

**Питання до іспиту  
для студентів I курсу ФІОТ**

1. Множини: основні поняття, дії над множинами та їх властивості, діаграми Ейлера-Вінна.

2. Числові множини, обмежені та необмежені числові множини. Точна верхня і точна нижня межі числових множин. Існування точних меж. Приклади.

3. Числова послідовність та її границя, означення, геометрична інтерпретація, єдиність границі. Необхідна умова збіжності числової послідовності. Збіжність геометричної прогресії.

4. Арифметичні властивості збіжних числових послідовностей. Властивості збіжних числових послідовностей, що виражаються нерівностями. Збіжність проміжної послідовності.

5. Число  $e$ . Існування  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Натуральні логарифми. Наслідки.

6. Монотонні та обмежені числові послідовності: означення, приклади. Теорема Вейерштрасса про існування границі числової послідовності. Підпослідовність послідовності. Верхня та нижня границі числової послідовності. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

7. Поняття границі функції за Гейне та за Коші. Приклади, геометрична інтерпретація. Односторонні границі функції в точці і їх зв'язок з границею функції в точці. Критерій Коші існування границі функції.

8. Перша чудова границя. Наслідки.

9. Друга чудова границя. Наслідки.

10. Узагальнення поняття границі на випадок нескінченно великого значення аргумента та нескінченного значення функції ( $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ ). Геометрична інтерпретація.

11. Локальні властивості функцій, що мають границю в точці: обмеженість функції в околі точки; єдиність границі; знак функції та знак границі.

12. Властивості границь функцій, що виражаються нерівностями. Теорема про границю проміжної функції.

13. Нескінченно малі функції: означення, властивості, порівняння нескінченно малих функцій.

14. Еквівалентні нескінченно малі функції: означення, приклади. Критерій еквівалентності нескінченно малих функцій. Головна частина нескінченно малої функції. Приклади.

15. Обчислення границь функцій за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій.

16. Теорема про зв'язок значення функції, її границі та нескінченно малої функції. Критерій Коші існування границі функції.

17. Поняття неперервної функції в точці: основні означення, приклади. Одностороння неперервність в точці, її зв'язок з неперервністю функції в точці.

Неперервність елементарних функцій. Точки розриву функції та їх характеристика. Геометрична інтерпретація, приклади.

18. Поняття складеної функції. Теорема про неперервність складеної функції в точці. Правило граничного переходу для неперервної функції.

19. Дії над неперервними функціями в точці. Існування і неперервність оберненої функції.

20. Поняття неперервної на відрізку функції. Теореми Больцано-Коші про проміжні значення неперервної функції та про перетворення в 0 функції на відрізку. Метод половинного ділення відрізка наближеного розв'язування алгебраїчних рівнянь.

21. Неперервність функції на відрізку. Теорема Вейерштрасса про обмеженість неперервної функції та досягнення нею найбільшого та найменшого значень.

22. Гіперболічні функції, їхні властивості та графіки.

23. Поняття похідної функції, геометричний зміст. Рівняння дотичної та нормалі до кривої. Похідні основних елементарних функцій:  $x^\alpha$ ,  $a^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

24. Основні правила диференціювання функцій. Похідні  $\operatorname{tg}x$ ,  $\operatorname{ctg}x$ .

25. Похідна функції в точці: означення, необхідна умова існування похідної функції в точці. Односторонні похідні. Нескінченні похідні.

26. Суперпозиція функцій. Теорема про диференціювання складеної функції.

27. Обернена функція та її похідна. Вивід формул диференціювання  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg}x$ .

28. Диференційовність функції в точці. Необхідна і достатня умова диференційовності функції в точці. Поняття диференціала функції.

29. Диференціал функції: означення, геометричний зміст.

30. Диференціал функції: означення, формула для обчислення, інваріантність диференціала. Правила диференціювання.

31. Параметрично та неявно задані функції. Диференціювання неявно та параметрично заданих функцій. Диференціювання показниково-степеневі функції.

32. Формула Тейлора: многочлен Тейлора, лема представлення відношення  $(n+1)$  раз диференційовних функцій через відношення похідних  $(n+1)$ -го порядку.

33. Теорема про розклад функції за формулою Тейлора та Маклорена. Залишок формули Тейлора в формі Лагранжа та Пеано.

34. Формули маклорена для основних елементарних функцій:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\operatorname{sh}x$ ,  $\operatorname{ch}x$ .

35. Формули Маклорена для степеневі функції  $(1+x)^\alpha$  та  $\ln(1+x)$ . Єдність розкладу функції за формулою за формулою Тейлора. Наближене обчислення за допомогою формулою Маклорена.

36. Правило Лопітала розкриття невизначеностей виду  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ . Невизначеності типу  $\infty \cdot \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ .

37. Опуклість функції на інтервалі: означення, необхідна та достатні умови. Точки перегину. Асимптоти кривої .

38. Локальний екстремум функції. Необхідна та достатня умова існування в термінах першої та вищих похідних.

39. Теорема Коші.

40. Теорема Лагранжа. Формула скінченних приростів. Геометрична інтерпретація.

41. Теорема Ролля. Геометрична інтерпретація.

42. Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Лейбніца для обчислення  $\sin^{(n)} x$ ,  $\cos^{(n)} x$ .

43. Поняття первісної функції, невизначеного інтегралу та їх властивості. Таблиця невизначених інтегралів.

44. Метод заміни змінної та інтегрування частинами у невизначеному інтегралі .  
Обчислення  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  .

45. Розклад многочлена на множники. Основна теорема алгебри. Теорема Безу. Теорема про властивості коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.

46. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні. Леми про представлення правильного раціонального дроби з кратними дійсними коренями та кратними комплексними коренями знаменника. Загальна схема розкладу.

47. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Рекурентна формула  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$  .

48. Інтегрування тригонометричних виразів.

49. Інтегрування ірраціональних виразів та диференціальних біномів  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  .

50. Визначений інтеграл Рімана: означення, достатні умови існування, необхідна умова інтегрованості, геометричний зміст.

51. Визначений інтеграл Рімана: інтегрування частинами, заміною змінної.  
Обчислення  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$  . Інтеграли від парних та непарних функцій по симетричному проміжку.

52. Інтеграл зі змінною верхньою границею: означення, властивості. Теорема Барроу.

53. Інтеграл зі змінною верхньою границею: означення, властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.

54. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла. Площа криволінійного сектора.

55. Довжина дуги кривої: означення, обчислення у випадку явного, параметричного рівняння кривої та кривої заданої в полярних координатах.

56. Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перерізів. Об'єм і площа поверхні тіла обертання.

57. Невласні інтеграли 1-го роду: означення, різні типи, достатня ознака збіжності для невід'ємних функцій, наслідок, збіжність  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ .

58. Невласні інтеграли 1-го роду: основні поняття. Абсолютна та умовна збіжність невластних інтегралів.

59. Невласні інтеграли 2-го роду: означення, типи, збіжність  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ , ознака порівняння та наслідок.

60. Невласні інтеграли 1-го та 2-го роду: означення. Критерій Коші збіжності невластних інтегралів, в розумінні збіжності невластних інтегралів (по Коші).

61. Поняття інтеграла Рімана: означення та властивості (лінійність, монотонність і адитивність).

62. Теореми про оцінку визначеного інтеграла та про середнє у визначеному інтегралі. Оцінка модуля визначеного інтеграла.

63. Комплексні числа: означення, алгебраїчна, тригонометрична та показникові форми комплексного числа. Спряжені комплексні числа та їх властивості. Геометрична інтерпретація комплексного числа.

64. Дії над комплексними числами в різних формах запису. Формули Ейлера та Муавра. Добування кореня з комплексного числа. Геометрична інтерпретація.