Лекція 4.

ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ.

І. Функція.

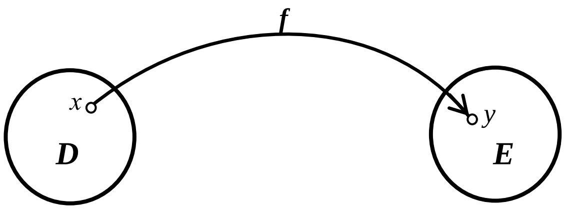
1. Означення функції.

Означення 1. Числовою функцією f називають відображення множини $D \subset R$ на множину $E \subset R$.

Причому кожному значенню $x \in D$ поставлено у відповідність по деякому закону єдине значення $y \in E$.

$$y = f(x)$$

x – незалежна змінна (аргумент),
y – залежна змінна (функція).



Множину D називають ***областю визначення функції***, множину E називають ***областю визначення функції***.

Приклади:

$$y = x^2, D(f) = R, E(f) = [0; +\infty)$$
$$y = \sqrt{1 - x^2}, D(f) = [-1; 1], E(f) = [0; 1]$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, D(f) = (-1; 1), E(f) = [1; +\infty)$$

2. Явне, неявне, параметричне задання функції.

Якщо функція задана рівнянням *y=f(x),* розв’язаним відносно залежної змінної *y*, то функція задана в ***явній формі***.

Приклад: $y = sin^2 x, \qquad y = \frac{x}{ln\, x}$

Якщо функція задана рівнянням *F(x, y)=0*, не розв’язаним відносно *y*, то функція задана ***неявно***.

Приклад: $$x^2 + xy + y = 0$$

Ця функція задана неявно, але її можна задати явно: $y = -\frac{x^2}{1+x}$.

$2x^2 + y + y^3 + xy^2 = a^2$. Ця функція задана неявно, але її можна представити в явному вигляді.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій називають ***параметричним заданням функції.***

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

Приклади:

$$\begin{cases} x = r\,sin\ \ t \\ y = r\,cos\ \ t \end{cases} \qquad t \text{ – параметр}$$

Якщо перше і друге рівняння піднести до квадрата і додати, отримаємо $x^2 + y^2 = r^2$
Це рівняння кола.

$$\begin{cases} x = 2 + 5cos\ \ t \\ y = -3 + 5\,sin\ \ t \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2 \end{cases}$$

Це рівняння кола.

3. Класифікація функцій

а) Парні і непарні функції.

Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$ для будь-яких $X \in$ *D(f).*

Графік парної функції розташований симетрично відносно осі ординат (осі *Oy*).

Приклади: $y = x^2$; $y = \cos x$

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$ для будь-яких $X \in$ *D(f).*

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклади:

$$y = x^3; \qquad y = \frac{1}{x}\ ; \qquad y = \sin x$$

Якщо ці умови не виконуються, то функція загального вигляду.

б) Періодичні функції.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається ***періодичною***, якщо існує таке число T, що

$$f(x+T)=f(x).$$

Число T – період функції.

Приклади:

$$y=\sin\ x,\quad y=\cos\ x\quad (T=2\pi)$$
$$y=\text{tg}\ x,\quad y=\text{ctg}\ x\quad (T=\pi)$$

в) Складена функція.

Нехай функція $y=f(U)$ визначена на множині A $(U\in A)$. Функція $U=\varphi(x),\ (X\in B)$.

Тоді $y=f(\varphi(x))$ – ***складена функція***.

Приклад:

$$y=2^U;\quad U\in[-1;1]$$
$$U=\sin\ x,\quad X\in(-\infty;+\infty)$$
$$\Rightarrow y=2^{\sin\ x}$$

г) Обернені функції.

Нехай задана функція $y=f(x)$ з областю визначень і значень: $D(f), E(f)$.

Будемо вимагати, щоб різним значенням x відповідали різні значення y.

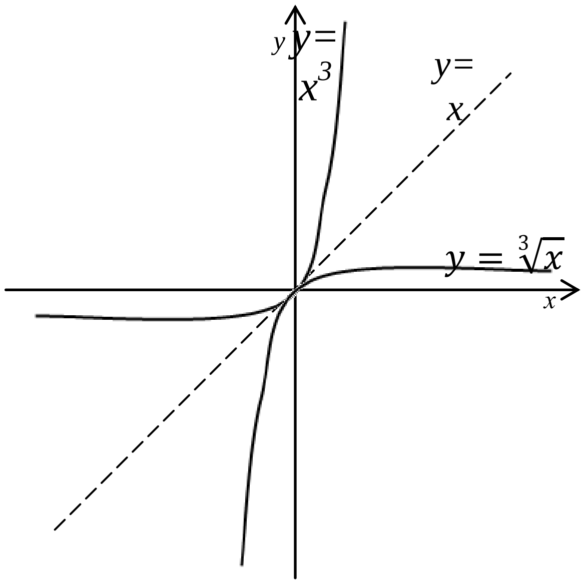
Тоді можна визначити функцію $x=\varphi(y)$ (обернену) так, щоб виконувались співвідношення:

$$D(f)=E(\varphi),\quad f(\varphi(x))=X\quad X\in D(\varphi)$$
$$E(f)=D(\varphi),\quad \varphi(f(x))=X\quad X\in D(f).$$

Алгоритм знаходження оберненої функції:

1) $y=f(x)$
2) $x=\varphi(y)$
3) $x\leftrightarrow y$
4) $y=\varphi(x)$.

Приклад: $y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}\Rightarrow y=\sqrt[3]{x}$ – обернена функція.



Пряма і обернена функції симетричні відносно прямої $y=x$.

II. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Границя послідовності

Розглянемо числову послідовність $\{x_1,\ x_2 \ldots x_n\} = \{x_n\}$.

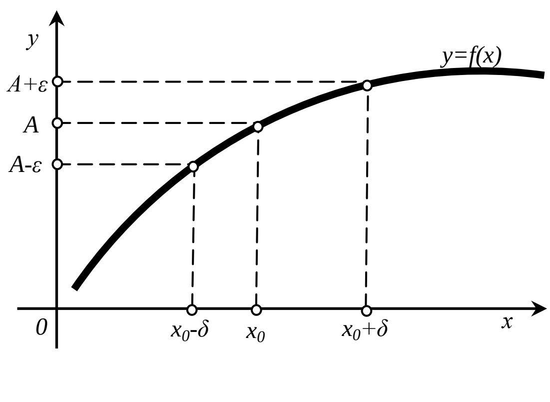
Означення 1. Число x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 2. Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

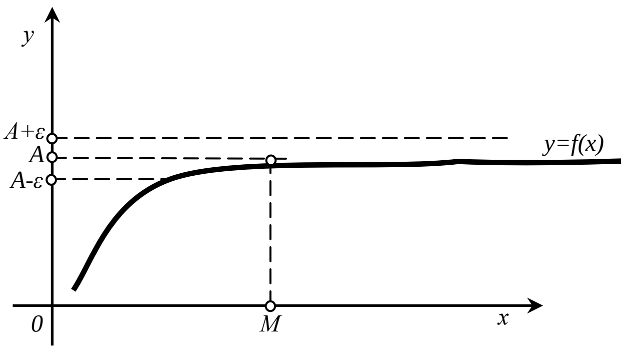
Записують: $\lim_{n\to\infty} f(x) = A$.



3. Границя функції при $x \to \infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; \infty)$.

Означення 3. Число A називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to \infty$ і пишуть $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.



4. Односторонні границі.

Нехай $x \to x_0$, при чому $x < x_0$. Якщо $f(x) \to B$, то B називається *лівою границею* і позначається так

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$$

Аналогічно визначається права границя функції $f(x)$ в точці x_0.

5. Нескінченно велика функція.

Означення 4. Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називається *нескінченно великою*, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0 і для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Записується це так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Приклад:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$$

6. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю.

Якщо $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ нескінченно мала величина.

Приклад: $y = (x-3)^3$ при $x \to 3$, є нескінченно малою величиною.

$$\lim_{x \to 3}(x-3)^3 = 0$$

Властивості нескінченно малих величин

1. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x)$ – A була нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \leftrightarrow f(x) = A+, \text{ де} \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

2. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ – нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

3. Сума нескінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

7. Основні теореми про границі.

Теорема 1 *(про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x),}$ (остання за умови, що $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$)і справедливі формули*

$$\lim_{x \to x_0}\big(f(x) \pm \varphi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0}\big(f(x)\varphi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} \varphi(x)}.$$

Приклади:

1. Обчислити $\lim_{x \to 2}(5x^2 - 13x + 5)$.

Використовуючи теорему про границю суми і наслідки 1)-3), маємо

$$\lim_{x \to 2}(5x^2 - 13x + 5) = 5\lim_{x \to 2} x^2 - 13\lim_{x \to 2} x + 5\lim_{x \to 2} = -1.$$

2. Обчислити $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{2x-1}$.

За теоремою про границі частки дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+1}{\lim\limits_{x\to 1}2x-1}=2.$$

Теорема 2 *(про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*, визначені функції* $\varphi(x)$*,* $f(x)$ *і* $\psi(x)$ *і виконуються нерівності*

$$\varphi(x)\le f(x)\le \psi(x).$$

Тоді, якщо функція $f(x)$ *і* $\psi(x)$ *мають в точці* x_0 *одну й ту саму границю*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A,$$

то таку саму границю має функція $f(x)$*:*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

Теорема 4 *(про границю монотонної функції). Якщо функція* $f(x)$ *монотонна і обмежена при* $x<x_0$ *або при* $x>x_0$*, то існує відповідно її ліва границя* $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\mathrm{f}(x_0-0)$ *або її права границя* $\lim_{x\to x_0+0}f(x)=$ f$x0$+0.

8. Обчислення границь функції

Відомо: при $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, A – число.

$$\frac{\mathrm{A}}{\alpha}=\infty;\quad \frac{\mathrm{A}}{\beta}=0;\quad \frac{0}{\mathrm{A}}=0;\quad \mathrm{A}^{\infty}=\infty;\quad \infty+\infty=\infty$$

Невизначеності (невідомо):

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 1^{\infty};\ 0\cdot\infty;\ 0^0;\ \infty^0.$$

Для того щоб знайти границю $\lim_{x\to x_0}f(x)$, треба в функцію $f(x)$ замість x підставити x_0.

Наприклад $\lim_{x\to 2}(2x+1)=2\cdot 2+1=5$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x}=\frac{2\cdot 1-1}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{5}{x-1}=\infty\qquad\left(\frac{A}{0}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x+2}=0\qquad\left(\frac{A}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3x^3)=\infty\qquad(\infty+\infty=\infty)$$

Тут немає проблем. Але якщо отримаємо невизначеність, треба застосовувати спеціальні методи. Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності.

<u>Методи розкриття невизначеності:</u>

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ *задана відношенням двох многочленів.*

Наприклад $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

[розділемо чисельник і знаменник на x у найвищому степені]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}+\overset{\to 0}{\frac{5}{x^3}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{3}.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x^2+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{2n}{n^3}-\frac{1}{n^3}}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

2. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$

Для того, щоб розкрити цю невизначеність, треба скоротити множник, який робить цю невизначеність.

Нагадаємо деякі формули.

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

x_1, x_2 – корені квадратного тричлена

$$ax^2+bx+c=0; \qquad D=b^2-4ac; \qquad x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Наприклад, $6x^2-5x+1 = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (2x-1)(3x-1).$

$$\begin{bmatrix} 6x^2-5x+1=0, \qquad D=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 1 = 25-24=1 \\ x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 6} = \frac{5\pm 1}{12}; \qquad x_1=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}; \qquad x_2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}. \end{bmatrix}$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

Приклади:

$$\lim_{n\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \left[\frac{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\cdot\frac{1}{2}+1}\right] = \frac{0}{0} = \lim_{n\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)} =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+1}{3\cdot\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6.$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2+2-x}{x^3-x^2-x+1} = \left[\frac{1+1-2}{1-1-1+1} = \frac{0}{0}\right] =$$

$$x^2-x-2=(x+2)(x-1);$$
$$D=1+2\cdot4\cdot1=9$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2};\ x_1=-2;\ x_2=1$$

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2-1)$$

$$= \lim_{n\to1} \frac{(x^2+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2-1)} = \lim_{n\to1} \frac{3}{\underset{0}{x^2-1}} = \underset{0}{\infty}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

(Домножим і поділим чисельник і знаменник на справжене до $\sqrt{1+x^2-1}$)

$$\lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to0} \frac{1+x^2-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

3. Невизначеність виду $\infty-\infty$.

Приклад:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = [\infty\ -\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1.$$

Невизначеність $[\infty\ \ -\infty]$ звели до $\frac{\infty}{\infty}$.

9. Перша важлива границя.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1.$$

Приклади:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinkx}{x} = \lim_{k\to 0} \frac{k \cdot sinkx}{kx} = k\lim_{x\to 0} \frac{sinkx}{kx} = k.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{cosx \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot sin\frac{x}{2} = 0.$$

Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***еквівалентними*** нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

і $\alpha(x), \beta(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$.

Еквівалентність позначається так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Розглянемо такі еквівалентні нескінченно малі величини: при $x \to x_0$

$$x \sim sinx \sim tgx \sim arcsinx \sim arctgx \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x).$$

При знаходженні границі відношення двох нескінченно малих функцій, ці функції можна заміняти еквівалентними.

Приклади:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin5x}{tg2x} = \begin{bmatrix} sin5x \sim 5x \\ tg2x \sim 2x \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

10. Друга важлива границя $[1^\infty]$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

e – ірраціональне число, $e \approx 2{,}718281828 \ldots .$

$\log_e x = lnx$ – натуральний логарифм.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/2} = e$

Приклади:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = e^{2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \left[\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}(2x-1)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^{6};$$

ІІІ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею A.

Функція $y = f(x)$, буде неперервною в точці x_0, тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Поняття неперервності можна визначити за допомогою границь зліва і справа.

Часто зустрічається поняття *односторонньої неперервності.* Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0*, зліва,* якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0-\varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0;\ x_0+\varepsilon)$ і $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x) = f(x_0)$, то функція називається *неперервною в точці x_0 справа.*

Функція $y = f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву***.

<u>*Види розривів:*</u>

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = B$

При $A \neq B$ – ***розрив I роду***.

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$,

то у точці x_0 – усувний розрив.

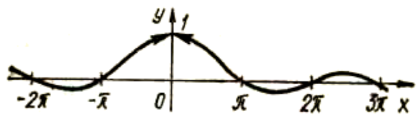
В точці x_0 можна довизначити функцію $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$.

в) Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (1) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається ***розривом II роду.***

Приклади:

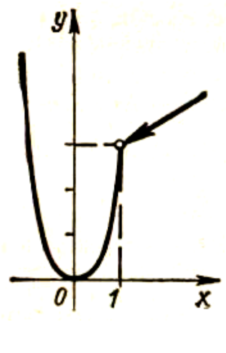
1. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не визначено в точці *x=0*, але має в цій точці границю, тому *x=0* – точка усувного розриву; досить покласти $f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, щоб функція стала неперервною. Отже, функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



Є неперервною в точці *x=0*.

2. Функція $y = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$ в точці *x=1* буде неперервною , тому що функція визначена в точці *x=1* і в будь-якому околі цієї точки. Крім того,

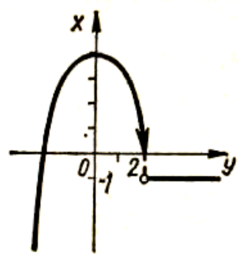


$$f(1) = 3;$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<0}} 3x^2 = 3;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+2) = 3.$$

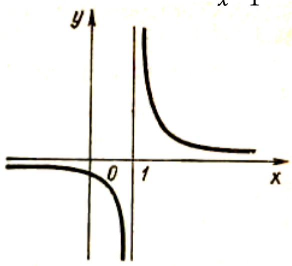
3. Функція $y = \begin{cases} 4-x^2, & x < 2 \\ -1, & x \geq 2 \end{cases}$ має в точці *x=2* розрив першого роду:



$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(4-x^2) = 0;\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(-1) = -1.$

Стрибок функції в точці *x=2* дорівнює $\delta = |-1-0| = 1$.

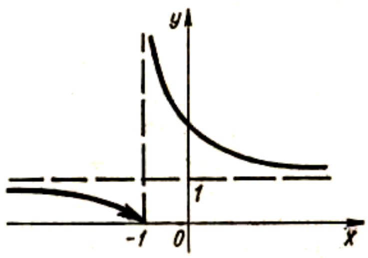
4. Функція $f(x) = \frac{1}{x-1}$ в точці *x=1* має розрив другого роду, тому що



$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty;\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty.$

5. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = 2^{\frac{1}{x+1}}$ в точці *x=1.*

Функція не визначена в точці *x=1*, тому функція в цій точці розривна. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:



$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0;\ \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty.$

Отже, точка *x=-1* є точкою розриву другого порядку.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x)\cdot\varphi(x)$; $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0) \neq 0)$.*

Теорема 2. *Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.*

Елементарна – це функція, яку можна задати однією формулою, яка містить скінчене число арифметичних дій і суперпозицій основних елементарних функцій.

IV. ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ

1. Означення похідної.

Нехай на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in \langle a;b\rangle$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x+\Delta x$ також належала проміжку $\langle a;b\rangle$.

Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Похідною функцією $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y'; \qquad \frac{dy}{dx}; \qquad \frac{df}{dx} \quad y'_x; \quad f'(x)$$

Таким чином, за означенням

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Приклад: Знайти похідну $y = x^2$.

Надамо аргументу x приросту Δx і обчислимо приріст Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

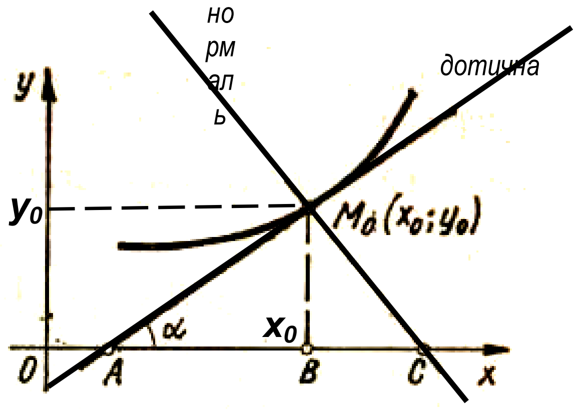
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Отже $(x^2)' = 2x$

2. Геометричний зміст похідної.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\, y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі *Ox*, – це похідна $f^{'}(x_0)$.

$$f^{'}(x_0) = tg\alpha = K$$



Використовуючи геометричний зміст похідної, запишемо рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0).

Рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f^{'}(x_0)}(x - x_0)$$

2. Правила диференціювання.

$$(CU)' = CU'$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(UV)' = U'V + UV';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

4. Формули диференціювання.

1. $C' = 0;$

2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u, \ \alpha \in R;$

2а. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$

2б. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

3. $(\alpha^u)' = \alpha^u \ln \alpha \cdot u', \ \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1;$

4. $(e^u)' = e^u u';$

5. $(log_{\alpha} u)' = \frac{1}{u \ln \alpha} u';$

6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

9. $(\mathrm{tg}\ u)' = \frac{1}{cos^2 u} u';$

10. $(\mathrm{ctg}\ u)' = -\frac{1}{sin^2 u} u';$

11. $(\mathrm{sh}\ u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u';$

12. $(\mathrm{ch}\ u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u';$

13. $(\mathrm{th}\ u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u';$

14. $(\mathrm{cth}\ u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} u';$

15. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{u}^2}} u';$

16. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{u}^2}} u';$

17. $(\mathrm{arctg}\ u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$

18. $(\mathrm{arcctg}\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$

5. Похідна функції

Похідна функції, заданої параметрично. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

Тоді похідну, знаходять за формулою

$$y_x = \frac{y_t}{x_t} = \frac{\psi'(t)}{\psi'(t)}$$

Приклади

1) $y=3x^3+10x^2-2x+6$

$y'=9x^2+20x-2;$

2) $y=(3x^4-5x^2+1)(6x^2-7x+2)$

$y'=(3x^4-5x^2+1)'(6x^2-7x+2)+(3x^4-5x^2+1)(6x^2-7x+2)'=(12x-10x+1)(6x^2-7x+2)+(3x^4-5x^2+1)(12x-7);$

3) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$

$y'=(x^2-3x+3)'(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)'=(x^2-3)(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)(2x+2);$

4) $y=\frac{x^2-1}{3x^3+5}$

$y'=\frac{(x^2-1)'(3x^3+5)-(x^2-1)(3x^3+5)'}{(3x^3+5)^2}=\frac{2x(3x^3+5)-(x^2-1)(9x^2)}{(3x^3+5)^2}$

$$\boxed{\boldsymbol{(U^{\alpha})'=\alpha U^{\alpha-1}\cdot U'}}$$

1) $y=(3x^4+5x-1)^{10}$

$y'=10(3x^4+5x-1)^9(3x^4+5x-1)'=10(3x^4+5x-1)^9(12x^3+5).$

2) $y=(1+2x)^{30}$

$y'=30(1+2x)^{29}(1+2x)'=30(1+2x)^{29}\cdot 2=60(1+2x)^{29}.$

3) $y=(7x^2-\frac{4}{x}+6)^6$

$y'=6\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)'=6\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5\left(14x+\frac{4}{x^2}\right).$

4) $y=cos^3x=(cosx)^3$

$y'=3(cosx)^2(cosx)'=3cos^2x\cdot(-sinx)=-3cos^2x\cdot sinx.$

$$y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$$

$$y' = 5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)' = 5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\frac{(1+x^2)'(1+x)-(1+x^2)(1+x)'}{(1+x)^2}$$

$$= 5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\frac{2x(1+x)-(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

6) $y = cos^2 4x = (cos4x)^2$

$y' = 2cos4x(cos4x)' = 2cos4x(-sin4x)\,(4x)' = -8cos4xsin4x.$

7) $y = 3sin(3x+5)$

$y' = 3cos(3x+5)(3x+5)' = 3cos(3x+5)\cdot 3 = 9cos(3x+5).$

8) $y = \frac{1}{4}tg^4 x = \frac{1}{4}(tgx)^4$

$y' = \frac{1}{4}\cdot 4tg^3 x\cdot(tgx)' = tg^3 x\,\frac{1}{cos^2 x}$

$y = \frac{1}{4}tg^4 3x$

$y' = \frac{1}{4}\cdot 4tg^3 3x\cdot(tg3x)' = 3tg^3 3x\,\frac{1}{cos^2 3x}$.

9) $y = 10^{2x-3}$

$y' = 10^{2x-3}\cdot ln10\cdot(2x-3)'$

$y' = 10^{2x-3}\cdot ln10\cdot 2.$

10) $y = ln(1-2x)$

$y' = \frac{1}{1-2x}(1-2x)' = \frac{1}{1-2x}(-2).$

11) $y = ln\,sinx$

$y' = \frac{1}{sinx}\cdot(sinx)' = \frac{1}{sinx}\cdot cosx$

12) $y = (1+lnsinx)^{10}$

$y' = 10(1+lnsinx)^9(1+lnsinx)' = 10(1+lnsinx)^9\cdot\frac{1}{sinx}(sinx)' =$

$10(1+lnsinx)^9\frac{cosx}{sinx}.$

13) $y = e^{arcsin\,2x}$

$y' = e^{arcsin\,2x}(arcsin2x)' = e^{arcsin}\;\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}(2x)' = 2e^{arcsin\,2x}\;\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$

Приклад:

Знайти похідну y'_x,

якщо $x = \alpha\cos t,\ y = \alpha\sin t,\ x'_t = -\alpha\sin t,\ y'_t = -\alpha\cos t.$

Тоді $y'_x = \frac{\alpha\cos t}{-\alpha\sin t} = -ctg\ t.$

6. Диференціювання неявно заданої функції.

Нехай функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, треба взяти похідну по x, вважаючи y функцією від x і одержане рівняння розв’язати відносно y'.

Приклади:

а) $x^2 + y^2 \cdot y' - 2y + 3x = 1$;

Візьмемо похідну від правої і лівої частини рівняння, причому від x і від y.

$$2x + 2y \cdot y' - 2y' + 3 = 0;$$

$$y'(2y - 2) + 2x + 3 = 0;$$

$$y' = \frac{-2x - 3}{2y - 2}$$

б) $y - x - \frac{1}{4}\sin(xy) = 0$;

$y' - 1 - \frac{1}{4}\cos(xy)(x'y + xy') = 0$;

$y' - 1 - \frac{1}{4}\cos(xy)(y + xy') = 0$;

$y' - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot y - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot xy' = 1$;

$y'\left(1 - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot x\right) = 1 + \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot y$;

$y' = \frac{1 + \frac{y}{4}\cos(xy)}{1 - \frac{x}{4}\cos(xy)}$.

7. Логарифмічне диференціювання.

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну.

Згадаємо формули:

Якщо $a = b$ то $\ln a = \ln b$

1. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

2. $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3. $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Приклади:

а) $y = x^{\sin x}$

Ми маємо з таблиці похідних формули

$(U^{\alpha})' = \alpha \cdot U^{\alpha-1} \cdot U'$ і $(a^u)' = \alpha^u \cdot \ln \alpha \cdot U'$, але вони нам не підходять.

В нашому прикладі і основа і показник функції - змінні величини. Ми повинні тільки логарифмувати функцію.

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$
$$\ln y = sin\, x \cdot \ln x$$
(використали властивість 3)
$$(\ln y)' = (sin\, x \cdot \ln x)'$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = (sin\, x)' \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = cos\, x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = \left(cos\, x \cdot \ln x + \frac{\sin x \cdot}{x}\right) \cdot y$$
$$y' = \left(cos\, x \cdot \ln x + \frac{\sin x \cdot}{x}\right) \cdot x^{\sin x}$$

б) $y = \frac{x^3(x^2+3) \cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}}$

Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки, а потім (де потрібно) добутку, але цей спосіб дуже громіздкий.

Застосуємо логарифмічне диференціювання.

$$ln\, y = ln\, \frac{x^3(x^2+3) \cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}};$$
$$ln\, y = ln\, x^3 + ln(x^2+3) + ln \sin x - ln(x-4) - ln\sqrt{3x+5};$$
$$ln\, y = 3ln\, x + ln(x^2+3) + ln \sin x - ln(x-4) - \frac{1}{2}\ln(3x+5);$$
$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+5}$$
$$y' = \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+3} + ctg\, x - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+5}\right) \cdot \frac{x^3(x^2+3) \cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}}$$

8. Диференціал.

Означення, геометричний та механічний зміст диференціала.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x \in [a; b]$, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$

звідки

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx і при $\Delta x \to 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx, тому що:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$$

Другий доданок – нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx в степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок у формулі є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Диференціалом dy *функції* $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y = x$, то $y^{'} = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу можна записати так:

$$dy = f'(x)dx$$

Диференціали застосовуються в наближених обчисленнях.

Приклад: Знайти диференціал функції $y = \ln \sin x$

$$dy = f'(x)dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctg\ x$$

$$dy = ctg\ x \cdot dx$$