МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«Київський політехнічний інститут

Імені Ігоря Сікорського»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
ЗА ТЕМОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

КИЇВ – 2019

Методичні вказівки до проведення модульної контрольної роботи за темою диференціальне числення функцій багатьох змінних./ Укл.: О.О.Дем‘яненко, К.Ю. Мамса. – К.:2019.-КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 24с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 30.05.2019 р.)

за поданням Вченої ради факультету (протокол № 5 від 29.05.2019 р.)

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ЗА ТЕМОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Укладачі: *Дем‘яненко Ольга Олегівна ,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.*

Мамса Катерина Юріївна ,кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензент: *Каніовська І.Ю.., доцент, к.ф.-м.н*

Відповідальний редактор: *Репета Л.А., доцент, к.ф.-м.н.*

Дане навчальне видання може використовуватись як на практичних заняттях з математичного аналізу, так і для самостійної роботи студентів технічних факультетів «КПІ ім.Ігоря Сікорського» при підготовці до модульної контрольної роботи та до іспиту з кредитного модуля «Математичний аналіз – 2»

КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

Вступ.

Дане навчальне видання призначення для підготовки до проведення модульної контрольної роботи за темою «Диференціальне числення функцій багатьох змінних». Методичні вказівки містять зразок розв‘язку варіанту контрольної роботи, 20 різних умов варіантів самої контрольної роботи та відповіді до них. Дане видання може використовуватись як на практичних заняттях, так і для самостійної підготовки студентів до модульної контрольної роботи.

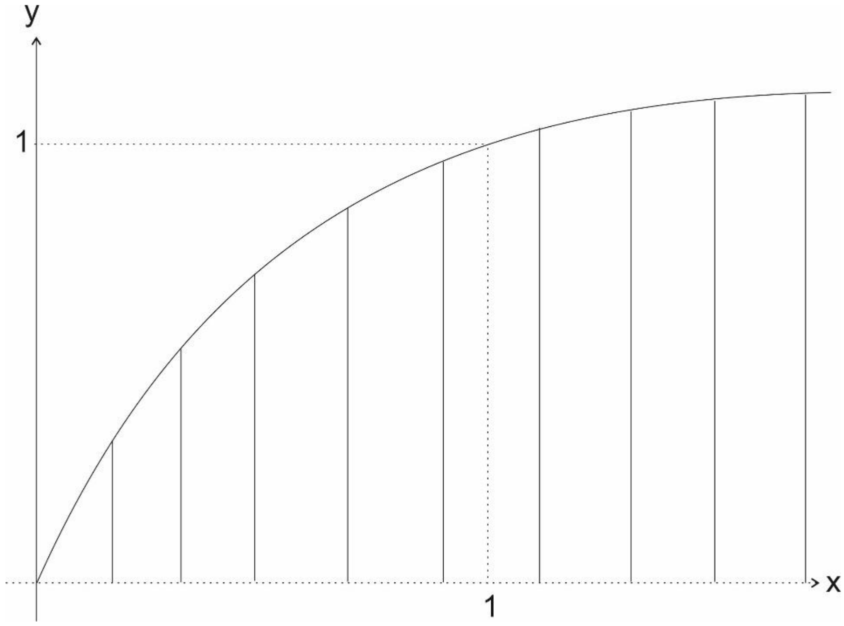
Зразок розв'язку варіанту контрольної роботи

Задача 1. Знайдіть і зобразіть на координатній площині область визначення функції $z = \sqrt{x - y^2} + \ln xy$.

Розв'язання. Область визначення даної функції визначається умовами :

$$\begin{cases} x - y^2 \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y^2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}.$$

Зобразимо цю область геометрично:



Задача 2. Обчисліть повний диференціал функції $u=\sqrt{z}\sin\frac{x}{y}$ у точці $M(2,1,4)$.

Розв'язання. $du(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)dx+\frac{\partial u}{\partial y}(M)dy+\frac{\partial u}{\partial z}(M)dz$.

Звідси $du(M)=2\cos 2dx-2\cos 2dy+\frac{1}{4}\sin 2dz$.

Задача 3. Обчисліть значення похідної $\frac{du}{dt}$ складеної функції $u=\sqrt{x^2+y^2+3}$ у точці $M(0,1)$, якщо $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. $M(x_0,y_0)=M(0,1)\ \Rightarrow \begin{cases} x_0=\ln t_0=0 \\ y_0=t_0^3=1 \end{cases} \Rightarrow t_0=1$.

$$\frac{du}{dt}(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(M)\frac{dy}{dt}(t_0)=$$
$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+3}}\Big|_{M(0,1)}\cdot\frac{1}{t}\Big|_{t=1}+\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+3}}\Big|_{M(0,1)}\cdot 3t^2\Big|_{t=1}=\frac{3}{2}.$$

Задача 4. Доведіть, що функція $z = xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} + e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x^2}\right); \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{2y}{x^3} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \left(\frac{2}{x} - 1\right); \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}; \;\; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

Знайдені похідні підставимо в рівняння:

$$e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \left(\frac{2}{x} - 1\right) + \left(\frac{y}{x}\right) \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} + 2\frac{y}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{2y}{x^3} - \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{2y}{x^3}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

що і треба було довести.

Задача 5. Складіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої до поверхні $\frac{xy}{x^2 - y^2} - z = 0$ у точці $M\left(2, 1, \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної площини до поверхні, що задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0 z_0)$ має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі :

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}.$$

Вираз $F(x,y,z)=\dfrac{xy}{x^2-y^2}-z$. Знайдемо похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)=\frac{y(x^2-y^2)-2xxy}{(x^2-y^2)^2}==-\frac{y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\Bigg|_{M\left(2,1,\frac{2}{3}\right)}=-\frac{1(4+1)}{(4-1)^2}=-\frac{5}{9};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)=\frac{x(x^2-y^2)+2yxy}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\Bigg|_{M\left(2,1,\frac{2}{3}\right)}=\frac{2(4+1)}{(4-1)^2}=\frac{10}{9};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)=-1.$$

Підставимо знайдені похідні у відповідні рівняння. Відповідно,

$$-\frac{5}{9}(x-2)+\frac{10}{9}(y-1)-1\left(z-\frac{2}{3}\right)=0\ \Rightarrow 5(x-2)-10(y-1)+9\left(z-\frac{2}{3}\right)=0\ \Rightarrow$$

$5x-10y+9z-6=0$ - рівняння дотичної площини;

$$\frac{x-2}{-\frac{5}{9}}=\frac{y-1}{\frac{10}{9}}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-1}\ \Rightarrow\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-\frac{2}{3}}{9}$$ - рівняння нормалі.

Задача 6. Знайдіть екстремуми функції $z=xy(12-x-y)$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки, в яких виконується необхідна умова існування екстремума:

$$dz=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12y-2xy-y^2=0 \\ 12x-x^2-2xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(12-2x-y)=0 \\ x(12-x-2y)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ 12-x-2y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ 12-2x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 12-2x-y=0 \\ 12-x-2y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_0(0,0) \\ M_1(12,0) \\ M_2(0,12) \\ M_3(4,4) \end{array}\right].$$

Отже, стаціонарних точок виявилось чотири.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремума в цих точках. Для цього знайдемо другі похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y;\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x;\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=12-2x-2y$

та побудуємо матрицю квадратичної форми, яка відповідає другому диференціалу :

$$\begin{pmatrix} -2y & 12-2x-2y \\ 12-2x-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Обчислимо значення визначника цієї матриці для кожної стаціонарної точки і знайшовши значення кутових мінорів зробимо висновки відносно наявності в них екстремумів.

Для точки $M_0(0,0)$ матриця має вид $\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1=0 \\ \delta_2=-144 \end{cases} \Rightarrow$ екстремуму немає.

Для точки $M_1(12,0)$ матриця має вид $\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1=0 \\ \delta_2=-144 \end{cases} \Rightarrow$ екстремуму немає.

Для точки $M_2(0,12)$ матриця має вид $\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1=0 \\ \delta_2=-144 \end{cases} \Rightarrow$ екстремуму немає.

Для точки $M_3\left(4,4\right)$ матриця має вид $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = -8 < 0 \\ \delta_2 = 48 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ в цій точці досягається локальний мінімум, відповідно $z_{\min} = z\left(4,4\right) = 4\cdot 4\left(12-4-4\right) = 64$.

Задача 7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 2x + y$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання.

Будуємо функцію Лагранжа: $L\left(x,y,\lambda\right) = 2x + y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

Шукаємо точки, підозрілі на екстремум: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array} \right.$.

Запишемо другий диференціал і знайдемо його значення в цих точках:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0; \quad d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 \quad \Rightarrow$$

$$d^2 L\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\frac{\sqrt{5}}{2}\left(dx^2 + dy^2\right) > 0, \qquad d^2 L\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(dx^2 + dy^2\right) < 0.$$

Звідси випливає, що в точці $M_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ досягається умовний мінімум, а в точці $M_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - умовний максимум.

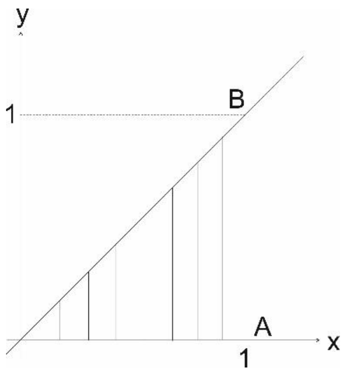
Відповідно,

$$z_{\min} = z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5};$$

$$z_{\max} = z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}.$$

Задача 8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = 3 - 2x^2 - y^2 - xy$ в області D, що обмеженій лініями $x = y, \quad y = 0, \quad x = 1$.

Розв'язання.



Знайдемо точки, підозрілі на екстремум і перевіримо їх належність або неналежність заданій області.

$$dz = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - y = 0 \\ -2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Точка $M(0,0)$ знаходиться на границі області D, тому значення функції в ній можна не обчислювати (це значення буде враховане при дослідженні значень функції на границі області).

Границя області складається з відрізків трьох прямих, на яких і знаходяться точки, в яких досягаються найбільше і найменше значення функції. Дослідимо функцію на границях:
OA: $y = 0, \; x \in [0,1], \; z_{OA}(x) = 3 - 2x^2 \; \Rightarrow z'_{OA}(x) = -4x \; \Rightarrow$ найбільше і найменше значення функції може прийматись на кінцях відрізку $z_{OA}(0) = 3; \; z_{OA}(1) = 1$;

OB: $y = x, \; x \in [0,1], \; z_{OB}(x) = 3 - 2x^2 - x^2 - x^2 = 3 - 4x^2 \quad z'_{OB}(x) = -8x \; \Rightarrow$ найбільше і найменше значення функції може прийматись на кінцях відрізку $z_{OB}(0) = 3; \; z_{OB}(1) = -1$;

AB: $x = 1, \; y \in [0,1], \; z_{AB}(y) = 3 - 2 - y^2 - y = 1 - y - y^2 \quad z'_{AB}(y) = -1 - 2y \; \Rightarrow$точка екстремуму функції $z_{AB}(y)$ не належить відрізку $[0,1]$, тому найбільше і найменше значення функції може прийматись на кінцях відрізку $z_{AB}(0) = 1; \; z_{AB}(1) = -1$.

Серед знайдених значень функції оберемо найбільше та найменше значення. Відповідно, найбільше значення заданої функції рівне $3 = z(0,0)$, а найменше рівне $-1 = z(1,1)$.

Варіант № 1

1. Знайдіть область визначення функції $z = \arcsin\left(y - x^2\right)$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = 2x^2y + \ln\frac{x}{y}$ в точці $M\left(1;2\right)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{3x+2y}$, де $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - z + 1 = 0$ у точці $M_0\left(1;1;0\right)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = \left(x+1\right)^2 + 2y^2$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = xy$, якщо змінні задовольняють умову $x + 2y = 1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в області D, що обмежена лініями $x + y + 2 = 0,\ x = 0,\ y = 0$.

Варіант № 2

1. Знайдіть область визначення функції $z = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - y^2}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = x^2y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M\left(4;3\right)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \arcsin\left(y - x\right)$, де $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t^3 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = x^3 + xy^2$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + 6xy - z + 3x - 21 = 0$ у точці $M_0\left(-1;3;4\right)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = xy + 4x^2 - 2y^2$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 - y^2$, якщо змінні задовольняють умову $2x + y = 4$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = 6x^2 - 4xy + y^2$ в області D, що обмежена лініями $x = -1,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 1$.

Варіант № 3

1. Знайдіть область визначення функції $z = \dfrac{\sqrt{y - 2x^2}}{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$ в точці $M(2;1)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x^y$, де $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \cos t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = e^x\left(2y^2 + y\right)$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x\left(2y^2 + y - 4\right)$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $z = 2x^2 + y^2 - 4xy + 5y + 15$ у точці $M_0(-7;1;8)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 + y^2$, якщо змінні задовольняють умову $2x + 3y = 1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = -2x^2 + 4 - y^2$ в області D, що обмежена лініями $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$.

Варіант № 4

1. Знайдіть область визначення функції $z = \ln\left(x^2 - 2y\right) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \arccos\dfrac{2x}{y^2}$ в точці $M(1;3)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \arcsin xy$, де $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \sin xy$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u\left(x^2 + y^2\right)$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $2x^2 - 3y^2 + xy + 3x - z + 2 = 0$ у точці $M_0(1;-1;2)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = 2x^2 + y^2 - 2xy - x + y$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 2x + y$, якщо змінні задовольняють умову $x^2 + y^2 = 5$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції
   $z = x^2 + 2xy - 2x - y^2 + 2y$ в області D, що обмежена лініями
   $x - y + 2 = 0,\ x = 2,\ y = 0$.

Варіант № 5

1. Знайдіть область визначення функції $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 2\right)$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \dfrac{x - y}{x + y}$ в точці $M(-2;-1)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 \ln y$, де $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t^3 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \dfrac{x - y}{x + y}$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u\dfrac{4}{(x + y)^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 - 6z + 4x + 9 = 0$ у точці $M_0(2;1;-1)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = xy(9 - x - y)$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції
   $z = x^2 + 2y^2$, якщо змінні задовольняють умову $4x + 2y + 1 = 0$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції
   $z = -8x^2 + 6xy + 4x - 8y^2 + 4y$ в області D, що обмежена лініями
   $x = 1,\ y = 2,\ x = 0,\ y = 0$.

Варіант № 6

1. Знайдіть область визначення функції $z = \arccos(y + 2x)$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \dfrac{2x + y}{2x - y}$ в точці $M(3;1)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = tgx^2 y$, де $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 5t^4 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $4x^2 - 4y^2 - z^2 + 6xy + 2 = 0$ у точці $M_0(-2;1;2)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = x^2 + y^2 - xy + 6x - 9y$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = xy$, якщо змінні задовольняють умову $x + 2y = 1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x - y^2$ в області D, що обмежена лініями $x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0$.

Варіант № 7

1. Знайдіть область визначення функції $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = 3xy^2 + e^{x^2+y^2}$ в точці $M(-1;-1)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 3^y$, де $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = e^y(\cos x + y\sin x)$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^y \sin x$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 3z + 9 = 0$ у точці $M_0(1;2;1)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = 8x^3 + y^3 + 6xy + 1$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 2x^2 - y^2$, якщо змінні задовольняють умову $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 6$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - 3xy + y^3$ в області D, що обмежена лініями $x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2$.

Варіант № 8

1. Знайдіть область визначення функції $z = \dfrac{\ln(4 - x^2)}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = 2xy + 2^{x^2-y^2}$ в точці $M(1;1)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 \cos y$, де $\begin{cases} x = 2t^3 - 3t^2 \\ y = \dfrac{\pi}{2}t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \ln\sqrt{x^2 - y^2}$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 4z - 10 = 0$ у точці $M_0(-1;1;2)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 21$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 2x^2 + y^2$, якщо змінні задовольняють умову $3x - y + 5 = 0$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy - 2$ в області D, що обмежена лініями $y = 4x^2 - 4,\ \ y = 0$.

Варіант № 9

1. Знайдіть область визначення функції $z = \sqrt{y \cdot \sin x}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \ln\left(x^2 + 3y^2\right)$ в точці $M\left(-2;-1\right)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = 2^{5x-y}$, де $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2t^3 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \cos xy$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u\left(x^2 + y^2\right)$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 - 2y^2 - z^2 - y + 4z + 7 = 0$ у точці $M_0\left(2;1;-1\right)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = 2xy - x^2 + y^2 + x + 27$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 3x^2 - y^2$, якщо змінні задовольняють умову $x + 2y = 7$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = xy - 3x - 2y$ в області D, що обмежена лініями $x = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 4$.

Варіант № 10

1. Знайдіть область визначення функції $z = \sqrt{y \cdot \cos x}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$ в точці $M\left(3;1\right)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = y^2 \ln x$, де $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = \sin t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = e^{x(y+1)}$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u\left(xy + x + 1 - x^2\right)$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4z + 5 = 0$ у точці $M_0\left(2;1;-1\right)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = 2x^2 + 4y^2 - 2xy + 2x - 2y$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 + 2y^2$, якщо змінні задовольняють умову $5x + 4y = 6$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = 3x^2 - x + 3y^2 - y$ в області D, що обмежена лініями $x - y = 1,\ x = 5,\ y = 0$.

Варіант № 11

1. Знайдіть область визначення функції $z = \ln\left(2x + 4 - y^2\right) + \sqrt{y - x + 2}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = (2x - y)^2 + \cos(x - y)$ в точці $M\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = y^3 \sin x$, де $\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y = \ln t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = 2y^3 - 3yx^2$ задовольняє умову $-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + z^2 - 5zy + 2y - 27 = 0$ у точці $M_0(1;2;-3)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 6xy$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = y^2 - x^2$, якщо змінні задовольняють умову $3x + 6y = 1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy + 4x - y^2$ в області D, що обмежена лініями $x + y = -1,\ x = -3,\ y = 0$.

Варіант № 12

1. Знайдіть область визначення функції $z = \frac{\ln(y - x + 1)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = 2x^3y + 3xy^2 - \sin(x + y)$ в точці $M\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = 3^{2x+5y}$, де $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3t^4 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \frac{2x - y}{2x + y}$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + xz + yz - 21 = 0$ у точці $M_0(0;1;1)$.

6. Знайдіть екстремуми функції $z = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x - y$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 3x^2 + y^2$, якщо змінні задовольняють умову $2x + y = 1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в області D, що обмежена лініями $y = 2x^2,\ y = 8$.

Варіант № 13

1. Знайдіть область визначення функції $z = \ln x - \ln\sin y$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = 4x^2 y + 2xy^3 + \sin^2 x$ в точці $M(\pi;1)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \arccos(2y + x)$, де $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = 2^y\left(x^2 + 1\right)$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot x\ln 2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 2zy - y + 3z + 3 = 0$ у точці $M_0(1;1;1)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = y^2 - x^2 + 2xy - 4x$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 - 2y^2$, якщо змінні задовольняють умову $x - 2y = 2$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = xy - 2x - y$ в області D, що обмежена лініями $x = 3,\ x = 0,\ y = 0, y = 4$.

Варіант № 14

1. Знайдіть область визначення функції $z = \ln\cos x + \ln y$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = -3x^3 y + 6xy^2 + \cos^2 y$ в точці $M\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = y^2 \sin x$, де $\begin{cases} x = e^t \\ y = 3t^2 - 2 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = xe^y + ye^x$ задовольняє умову $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + z - 2x = 0$ у точці $M_0(1;1;0)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 + 6x + 9y$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z=2y^2-x^2$, якщо змінні задовольняють умову $2x+6y=1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z=x^2+4xy-6x-2y^2$ в області D, що обмежена лініями $x+y=3,\ x=0,\ y=0$.

Варіант № 15

1. Знайдіть область визначення функції $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}}-\sqrt{x+1-y}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z=arctg\frac{x}{y^2}$ в точці $M(1;1)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=y^2 5^x$, де $\begin{cases} x=2t^3-3t \\ y=t+1 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u=\cos^2 xy$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}x^2=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}y^2$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2+y^2+2xy-z+2x-y+25=0$ у точці $M_0(1;1;1)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z=3y^2+3x^2-6x+6y$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z=2xy$, якщо змінні задовольняють умову $3x+2y=-1$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z=-x^2-xy+3x-y^2+6y$ в області D, що обмежена лініями $x=1, y=1,\ x=0,\ y=0$.

Варіант № 16

1. Знайдіть область визначення функції $z=\ln\left(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\right)+\ln(x-y)$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z=arcctg\frac{y}{x^3}$ в точці $M(1;1)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=x^2y+y^2x$, де $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u=\ln^2(x-y)$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2-y^2-2xy-z+3y+15=0$ у точці $M_0(1;-1;1)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z=y^2+x^2-xy+2x-2y$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 2x^2 + 2y^2$, якщо змінні задовольняють умову $4x - y = 3$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y - 2x + y^2$ в області D, що обмежена лініями $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$.

Варіант № 17

1. Знайдіть область визначення функції $z = \dfrac{\sqrt{x-y}}{\ln\left(y - x^2 + 1\right)}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точці $M(3;4)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x\ln^2 y$, де $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 2t^3 + 2t \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = e^{2xy+3y}$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2x+3)^2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}4y^2$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 - 2y^2 - z^2 + xz + 4y - 11 = 0$ у точці $M_0(3;1;2)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = 3x^3 + 3y^3 + 9xy - 15$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = y^2 - 2x^2$, якщо змінні задовольняють умову $3x + 2y = -2$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y + 2x + y^2$ в області D, що обмежена лініями $x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0$.

Варіант № 18

1. Знайдіть область визначення функції $z = \dfrac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\ln(x + y + 1)}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точці $M(-3;4)$.
3. Знайдіть $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \arccos(3x - y)$, де $\begin{cases} x = 5t + t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = e^y\left(3x^2 + x\right)$ задовольняє умову $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x^2 + 1\right) = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $4x^2 - 2z^2 + 4xy + xz - 3z + 13 = 0$ у точці $M_0(1;-2;1)$.

6. Знайдіть екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy + 21$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = -2x^2 - 2y^2$, якщо змінні задовольняють умову $4x + 2y = -3$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ в області D, що обмежена лініями $x = 1, y = 1, x = 0, y = 0$.

Варіант № 19

1. Знайдіть область визначення функції $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 2\right)$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = x\ln(2x - y)$ в точці $M(1;1)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = 4^{2x-3y}$, де $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 3t^2 + t - 1 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ задовольняє умову $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y - 6 = 0$ у точці $M_0(1;1;2)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = y^2 + 3x^2 - 6xy - 18x + 12y$.
7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = x^2 + 3y^2$, якщо змінні задовольняють умову $x - 3y = 4$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D, що обмежена лініями $x = 1, y = 2, x = 0, y = 0$.

Варіант № 20

1. Знайдіть область визначення функції $z = \arccos(y - 2x^2)$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = y\ln(4y - 3x)$ в точці $M(1;-1)$.
3. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{5x-4y}$, де $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 3t^3 \end{cases}$
4. Доведіть, що функція $u = \frac{1}{\sqrt{x - y}}$ задовольняє умову $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Складіть рівняння дотичної площини та нормальної прямої до поверхні $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4y - 10 = 0$ у точці $M_0(-2;1;0)$.
6. Знайдіть екстремуми функції $z = y^2 + x^2 + xy - 6x$.

7. За допомогою функції Лагранжа знайдіть екстремум функції $z = 3xy$, якщо змінні задовольняють умову $2x - 3y = 2$.
8. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = xy - x - 2y$ в області D, що обмежена лініями $x = 3,\ x = y,\ y = 0$.

Відповіді:

<u>Варіант №1</u>. 2) $dz = 9dx + \frac{3}{2}dy$;3) $e^{3x+2y}\left(4t - 3\sin t\right)$; 5) $-4\left(x-1\right) - 4\left(y-1\right) - z = 0;$

$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$; $6\left(-1;0\right)$ - лок. мінімум; 7) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ - ум. макс.;

8) $m = z\left(0;-2\right) = z\left(-2;0\right) = -4,\ M = z\left(0;0\right) = 0$

<u>Варіант №2</u>. 2) $dz = 72{,}8dx + 96{,}6dy$;3) $\frac{9t^2 - 2}{\sqrt{1 - \left(y - x\right)^2}}$; 5) $13\left(x+1\right) - \left(z-4\right) = 0;$

$\frac{x+1}{13} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{-1}$; 6) екстремумів немає; 7) $\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$ - ум. мін.;

8) $m = z\left(0;0\right) = 0, \quad M = z\left(1;-1\right) = z\left(-1;1\right) = 11$

<u>Варіант №3</u>. 2) $dz = \frac{-2}{\sqrt{3}}dx + \frac{1}{\sqrt{3}}dy$;3) $x^{y-1}\left(\frac{y}{t} - x\sin t\right)$;

5) $-32\left(x+7\right) + 35\left(y-1\right) - \left(z-8\right) = 0;$ $\frac{x+7}{-32} = \frac{y-1}{35} = \frac{z-8}{-1}$; 6) $(0;1)$ - лок. мінімум;

7) $\left(-\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$ - ум. макс.; 8) $m = z\left(1;0\right) = z\left(-1;0\right) = 2,\ M = z\left(0;0\right) = 4$

<u>Варіант №4</u>. 2) $dz = \frac{-2}{\sqrt{73}}dx + \frac{6}{\sqrt{73}}dy$;3) $\frac{y + x\left(2t+1\right)}{\sqrt{1 - \left(xy\right)^2}}$; 5)

$6\left(x-1\right) + 7\left(y+1\right) - \left(z-2\right) = 0;$

$\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{-1}$; 6) $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ - лок. мінімум; 7) $(2;1)$ - ум. макс., $(-2;-1)$ - ум.мін.;

8) $m = z\left(1;0\right) = -1,\ M = z\left(2;3\right) = 9$

Варіант №5. 2) $dz=\frac{-2}{9}dx+\frac{4}{9}dy$;3) $4x\ln y+\frac{x^2}{y}12t^2$; 5) $8(x-2)+2(y-1)-10(z+1)=0$

$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-5}$; 6) $(0;0),(9;0),(0;9)$ - не екстремуми; 7) $\left(-\frac{2}{9};-\frac{1}{18}\right)$ - ум. мін.;

8) $m=z(0;2)=-24,\ M=z\left(0;\frac{1}{4}\right)=z\left(\frac{1}{4};0\right)=\frac{1}{2}$

Варіант №6. 2) $dz=\frac{-4}{25}dx+\frac{12}{25}dy$;3) $\frac{12xyt+20x^2t^3}{\cos^2\left(x^2y\right)}$;

5) $-10(x+2)+22(y-1)-4(z-2)=0;$ $\frac{x+2}{-5}=\frac{y-1}{11}=\frac{z-2}{-2}$; 6) $(-1;4)$ - лок. мінімум;

7) $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{10}\right)$ - ум. макс.; 8) $m=z(2;0)=-4,\ M=z(3;3)=6$

Варіант №7. 2) $dz=\left(3-2e^2\right)dx+\left(6-2e^2\right)dy$;3) $3^y\left(-2x\sin t+4x^2t\ln 3\right)$;

5) $-2(x-1)+2(y-2)-(z-1)=0;$ $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$; 6) $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ - лок. максимум, $(0,0)$ - не екстремум; 7) $(-4;32)$ - ум. мін.;

8) $m=z(1;1)=z(0;-1)=-1,\ M=z(0;2)=8$

Варіант №8. 2) $dz=(2+2\ln 2)dx+(2-2\ln 2)dy$;3) $2x\cos y\left(6t^2+6t\right)-x^2\sin y\cdot\frac{\pi}{2}$;

5) $-8(x-1)-4(y-1)+8(z-2)=0;$ $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$; 6) $(0;0)$ - лок. максимум

7) $\left(-\frac{15}{11};\frac{10}{11}\right)$ - ум.мін.; 8) $m=z(0;0)=-2,\ M=z\left(-\frac{2}{3};-\frac{20}{9}\right)=-\frac{2}{27}$

Варіант №9. 2) $dz=\frac{-4}{7}dx+\frac{-6}{7}dy$;3) $2^{5x-y}\left(5\cos t-6t^2\right)$

5) $4(x-2)-5(y-1)+6(z+1)=0;$ $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+1}{6}$; 6) $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ - не екстремум; 7) $\left(-\frac{7}{11};\frac{42}{11}\right)$ - ум. мін.; 8) $m=z(4;0)=-12,\ M=z(0;0)=0$

Варіант №10. 2) $dz=\frac{6}{\sqrt{17}}dx-\frac{1}{\sqrt{17}}dy$;3) $\frac{y^2}{x}10t+2y\ln x\cos t$;

5) $10(x-2)+2(y-1)-6(z+1)=0;\quad \frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-3}$; 6) $\left(-\frac{3}{7};\frac{1}{7}\right)$ - лок. мінімум;

7) $\left(\frac{10}{11};\frac{4}{11}\right)$ - ум. мін.; 8) $m=z\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{6},\ M=z(5;4)=114$

<u>Варіант №11</u>. 2) $dz=(4\pi-1)dx+(1-2\pi)dy$;3) $4\cos x\cdot y^3t+3y^2\sin x\frac{1}{t}$;

5) $2(x-1)+17(y-2)-16(z+3)=0;\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{17}=\frac{z+3}{-16}$; 6) $(2;2)$ - лок. мінімум, $(0;0)$ - не екстремум 7) $\left(-\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ - ум. макс.; 8) $m=z(-2;0)=-4,\ M=z(-3;2)=5$

<u>Варіант №12</u>. 2) $dz=\frac{\pi^3}{4}dy$;3) $3^{2x+5y}\left(-2\sin t+60t^3\right)$; 5) $2x+3(y-1)+(z-1)=0;$

$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$; 6) $\left(\frac{1}{2};0\right)$ - лок. мінімум; 7) $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$ - ум. мін.;

8) $m=z(2;8)=-14,\ M=z(-2;8)=18$

<u>Варіант №13</u>. 2) $dz=(8\pi+2)dx+4\pi^2dy$;3) $\frac{-(1+8t)}{\sqrt{1-(2y+x)^2}}$;

5) $2(x-1)-(y-1)+3(z-1)=0;\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{3}$; 6) $(-1;1)$ - не екстремум;

7) $(-2;-2)$ - ум. мін.; 8) $m=z(3;0)=-6,\ M=z(3;4)=2$

<u>Варіант №14</u>. 2) $dz=\left(\frac{3}{2}\pi^2-18\pi\right)dx+\left(6\pi^2-24\right)dy$;3) $y^2e^t\cos x+12y\sin x\cdot t$;

5) $2(x-1)+2(y-1)+5(z-1)=0;\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$; 6) $(-1;-4)$ - лок. мінімум; 7) $\left(-\frac{1}{7};\frac{3}{14}\right)$ - ум. макс.; 8) $m=z(0;3)=-18,\ M=z(0;0)=0$

<u>Варіант №15</u>. 2) $dz=\frac{1}{2}dx-\frac{1}{4}dy$;3) $5^x\left(y^2\ln 5\left(6t^2-3\right)+2y\right)$;

5) $6(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0;\quad \frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}$; 6) $(1;-1)$ - лок. мінімум;

7) $\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{4}\right)$ - ум. макс.; 8) $m=z(0;0)=0,\ M=z(1;1)=6$

<u>Варіант №16</u>. 2) $dz=\frac{3}{2}dx-\frac{1}{2}dy$;3) $-2\left(2xy+y^2\right)\sin t+3\left(x^2+2xy\right)\cos t$;

5) $3(y+1)-(z-1)=0;\ \ \frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$; 6) $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ - лок. мінімум;

7) $\left(\frac{12}{17};-\frac{3}{17}\right)$ - ум. мін.; 8) $m=z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2},\ M=z(0;0)=0$

<u>Варіант №17</u>. 2) $dz=\frac{64}{125}dx-\frac{48}{125}dy$;3) $\frac{\ln^2 y}{2\sqrt{t}}+\frac{2x\ln y}{y}\left(6t^2+2\right)$

5) $8(x-3)-(z-2)=0;\ \ \frac{x-3}{8}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}$; 6) $(-1;-1)$ - лок. максимум, $(0;0)$ - не екстремум; 7) $(-6;8)$ - ум. мін.; 8) $m=z\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2},\ M=z(3;0)=z(3;2)=15$

<u>Варіант №18</u>. 2) $dz=\frac{24}{125}dx+\frac{18}{125}dy$;3) $\frac{-15-9t^2+4t}{\sqrt{1-(3x-y)^2}}$; 5)

$(x-1)-8(y+2)-6(z-1)=0;$

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-1}{-6}$; 6) $(1;1)$ - лок. мінімум. $(0;0)$ - не екстремум;

7) $\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{10}\right)$ - ум. макс.; 8) $m=z(0;0)=0,\ M=z(1;0)=5$

<u>Варіант №19</u>. 2) $dz=2dx-dy$;3) $4^{2x-3y}\ln 4\left(\frac{2}{t}-3(6t+1)\right)$;

5) $4(x-1)+6(y-1)-(z-2)=0;\ \ \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-2}{-1}$; 6) $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ - не екстремум;

7) $(1;-1)$ - ум. мін.; 8) $m=z(-1;0)=-3,\ M=z(1;2)=15$

<u>Варіант №20</u>. 2) $dz=3dx+4dy$;3) $e^{5x-4y}\left(5\cos t-36t^2\right)$; 5) $-4(x+2)+2(y-1)=0;$

$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$; 6) $(4;-2)$ - лок. мінімум; 7) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ - ум. мін.;

8) $m=z(3;0)=-3,\ M=z(0;0)=z(3;3)=0$

Список літератури.

1. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: У 2 ч. – К.:Техніка, 200.- Ч.1. – 591 с.; Ч.2 – 791 с.

2. *Пискунов Н.С.* Дифференцыальное и интегральное исчисление для втузов: В 3 т. – М.: Наука, 1985.
3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш.шк., 2001. – Ч.2. – 410 с.
4. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализ. – М.: Наука, 1985. – 445 с.

ЗМІСТ