

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Національний технічний університет України  
„Київський політехнічний інститут”

## **Методичні вказівки**

**до виконання контрольної роботи зі збереження знань  
за перший семестр  
для студентів технічних факультетів**

Київ  
НТУУ “КПІ”  
2013

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи зі збереження знань за перший семестр для студентів технічних факультетів./Уклад.: О.О.Дем'яненко, Л.А.Репета.-К.: НТУУ "КПІ", 2013. – 28 с.

*Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ"КПІ"  
(протокол № 1 від 02.02.2013 )*

**Методичні вказівки до виконання контрольної роботи  
зі збереження знань за перший семестр  
для студентів технічних факультетів.**

Укладачі: *Дем'яненко Ольга Олегівна, канд. фіз. - мат. наук, доц.  
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз. - мат. наук, доц.*

Відповідальний редактор: *Ординська З. П., канд. фіз. - мат. наук, доц.*

Рецензент: *Стогній В. І., канд. фіз. - мат. наук, доц.*

*За редакцією укладачів  
Електронна версія*

## ЗМІСТ

Передмова.....	3
Структура контрольної роботи .....	4
Норми оцінок .....	4
Приклади розібраних типових завдань .....	5
Варіанти завдань контрольної роботи .....	11
Відповіді .....	24

## ПЕРЕДМОВА

У методичних вказівках подано 20 варіантів контрольної роботи за темами, які вивчались у першому семестрі: границі послідовностей та функцій; похідна функції та її застосування; невизначений та визначений інтеграл функції однієї змінної; диференціальне числення функції багатьох змінних; аналітична геометрія та лінійна алгебра. Контрольна робота складена для студентів технічних факультетів НТУУ "КПІ" та враховує можливі варіанти навчальних програм на різних факультетах.

Контрольна робота зі збереження знань (КРЗЗ-1) проводиться в кожній академічній групі на першому практичному занятті другого семестру.

Наявність двох прикладів у кожному завданні дозволяє проводити роботу протягом однієї академічної години (45 хвилин) - у цьому випадку виконується тільки один приклад із завдання, або протягом двох академічних годин – у цьому випадку виконуються обидва приклади з завдання.

## СТРУКТУРА КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Студентам пропонується розв'язати п'ять завдань.

- 1 завдання. Знаходження:
  - а) границі послідовності;
  - б) границі функції.
- 2 завдання. Знаходження:
  - а) похідної;
  - б) фрагмент дослідження функції однієї змінної.
- 3 завдання. Знаходження невизначеного інтегралу.
- 4 завдання. Задача:
  - а) з лінійної алгебри;
  - б) з аналітичної геометрії.
- 5 завдання. Обчислення визначеного інтегралу, або
  - а) диференціювання функції двох змінних;
  - б) дослідження функції двох змінних на екстремум.

## НОРМИ ОЦІНОК ЗАВДАНЬ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

<i>Завдання</i>	<i>Оцінювання (%)</i>
1	20
2	20
3	20
4	20
5	20

Оцінювання завдань подається у відсотках відносно максимальної кількості балів, що студент може отримати за контрольну. Якщо у завданні пропонується два приклади, то кожний з них вартує, відповідно 10%. Загальну оцінку за виконану студентом роботу виставляють залежно від суми набраних відсотків:

<i>Сума відсотків</i>	<i>Оцінка ECTS</i>	<i>Традиційна оцінка</i>
0-20	-	1
20-59	FX	2
60-64	E	3
65-74	D	3
75-84	C	4
85-94	B	4
95-100	A	5

## Приклади розв'язування варіанта контрольної роботи

**Задача 1.** Знайдіть границю послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1}$ .

**Розв'язання.**

Маємо невизначеність  $\infty - \infty$ . Щоб її розкрити помножимо і поділимо вираз у дужках на спряжений:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 + 4 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Задача 2.** Знайдіть границю функції  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \operatorname{tg} x} - 2}{\arcsin 2x}$ .

**Розв'язання.**

Маємо невизначеність  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Скористаємось еквівалентністю

$\left| \begin{array}{l} \arcsin 2x \sim 2x, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right|$  і правилом Лопіталя для одержаної границі.  
Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \operatorname{tg} x} - 2}{\arcsin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \operatorname{tg} x} - 2}{2x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4 + \operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{2} = \frac{1/4}{2} = \frac{1}{8}.$$

**Задача 3.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $\operatorname{tg} y = x^2 + xy + 2y^2$ ; б)  $y = x^2 \sin^4 3x + 1$ .

**Розв'язання.**

а) Функцію  $y$  задано неявно. Продиференціюємо обидві частини рівності, пам'ятаючи, що  $y$  функція і розв'яжемо рівняння відносно похідної:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 2x + y + xy' + 4yy' \Rightarrow y' \left( \frac{1}{\cos^2 y} - x - 4y \right) = 2x + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x + y \cos^2 y}{1 - \cos^2 y} \cdot \frac{1}{x + 4y}.$$

б) Для знаходження похідної застосуємо теореми про похідну добутку та про диференціювання складеної функції:

$$\begin{aligned} y' &= 2x \sin^4 3x+1 + x^2 4 \sin^3 3x+1 \cos 3x+1 \cdot 3 = \\ &= 2x \sin^3 3x+1 \sin 3x+1 + 6x \cos 3x+1. \end{aligned}$$

**Задача 4.** Знайдіть  $y''$   $x$  функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = 4 + t^3, \end{cases} t \in 0; \infty.$$

**Розв'язання.**

Для функції, заданої параметрично, послідовно знайдемо першу та другу похідні за формулою  $y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}$ :

$$y' x = \frac{4 + t^3}{\ln t} \quad y'' x = \frac{3t^2}{1/t} = 3t^3; \quad y'' x = \frac{3t^3}{1/t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3.$$

**Задача 5.** Знайдіть асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^2}{4-x}$ , проміжки монотонності, точки екстремума та дослідіть її опуклість.

**Розв'язання.**

Область визначення функції:  $x \in -\infty; 4 \cup 4; \infty$ . Дослідимо поведінку функції в околі точки  $x = 4$ . Для цього знайдемо ліву і праву границі у точці  $x = 4$ .

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x^2}{4-x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x^2}{4-x} = -\infty \Rightarrow x = 4 - \text{вертикальна асимптота.}$$

З'ясуємо, чи має функція похилі асимптоти. Визначимо кутовий коефіцієнт:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4-x} = -1.$$

Далі

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{4-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{4-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{4-x} = -4.$$

Оскільки обидві границі існують і є скінченними, то графік функції має похилу асимптоту  $y = -x - 4$ .

Знайдемо проміжки монотонності функції за допомогою першої похідної

$$y' = \frac{8x - x^2}{x - 4} = \frac{-x^2 + 8x}{x - 4}.$$

Коли  $x \in -\infty; 0 \cup 8; \infty$  похідна  $y'$   $x$  від'ємна, а отже, на цих інтервалах функція спадає. Коли  $x \in 0; 4 \cup 4; 8$  похідна  $y'$   $x$  додатна, що означає, що функція зростає. Причому

$$y_{\min} = y(0); y_{\max} = y(8).$$

За знаком другої похідної дослідимо опуклість функції. Друга похідна дорівнює  $y'' = \frac{-32}{(x-4)^3}$ .

При  $x \in -\infty; 4$  друга похідна додатна, а отже функція опукла вниз; при  $x \in 4; \infty$   $y'' < 0$ , а отже, функція опукла вгору.

**Задача 6.** Знайдіть невизначені інтеграли: а)  $\int \frac{\arctg^5 3x}{1+9x^2} dx$ ;

б)  $\int \frac{x-2}{x^2+4x+13} dx$ .

**Розв'язання.**

а)  $\int \frac{\arctg^5 3x}{1+9x^2} dx$ . Застосуємо метод безпосереднього інтегрування:

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctg^5 3x}{1+9x^2} dx &= \left| d \arctg 3x = \frac{3}{1+9x^2} dx \right| = \frac{1}{3} \int \arctg^5 3x d \arctg 3x = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\arctg^6 3x}{6} + C = \frac{1}{18} \arctg^6 3x + C; \end{aligned}$$

б) Маємо правильний раціональний дріб з квадратним тричленом у знаменнику. Знайдемо інтеграл за допомогою стандартної підстановки

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{x-2}{x^2+2^2+9} dx = \left| \begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{t-4}{t^2+9} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t-8}{t^2+9} dt =$$

Розіб'ємо інтеграл на два доданки.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+9} dt - \frac{1}{2} \int \frac{8}{t^2+9} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+9} dt - 4 \int \frac{1}{t^2+9} dt =$$

і внесемо у першому доданку змінну  $t$  під знак диференціала

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - 4 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \ln |t^2+9| - 4 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} + C =$$

Повернемося до змінної  $x$

$$= \frac{1}{2} \ln x^2 + 4x + 13 - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.$$

**Задача 7.** Розв'яжіть матричне рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.**

Для розв'язання матричного рівняння помножимо обидві його частини справа на обернену до  $A$  матрицю  $A^{-1}$ .

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Обернену матрицю  $A^{-1}$  будемо шукати за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{ij} = -1^{i+j} M_{ij}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot -5 + 1 \cdot -3 = -13.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$ :

$$A_{11} = -1^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = -1^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Решта алгебраїчних доповнень шукається аналогічно.

$$\text{Обернена матриця має вигляд: } A^{-1} = \frac{-1}{13} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \frac{-1}{13} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -13 \\ -26 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 8.** З'ясуйте взаємне розташування прямих  $l_1: 4x - 3y + 10 = 0$  та  $l_2: 4x - 3y - 40 = 0$  і знайдіть рівняння прямої, що рівновіддалена від даних.

**Розв'язання.**

Дані прямі є паралельними. Запишемо їх нормальні рівняння. Нормуючі множники кожного з рівнянь дорівнюють:



$$\mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}; \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{5}.$$

Звідси

$$l_1: \frac{-4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0; l_2: \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 8 = 0.$$

З нормальних рівнянь випливає, що відстані від прямих до початку координат відповідно дорівнюють:  $p_1 = 2, p_2 = 8$ . Тоді відстань між прямими дорівнює  $p = p_1 + p_2 = 10$ . Рівняння прямої, що проходить посередині між ними:

$$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 3 = 0, \text{ або } 4x - 3y - 15 = 0.$$

**Задача 9.** Обчисліть визначені інтеграли: а)  $\int_0^1 3xe^x dx$ ; б)  $\int_2^6 \frac{x+1}{\sqrt{4x+1}} dx$ .

**Розв'язання.**

а) Застосуємо до обчислення інтеграла формулу інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du:$$

$$\int_0^3 3xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x, du = 3dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = 3xe^x \Big|_0^3 - \int_0^3 3e^x dx = 3xe^x - 3e^x \Big|_0^3 =$$

$$= 9e^3 - 3e^3 + 3 = 6e^3 + 3.$$

б) Зробимо заміну змінної у визначеному інтегралі

$$\int_2^6 \frac{x+1}{\sqrt{4x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} 4x+1 = t^2 \\ dx = \frac{1}{2} t dt \\ t_1 = 3, t_2 = 5 \end{array} \right| = \int_3^5 \frac{\frac{1}{4} t^2 - 1 + 1}{t} \frac{1}{2} t dt = \frac{1}{8} \int_3^5 t^2 + 3 dt =$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{t^3}{3} + 3t \right) \Big|_3^5 = \frac{107}{8}.$$

**Задача 10.** Знайдіть частинні похідні  $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$  функції  $z = \ln 3x + 4y$  і запишіть її диференціал 2-го порядку.

**Розв'язання.**

Знайдемо частинні похідні за кожною змінною, вважаючи іншу змінну фіксованою:

$$z'_x = \frac{3}{3x+4y}; z'_y = \frac{4}{3x+4y}.$$

Для знаходження других похідних диференціюємо одержані перші похідні за кожною змінною. Маємо

$$z''_{xx} = \left( \frac{3}{3x+4y} \right)'_x = \frac{-9}{(3x+4y)^2}; \quad z''_{yy} = \left( \frac{4}{3x+4y} \right)'_y = \frac{-16}{(3x+4y)^2};$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \left( \frac{3}{3x+4y} \right)'_y = \frac{-12}{(3x+4y)^2}.$$

Тоді другий диференціал запишемо за формулою

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2,$$

тобто для заданої функції

$$d^2z = \frac{-1}{(3x+4y)^2} (9dx^2 + 24dxdy + 16dy^2).$$

**Задача 11.** Дослідіть функцію  $z = x^2 - xy + y^2 - 3x + 12y$  на екстремум.

**Розв'язання.**

Знайдемо стаціонарні точки функції, як розв'язки системи  $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ .

Маємо

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y - 3 \\ z'_y = -x + 2y + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -x + 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M(-2; -7)$  – стаціонарна точка функції.

Перевіримо, чи є ця точка екстремальною. Знайдемо другі похідні функції і скористаємося критерієм Сильвестра:

$$z''_{xx} = 2, z''_{yy} = 2, z''_{xy} = z''_{yx} = -1, \Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Визначник  $\Delta$  додатній, отже точка  $M$  є точкою екстремуму. Ураховуючи, що

$z''_{xx} = 2$  теж додатна, точка  $M$  є точкою локального мінімуму і

$$z(-2; -7) = z_{\min} = 3.$$

## Варіанти завдань контрольної роботи

### Варіант № 1.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n-3} \right)^{3n+2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x^2}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $\sqrt{x^2 - y^2} = \arcsin \frac{y}{x}$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{dx}{x-3 \ln^4 x-3}$ ; б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

4. а) Знайдіть загальний розв'язок системи: 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases};$$

б) Знайдіть рівняння медіани  $AM$  та висоти  $AH$  в трикутнику  $ABC$ , якщо  $A 1, -5$ ,  $B -2, 1$ ,  $C 6, 7$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ ; б)  $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \ln x^2 + y^2$  рівність  $xz'_x + yz'_y = 2$ ?

б) Знайдіть екстремуми функції  $z = 2x + 2y - x^2 - y^2$ .

### Варіант № 2.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-4}{3n+5} \right)^{2n+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = x \cdot \cos^3 3x + 5$ ;

б) знайдіть точки екстремума та проміжки монотонності функції  $y = \sqrt[3]{x+3} x^2$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sqrt{\arctg^5 x}}{1+x^2} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 6, 5, -3$ ,  $\vec{p} = 2, 4, -2$ ,  $\vec{q} = -3, 1, 2$ ,  $\vec{r} = 1, 2, 1$ ;

б) Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $A(2, 1)$  та відтинає від 1-го координатного кута трикутник з площею 4 кв.од.

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\frac{1}{3}} x e^{-3x} dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{7+3x}}$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = 2x^2 + xy + y^3$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = x^2 + 3y + 2y^2$ .

### Варіант № 3.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n + 1} \cdot \frac{-1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n - 1}{n + 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y''$   $x$ , якщо  $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ ;

б) дослідіть на опуклість функцію  $y = x e^{1/x}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$ ; б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-4}}$ .

4. а) Розв'яжіть матричне рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;

б) З'ясуйте взаємне розташування прямих  $l_1, l_2$  та знайдіть рівняння прямої, або прямих, що рівновіддалені від прямих  $l_1, l_2$ , якщо  $l_1: 3x + 4y - 10 = 0$ ,  $l_2: -3x - 4y - 20 = 0$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_1^e x \ln x dx$ ; б)  $\int_1^7 \frac{xdx}{\sqrt{2x+2}}$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  рівність  $z'_x{}^2 + z'_y{}^2 = 1$ ?

б) Знайдіть екстремуми функції  $x = xy - 3x^2 - 2y^2$ .

**Варіант № 4.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+2n+3}{2n^2+4n-1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \pi x + \pi}{\ln 1+2x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $e^{x-y} = xy$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x + 4}$ ; б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x+5x^2}}$ .

4. а) Знайдіть загальний розв'язок системи: 
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases};$$

б) Знайдіть координати точки  $O$ , що є проекцією точки  $M(-1, 2, 3)$  на площину  $\alpha: 3x + y + z - 13 = 0$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ ; б)  $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = x^3 + 3xy + 2y^2$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = x - 1^2 + 2y^2$ .

**Варіант № 5.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-1}{\ln x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = \frac{2x+4^2 x-7^5}{\sqrt{x+2}}$ ;

б) знайдіть точки екстремума та проміжки монотонності функції  $y = \sqrt[3]{2-x^2-4x+1}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x-1}}{x-1} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+6x+10x^2}}$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 3, 9, -2$ ,  $\vec{p} = 1, 2, -3$ ,  $\vec{q} = -2, 4, 2$ ,  $\vec{r} = 3, 1, 2$ ;

б) Знайдіть координати точки  $O$ , що є проекцією точки  $M(1, 2, 8)$  на пряму

$$l: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$ ; б)  $\int_5^{10} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \operatorname{arctg} x^2 + y^2$  рівність

$$xz'_x + yz'_y = 2 \frac{x^2 + y^2}{1 + x + y^2}?$$

б) Знайдіть екстремуми функції  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .

### Варіант № 6.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 \sqrt{n^4 + 4} - \sqrt{n^4 - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y''$   $x$ , якщо  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln 1 + t^2; \end{cases}$

б) дослідіть на опуклість функцію  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sin 4x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}$ ; б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$ .

4. а) Розв'яжіть матричне рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ ;

б) Знайдіть довжину висоти  $SH$  тетраедра  $SABC$ , якщо  $S -1, -1, 1$ ,  $A 5, 10, 1$ ,  $B 9, 10, 0$ ,  $C -3, 4, 1$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_1^{e^2} 2x \ln x dx$ ; б)  $\int_5^{13} \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = 2x^3 - 2xy + 4y^2$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ .

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 3}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{+1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{+1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n - 1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $\sin x + y = y^2 + 1$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\arctg^7 3x}{1 + 9x^2} dx$ ; б)  $\int \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 5} dx$ .

4. а) Знайдіть загальний розв'язок системи: 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$$

б) доведіть паралельність площини  $\alpha$  і прямої  $l$  та знайдіть відстань між ними, якщо  $\alpha: 3x - 4y + 12z + 13 = 0$ ,  $l: \frac{x+1}{12} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-1}$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$ ; б)  $\int_9^{28} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \ln x^3 + y^3$  рівність  $xz'_x + yz'_y = 3$ ?

б) Знайдіть екстремуми функції  $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y$ .

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 8 + 10 + \dots + 2n}{2n^2 + 3n + 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 + \sin x}{\sin 4x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = x^2 \operatorname{tg}^2 4x$ ;

б) знайдіть точки екстремума та проміжки монотонності функції  $y = \sqrt[3]{x+1} - x - 2^2$ .

3. Знайдіть: а)  $\int e^{5x^2-3} x dx$ ; б)  $\int \frac{x+2}{x^2-4x+8} dx$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 1, 8, -3$ ,  $\vec{p} = 1, -3, 4$ ,  $\vec{q} = 2, 2, 1$ ,  $\vec{r} = 0, 1, -1$  ;  
 б) Знайдіть рівняння медіани  $AM$  та висоти  $AH$  в трикутнику  $ABC$ , якщо  $A 2, 7$ ,  $B -3, 2$ ,  $C 5, 4$  .
5. Обчисліть: а)  $\int_{-1/2}^{1/2} 2xe^{-2x} dx$ ; б)  $\int_0^5 \frac{5x dx}{\sqrt{3x+1}}$  .
6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = -3x^2 - 5xy + y^3$  ;  
 б) знайдіть екстремуми функції  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$  .

**Варіант № 9.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n+1}{5n-3} \right)^{2n-4}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$  .
2. а) Знайдіть похідну  $y''$   $x$ , якщо  $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$  ;  
 б) дослідіть на опуклість функцію  $y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x}$  .
3. Знайдіть: а)  $\int \frac{e^{2x}}{5 + e^{2x}} dx$ ; б)  $\int \frac{x+4}{x^2 + 6x + 10} dx$  .
4. Розв'яжіть матричне рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$  .  
 б) Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $A 2, 3$  та відтинає від 1-го координатного кута трикутник з площею 12 кв.од.
5. Обчисліть: а)  $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$  ; б)  $\int_0^6 \frac{x dx}{\sqrt{4x+1}}$  .
6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \arcsin xy$  рівність  $xz'_x - yz'_y = 0$  ?  
 б) Знайдіть екстремуми функції  $z = xy - x^2 - y^2 + 9$  .



**Варіант № 10.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 7 \cdot 6^n}{3^n + 6^n}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y^2 + \sin x = xy$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$ ; б)  $\int \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 13} dx$ .

4. а) Розв'яжіть матричне рівняння  $X \cdot A = B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

б) З'ясуйте взаємне розташування прямих  $l_1, l_2$  та знайдіть рівняння прямої, або прямих, що рівновіддалені від прямих  $l_1, l_2$ , якщо  $l_1: -3x + 4y - 10 = 0$ ,  $l_2: 6x - 8y - 40 = 0$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ ; б)  $\int_2^{13} \frac{xdx}{\sqrt{5x-1}}$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = x^3 + 7xy - 4y^2$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$ .

**Варіант № 11.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^2 - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 1}{x - \sin 9x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = \frac{x - 1 \sqrt[3]{x + 2}}{x + 3^5}$ ;

б) знайдіть точки екстремума і проміжки монотонності функції

$$y = \sqrt[3]{x^2} \cdot x - 2^2.$$

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{-\operatorname{tg}^4 x dx}{\sin^2 x}$ ; б)  $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо

$$\vec{a} = 0, 7, -8, \vec{p} = 2, -2, 4, \vec{q} = 3, 2, 1, \vec{r} = 1, 1, -1;$$

б) Знайдіть координати точки  $O$ , що є проекцією точки  $M(2, 1, -3)$  на площину  $\alpha: -3x + y + 7z - 35 = 0$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_{\frac{1}{4}}^1 x e^{-4x} dx$ ; б)  $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \operatorname{arctg} xy$  рівність  $xz'_x - yz'_y = 0$ ?

б) Знайдіть екстремуми функції  $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$ .

### Варіант № 12.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n n}{n+1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 5^x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y''$   $x$ , якщо  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sin t} \\ y = \operatorname{ctg} t \end{cases}$

б) дослідіть на опуклість функцію  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 1-x}}{1-x} dx$ ; б)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx$ .

4. а) Розв'яжіть матричне рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$ ;

б) Знайдіть координати точки  $O$ , що є проекцією точки  $M(-1, 18, 2)$  на пряму

$l: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{7}$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^1 \arcsin x dx$ ; б)  $\int_5^{10} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+1} dx$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = 2x^3 - 5xy + y^2$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = x - 5^2 + y^2 + 1$ .

**Варіант № 13.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n+4}{4n-2} \right)^{5n+3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{3}}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = \operatorname{tg} x + y$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^2}{9-x}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x} dx$ ; б)  $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+6x+8}} dx$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 12, 3, 5$ ,  $\vec{p} = 1, -2, 2$ ,  $\vec{q} = 4, 2, 3$ ,  $\vec{r} = 3, 1, -3$ ;

б) Знайдіть довжину висоти  $SH$  тетраедра  $SABC$ , якщо  $S = -1, 1, -1$ ,  $A = 5, -10, -1$ ,  $B = 9, -10, 0$ ,  $C = -3, -4, -1$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} dx$ ; б)  $\int_0^5 \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{3x+1}+1} dx$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$  рівність

$$z'_x - z'_y = \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{xy}^3} ?$$

б) Знайдіть екстремуми функції  $z = x - 2^2 + 2y^2 - 10$ .

**Варіант № 14.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{n+9} - \sqrt[3]{n-3})$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = x \operatorname{arctg}^2 2x + 3$ ;

б) знайдіть точки екстремума та проміжки монотонності функції  $y = \sqrt[3]{x-6} x^2$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}$ ; б)  $\int \frac{x-1}{x^2-4x+3} dx$ .

4. а) Розв'яжіть матричне рівняння  $X \cdot A = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,

$$B = 3 \quad -4 \quad 7 ;$$

б) доведіть паралельність площини  $\alpha$  і прямої  $l$  та знайдіть відстань між ними, якщо  $\alpha : 3x + 4y - 12z + 13 = 0$ ,  $l : \frac{x+1}{-12} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+1}{-1}$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\frac{2}{5}} 2xe^{-5x} dx$ ; б)  $\int_0^6 \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{4x+1}+1} dx$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = 3x^2 + 6xy - 2y^3$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ .

### Варіант № 15.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 3 \cdot 12^n}{5^n + 4 \cdot 12^n}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y''$   $x$ , якщо  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t \end{cases}$ ;

б) дослідіть на опуклість функцію  $y = xe^x$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{2x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x+7}} dx$ ; б)  $\int \frac{x-2}{x^2+10x+24} dx$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 1, 0, 8$ ,  $\vec{p} = 2, -2, 1$ ,  $\vec{q} = 3, 1, 0$ ,  $\vec{r} = 5, 4, 7$ ;

б) Знайдіть рівняння медіани  $AM$  та висоти  $AH$  в трикутнику  $ABC$ , якщо  $A -3, 1$ ,  $B 4, 1$ ,  $C 6, -3$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$ ; б)  $\int_5^{13} \frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+4} dx$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$  рівність  $yz'_x = xz'_y$ ?

б) Знайдіть екстремуми функції  $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$ .

### Варіант № 16.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \arcsin y$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{4x^3 - 3x^2}{4x^2 - 1}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 - 4\cos^2 x}}$ ; б)  $\int \frac{x - 4}{x^2 - 10x + 16} dx$ .

4. Розв'яжіть матричне рівняння  $X \cdot A = B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

б) Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $A(2, 3)$  та відтинає від 1-го координатного кута трикутник з площею 16 кв.од.

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx$ ; б)  $\int_4^{12} \frac{\sqrt{2x+1} + 2}{\sqrt{2x+1} + 5} dx$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = -x^2 + 4xy - 3y^3$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = 6x - 6y - 3x^2 - 3y^2$ .

### Варіант № 17.

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2^3 - n^3}{2n^2 + 4n + 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - 1}{x}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = \frac{x + 3^3 \sqrt{x-1}}{2x + 1^4}$ ;

б) знайдіть точки екстремума та проміжки монотонності функції  $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{2 + 3 \sin x}$ .

4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 0, -8, -6$ ,  $\vec{p} = 3, 1, 2$ ,  $\vec{q} = 1, -1, 2$ ,  $\vec{r} = 2, 4, 5$ ;

б) З'ясуйте взаємне розташування прямих  $l_1, l_2$  та знайдіть рівняння прямої, або прямих, що рівновіддалені від прямих  $l_1, l_2$ , якщо  $l_1: x + 7y + 2 = 0$ ,  $l_2: -14x + 2y + 3 = 0$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_0^{\frac{3}{4}} x e^{-4x} dx$ ; б)  $\int_1^2 \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{\sqrt{5x-1} + 4} dx$ .

6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}$  рівність  $y^2 z'_x = x^2 z'_y$  ?  
 б) Знайдіть екстремуми функції  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y$ .

**Варіант № 18.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1^3 - 8n^3}{6n^2 + 3n - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln 5 - 2x}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y''$   $x$ , якщо  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln 1 - t^2 \end{cases}$ ;

б) знайдіть точки екстремума, проміжки монотонності функції  $y = \frac{8}{x^2 - 2x + 5}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x} - 1}$ ; б)  $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$ .

4. а) Розв'яжіть матричне рівняння  $X \cdot A = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,

$B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ ;

б) Знайдіть координати точки  $O$ , що є проекцією точки  $M(-3, 2, 2)$  на площину  $\alpha: 4x + 2y + 3z - 27 = 0$ .

5. Обчисліть: а)  $\int_2^3 x \ln x - 1 dx$ ; б)  $8 \int_3^8 \frac{2\sqrt{x+1} - 4}{\sqrt{x+1} + 5} dx$ .

6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = 2x^3 + 4xy - 5y^2$ ;

б) знайдіть екстремуми функції  $z = 6x - x^2 - xy - y^2$ .

**Варіант № 19.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + 1}{n + 3^3 - n^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x^2 - 9}$ .

2. а) Знайдіть похідну  $y'$   $x$ , якщо  $\cos xy = y^2$ ;

б) знайдіть всі асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ .

3. Знайдіть: а)  $\int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{4 + 6 \cos x}$ .
4. а) Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ , якщо  $\vec{a} = 8, 16, 14$ ,  $\vec{p} = 3, 2, 1$ ,  $\vec{q} = -1, 2, 3$ ,  $\vec{r} = 2, 4, 5$ ;  
 б) З'ясуйте взаємне розташування прямих  $l_1, l_2$  та знайдіть рівняння прямої, або прямих, що рівновіддалені від прямих  $l_1, l_2$ , якщо  $l_1: -2x + 3y + 7 = 0$ ,  $l_2: 6x + 4y + 5 = 0$ .
5. Обчисліть: а)  $\int_0^{1/2} \arctg 2x dx$ ; б)  $\int_0^6 \frac{3\sqrt{4x+1}-2}{\sqrt{4x+1}+1} dx$ .
6. а) Перевірте, чи задовольняє функція  $z = \arctg x^3 + y^3$  рівність  $y^2 z'_x = x^2 z'_y$ ?  
 б) Знайдіть екстремуми функції  $z = 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$ .

**Варіант № 20.**

КР33-1

1. Знайдіть границі: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 7}{2n + 2^3 - 8n^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x - \pi^4}$ .
2. а) Знайдіть похідну  $y' x$ , якщо  $y = x \arccos^2 2x + 1$ ;
3. Знайдіть: а)  $\int \frac{dx}{x+2 \ln^3 x+2}$ ; б)  $\int \frac{dx}{4-2 \cos x}$ .
4. а) Знайдіть загальний розв'язок системи: 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$
- б) Знайдіть координати точки  $O$ , що є проекцією точки  $M(1, 1, 7)$  на пряму  $l: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$ .
5. Обчисліть: а)  $\int_1^{e^3} 3x \ln x dx$ ; б)  $\int_0^5 \frac{2\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{3x+1}+2} dx$ .
6. а) Знайдіть другий диференціал функції  $z = -2x^3 - 3xy + 4y^2$ ;  
 б) знайдіть екстремуми функції  $z = x - 3^2 + 2y^2 - 7$ .

## Відповіді

**Варіант 1.** 1 а)  $e^6$ ; б)  $\frac{1}{8}$ . 2 а)  $\frac{x^2 + y}{x + xy}$ ; б)  $x = 0$  – верт. ас.,  $y = x$  – пох. ас.

$$3 \text{ а) } \frac{-1}{3 \ln^3 x - 3} + C; \text{ б) } -\arcsin \frac{1}{x} + C. \text{ 4 а) } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

б)  $AM: 9x - y - 14 = 0$ ,  $AH: 4x + 3y + 11 = 0$ . 5 а)  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ; б)  $\frac{26}{27}$ .

б а) так; б) 1,1 – лок. максимум.

**Варіант 2.** 1 а)  $e^{-6}$ ; б) 2. 2 а)  $\cos^3 3x + 5 - 9x \cos^2 3x + 5 \sin 3x + 5$ ;

б)  $y_{\max} = y - 2$ ,  $y_{\min} = y + 0$ . 3 а)  $\frac{2}{7} \arctg x^{\frac{7}{2}} + C$ ;

$$\text{б) } C - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+x-x^2}{x^2}} \right|. \text{ 4 а) } \vec{a} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}; \text{ б) } x + 2y - 4 = 0;$$

5 а)  $\frac{e-2}{9e}$ ; б)  $-\frac{43}{30}$ ; б а) так; б) 0, -2 – лок. мінімум.

**Варіант 3.** 1 а)  $\infty$ ; б) -1; 2 а)  $-\text{ctg}^3 t$ ; б)  $x \in (-\infty; 0)$  – опукла вгору,  $x \in (0; \infty)$  – опукла вниз;

$$3 \text{ а) } -\frac{1}{6} e^{-3x^2-4} + C; \text{ б) } -\frac{1}{2} \arcsin \frac{8-x}{x\sqrt{17}} + C. \text{ 4 а) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } 3x + 4y + 10 = 0,$$

прямі паралельні. 5 а)  $\frac{e^2+1}{4}$ ; б)  $\frac{22}{3}$ . б а) так; б) 0,0 – лок. максимум.

**Варіант 4.** 1 а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $-\pi$ . 2 а)  $\frac{e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}}$ ; б)  $x = 0$  – верт. ас.,  $y = 3x$  – пох. ас.

$$3 \text{ а) } \frac{1}{3} \ln |3 \sin^2 x + 4| + C; \text{ б) } -\ln \left| \frac{1}{x} - 2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 5} \right| + C. \text{ 4 а) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -8/3 \\ 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix};$$

б) 0 2; 3; 4. 5 а)  $\frac{\pi}{2} - 1$ ; б)  $\frac{32}{3}$ . б а) так; б) 1,0 – лок. мінімум.



**Варіант 5.** 1а) 4; б) 2. 2 а)  $\frac{2x+4}{\sqrt{x+2}} \left( \frac{2}{x+2} + \frac{5}{x-7} - \frac{1}{2x+2} \right)$ ;

б)  $y_{\min} = y_1, y_{\max} = y_3$ . 3 а)  $\frac{3}{5} \ln^3 x - 1 + C$ ; б)  $-\ln \left| \frac{1}{x} + 3 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} + 10} \right| + C$ .

4 а)  $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ ; б)  $O(2; 3; 4)$ . 5 а)  $\frac{1}{4}$ ;

б)  $\frac{44}{3}$ . 6а) так; б) 1,0 –лок. мінімум.

**Варіант 6.** 1а) 9; б)  $\ln \frac{125}{49}$ . 2а)  $2 + t^2$ ; б)  $x \in (-\infty; 1)$  –опукла вгору,  $x \in (1; \infty)$  –опукла

вниз. 3а)  $C - \frac{3}{4} \cos^3 4x$ ; б)  $-\arcsin \frac{1+x}{2x} + C$ . 4 а)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; б) 2. 5 а)  $\frac{3e^4 + 1}{2}$ ; б)  $\frac{52}{3}$ . 6а)

так; б)  $-1, -1$  –лок. мінімум.

**Варіант 7.** 1 а) 0; б)  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ . 2 а)  $\frac{\cos x + y}{2y - \cos x + y}$ ; б)  $x = 0$  – верт. ас.,  $y = -x$  – пох. ас. 3

а)  $\frac{1}{24} \arctg^8 3x + C$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \arctg x + 2 + C$ .

4 а)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; б) 2. 5 а)  $2\pi - 4$ ; б) 134,1. 6 а) так; б)  $-4,1$  –лок. мінімум.

**Варіант 8.** 1а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{4}$ . 2 а)  $2x \operatorname{tg} 4x \left( \operatorname{tg} 4x + \frac{4x}{\cos^2 4x} \right)$ ; б)  $y_{\max} = y_0, y_{\min} = y_2$ .

3 а)  $\frac{1}{10} e^{5e^2-3} + C$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 - 4x + 8} + 2 \arctg \frac{x-2}{2} + C$ .

4 а)  $\vec{a} = -\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$ ; б)  $AM: 4x - y - 1 = 0, AH: 4x + y - 15 = 0$ . 5 а)  $-\frac{1}{e}$ ;

б) 4. 6 а) так; б) 0,0 –лок. максимум.

**Варіант 9.** 1 а)  $e^{\frac{8}{5}}$ ; б)  $\frac{1}{2\pi}$ . 2а)  $9t^3$ ; б)  $x \in (-\infty; 0)$  – опукла вниз,  $x \in (0; \infty)$  – опукла вгору.

3 а)  $\frac{1}{2} \ln 5 + e^{2x} + C$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 + 6x + 10} + \arctg x + 3 + C$ . 4 а)  $1 \ 2 \ 3^T$ ;

б)  $3x + 2y - 12 = 0$ . 5 а)  $\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$ ; б)  $\frac{14}{3}$ . 6 а) так; б) 0,0 –лок. максимум.

**Варіант 10.** 1 а) -7; б)  $\frac{1}{2}$ . 2 а)  $\frac{y - \cos x}{2y - x}$ ; б)  $x = 2$  – верт. ас.,  $y = 2x + 4$  – пох.ас.

3 а)  $\frac{1}{12} \arcsin^6 2x + C$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 - 6x + 13} - 5 \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C$ . 4 а)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ;

б)  $3x - 4y - 10 = 0$ , прями паралельні. 5 а)  $\pi$ ; б)  $\frac{40}{3}$ . 6 а) так; б) 0,0 –лок. максимум.

**Варіант 11.** 1 а) 4; б)  $\frac{5 \ln 3}{-8}$ . 2 а)  $\frac{x-1 \sqrt[3]{x+2}}{x+3^5} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3x+2} - \frac{5}{x+3} \right)$ ;

б)  $y_{\min} = y_0, y_2$ ;  $y_{\max} = y \left( \frac{1}{2} \right)$ ; 3 а)  $\frac{-1}{3 \operatorname{ctg}^3 x} + C$ .

б)  $\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5} \right| + C$ . 4 а)  $\vec{a} = -2\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ ;

б)  $O -1, 2, 4$ . 5 а)  $\frac{e^{-1} - 5e^{-4}}{16}$ ; б)  $9 + \ln 16$ . 6 а)  $4dx^2 + 2dxdy + 6ydy^2$ ; б) 0,0 –лок. максимум.

**Варіант 12.** 1 а)  $\frac{2}{3}$ ; б)  $\infty$ . 2 а)  $-\operatorname{tg}^3 t$ ; б)  $x \in -\infty; 1$  – опукла вгору,  $x \in 1; \infty$  – опукла

вниз. 3 а)  $\frac{-3}{5} \ln^{\frac{5}{3}} |1-x| + C$ ; б)  $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + 4 \ln \left| x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 8} \right| + C$ . 4 а)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; б)  $O -1; 2; 4$ . 5 а)  $\frac{\pi}{2} - 1$ ; б)  $6 \ln \frac{4}{3} - 1$ . 6 а)  $6xdx^2 + 6dxdy + 4dy^2$ ; б) 5,0 –лок.

мінімум.

**Варіант 13.** 1 а)  $e^{\frac{15}{2}}$ ; б)  $-2\sqrt{3}$ . 2 а)  $-\sec^2 x + y$ ; б)  $x = 9$  – верт. ас.,  $y = -9 - x$  –

пох.ас. 3 а)  $\frac{-2}{21} \operatorname{ctg}^{\frac{3}{2}} 7x + C$ ; б)  $\sqrt{x^2 + 6x + 8} + \ln \left| x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 8} \right| + C$ .

4 а)  $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$ ; б) 2. 5 а)  $4\pi$ ; б)  $\ln \frac{25}{4} - 1$ . 6 а)  $12xdx^2 - 4dxdy + 8dy^2$ ; б) 2,0 –лок. мінімум.

**Варіант 14.** 1 а) 4; б)  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ . 2 а)  $\frac{2x \operatorname{arctg} 2x + 3}{5 + 6x + 2x^2} + \operatorname{arctg}^2 2x + 3$ ;

б)  $y_{\max} = y_0$ ;  $y_{\min} = y_4$ . 3 а)  $\frac{-3}{2} \cos x + 1^{\frac{2}{3}} + C$ ;

б)  $\ln \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \ln \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} + C$ . 4 а)  $-2 \quad 1 \quad 1$ ; б) 2. 5 а)  $\frac{2-6e^{-2}}{25}$ ; б)  $\ln 9 - 2$ .

6 а)  $-6dx^2 - 10dxdy + 6udy^2$ ; б) 1,4 – лок. мінімум.

**Варіант 15.** 1 а)  $-\frac{3}{4}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ . 2 а)  $\frac{-1}{t^2}$ ; б)  $x \in -\infty; -2$  – опукла вгору;  $x \in -2; \infty$  – опу-

кла вниз. 3 а)  $3\sqrt{x^2 + 4x + 7} + C$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 + 10x + 24} - \frac{7}{2} \ln \left| \frac{x+4}{x+6} \right| + C$ .

4 а)  $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q} + \vec{r}$ ; б)  $AM: x + 4y - 1 = 0, AH: x - 2y + 5 = 0$ . 5 а)  $\frac{8e^3 + 4}{9}$ ;

б)  $2 + 12 \ln \frac{9}{7}$ . 6 а)  $6xdx^2 + 14dxdy - 8dy^2$ ; б) 2, -2 – лок. максимум.

**Варіант 16.** 1 а) 4; б)  $\frac{3}{2}$ . 2 а)  $\frac{\sqrt{y} \sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x} \sqrt{2\sqrt{y}-\sqrt{1-y^2}}}$ ; б)  $x = \pm \frac{1}{2}$  – верт. ас.,  $y = x - \frac{3}{4}$  –

пох. ас. 3 а)  $\frac{1}{2} \sqrt{2 - 4\cos^2 x} + C$ ; б)  $\ln \sqrt{x^2 - 10x + 16} + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-8}{x-2} \right| + C$ .

4 а)  $1 \quad 2 \quad 1$ ; б)  $x + 2y - 8 = 0$ . 5 а)  $\frac{1}{4}$ ; б)  $2 + 15 \ln \frac{5}{4}$ .

6 а)  $12xdx^2 - 10dxdy + 2dy^2$ ; б) 1, -1 – лок. максимум.

**Варіант 17.** 1 а) 3; б)  $\frac{1}{2}$ ; 2 а)  $\frac{x + 3 \sqrt[3]{x-1}}{2x+1} \left( \frac{3}{x+3} + \frac{1}{2x-2} - \frac{8}{2x+1} \right)$ ;

б)  $y_{\max} = y - 1$ ; 3 а)  $\frac{1}{10} \sin^5 2x + C$ ; б)  $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - 2\sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + 2\sqrt{5}} \right| + C$ .

4 а)  $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r}$ ; б)  $\begin{cases} 16x + 12y - 1 = 0 \\ -12x + 16y + 5 = 0 \end{cases}$ . 5 а)  $\frac{1-4e^{-3}}{16}$ ; б)  $24 \ln \frac{7}{6} - \frac{7}{5}$ .

6 а)  $6dx^2 + 12dxdy - 12udy^2$ ; б) -1,1 – лок. мінімум.

**Варіант 18.** 1 а) 2; б)  $\frac{8}{3}$ . 2 а)  $\frac{2}{t^2 - 1}$ ; б)  $y_{\max} = y - 1$ . 3 а)  $\frac{1}{3} \ln |e^{3x} - 1| + C$ ;

б)  $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 - \sqrt{7}}{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 + \sqrt{7}} \right| + C$ . 4 а)  $-3 \quad 1 \quad 1$ ; б) 0 1; 4; 5. 5 а)  $\ln 16 - \frac{7}{4}$ ;

б)  $140 \ln \frac{8}{7} - 18$ . 6 а)  $-2dx^2 + 8dxdy - 18udy^2$ ; б) 4,2 – лок. максимум.

**Варіант 19.** 1 а)  $\frac{1}{9}$ ; б)  $\frac{1}{9}$ . 2 а)  $\frac{-y \sin xy}{2y + x \sin xy}$ ; б)  $x = 4$  – верт.ас.,  $y = x$  – пох.ас.;

3 а)  $\frac{-1}{5} \cos^2 2x + C$ ; б)  $\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{5}} \right| + C$ ; 4 а)  $\vec{a} = 2\vec{p} + 2\vec{q} + 2\vec{r}$ ;

б)  $\begin{cases} 2x + 10y + 19 = 0 \\ -10x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$ ; 5 а)  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$ ; б)  $\frac{5}{2} \ln 3 + 8$ . 6 а)  $12x dx^2 + 8dx dy - 10dy^2$ ; б)

4, -1 – лок. максимум.

**Варіант 20.** 1 а)  $\frac{1}{12}$ ; б) -1. 2 а)  $\frac{-4x \arccos 2x + 1}{\sqrt{-4x^2 - 4x}} + \arccos^2 2x + 1$ ;

б)  $x \in -\infty; -2\sqrt{2} \cup 2\sqrt{2}; \infty$  – опукла вгору;  $x \in -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$  – опукла вниз.

3 а)  $\frac{-1}{2 \ln^2 x + 2} + C$ ; б)  $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + C$ . 4 а)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

б) 0; 1; 4; 5. 5 а)  $\frac{1}{4} 15e^6 + 3$ ; б)  $8 \ln 2 - 2$ . 6 а)  $-12x dx^2 - 6dx dy + 8dy^2$ ; б) 3, 0 – лок. мінімум.