{2n}x_n=b_2\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+.....+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \tag{1}$$

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n}\\ .... & .... & .... & ....\\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn}\end{pmatrix}}\underset{B}{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .....\\ x_n\end{pmatrix}}=\underset{C}{\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ .....\\ b_m\end{pmatrix}} \tag{1'}$$

A – основна матриця системи
X – матриця-стовпець невідомих
B – матриця-стовпець вільних членів.

Система рівнянь (1) називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю і ***неоднорідною***, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Матричний запис системи (1):

$$A\cdot X=B \tag{2}$$

§1.4. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення невідомих. Цей метод ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь, а саме:

а) можна переставляти місцями рівняння;

б) можна помножити рівняння на один і той самий відмінний від нуля множник (множимо всі доданки і праву частину);

в) додати до елементів рівняння відповідні елементи другого рівняння, помножені на одне і те саме число.

Систему рівнянь (1) треба привести до трапецієвидного вигляду.
Розглянемо метод на прикладі:
Приклад 1.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

Запишемо матрицю, складену з усіх коефіцієнтів системи.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ * \\ ** \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

* – додамо до першого рядка другий;
** – перший рядок множимо на (-2) і додаємо до третього (в умі).

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Тут ми попрацювали з третім рядком. Другий рядок (в умі) помножили на (-1) і додали до третього.

Таким чином ми отримали еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 0 \cdot x + y - z = 2 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \end{cases}$$

Ми бачимо, що систему розв’язати неможливо. Система несумісна.

Приклад 2.
$$\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+y+2z=2 \\ 2x+2y+5z=3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Бажано на перший рядок поставити рядок, який починається з одиниці.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad -2 \quad -3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матриця має трапецієвидний вид.
Система перетворилась на таку:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -y-7z=-5 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=2 \\ y+7z=5 \\ z=-1 \end{cases}$$

Маємо z= -1. Підставимо в друге рівняння і знаходимо *y*:

$$y+7(-1)=5; \qquad y=12$$

Підставляємо z= -1; *y*=12 в перше рівняння і знаходимо *x*:

$$x=2-y-2z; \qquad x=2-12+2=-8$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 3(-8)+2\cdot 12-(-1)=1 \\ -8+12+2\cdot(-1)=2 \\ 2\cdot(-8)+2\cdot 12+5\cdot(-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 2=2 \\ 3=3 \end{cases}$$

§1.5. Визначники.

Розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Цій матриці відповідає визначник:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Це число, яке обчислюється за формулою:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Розглянемо квадратну матрицю третього порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Визначник третього порядку, який відповідає матриці, називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Розглянемо два правила обчислення визначників 3-го порядку:

а) правило трикутників

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \overset{-}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

б) правило діагоналей

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Приклад:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right.=12-12-2-2-6-16=-29.$$

Основні властивості визначників:

1^0. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2^0. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3^0. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4^0. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5^0. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6^0. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7^0. Якщо кожен елемент n-го рядка (n-го стовпця) є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n-й рядок (n-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8^0. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

§1.6. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця. Наприклад, для визначника (3) мінорами елементів a_{23} і a_{32} є такі визначники:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (4)$$

Наприклад, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, то $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5.$

Тепер сформулюємо і доведемо теореми про розклад визначника за елементами рядка (стовпця).

Теорема 1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Для визначника (3) виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned} &\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; && \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}; \\ &\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; && \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}; \\ &\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; && \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця)дорівнює нулю.*

§1.7. Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник *n*-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Можна довести, що всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти на елементи будь-якого рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \qquad (6)$$

Оскільки всі алгебраїчні доповнення A_{ij} у формулі (6) визначники третього порядку, то цією формулою можна користуватися для обчислення визначника третього порядку. Але такий список обчислення громіздкий: якщо для знаходження визначника четвертого порядку треба обчислювати визначник третього порядку, то для знаходження визначника п’ятого порядку вже прийдеться обчислити двадцять визначників третього порядку! Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8^0 перетворюється визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою за елементами цього рядка, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклад. Обчислити визначник:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

У першому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший і другий стовпці без змін, до третього додамо перший, а до четвертого – перший, помножений на (-2). Тоді

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$