

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України

Інтеграл Рімана

Методичні вказівки

До виконання типової розрахункової роботи

З математичного аналізу

Для студентів першого курсу

Фізико математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2014

(Скорочено)

Для виконання завдання 1 скористуйтеся при потребі однією з рівностей

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2;$$

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma_n, \text{ де } \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma.$$

Завдання 1

Побудувати інтегральну суму для функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ і, користуючись означенням визначеного інтеграла, знайти $\int_a^b f(x) dx$.

1. $f(x) = e^x, [a, b] = [0, 2]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
2. $f(x) = e^{2x}, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
3. $f(x) = e^{2x}, [a, b] = [0, 2]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
4. $f(x) = x^3, [a, b] = [1, 4]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
5. $f(x) = x^3, [a, b] = [1, 4]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
6. $f(x) = x^3, [a, b] = [1, 4]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
7. $f(x) = x^3, [a, b] = [1, 4]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .

8. $f(x) = x^3, [a, b] = [1, 4]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
9. $f(x) = x^3, [a, b] = [1, 4]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
10. $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
11. $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
12. $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
13. $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
14. $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
15. $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
16. $f(x) = \frac{1}{x}, [a, b] = [1, 2]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
17. $f(x) = \frac{1}{x}, [a, b] = [1, 2]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
18. $f(x) = \frac{1}{x}, [a, b] = [1, 2]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
19. $f(x) = \frac{1}{x}, [a, b] = [1, 2]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
20. $f(x) = \frac{1}{x}, [a, b] = [1, 2]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
21. $f(x) = \frac{1}{x}, [a, b] = [1, 2]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
22. $f(x) = x^{1/2}, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
23. $f(x) = x^{1/2}, [a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .

24. $f(x) = x^{1/2}$, $[a, b] = [0, 1]$. Поділити $[a, b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
25. $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
26. $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
27. $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .
28. $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k лівим кінцем Δx_k .
29. $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k правим кінцем Δx_k .
30. $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$. Поділити $[a, b]$ на рівні частини і вибрати ξ_k серединою проміжка Δx_k .

Завдання 2а

Не обчислюючи, вказати який з інтегралів більший

$$2a.1 \quad I_1 = \int_0^1 \sqrt{e^x + 1} dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{2 + x} dx.$$

$$2a.2 \quad I_1 = \int_1^2 \sqrt[3]{x - \frac{1}{2}x^2} dx,$$

$$I_2 = \int_1^2 \sqrt[3]{\ln(x+1)} dx.$$

$$2a.3 \quad I_1 = \int_1^2 \sqrt[3]{\ln(1+x^2)} dx,$$

$$I_2 = \int_1^2 \sqrt[3]{x^2} dx.$$

$$2a.4 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tgx + 2\sinx} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3x} dx.$$

$$2a.5 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{tgx} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{8\sinx - 3\sqrt{3}} dx.$$

$$2a.6 \quad I_1 = \int_{-1}^2 \sqrt[3]{5x^4 - 10} dx,$$

$$I_2 = \int_{-1}^2 \sqrt[3]{x^5 + 5x^3 + 1} dx.$$

$$2a.7 \quad I_1 = \int_0^1 \sqrt{x^5 + 5x^3 + 1} dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{5x^4 + 2} dx.$$

$$2a.8 \quad I_1 = \int_2^3 \sqrt{x^6 + 16} dx,$$

$$I_2 = \int_2^3 \sqrt{2x^5 + x^4} dx.$$

$$2a.9 \quad I_1 = \int_0^5 \sqrt[3]{\cos^2x} dx,$$

$$I_2 = \int_0^5 \sqrt[3]{\frac{5}{4} - \sinx} dx.$$

$$2a.10 \quad I_1 = \int_1^3 \sqrt[3]{\sinx - 1} dx,$$

$$I_2 = \int_1^3 \sqrt[3]{\cos^2x} dx.$$

$$2a.11 \quad I_1 = \int_{-2}^1 \sqrt[5]{2\sinx - 2} dx,$$

$$I_2 = \int_{-2}^1 \sqrt[5]{3\cos^2x} dx.$$

$$2a.12 \quad I_1 = \int_0^3 \sqrt[3]{3\cos^2x} dx,$$

$$I_2 = \int_0^3 \sqrt[3]{4 + 2\sinx} dx.$$

$$2a.13 \quad I_1 = \int_0^2 \sqrt[5]{x^4 + \frac{8}{3}x^3} dx,$$

$$I_2 = \int_0^2 \sqrt[5]{2x^2 - 4x + 5} dx.$$

$$2a.14 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{1 - \cosx} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{x\sinx} dx.$$

$$2a.15 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{x\sinx} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - \cosx} dx.$$

$$2a.16 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{tgx} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{8\sinx - 3\sqrt{3}} dx.$$

$$2a.17 \quad I_1 = \int_0^1 \sqrt{x - \frac{x^3}{6}} dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{\sinx} dx.$$

$$2a.18 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sinx} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{x} dx.$$

$$2a.19 \quad I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x} dx,$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2} dx.$$

$$2a.20 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2x - \sin x} dx.$$

$$2a.21 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{x + \frac{x^3}{3}} dx.$$

$$2a.22 \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$2a.23 \quad I_1 = \int_1^2 \sqrt{\ln x} dx,$$

$$I_2 = \int_1^2 \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+1}} dx.$$

$$2a.24 \quad I_1 = \int_0^1 \sqrt[3]{1+x^5} dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^5 + 1\right) dx.$$

$$2a.25 \quad I_1 = \int_0^{\pi} \sqrt[3]{3\cos^2 x} dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sqrt[3]{4 - 2\sin x} dx.$$

$$2a.26 \quad I_1 = \int_2^5 \sqrt[6]{\frac{2(x-1)}{x+1}} dx,$$

$$I_2 = \int_2^5 \sqrt[6]{x} dx.$$

$$2a.27. I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4} dx, I_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx.$$

$$2a.28. I_1 = \int_0^1 x^3 \cos^2 x dx, I_2 = \int_0^1 x^2 \cos^2 x dx.$$

$$2a.29. I_1 = \int_1^e x \ln x dx, I_2 = \int_1^e x \ln^2 x dx.$$

$$2a.30. I_1 = \int_0^1 \sqrt{x} dx, I_2 = \int_0^1 x^3 dx.$$

Завдання 26

Використовуючи грубу оцінку інтеграла, оцінити наступні інтеграли, не обчислюючи їх

$$26.1 \quad I = \int_0^3 \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$26.2 \quad I = \int_0^5 \frac{3x}{x^2 + 1} dx$$

$$26.3 \quad I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} dx$$

$$26.4 \quad I = \int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx$$

$$26.5 \quad I = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \ln(x^2 - 2x + 4) dx$$

$$26.6 \quad I = \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 - x + 1} dx$$

$$26.7 \quad I = \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x}\right)^3 dx$$

$$26.8 \quad I = \int_{-2}^2 \sqrt{4x - x^3} dx$$

$$26.9 \quad I = \int_0^1 (4 - e^{-x^2}) dx$$

$$26.10 \quad I = \int_1^2 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) dx$$

$$26.11 \quad I = \int_{-2}^0 xe^x dx$$

$$26.12 \quad I = \int_{-2}^1 (x-2)e^x dx$$

$$26.13 \quad I = \int_0^3 (x-1)e^{-x} dx$$

$$26.14 \quad I = \int_{-2}^2 \frac{x}{9-x^2} dx$$

$$26.15 \quad I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$$

$$26.16 \quad I = \int_1^3 e^{4x-x^2} dx$$

$$26.17 \quad I = \int_{-3}^{-1} \frac{x^5 - 8}{x^4} dx$$

$$26.18 \quad I = \int_{-1}^2 (e^x + e^{-x}) dx$$

$$26.19 \quad I = \int_{e^{-2}}^1 x \ln x dx$$

$$26.20 \quad I = \int_{-4}^0 x^3 e^{x+1} dx$$

$$26.21 \quad I = \int_{-1}^3 \left(x^2 - 2x + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$26.22 \quad I = \int_{-\frac{4}{5}}^3 (x+1) \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$26.23 \quad I = \int_{-3}^3 e^{6x-x^2} dx$$

$$26.24 \quad I = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$26.25 \quad I = \int_{-3}^1 (3x^4 - 16x^3 + 2) dx$$

$$26.26 \quad I = \int_{-1}^2 (x^5 - 5x^4 + 5x^3) dx$$

$$26.27 \quad I = \int_0^5 (3-x)e^{-x} dx$$

$$26.28 \quad I = \int_0^3 \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$26.29 \quad I = \int_{-1}^4 (108x - x^4) dx$$

$$26.30 \quad I = \int_{16}^{20} \left(\frac{1}{4}x^4 - 6x^3 + 7 \right) dx$$

$$26.31. I = \int_1^3 \sqrt{3+x^2} dx.$$

$$26.32. I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$26.33. I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx$$

$$26.34. I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 2\cos x}.$$

$$26.35. I = \int_0^2 \sqrt{9+x^4} dx.$$

$$26.36. I = \int_0^2 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} dx.$$

$$26.37. I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{x} dx.$$

Завдання 2в

Знайти $\Phi'(x)$, якщо

$$2в.1. \Phi(x) = \int_{\sin x}^0 \sqrt{1+t^3} dt.$$

$$2в.2. \Phi(x) = \int_{-x}^{\sqrt{x}} \sqrt{\sin t} dt.$$

$$2в.3. \Phi(x) = \int_1^{\ln x} \operatorname{tg}(t^2 + 1) dt.$$

$$2в.4. \Phi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt \quad (x > 0).$$

$$2в.5. \Phi(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \quad (x > 0).$$

$$2в.6. \Phi(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt.$$

Знайти $y'(x)$ для функції $y = y(x)$, яку задано параметрично

$$2в.7. x = \int_{\sqrt{t}}^1 \sin z^2 dz, y = \int_0^{\ln t} \cos z^3 dz.$$

$$2в.8. x = \int_{\sin t}^{\pi} \ln \sqrt{z+1} dz, y = \int_1^{\operatorname{tg} t} \sqrt{x^3+1} dz.$$

$$2в.9. x = \int_0^{\ln t} \cos z^3 dz; y = \int_{-\cos t}^0 \operatorname{tg} \sqrt{z} dz.$$

$$2\text{в.10. } x = \int_1^{t^3} \sqrt[3]{z} \ln z dz, \quad y = \int_1^3 z^2 \ln z dz. \quad 2\text{в.11. } x = \int_2^t \frac{\ln z}{z} dz, \quad y = \int_5^{\ln t} e^z dz.$$

$$2\text{в.12. } x = \int_{c^2}^{\sin t} \arcsin z dz, \quad y = \int_n^{\sqrt{t}} \frac{\sin z^2}{z} dz.$$

Знайти $y'(x)$ для функції $y = y(x)$, яку задано неявно

$$2\text{в.13. } \int_0^y \sqrt{t^3 + 1} dt + \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt = 0.$$

$$2\text{в.14. } \int_y^1 \ln^3(t^2 + 1) dt + \int_1^{x^2} \sqrt{\sin t + 5} dt = 0.$$

$$2\text{в.15. } \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^{-y} \sqrt{\sin^2 t + 5} dt = 0.$$

$$2\text{в.16. } \int_1^{\ln x} \cos t^3 dt + \int_{-y}^0 \operatorname{tg} \sqrt{y} dt = 0.$$

$$2\text{в.17. } \int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0.$$

$$2\text{в.18. } \int_{\pi/2}^x \sqrt{3 - 2\sin^2 z} dz + \int_0^y \sin^2 t dt = 0.$$

Обчислити

$$2\text{в.19. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

$$2\text{в.20. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \ln^2 t dt}{\int_0^x t^2 dt}.$$

$$2\text{в.21. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x t^3 dt}.$$

$$2\text{В.22. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x (\sin t - t)^{\frac{1}{2}} dt}{\int_1^x t^{\frac{3}{2}} dt}.$$

$$2\text{В.23. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x \ln^2 t dt}.$$

$$2\text{В.24. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{\cos t - 1 + \frac{1}{2}t^2} dt}{\int_0^x t^2 dt}.$$

Знайти точки екстремума наступних функцій

$$2\text{В.25. } \Phi(x) = \int_1^{-x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$2\text{В.26. } \Phi(x) = \int_1^{-x} e^{t^2} \cdot \sqrt[3]{1 - t^2} dt.$$

$$2\text{В.27. } \Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2 - 3t + 2}{1 + t^2} dt.$$

$$2\text{В.28. } \Phi(x) = \int_{\pi/6}^x \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0).$$

$$2\text{В.29. } \Phi(x) = \int_1^x e^{-t^2/2} (1 - t^2) dt.$$

$$2\text{В.30. } \Phi(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t} dt.$$

Завдання 3а

Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, вказавши функцію $f(x)$, для якої S_n є інтегральною сумою при певному виборі поділу $P_\lambda [a, b]$ і застосувавши формулу Ньютона–Лейбніца (1).

$$3\text{а.1) } S_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2}.$$

$$3\text{а.2) } S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

$$3a.3) S_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\sqrt{(5n+1)} + \sqrt{(5n+2)} + \dots + \sqrt{(5n+n)} \right).$$

$$3a.4) S_n = \frac{1}{n^3} \left((3n+1)^2 + (3n+2)^2 + \dots + (3n+n)^2 \right).$$

$$3a.5) S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}.$$

$$3a.6) S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n^2}}.$$

$$3a.7) S_n = \frac{n}{9n^2+1^2} + \frac{n}{9n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{9n^2+n^2}.$$

$$3a.8) S_n = \frac{n}{9n^2-1^2} + \frac{n}{9n^2-2^2} + \dots + \frac{n}{9n^2-n^2}.$$

$$3a.9) S_n = \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^3}.$$

$$3a.10) S_n = \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \dots + \frac{(n-1)^3}{n^4}.$$

$$3a.11) S_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{n+n} \right).$$

$$3a.12) S_n = \frac{1}{n^4} \left((6n+1)^3 + (6n+2)^3 + \dots + (6n+n)^3 \right).$$

$$3a.13) S_n = \frac{1}{\sqrt{9n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{9n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9n^2-n^2}}.$$

$$3a.14) S_n = \frac{1}{\sqrt{9n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{9n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9n^2+n^2}}.$$

$$3a.15) S_n = \frac{n}{4n^2+1^2} + \frac{n}{4n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{4n^2+n^2}.$$

$$3a.16) S_n = \frac{n}{4n^2-1^2} + \frac{n}{4n^2-2^2} + \dots + \frac{n}{4n^2-n^2}.$$

$$3a.17) S_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{3n+n}.$$

$$3a.18) S_n = \frac{n}{(4n+1)^2} + \frac{n}{(4n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(4n+n)^2}.$$

$$3a.19) S_n = \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+1^2} + \sqrt{n^2+2^2} + \dots + \sqrt{n^2+n^2} \right).$$

$$3a.20) S_n = \frac{1}{n^2} (\sqrt{4n^2 - 1^2} + \sqrt{4n^2 - 2^2} + \sqrt{4n^2 - n^2}).$$

$$3a.21) S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+n}} \right).$$

$$3a.22) S_n = \frac{1}{n^2} (\sqrt{9n^2 + 1^2} + \sqrt{9n^2 + 2^2} + \dots + \sqrt{9n^2 + n^2})$$

$$3a.23) S_n = \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}).$$

$$3a.24) S_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} \right).$$

$$3a.25) S_n = \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{n-1}{n} \pi \right).$$

$$3a.26) S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

$$3a.27) S_n = \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2}.$$

$$3a.28) S_n = \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n-1}{n} \pi \right).$$

$$3a.29) S_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$3a.30) S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}.$$

Завдання 36

Знайти середнє значення функції $f(x)$ на $[a, b]$ (див. ВЗ).

$$36.1. f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}, [a; b] = [1; -1].$$

$$36.2. f(x) = \frac{1+\ln x}{x}, [a; b] = [1; e].$$

$$36.3. f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}, [a; b] = [-\pi/4; -\pi/4].$$

$$36.4. f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} dx, [a; b] = [0; 1].$$

$$36.5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}, [a;b]=[0;1].$$

$$36.6. f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, [a;b]=[2;2\sqrt{3}].$$

$$36.7. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}, [a;b]=[0;-2].$$

$$36.8. f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}, [a;b]=[2;4\sqrt{3}].$$

$$36.9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, [a;b]=[\sqrt{3}/3; \sqrt{3}].$$

$$36.9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^2}}, [a;b]=[-2; 2].$$

$$36.10. f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}}, [a;b]=[1;5].$$

$$36.11. f(x) = \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2}, [a;b]=[\ln 2; \ln 6].$$

$$36.12. f(x) = x^2 \sqrt{9-x^2}, [a;b]=[0;3].$$

$$36.13. f(x) = \sqrt{2x+x^2}, [a;b]=[0;1].$$

$$36.14. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}, [a;b]=[0; \pi/4].$$

$$36.15. f(x) = \sqrt{2ax-x^2}, [a;b]=[0;2\pi].$$

$$36.16. f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{c^2-x^2}}, [a;b]=[0;c].$$

$$36.17. f(x) = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}, [a;b]=[1;2].$$

$$36.18. f(x) = \sqrt{\cos x - \cos^3 x}, [a;b]=[-\pi/2; \pi/2].$$

$$36.19. f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, [a;b]=[1;2].$$

$$36.20. f(x) = x \arctg x, [a;b]=[0;3].$$

$$36.21. f(x) = (1 + \ln x)^2, [a;b]=[1;e].$$

$$36.22. f(x) = x e^{-x}, [a;b]=[0;1].$$

$$36.23. f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}, [a;b]=[\pi/4; \pi/3].$$

36.24. $f(x) = x \ln x$, $[a; b] = [1; 2]$.

36.25. $f(x) = \ln x$, $[a; b] = [1; 3]$.

36.26. $f(x) = \cos^2 x$, $[a, b] = [0, \pi]$.

36.27. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $[a, b] = [0, 1]$.

36.28. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $[a, b] = [0, \pi/4]$.

36.29. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[a, b] = [0, 1]$.

Завдання 3в

Використовуючи теорему про середнє (ВЗ), оцінити інтеграли

3в.1. $I = \int_0^1 \sin x \sqrt{1+x} dx$.

3в.2. $I = \int_0^1 \cos x \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$.

3в.3. $I = \int_1^e \sin x \frac{1+\ln x}{x} dx$.

3в.4. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$.

3в.5. $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx$.

3в.6. $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$.

3в.7. $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

3в.8. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx$.

3в.9. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{x^2+1} dx$.

$$3\theta.10. I = \int_2^3 \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$3\theta.11. I = \int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}} dx.$$

$$3\theta.12. I = \int_2^3 e^x \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$$

$$3\theta.13. I = \int_1^2 \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$$

$$3\theta.14. I = \int_0^1 \frac{\cos x}{(4+x^2)^2} dx.$$

$$3\theta.15. I = \int_1^5 \frac{\ln(x+1)}{x+\sqrt{2x-1}} dx.$$

$$3\theta.16. I = \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{x e^x \sqrt{e^x-2}}{e^x+2} dx.$$

$$3\theta.17. I = \int_0^3 e^x x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$3\theta.18. I = \int_0^1 \sin x \sqrt{2x+x^2} dx.$$

$$3\theta.19. I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx.$$

$$3\theta.20. I = \int_0^1 \cos x \sqrt{2x-x^2} dx.$$

$$3\theta.21. I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x+\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$3в.22. I = \int_1^2 \frac{2^x}{x\sqrt{1+x^4}} dx.$$

$$3в.23. I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

$$3в.24. I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x \ln(x+3)} dx.$$

$$3в.25. I = \int_1^3 e^x \ln x dx.$$

$$3в.26. I = \int_0^1 \operatorname{sh} x \operatorname{arcsin} x dx.$$

$$3в.27. I = \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \sin 2x} dx.$$

$$3в.28. I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx.$$

$$3в.29. I = \int_0^1 \sqrt{3+x^2} dx.$$

$$3в.30. I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+2\sin^2 x} dx.$$

$$3в.31. I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$$

$$3в.32. I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

$$3в.33. I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}.$$

$$3в.34. I = \int_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)} dx.$$

$$3в.35. I = \int_0^1 \sqrt{(4+x^3)x} dx.$$

Завдання 4

Обчислити наступні інтеграли

1. $\int_{2\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.
2. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}$.
3. $\int_2^{4\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.
4. $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
5. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}$.
6. $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}$.
7. $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x-2} dx}{e^x+2}$.
8. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$.
9. $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx$.
10. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$.
11. $\int_0^{2\pi} \sqrt{2ax-x^2} dx$.
12. $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2-x^2}}$.
13. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}$.
14. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.
15. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.
16. $\int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx$.
17. $\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$.
18. $\int_0^1 x e^{-x} dx$.
19. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$.
20. $\int_1^2 x \ln x dx$.
21. $\int_1^3 \ln x dx$.
22. $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$.
23. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$.
24. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$.
25. $\int_1^e \sin(\ln x) dx$.

Використовуючи **B5** визначеного інтеграла, обчислити

26. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$.
27. $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}) \arcsin x dx$.
28. $\int_{-2}^2 (x^5 + 5x^4 - 3x^3 + x) dx$.
29. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^4 \sin x) dx$.
30. $\int_{-2\pi}^{2\pi} x^4 \sin^3 x dx$.
31. $\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x dx$.
32. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\sin 2x + \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x) dx$.
33. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 4}{\cos^2 x} dx$.

Завдання 5

Довести наступні рівності

1. $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$.
2. $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.

$$3. \int_0^{\pi} x \sin^m x dx = \begin{cases} \frac{\pi^2 (m-1)!!}{2 m!!}, & \text{якщо } m \text{ парне} \\ \pi \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{якщо } m \text{ непарне.} \end{cases}$$

$$4. \int_0^1 x^m (\ln x)^n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad m > 0, n = 1, 2, \dots$$

Застосувавши формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити наступні інтеграли

$$5. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx. \quad 6. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx. \quad 7. \int_{-1}^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}. \quad 8. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$9. \int_{-\pi/4}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}. \quad 10. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}. \quad 11. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

Обчислити наступні інтеграли

$$12. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx. \quad 13. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1}. \quad 14. \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

$$15. \int_1^9 x^3 \sqrt{1-x} dx. \quad 16. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \quad 17. \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$$

$$18. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx. \quad 19. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$$

$$20. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}. \quad 21. \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$22. \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx. \quad 23. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx. \quad 24. \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x dx.$$

$$25. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx. \quad 26. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx. \quad 27. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$28. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx. \quad 29. \int_0^1 \operatorname{ch} x dx. \quad 30. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$31. \int_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x dx. \quad 32. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x dx.$$

Завдання 6

(границю області задано явно або неявно)

Знайти площу плоскої фігури, обмеженої

- лініями $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$;
- лініями $x = 2$, $y^2 = x^3 - x^2$;
- двома гілками кривої $x^3 = (y - x)^2$ і прямою $x = 1$;
- кривою $y^2 = (1 - x^2)^3$;
- параболою $y = 3 - 2x - x^2$, дотичною до неї у точці $M(2, -5)$ і віссю ординат;
- петлею лінії $4(y^2 - x^2) = x^3$
- кривою $y^2 = x^2(1 - x^2)$;
- кривою $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, віссю Ox і двома ординатами, які відповідають точкам мінімуму функції;
- кривою $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ і віссю Ox ;
- частинами еліпса $x^2 + 4y^2 = 8$, які відрізані гіперболою $x^2 - 3y^2 = 1$ і не містять початку координат;
- лінією $x^2 y^2 = 4(x - 1)$ і прямою, яка проходить через її точки перегину (скінченну частину);
- лініями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ і віссю Ox ;
- лінією $x - x^2 = (y - \arcsin x)^2$;
- лініями $y = 2x^2 e^x$, $y = -x^3 e^x$ (скінченної частини);
- лініями $y = (x + 1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$, $(0 \leq y \leq 1)$;
- лінією $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$, $(a > 0)$;
- лініями $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$, $(a, x > 0)$ і віссю Oy ;
- лінією $y^2 = x - x^2 \sqrt{x}$ і віссю абсцис;
- лініями $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $(0 \leq x \leq \pi)$;
- лінією $y^2 = x(1 - x)^2$;
- лініями $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$, $y^2 + x^2 = 3a^2$, $(a > 0; x, y \geq 0)$;
- лініями $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
- кривими $y = (x - 2)^3$, $y = 4x - 8$;
- кривими $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$;
- кривими $y = x^2 \cos x$, $y = 0$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$;
- кривими $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x \in [0, 3]$;
- кривими $y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$;
- кривими $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $(0 < x < 2)$;

29. кривими $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y = 0, (0 < x < e^3);$

30. кривими $y = \arccos x, y = 0, x = 0.$

Завдання 7

(Границю області задано параметрично)

Знайти площу плоскої фігури, обмеженої

1. кривою $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi);$
2. кривою $x = a \sin t, y = b \sin 2t (a, b > 0, 0 \leq t \leq 2\pi);$
3. петлею кривої $x = \frac{1}{3}t(3 - t^2), y = t^2;$
4. петлею кривої $x = a(t^2 + 1), y = b(t^3 - 3t), (a, b > 0);$
5. однією аркою циклоїди $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ і віссю $Ox;$
6. кривою $x = a \cos t, y = b \sin t (a, b > 0);$
7. кривою $x = a \sin t, y = b \cos t (a, b > 0);$
8. кривою $x = a \cos t, y = b \sin t \cos^2 t;$
9. кривою $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t;$
10. петлею кривої $y = b(t^3 - 3t), x = a(t^2 + 1), (a, b > 0);$
11. кривою $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}, (a > 0).$
12.
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} (\cos t)^3, \\ y = 2\sqrt{2} (\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 2$$
13.
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 2$$
14.
$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 4 (0 < x < 8\pi)$$
15.
$$\begin{cases} x = 16 (\cos t)^3, \\ y = 2(\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 2$$
16.
$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \quad y = 3$$
17.
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad (0 < x < 4\pi)$$
18.
$$\begin{cases} x = 16 (\cos t)^3, \\ y = (\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 6\sqrt{3}$$
19.
$$\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad x = \sqrt{3}$$

20.
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3 \quad (0 < x < 6\pi)$$
21.
$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}(\cos t)^3, \\ y = \sqrt{2}(\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 4$$
22.
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 3$$
23.
$$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 9 \quad (0 < x < 12\pi)$$
24.
$$\begin{cases} x = 32(\cos t)^3, \\ y = (\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 4$$
25.
$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad y = 4$$
26.
$$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 6 \quad (0 < x < 12\pi)$$
27.
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}(\cos t)^3, \\ y = 2\sqrt{2}(\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 2$$
28.
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 2$$
29.
$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 4 \quad (0 < x < 8\pi)$$
30.
$$\begin{cases} x = 16(\cos t)^3, \\ y = 2(\sin t)^3, \end{cases} \quad x = 2$$

Завдання 8

(Границю області задано у полярній системі координат)

Знайти площу плоскої фігури, обмеженої

1. кривою $\rho = 2a \cos 3\varphi$ і лежить зовні кола $\rho = a$;
2. кривими $\rho = 3\sqrt{2}a \cos \varphi$, $\rho = 3a \sin \varphi$, ($a > 0$);
3. одним листком кривої $\rho = a \cos 2\varphi$, ($a > 0$);
4. частиною кардіоїди $\rho = a(1 - \cos \varphi)$, яка лежить всередині кола $\rho = a \cos \varphi$, ($a > 0$);
5. кривою $\rho = a \cos^3 \varphi$, ($a > 0$);
6. кривою $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, яка лежить всередині кола $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

7. кривою $\rho = a \sin 3\varphi, (a > 0)$;
8. кривою $\rho = 3 + 2 \cos \varphi$;
9. кривою $\rho = a \sin 5\varphi, (a > 0)$;
10. кривою $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi, (a > 0)$;
11. кривою $\rho = 1 + \cos \varphi$, яка лежить всередині кола $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$;
12. кривими $\rho = a \cos \varphi, \rho = 2a \cos \varphi, (a > 0)$;
13. кривими $\rho = 1 + \cos \varphi, \rho = \sqrt{3} \sin \varphi$, яка лежить зовні кардіоїди;
14. кривою $\rho^2 = a^2 \sin 4\varphi, (a > 0)$;
15. кривими $\rho = 3 + \cos 4\varphi, \rho = 2 - \cos 4\varphi$ (їх спільної частини);
16. кривими $\rho = a^2 \operatorname{tg} \varphi, \varphi = \frac{\pi}{4}, (a > 0)$;
17. кривою $\rho = 3 + \cos \varphi$;
18. кривими $\rho = 2 - \cos \varphi, \rho = \cos \varphi$;
19. кривою $\rho = a(1 + \cos \varphi), (a > 0)$;
20. кривою $\rho = 2(1 + \sin \varphi)$.
21. кривою $\rho = 4 \cos 3\varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2)$
22. кривою $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi$
23. кривою $\rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2)$
24. кривою $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi$
25. кривою $\rho = \cos \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$
26. кривою $\rho = \sin \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \left(0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right)$
27. кривою $\rho = \frac{1}{2} + \sin \varphi$
28. кривою $\rho = \sin 6\varphi$
29. кривою $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi$
30. кривою $\rho = \cos \varphi - \sin \varphi$

Завдання 9

Знайти об'єми тіл, які утворені обертанням

1. кривої $(x-1)^2 + y^2 = 1$ навколо осі Oy ;
2. кривої $x^4 + y^4 = a^2 x^2, (a > 0)$ навколо осі Ox ;
3. кривої $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$ навколо осі Ox ;
4. кривої $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), (a > 0)$ навколо осі Ox ;
5. кривої $x^4 + y^4 = x^3$ навколо осі Ox ;
6. фігури, обмеженої лініями $y^2 = x, y = x^2$ навколо осі Ox ;
7. фігури, обмеженої лініями $y = \frac{64}{x^2 + 16}, x^2 = 8y$ навколо осі Ox ;
8. фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}e^x, y = 0, x = 1$ навколо осі Ox ;

9. фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{x^2}{8}$ навколо осі Ox ;
10. фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{2x} + 1$, $x = 0$ навколо осі Ox ;
11. фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, якщо $0 \leq x \leq \pi$ навколо осі Oy ;
12. фігури, обмеженої лінією $y = \arcsin x$, якщо $0 \leq x \leq 1$ навколо осі Ox ;
13. фігури, обмеженої лінією $x = at^2$, $y = a \ln t$, ($a > 0$) і осями координат навколо осі Ox ;
14. кривої $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ($a > 0$) навколо осі Ox ;
15. кривої $\rho = a \sin^2 \varphi$ навколо полярної осі;
16. кривої $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ навколо полярної осі;
17. фігури, обмеженої лінією $x = a \cos t$, $y = a \sin 2t$, якщо $0 \leq x \leq a$ навколо осі Ox ;
18. фігури, обмеженої лінією $x = a \cos t$, $y = a \sin 2t$, якщо $0 \leq x \leq a$ навколо осі Oy ;
19. кривої $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ($a > 0$) навколо осі Ox ;
20. кривої $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ($a > 0$) навколо осі Oy ;
21. фігури, обмеженої лініями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, якщо $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$ навколо осі Ox ;
22. фігури, обмеженої лініями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, якщо $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$ навколо осі Oy ;
23. кривої $x = 4 \sin t$, $y = \sin 2t$ навколо осі Ox ;
24. кривої $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ навколо полярної осі.
25. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0$, $y^2 = 4 - x$, навколо осі Ox .
26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0$, $y = 0$, $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{2}$, навколо осі Ox .
27. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \sin x$, $y = 3 \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, навколо осі Ox .
28. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0$, $y = 5 \cos x$, $y = \cos x$, $x \geq 0$, навколо осі Ox .
29. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$ навколо осі Ox .
30. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $x^2 = 4 + y$, $y = 2$, навколо осі Oy .

Завдання 10

Знайти довжину

1. астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ($a > 0$);
2. кардіоїди $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$;
3. однієї арки циклоїди $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$;

4. дуги кривої $y = \ln \sin x$, якщо $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
5. дуги кривої $\rho = a \sin \varphi$;
6. дуги кривої $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, якщо $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$;
7. дуги кривої $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, якщо $0 \leq t \leq \ln \pi$;
8. дуги кривої $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$;
9. петлі лінії $9ay^2 = x(x - 3a)^2$;
10. петлі лінії $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$;
11. дуги кривої $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, ($a > 0$);
12. дуги кривої $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$, якщо $0 \leq t \leq 3$;
13. дуги кривої $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, якщо $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $a > 0$;
14. дуги кривої $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, яка лежить всередині кола $\rho = 1$;
15. дуги кривої $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, якщо $0 \leq \varphi \leq 3\pi$, $a > 0$;
16. дуги кривої $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$, ($a > 0$);
17. петлі лінії $x = a(t^2 - 1)$, $y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$, $a > 0$;
18. дуги кривої $y = \ln(2 \cos x)$ між сусідніми точками перетину з осями координат;
19. половину петлі лінії $3y^2 = x(x - 1)^2$ між точками перетину з віссю Ox ;
20. петлі лінії $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$;
21. дуги лінії $\rho = 2a(\sin \varphi + \cos \varphi)$, ($a > 0$);
22. дуги лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, якщо $0 \leq t \leq 1$;
23. дуги лінії $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$, якщо $0 \leq t \leq \pi$, $R > 0$;
24. дуги $\rho = \frac{1}{\varphi}$, якщо $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$;
25. дуги кривої $y = \ln x$, якщо $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$;
26. дуги кривої $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$, якщо $0 \leq x \leq 4$;
27. дуги кривої $y = \ln(1 - x^2)$, якщо $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$;
28. дуги кривої $y = \arcsin(e^{-x})$, якщо $0 \leq x \leq 1$;
29. дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, якщо $1 \leq y \leq e$;

30. дуги кривої $x = a \sin^5 t, y = a \cos^5 t$, якщо $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
31. дуги кривої $y = \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x}$, якщо $1 \leq x \leq 2$.

Завдання 11

Знайти площу поверхні обертання навколо

1. осі Ox кривої $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$;
2. осі Oy кривої $4x^2 + y^2 = 4$;
3. осі Oy петлі кривої $9ax^2 = y(3a - y)^2, (a > 0)$;
4. осі Ox кривої $8y^2 = x^2 - x^4$;
5. осі Ox петлі кривої $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$;
6. полярної осі кривої $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, (a > 0)$;
7. осі Ox кривої $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$, якщо $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
8. осі Ox дуги кривої $x = \frac{t^3}{3}, y = 4 - \frac{t^2}{2}$ між точками перетину її з осями координат;
9. полярної осі кривої $\rho = 2a \sin \varphi, (a > 0)$;
10. осі Ox кривої $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (a > 0)$, якщо $0 \leq t \leq 2\pi$;
11. осі Oy кривої $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (a > 0)$, якщо $0 \leq t \leq 2\pi$;
12. осі Ox кривої $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, (a > 0)$;
13. полярної осі кривої $\rho = a(1 + \cos \varphi), (a > 0)$;
14. осі Ox кривої $9ay^2 = x(3a - x)^2, (a > 0)$;
15. осі Oy кривої $9ay^2 = x(3a - x)^2, (a > 0)$;
16. осі Ox кривої $x = a(t^2 + 1), y = \frac{at}{3}(3 - t^2), (a > 0)$, якщо $0 \leq t \leq 2\pi$;
17. осі Ox кривої $x = a \cos t, y = b \sin t, (0 < b < a)$;
18. осі Ox кривої $x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.
19. осі Ox кривої $x = \cos t, y = 1 + \sin t$.
20. осі Oy кривої $x^2 = 4 + y, y = 2$.
21. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{1}{3}x^3, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, навколо осі Ox .
22. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 2 \cos \varphi$, навколо полярної осі.
23. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, навколо осі Ox .

24. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{1}{2}x^2, y \leq \frac{3}{2}$, навколо осі Оу.
25. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $3y = x^2, (0 \leq x \leq 2)$, навколо осі Ох.
26. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \sqrt{x}, y = x$, навколо осі Ох.
27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, навколо осі Ох.
28. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 10 \cos t, y = 3 + \sin t$, навколо осі Ох.
29. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $3x = y^3, (0 \leq y \leq 2)$ навколо осі Оу.
30. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{1}{3}x^3, x \in [-1; 1]$ навколо осі Ох.
31. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \cos t, y = 1 + \sin t$ навколо осі Ох.
32. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x^2 = 4 + y, y = 2$, навколо осі Оу.

Завдання 12

Знайти масу (заряд), розподілену вздовж дуги Γ , якщо задана густина розподілу маси (заряду) $\gamma = \gamma(M), M \in \Gamma$,

1. Γ – відрізок прямої $y = x$ між точками $A(0,0)$ та $B(1,1)$, $\gamma(x, y) = x$.
2. Γ – верхня половина кола $x^2 + y^2 = a^2$ між точками $A(a,0)$ та $B(-a,0)$, $(a > 0)$, $\gamma(x, y) = y^2$.
3. Γ – дуга параболи $y^2 = 2x$ між точками $A(0,0)$ та $B(4, \sqrt{8})$, $\gamma(x, y) = y$.
4. Γ – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0)$, $\gamma(x, y) = \sqrt{2y}$.
5. Γ – дуга кривої $x = \ln(1 + t^2), y = 3 - t + 2 \arctg t$ між точками, які відповідають $t_1 = 0, t_2 = 1$, $\gamma(x, y) = ye^{-x}$.
6. Γ – відрізок прямої $y = \frac{x}{2} - 2$ між точками $A(0, -2)$ та $B(4, 0)$, $\gamma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
7. Γ – контур прямокутника зі сторонами, які утворені прямими $x = 0, y = 0, x = 4, y = 2$, $\gamma(x, y) = xy$.
8. Γ – контур трикутника з вершинами у точках $O(0,0), A(1,0)$ та $B(0,1)$, $\gamma(x, y) = x + y$.
9. Γ – дуга гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від точки $A(\varphi = \sqrt{3})$ до $B(\varphi = 2\sqrt{2})$, $\gamma(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$.
10. Γ – дуга циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0)$ між точками $A(t = 0)$ та $B(t = 2\pi)$, $\gamma(x, y) = y^2$.

11. Γ – дуга кривої $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), (a > 0)$ між точками $A(t = 0)$ та $B(t = 2\pi)$, $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$.
12. Γ – дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{k\varphi}, (a, k > 0)$, яка лежить всередині кола $\rho = a$, $\gamma(x, y) = x$.
13. Γ – дуга кривої $x = t, y = \frac{\sqrt{8t^3}}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ між точками $A(t = 0)$ та $B(t = 1)$, $\gamma(x, y, z) = xyz$.
14. Γ – дуга спіралі $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, (a, b > 0)$ між точками $A(t = 0)$ та $B(t = 2\pi)$, $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
15. Γ – коло $x^2 + y^2 = ax, (a > 0)$, $\gamma(x, y) = x - y$
16. Γ – коло, що є перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a > 0), x + y + z = 0$, $\gamma(x, y, z) = x^2$.

Знайти координати центра мас

17. однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (a > 0), 0 \leq t \leq 2\pi$;
18. однорідного півкола $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$;
19. однорідної дуги ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, (0 \leq x \leq a)$;
20. однорідної дуги астроїди $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (a > 0)$, що лежить вище осі Ox .

Знайти статичний момент

21. верхньої частини еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$, відносно осі Ox ;
22. дуги параболи $y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 2, y > 0$, відносно осі Ox ;
23. дуги параболи $y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 2, y > 0$, відносно осі Oy ;
24. дуги кривої $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, відносно осі Ox ;
25. фігури, обмеженої лініями $y = x^2, y = \sqrt{x}$, відносно осі Ox ;

Знайти момент інерції

26. дуги кола $x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0$, відносно осі Oy ;

27. дуги ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$, відносно осі Ox ;

28. дуги ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$, відносно осі Oy ;

29. користуючись теоремою Гульдіна, знайти центр мас дуги астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

30. користуючись теоремою Гульдіна, знайти центр мас фігури, обмеженої віссю Ox і однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Завдання 13

Користуючись означенням і формулою Ньютона-Лейбніца знайти значення невластивого інтегралу

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

3. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$

4. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$

5. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)}$

6. $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 3x dx.$

7. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}}$

8. $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cos x dx.$

9. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x/2} dx.$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x+1)^3}$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

12. $\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin 3x dx.$

13. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

14. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e x (\ln x)^{3/2}}.$

15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2+x-x^2}.$

16. $\int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx$

17. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

18. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$

19. $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

20. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(\ln x) \ln x}$

21. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx.$

22. $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-3)^2}}$

23. $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$

24. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

25. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

26. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos 3x dx$

27. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$

28. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x} + e^{-x}}.$

29. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1+x^2}}.$

30. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$

Завдання 14

Користуючись означенням і формулою *Ньютона-Лейбніца* знайти значення невластивого інтегралу

1. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

2. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}$

3. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

4. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$

5. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

6. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

7. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$

8. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

9. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

11. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

12. $\int_0^1 \ln^2 x dx$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

14. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

16. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$
17. $\int_{-3}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$
18. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$
19. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$
20. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$
21. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$
22. $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x+1} dx$
23. $\int_0^1 x \ln x dx$
24. $\int_1^2 \ln(x^2-1) dx$
25. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^3 x dx$
26. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
27. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$
28. $\int_4^5 \frac{xdx}{\sqrt{5-x}}$
29. $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$
30. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

Завдання 15

Дослідити на збіжність наступні інтеграли.

1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x}} dx.$
2. $\int_1^{\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$
3. $\int_{10}^{\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\pi \sin \sqrt{\frac{1}{x}}} dx.$
4. $\int_4^{\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\pi \sqrt{x}} dx.$
5. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x \sqrt{x}} dx.$
6. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx.$
7. $\int_1^{\infty} \frac{x + \sqrt[3]{2+x}}{x^2 + 3x + 5} dx.$
8. $\int_1^{\infty} \ln \left(\frac{e^{1/x} + 2}{3} \right) dx.$
9. $\int_1^{\infty} \frac{1 - 3 \sin x}{x^2 + 3\sqrt{x}} dx.$
10. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x + 1}}$
11. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos 3x dx$
12. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$
13. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
14. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$
15. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5 + x}}.$
16. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{e^{3x} - 1}}.$
17. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$
18. $\int_0^{\infty} x e^{-2x} \sin x dx.$
19. $\int_1^{\infty} \frac{x \cos 2x}{1 + x^2} dx.$
20. $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\cos 2x}{x^2} dx.$
21. $\int_0^{\infty} \frac{\sin(1+x)}{x^2} dx.$
22. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x + 5}$
23. $\int_1^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$
24. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x} + e^{-x}}$
25. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
26. $\int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x} \right) dx.$
27. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sin^2 x}.$
28. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx.$
29. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3} + \sqrt{x}}{x^4 + 4x^3 + 2} dx.$
30. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x}$

Завдання 16

Дослідити на збіжність наступні інтеграли.

1. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$
2. $\int_0^3 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{e^{\sin x} - 1} dx$
3. $\int_0^1 \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$
4. $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x} - \sin x} dx$
5. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

6.
$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{e^{3x} - 1}}$$

7.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

8.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

9.
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

10.
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1-x^2} dx$$

11.
$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$$

12.
$$\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$$

13.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1+x)}}$$

14.
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

15.
$$\int_0^1 \frac{dx}{(e^x - 1)^2}$$

16.
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$$

17.
$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

18.
$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^4)^5}}$$

19.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$$

20.
$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

21.
$$\int_2^4 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^4-16}}$$

22.
$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x} dx}{x-\pi}$$

$$23. \int_1^3 \frac{\cos x + 2}{(x-1)^2} dx$$

$$24. \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{x} dx}{x^3 + 1}$$

$$25. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

$$26. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$27. \int_2^{\pi} \frac{dx}{(x+5) \ln x}$$

$$28. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{x^3} dx$$

$$29. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

$$30. \int_0^1 \ln^2 x dx$$

Завдання 17

Дослідити на абсолютну і умовну збіжність інтеграли

$$1. \int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^3 \sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{5+x^2} dx.$$

$$3. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{5/2}} dx.$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx.$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$7. \int_1^{\infty} \frac{x \sin x - \cos x}{x^2} \cos x dx.$$

$$8. \int_1^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

$$9. \int_0^{\infty} \frac{e^x \sin x}{x(e^x - 1)} dx.$$

$$10. \int_0^{\infty} \cos x^3 dx.$$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx.$$

$$12. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$13. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} dx.$$

$$14. \int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx.$$

$$15. \int_0^{\infty} (e^x + x) \sin(e^{2x}) dx.$$

16. $\int_1^{\infty} e^{\cos x} \frac{\sin x}{x + \sin x} dx.$ 17. $\int_0^{\infty} \sin x^3 dx.$ 18. $\int_1^{\infty} \frac{1 - 4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx.$
19. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+4}} dx.$ 20. $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx.$ 21. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+4}} dx.$
22. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{5 + x^2} dx.$ 23. $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{5/2}} dx.$ 24. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{5 + x^2} dx.$
25. $\int_0^{\infty} \frac{e^x \cos x}{x(e^x - 1)} dx.$ 26. $\int_0^{\infty} \sin x^3 dx.$ 27. $\int_0^{\infty} \frac{e^x \cos x}{x(e^x - 1)} dx.$
28. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{2x+1}} dx.$ 29. $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx.$ 30. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{2x+1}} dx.$

Завдання 18

Довести збіжність наступних інтегралів і знайти їх наближені значення, користуючись таблицею гама-функцій.

1. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^2} dx.$ 2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$ 3. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3} dx.$
4. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$ 5. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx.$ 6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}}.$
7. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$ 8. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} dx.$ 9. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx.$
10. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$

Знайти площу фігури, обмеженої кривою

11. $(x^2 + y^2)^6 = x^4 y^2.$ 12. $(x^2 + y^2)^4 = xy^3.$ 23.
13. $(x^2 + y^2)^6 = 8x^2 y^4$ 14. $(x^2 + y^2)^3 = 4ax^2 y^2$
15. $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2 y.$ 16. $(x^2 + y^2)^4 = 16xy^3.$

$$17. (x^2 + y^2)^6 = y^4 x^2 \quad 18. (x^2 + y^2)^4 = yx^3$$

$$19. (x^2 + y^2)^6 = 8y^2 x^4 \quad 20. (x^2 + y^2)^3 = 4ay^2 x^2$$

$$21. (x^2 + y^2)^3 = 8y^2 x \quad 22. (x^2 + y^2)^4 = 16yx^3$$

Знайти об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лінією

$$23. (x^2 + y^2)^6 = 16x^2 y^4 \text{ навколо осі } Ox.$$

$$24. (x^2 + y^2)^6 = 16x^3 y^3 \text{ навколо осі } Ox.$$

$$25. (x^2 + y^2)^6 = 16x^5 y^5 \text{ навколо осі } Ox.$$

$$26. (x^2 + y^2)^3 = y^3 \text{ навколо осі } Oy.$$

$$27. (x^2 + y^2)^6 = 16y^2 x^4 \text{ навколо осі } Ox.$$

$$28. (x^2 + y^2)^6 = 16y^3 x^3 \text{ навколо осі } Ox.$$

$$29. (x^2 + y^2)^6 = 16x^5 y^5 \text{ навколо осі } Ox.$$

$$30. (x^2 + y^2)^3 = x^3 \text{ навколо осі } Oy.$$

Відповіді

Завдання 1

$$1.1 \quad e^2 - 1; \quad 1.2 \quad \frac{1}{2}(e^2 - 1); \quad 1.3 \quad \frac{1}{2}(e^4 - 1); \quad 1.4 \quad \frac{1}{3}; \quad 1.5 \quad \frac{37}{5};$$

$$1.6 \frac{2}{3}; \quad 1.7 \ln 2; \quad 1.8 \ln \frac{3}{2}; \quad 1.9 \ln 2; \quad 1.10 \div 15, \frac{255}{4}.$$

Завдання 2

$$2.1 I_1 > I_2; \quad 2.2 I_2 > I_1; \quad 2.3 I_1 > I_2; \quad 2.4 I_1 > I_2;$$

$$2.5 4 \leq I \leq 2\sqrt{30}; \quad 2.6 \frac{\sqrt{3}}{8} \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{6}; \quad 2.7 2 \leq I \leq \sqrt{7}; \quad 2.8 \frac{\pi}{6} \leq I \leq \frac{\pi}{4};$$

$$21 \quad 6 \leq I \leq 10\pi; \quad 210 \quad \frac{3}{4} \leq I \leq \frac{6}{7}\pi; \quad 211 \quad 0 \leq I \leq 1\pi;$$

$$2.12 \Phi'(x) = (9x^2 - 4x)\ln x; \quad 2.13 \Phi'(x) = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x;$$

$$2.14 \Phi'(x) = -\sqrt{1+x^4}; \quad 2.15 y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -36t^2 \sqrt{t}, (t > 0);$$

$$2.16 y'(x) = \frac{t}{\ln t}, (t > 0); \quad 2.17 y'(x) = \frac{\operatorname{tg} t}{t^2}, (t > 0); \quad 2.18 y'(x) = -2xe^{y^2} \sin^2 x^2;$$

$$2.19 y'(x) = -\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}; \quad 2.20 0; \quad 2.21 x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.22 \max \Phi(x) = \Phi(x=1), \min \Phi(x) = \Phi(x=-1);$$

$$2.23 \max \Phi(x) = \Phi(x=\pm 1), \min \Phi(x) = \Phi(x=0, \pm 2).$$

Завдання 3

$$3.1 f(x) = \frac{1}{1+x}, [a, b] = [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2;$$

$$3.2 f(x) = \frac{1}{1+x^2}, [a, b] = [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{4};$$

$$3.3 f(x) = \sin \pi x, [a, b] = [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{\pi};$$

$$3.4 f(x) = \sqrt{1+x}, [a, b] = [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1);$$

$$3.5 f(x) = x, [a, b] = [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}; \quad 3.6 \frac{1}{2}; \quad 3.7 \frac{\pi}{6}; \quad 3.8 \frac{4}{\pi} - 1;$$

$$3.9 \quad \frac{3}{4}; \quad 3.10 \quad 1 \leq I \leq \sqrt{2}; \quad 3.11 \quad 3 < I < 10; \quad 3.12 \quad \frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$3.13 \quad \frac{2\pi}{13} < I < \frac{2\pi}{7}; \quad 3.14 \quad 0 < I < \frac{\pi}{4} \sqrt{5}; \quad 3.15 \quad \frac{2\pi}{\sqrt{7}} < I < \frac{2\pi}{\sqrt{3}};$$

$$3.16 \quad \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) < I < \frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1); \quad 3.17 \quad \frac{4}{3} < I < \frac{2}{3}\sqrt{5}; \quad 3.18 \quad \frac{7}{4};$$

$$3.19 \quad \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1); \quad 3.20 \quad 0; \quad 3.21 \quad \frac{3}{2}; \quad 3.22 \quad \frac{3}{32}(7\sqrt[3]{4}-12);$$

$$3.23 \quad \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}; \quad 3.24 \quad \frac{\pi}{6}.$$

Завдання 4

$$4.1 \quad \frac{\pi}{6}; \quad 4.2 \quad \frac{\pi}{6}; \quad 4.3 \quad \frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi); \quad 4.4 \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \quad 4.5 \quad \frac{1}{32}(\pi+2);$$

$$4.6 \quad 2(\ln 2 - \frac{1}{4}); \quad 4.7 \quad 4 - \pi; \quad 4.8 \quad \frac{81}{16}\pi; \quad 4.9 \quad \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3});$$

$$4.10 \quad \frac{\ln 3}{4}; \quad 4.11 \quad \frac{1}{2}\pi a^2; \quad 4.12 \quad \frac{\pi}{4}; \quad 4.13 \quad \frac{1}{4}\ln \frac{32}{17}; \quad 4.14 \quad \frac{4}{3};$$

$$4.15 \quad \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}; \quad 4.16 \quad 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}; \quad 4.17 \quad 2e - 1; \quad 4.18 \quad 1 - \frac{2}{e};$$

$$4.19 \quad \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}; \quad 4.20 \quad \ln 2 - \frac{3}{4}; \quad 4.21 \quad 3\ln 3 - 2;$$

$$4.22 \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \quad 4.23 \quad \pi^3 - 6\pi; \quad 4.24 \quad \frac{e^\pi - 1}{5}; \quad 4.25 \quad \frac{1}{2}[1 + e(\sin 1 - \cos 1)];$$

$$4.26 \quad 0; \quad 4.27 \quad 0; \quad 4.28 \quad 2^6; \quad 4.29 \quad \frac{\pi}{2}; \quad 4.30 \quad 0; \quad 4.31 \quad 0;$$

$$4.32 \quad 2; \quad 4.33 \quad 8;$$

Завдання 5

5.1 $\frac{315}{26};$

5.2 $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}};$

5.3 $\frac{5}{27}e^3 - \frac{1}{9};$

5.4 $-66\frac{6}{7};$

5.5 $\ln \frac{2}{1+\sqrt{3}};$

5.6 $\frac{29}{270};$

5.7 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3};$

5.8 $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right);$

5.9 $2\pi\sqrt{2};$

5.10 $\frac{1}{6};$

5.11 $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4};$

5.12 $\frac{3}{5}(e^\pi - 1);$

5.13 $\frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024};$

5.14 $1 - \cos 1;$

5.15 $0;$

5.16 $\frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6};$

5.17 $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4};$

5.18 $\operatorname{sh} 1;$

5.19 $\operatorname{th}(\ln 3) - \operatorname{th}(\ln 2) = \frac{1}{5};$

5.20 $-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2\pi;$

5.21 $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Завдання 6

6.1 $\frac{4}{3};$

6.2 $\frac{32}{15};$

6.3 $\frac{9}{5};$

6.4 $\frac{3\pi}{4};$

6.5 $\frac{8}{3};$

6.6 $\frac{128}{15};$

6.7 $\frac{4}{3};$

6.8 $\frac{91}{30};$

6.9 $4;$

6.10 $2\pi - 2\sqrt{3}\ln(2 + \sqrt{3});$

6.11 $8\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right);$

6.12 $\sqrt{2} - 1;$

6.13 $3\pi a^2;$

6.14 $\frac{\pi}{4};$

6.15 $18e^{-2} - 2;$

6.16 $5\pi a^2;$

6.17 $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi};$

6.18 $\frac{4}{3}a;$

6.19 $4\pi;$

6.20 $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{2} - 2 - \ln(1 + \sqrt{2}));$

6.21 $\pi a^2;$

6.22 $\frac{\sqrt{\pi}}{2};$

$$6.23 \frac{a^2}{4}(\pi + 2\ln 2); \quad 6.24 \frac{3}{8}\pi a^2; \quad 6.25 \frac{\pi}{2}; \quad 6.26 \frac{8}{15};$$

$$6.27 a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln a^2\right); \quad 6.28 \frac{a^2}{3}\left(\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - a^2 \ln 2a\right);$$

$$6.29 a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\arcsin \frac{1}{3}\right); \quad 6.30 3 - e.$$

Завдання 7

$$7.1 \frac{3}{8}\pi a^2; \quad 7.2 \frac{8}{3}ab; \quad 7.3 \frac{8}{5}\sqrt{3}; \quad 7.4 \frac{24}{5}ab\sqrt{3}; \quad 7.5 \frac{8}{15};$$

$$7.6 \frac{8}{15}\sqrt{3}; \quad 7.7 12\pi; \quad 7.8 \pi ab; \quad 7.9 \pi ab; \quad 7.10 \frac{1}{4}\pi ab; \quad 7.11 \frac{27}{5};$$

$$7.12 6\pi; \quad 7.13 \frac{24}{5}\sqrt{3}ab; \quad 7.14 \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}; \quad 7.15 \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Завдання 8

$$8.1 a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 8.2 \frac{9a^2}{4}(\pi - \sqrt{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{2}); \quad 8.3 \frac{\pi a^2}{8};$$

$$8.4 a^2\left(\frac{7\pi}{12} - \sqrt{3}\right); \quad 8.5 \frac{5\pi a^2}{32}; \quad 8.6 a^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 8.7 \frac{\pi a^2}{4};$$

$$8.8 11\pi; \quad 8.9 \frac{\pi a^2}{4}; \quad 8.10 2a^2; \quad 8.11 \frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3}); \quad 8.12 \frac{3\pi a^2}{4};$$

$$8.13 \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad 8.14 a^2; \quad 8.15 \frac{37}{6}\pi - 5\sqrt{3}; \quad 8.16 \frac{a^4}{8}(4 - \pi); \quad 8.17 \frac{19\pi}{2};$$

$$8.18 \frac{17\pi}{4}; \quad 8.19 \frac{3\pi a^2}{2}; \quad 8.20 6\pi.$$

Завдання 9

$$9.1 2\pi^2; \quad 9.2 \frac{2\pi a^3}{3}; \quad 9.3 \frac{4}{3}\pi ab^2; \quad 9.4 \pi a^3(\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3});$$

$$9.5 \frac{\pi^2}{16}; \quad 9.6 \frac{8\pi}{10}; \quad 9.7 \frac{16\pi}{5}(10\pi + 8); \quad 9.8 \frac{\pi}{4}(e^2 + 1); \quad 9.9 \frac{4\pi}{35};$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{9.10} & \frac{11\pi}{4}; & \mathbf{9.11} \quad \frac{1}{2}\pi^3 - \frac{3}{8}\pi^2; & \mathbf{9.12} \quad \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right); \\
\mathbf{9.13} & \pi a^5 \left(\ln^2 a - \ln a + \frac{1}{2}\right); & \mathbf{9.14} \quad \frac{\pi a^2}{4} \ln \frac{a^4}{e}; & \mathbf{9.15} \quad \frac{32\pi a^3}{105}; & \mathbf{9.16} \quad \frac{64\pi a^3}{105}; \\
\mathbf{9.17} & \frac{8\pi a^3}{3}; & \mathbf{9.18} \quad \frac{8\pi a^3}{15}; & \mathbf{9.19} \quad \frac{\pi^2 a^3}{4}; & \mathbf{9.20} \quad \frac{32\pi}{105}; & \mathbf{9.21} \quad \frac{32\pi}{105}; \\
\mathbf{9.22} & 5\pi^2 a^3; & \mathbf{9.23} \quad 4\pi^3 a^3; & \mathbf{9.24} \quad \frac{64\pi}{15}; & \mathbf{9.25} \quad \frac{\pi a^2}{12} (3\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - 2).
\end{array}$$

Завдання 10

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{10.1} & 6a; & \mathbf{10.2} & 16a; & \mathbf{10.3} & 32; & \mathbf{10.4} & \frac{1}{2} \ln 3; & \mathbf{10.5} & 5\pi; & \mathbf{10.6} & \frac{13}{3}; \\
\mathbf{10.7} & \frac{1}{8}(\pi - 3); & \mathbf{10.8} & \sqrt{2}(\pi - 1); & \mathbf{10.9} & 2; & \mathbf{10.10} & 4a\sqrt{3}; & \mathbf{10.11} & 4\sqrt{3}; \\
\mathbf{10.12} & \frac{3}{2}\pi a; & \mathbf{10.13} & 12; & \mathbf{10.14} & \frac{a}{8}(2\pi + 3\sqrt{3}); & \mathbf{10.15} & 8(2 - \sqrt{3}); & \mathbf{10.16} & \frac{3}{2}\pi a; \\
\mathbf{10.17} & \frac{16}{3}a; & \mathbf{10.18} & 4a\sqrt{3}; & \mathbf{10.19} & 2\ln(2 - \sqrt{3}); & \mathbf{10.20} & \frac{2\sqrt{3}}{3}; & \mathbf{10.21} & 4; \\
\mathbf{10.22} & 2\sqrt{2}\pi a; & \mathbf{10.23} & \sqrt{2}(e - 1); & \mathbf{10.24} & \frac{\pi^2 R}{2}; & \mathbf{10.25} & \frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}; \\
\mathbf{10.26} & 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; & \mathbf{10.27} & 4 \operatorname{sh} 1; & \mathbf{10.28} & \ln 3 - \frac{1}{2}; & \mathbf{10.29} & \ln(e + \sqrt{e^2 - 1}); \\
\mathbf{10.30} & \frac{1}{4}(e^2 + 1); & \mathbf{10.31} & 5a\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3})\right]; & \mathbf{10.32} & 2.
\end{array}$$

Завдання 11

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{11.1} & 2\pi ab \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right), \text{ де } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; & \mathbf{11.2} & 2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right); \\
\mathbf{11.3} & 3\pi a^2; & \mathbf{11.4} & \frac{\pi}{2}; & \mathbf{11.5} & 3\pi; & \mathbf{11.6} & 2\pi a^2(2 - \sqrt{2}); & \mathbf{11.7} & \frac{\pi}{5} 2\sqrt{2}(e^\pi - 2); \\
\mathbf{11.8} & 29,6\pi; & \mathbf{11.9} & 4\pi^2 a^2; & \mathbf{11.10} & \frac{64}{3}\pi a^2; & \mathbf{11.11} & 16\pi^2 a^2; & \mathbf{11.12} & \frac{12}{5}\pi a^2;
\end{array}$$

$$11.13 \frac{32}{5}\pi a^2; \quad 11.14 3\pi a^2; \quad 11.15 \frac{56}{5}\sqrt{3}\pi a^2; \quad 11.16 3\pi a^2;$$

$$11.17 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon, \text{ де } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad 11.18 \frac{128}{5}\pi a^2.$$

Завдання 12

$$12.1 \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 12.2 \frac{\pi a^2}{2}; \quad 12.3 \frac{26}{3}; \quad 12.4 4\pi a\sqrt{a}; \quad 12.5 \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4};$$

$$12.6 \ln \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \quad 12.7 24; \quad 12.8 1+\sqrt{2}; \quad 12.9 \frac{19}{3}; \quad 12.10 \frac{256}{15}a^3;$$

$$12.11 2\pi^2 a^3(1+2\pi^2); \quad 12.12 \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}; \quad 12.13 \frac{16\sqrt{2}}{143};$$

$$12.14 \frac{2}{3}\pi(3a^2+4b^2)\sqrt{a^2+b^2}; \quad 12.15 \pi a^2; \quad 12.16 \frac{2}{3}\pi a^2; \quad 12.17 m=8a, C(\pi a, \frac{4}{3}a);$$

$$12.18 C(0,2); \quad 12.19 x_c = a(1 - \operatorname{th} \frac{1}{2}), y_c = \frac{a}{4} \frac{2 + \operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1}; \quad 12.20 x_c = 0, y_c = \frac{2a}{5};$$

$$12.21 b^2 + \frac{ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon, \text{ де } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad 12.22 M_{Ox} = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1);$$

$$12.23 M_{Oy} = \frac{9}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{16}\ln(2 + \sqrt{5}); \quad 12.24 M_{Ox} = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}); \quad 12.25 0,15;$$

$$12.26 \frac{\pi}{4}R^3; \quad 12.27 I_{Ox} = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1; \quad 12.28 I_{Ox} = 3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1; \quad 12.29 x_c = y_c = \frac{2a}{5};$$

$$12.30 x_c = \pi a, y_c = \frac{5a}{6}.$$

Завдання 13

$$13.1 2; \quad 13.2 \infty; \quad 13.3 \frac{1}{2}; \quad 13.4 1 - \frac{1}{e}; \quad 13.5 \frac{10}{7}; \quad 13.6 0,3; \quad 13.7 2;$$

$$13.8 0,4; \quad 13.9 10; \quad 13.10 6; \quad 13.11 \pi; \quad 13.12 \frac{3}{13}; \quad 13.13 \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; \quad 13.14 2;$$

$$13.15 0; \quad 13.16 2; \quad 13.17 \frac{\pi}{2}; \quad 13.18 \pi; \quad 13.19 3(1 + \sqrt[3]{2}); \quad 13.20 \frac{2}{3}\sqrt[4]{125};$$

13.21 $0,25$; **13.22** $\frac{16}{3}$; **13.23** $6\sqrt[3]{2}$; **13.24** π ; **13.25** $\frac{10}{7}$; **13.26** 2 ;
13.27 $2\operatorname{arctg}\sqrt{e-1}$; **13.28** $\frac{1}{2}$; **13.29** $\frac{1}{2}\ln 3$; **13.30** 2π ; **13.31** $5-6\ln 2$;
13.32 $-\pi\ln\sqrt{2}$; **13.33** $0,1$; **13.34** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; **13.35** $\frac{1}{8}$; **13.36** 1 ;
13.37 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; **13.38** $\frac{9\pi}{2}$; **13.39** π ; **13.40** $\pi+2$;

Завдання 14

14.1 Розб. **14.2** Розб. **14.3** Розб. **14.4** Зб. **14.5** Зб. **14.6** Розб.
14.7 Розб. **14.8** Розб. **14.9** Зб. **14.10** Зб. **14.11** Зб. **14.12** Розб.
14.13 Зб. **14.14** Зб. **14.15** Зб. **14.16** Розб. **14.17** Зб. **14.18** Зб.
14.19 Зб. умов. **14.20** Зб. **14.21** Розб. **14.22** Зб. **14.23** Зб.
14.24 Зб. **14.25** Розб. **14.26** Зб. **14.27** Розб. **14.28** Розб.
14.29 Зб. **14.30** Зб.

Завдання 15

15.1 Зб. абс. **15.2** Зб. умов. **15.3** Зб. умов. **15.4** Зб. умов.
15.5 Зб. умов. **15.6** Зб. умов. **15.7** Зб. умов. **15.8** Зб. умов.
15.9 Зб. умов. **15.10** Зб. умов. **15.11** Зб. абс. **15.12** Зб. умов.
15.13 Зб. умов. **15.14** Зб. умов. **15.15** Зб. умов. **15.16** Зб. умов.
15.17 Зб. умов. **15.18** Зб. абс. **15.19** Зб. умов. **15.20** Зб. абс.

Завдання 16

16.1 $0,128$; **16.2** $3,6$; **16.3** $0,39$; **16.4** $3,14$; **16.5** $1,07$; **16.6** $3,18$;
16.7 $15,9$; **16.8** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$; **16.9** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; **16.10** $\frac{1}{4\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$; **16.11** $\frac{\pi}{3}$;
16.12 $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$; **16.13** $\frac{4\pi}{3}$; **16.14** $\frac{\pi a^2}{2}$; **16.15** $\frac{2\pi}{3}$; **16.16** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; **16.17** $\frac{4\pi}{3}$;
16.18 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; **16.19** $\frac{\pi}{24\sqrt{2}}$; **16.20** $\frac{8\pi}{45}$.

Таблиця гама-функції

(Е. Янке, Ф. Емде, Ф. Лёш "Специальные функции", М. "Наука", стр. 342)

табл. 2

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,0000	1,70	0,9086	2,40	1,2422	3,10	2,198
02	0,9888	72	0,9126	42	1,2586	12	2,240
04	0,9784	74	0,9168	44	1,2756	14	2,284
06	0,9687	76	0,9214	46	1,2930	16	2,330
08	0,9597	78	0,9262	48	1,3109	18	2,376
1,10	0,9514	1,80	0,9314	2,50	1,3293	3,20	2,424
12	0,9436	82	0,9368	52	1,3483	22	2,473
14	0,9364	84	0,9426	54	1,3678	24	2,524
16	0,9298	86	0,9487	56	1,3878	26	2,575
18	0,9237	88	0,9551	58	1,4084	28	2,629
1,20	0,9182	1,90	0,9618	2,60	1,4296	3,30	2,683
22	0,9131	92	0,9688	62	1,4514	32	2,740
24	0,9085	94	0,9761	64	1,4738	34	2,798
26	0,9044	96	0,9837	66	1,4968	36	2,857
28	0,9007	98	0,9917	68	1,5204	38	2,918
1,30	0,8975	2,00	1,0000	2,70	1,5447	3,40	2,981
32	0,8946	02	1,0086	72	1,5696	42	3,046
34	0,8922	04	1,0176	74	1,5953	44	3,112
36	0,8902	06	1,0269	76	1,6216	46	3,181
38	0,8885	08	1,0365	78	1,6487	48	3,251
1,40	0,8873	2,10	1,0465	2,80	1,6765	3,50	3,323
42	0,8864	12	1,0568	82	1,7051	52	3,398
44	0,8858	14	1,0675	84	1,7344	54	3,474

46	0,8856	16	1,0786	86	1,7646	56	3,553
48	0,8858	18	1,0900	88	1,7955	58	3,634
1,50	0,8862	2,20	1,1018	2,90	1,8274	3,60	3,717
52	0,8870	22	1,1140	92	1,8600	62	3,803
54	0,8882	24	1,1266	94	1,8936	64	3,891
56	0,8896	26	1,1395	96	1,9281	66	3,981
58	0,8914	28	1,1529	98	1,9336	68	4,075
1,60	0,8935	2,30	1,1676	3,00	2,0000	3,70	4,171
62	0,8959	32	1,1809	02	2,037	72	4,269
64	0,8986	34	1,1956	04	2,076	74	4,371
66	0,9017	36	1,2107	06	2,115	76	4,476
68	0,9050	38	1,2262	08	2,156	78	4,583
3,80	4,694	4,10	6,813	4,40	10,136	4,70	15,431
82	4,808	12	6,990	42	10,417	72	15,882
84	4,926	14	7,173	44	10,707	74	16,348
86	5,047	16	7,362	46	11,005	76	16,829
88	5,171	18	7,556	48	11,314	78	17,325
3,90	5,299	4,20	7,757	4,50	11,632	4,80	17,84
92	5,431	22	7,963	52	11,960	82	18,37
94	5,567	24	8,176	54	12,299	84	18,91
96	5,707	26	8,396	56	12,648	86	19,48
98	5,851	28	8,622	58	13,009	88	20,06
4,00	6,000	4,30	8,855	4,60	13,381	4,90	20,67
02	6,153	32	9,096	62	13,766	92	21,29
04	6,311	34	9,344	64	14,162	94	21,94
06	6,473	36	9,600	66	14,572	96	22,60
08	6,640	38	9,864	68	14,995	98	23,29

						5,00	24,00
--	--	--	--	--	--	------	-------

Список літератури

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Ч. 1, 2. – К.: Либідь; 1993.– 320 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс інтегрального і диференціального исчислення, т. 2. – М.: Физматгиз, 1963.– 807 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 1.– М.: Высшая математика, 1981.– 624 с.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу,– М.: ГИТТЛ, 1956.– 628 с.

ЗМІСТ

Передмова	
Розділ I. Визначений інтеграл <i>Рімана</i> і його застосування	
1. Теоретичні питання	
2. Визначений інтеграл: означення, формула <i>Ньютона–Лейбніца</i> . Основні теореми і формули, які використовуються при розв’язуванні задач	
3. Таблиця похідних та невизначених інтегралів	
Завдання 1	
Завдання 2	
Завдання 3	
Завдання 4	
Завдання 5	
4. Застосування визначеного інтеграла в задачах геометрії.....	
Завдання 6	
Завдання 7	

Завдання 8	
Завдання 9	
Завдання 10	
Завдання 11	
5. Криволінійні інтеграли першого роду (по довжині дуги) та їх застосування у задачах фізики	
Завдання 12	
Розділ II. Невластиві інтеграли <i>Рімана</i>	
1. Теоретичні питання	
2. Означення невластивих інтегралів першого і другого роду. Збіжність невластивого інтеграла від невід'ємної функції	
Завдання 13	
3. Абсолютна і умовна збіжність невластивих інтегралів	
Завдання 14	
Завдання 15	
4. Інтеграл <i>Ейлера</i> : гама і бета функції	
Завдання 16	
Відповіді	
Додаток. Таблиця гама функції	
Список літератури	
Зміст	