Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

СІМНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

19–20 травня 2016 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

II

Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз

Київ — 2016

Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Drahomanov University
National Technical University of Ukraine «KPI»

SEVENTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE

19–20 May, 2016, Kyiv

CONFERENCE MATERIALS

II

Algebra. Geometry. Analysis

Kyiv — 2016

Институт математики НАН Украины
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
Национальный педагогический университет им. М. Драгоманова
Национальный технический университет Украины «КПИ»

СЕМНАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ИМЕНИ АКАДЕМИКА МИХАИЛА КРАВЧУКА

19–20 мая 2016 г., Киев

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ
II

Алгебра. Геометрия. Математический анализ

Киев — 2016

УДК 512/514+517+519.6(06)
ББК 22.14/6я43+22.19я43

Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19–20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2016. — 206 с. — Укр., англ., рос.

Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, May 19–20, 2016, Kyiv: Conference materials. Vol. 2. Algebra. Geometry. Analysis. — К.: NTUU «KPI», 2016. — 206 p.

Семнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука, 19–20 мая, 2016, Киев: Материалы конф. Т. 2. Алгебра. Геометрия. Математический анализ. — К.: НТУУ «КПИ», 2016. — 206 с.

ISBN 978-617-7021-43-7

ISBN 978-617-7021-43-7

Академік Всеукраїнської академії наук
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences
Академик Всеукраинской академии наук
Михайло Кравчук
Mychailo Kravchuk
Михаил Кравчук

1892–1942

XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука

Програмний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Ільченко* (Україна)
Проф. *В. Ванін* (Україна)
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)
Проф. *М. Городній* (Україна)
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)
Проф. *І. Парасюк* (Україна)
Чл.-кор. НАН України *М. Горбачук* (Україна)
Проф. *Р. Андрушків* (США)

Організаційний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Проф. *О. Клесов* (Україна)
Проф. *С. Івасишен* (Україна)
Проф. *М. Дудкін* (Україна)
Проф. *О. Іванов* (Україна)
Доц. *І. Алєксєєва* (Україна)
Доц. *О. Диховичний* (Україна)
Доц. *Л. Федорова* (Україна)

Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

Programme Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)
Corr. Member NASU *M. Horbachuk* (Ukraine)
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)

Organizing Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Prof. *O. Klesov* (Ukraine)
Prof. *S. Ivashyshen* (Ukraine)
Prof. *M. Dudkin* (Ukraine)
Prof. *O. Ivanov* (Ukraine)
Ass. Prof. *I. Alyeksyeyeva* (Ukraine)
Ass. Prof. *O. Dykhovychnyi* (Ukraine)
Ass. Prof. *L. Fedorova* (Ukraine)

XVII Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука

Программный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Акад. НАН Украины *Ю. Якименко* (Украина)
Акад. НАН Украины *М. Ильченко* (Украина)
Проф. В. Ванин (Украина)
Акад. НАН Украины *А. Самойленко* (Украина)
Акад. НАН Украины *Я. Яцкив* (Украина)
Акад. НАН Украины *Н. Перестюк* (Украина)
Проф. *Н. Городний* (Украина)
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)
Проф. *И. Парасюк* (Украина)
Чл.-кор. НАН Украины *М. Горбачук* (Украина)
Проф. *Р. Андрушкив* (США)

Организационный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Проф. *О. Клесов* (Украина)
Проф. *С. Ивасишен* (Украина)
Проф. *Н. Дудкин* (Украина)
Проф. *А. Иванов* (Украина)
Доц. *И. Алексеева* (Украина)
Доц. *А. Дыховичный* (Украина)
Доц. *Л. Федорова* (Украина)

УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик XX сторіччя, всесвітньо відомий вчений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

*«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися **перші** українські школи в місті і по селах, **перші** курси, **перші українські університети** (народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без **найактивнішої участі Михайла Кравчука**» (так писалося в характеристиці на нього, надісланої до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).*

*Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці **світової Науки.** За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.*

*Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і **многочлени Кравчука,** і **моменти Кравчука**, і **формули Кравчука**, і осцилятори **Кравчука**, а завдяки пошукам І. Качановського виявилося, що М. Кравчук стояв біля витоків **винаходу першого у світі електронного комп'ютера!***

*Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо **Науки**, на благо **Освіти рідного народу.***

***«Моя любов — Україна і математика»** — таким було його життєве кредо.*

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочінь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

*М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам **Сергію Корольову** і **Архипу Люльці**.*

*Пам'ять про М. Кравчука живе у **серцях київських політехніків**, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934–1938 рр). КПІ від 1992 р. вже провів 13 Міжнародних наукових конференцій ім. акад. М. Кравчука. Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито **пам'ятник** М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських **вулиць** (2009 р.)*

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

*Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в **Україні й далеко поза Україною.***

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892–1942)

Mykhailo Kravchuk *made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of* ***mathematical education****. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.*

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as ***Kravchuk's polynomials;***

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist ***John Atanasoff*** *(1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of* ***making electronic computer****.*

His selfness efforts for the sake of the ***development of science*** *in* ***Ukraine****, extraordinary* ***talent*** *as* ***teacher*** *and* ***reputation among students*** *and* ***scientific community*** *could not go unnoticed by authority.*

In 1938 *Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in* ***Kolyma****. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he* ***was died in March 9, 1942.***

He was ***rehabilitated*** *be soviet regime only* ***in 1956****. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in* ***the National Academy of Sciences of Ukraine****. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The* ***First Kravchuk International Conference*** *was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992. Since that time there were 13 such* ***conferences, three books*** *of M. Kravhuk's works were* ***published*** *in Kyiv:*

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20th of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled ***a statue of M. Kravchuk****.*

QUADRATIC RESIDUES OF THE NORM GROUP IN SECTORIAL DOMAINS

L. V. Balyas
I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine
balyas@ukr.net

Let G be the ring of Gaussian integers and G_γ be the complete system of residues modulo γ in G. Let G_γ^* be the reduced system of residues modulo γ. For

$$\gamma = p^n, p \equiv 3 (\operatorname{mod} 4), n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

we denote as $E_n \subset G_{p^n}$ the norm group

$$E_n := \left\{ \alpha \in G_{p^n}^* \mid N(\alpha) \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} p^n) \right\}.$$

This subgroup is cyclic with the order $2(p+1)p^{n-1}$ (Varbanets, 2007). The congruence

$$N(u_0 + iv_0) \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} p^n)$$

is true for its lead element $(u_0 + iv_0)$. So the elements of the type $(u_0 + iv_0)^{2a}$, where $a = 0,1,\ldots,(p+1)p^{n-1}$, are quadratic residues modulo p^n.

Let us denote

$$E_n^+ := \left\{ \alpha \in G_{p^n}^* \mid N(\alpha) \equiv 1 (\operatorname{mod} p^n) \right\}$$

and

$$R(x,\phi) = \sum_{\alpha \in E_n^+} \sum_{\substack{w \in G \\ w \equiv \alpha (\operatorname{mod} p^n) \\ w \in S(x,\phi)}} 1$$

The aim of our work is the construction of the asymptotic formula for the number $R(x,\phi)$ of quadratic residues in the sectorial domain

$$S(x,\phi) = \left\{ \phi_1 \leq \arg w < \phi_2, 0 < N(w) \leq x, \phi_2 - \phi_1 = \phi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

The most interesting case is the case, when $\phi_2 - \phi_1 \to 0$ with $x \to \infty$. The case, when $\phi_2 - \phi_1 \geq C, C > 0$ (a fixed constant), follows from the work Varbanets (1970) about the distribution of values of the function $r(n)$ in the arithmetic progression.

We consider Dirichlet series

$$F_m(s) = \sum_{\alpha \in E_n^+} \sum_{w \equiv \alpha (\operatorname{mod} p^n)} \frac{e^{4mi \arg w}}{N(w)^s}, \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

It follows that

$$F_m(s) = \sum_{\alpha \in E_n^+} \frac{1}{N(p^n)^s} \zeta_m\left(s; \frac{\alpha}{p^n}, 0\right), \ (\operatorname{Re} s > 1),$$

where $\zeta_m\left(s; \frac{\alpha}{p^n}, 0\right)$ is a special case of Hecke zeta-function $\zeta_m\left(s; \delta, \delta_0\right)$ with a shift.

Let us consider the function of a natural argument

$$r_m(k) = \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{Z} \\ u^2+v^2=k}} e^{4mi \arg(u+iv)}$$

In view of (3) we have

$$F_m(s) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{p^n}}}^{\infty} \frac{r_m(k)}{k^s}$$

Using the properties of Hecke zeta-function (Hecke, 1920), Stirling formula for the gamma-function, we get the following result.

Theorem 1. *Let* $m \neq 0, p^n \leq x \leq p^{2n}$. *Then*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{p^n}}} r_m(k) << \frac{\sqrt{x}}{p^{\frac{n}{2}}} \log x + p^{\frac{n}{2}} \log x + p^{\frac{n}{2}} M \log M.$$

After this we can investigate the distribution of quadratic residues in narrow sectors.

Theorem 2. *For* $p^{\frac{3}{2}n} \leq x \leq p^{2n}, 0 \leq \phi_1 < \phi_2 \leq \frac{\pi}{2}$ *and* $0 < s \leq \frac{1}{8}$, $\phi_2 - \phi_1 \geq x^{-s}$ *the asymptotic formula is true*

$$A(x; \phi_1, \phi_2) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{x}{p^n} + O\left(3^n \frac{x^{1-s}}{p^n} \log x\right).$$

The rational case of the similar problem was considered by I. M. Vinogradov and G. Polya. They built the asymptotic formula for the number of quadratic residues modulo prime number on the segment $1 \leq n \leq x < p$, which was nontrivial for every $x > \sqrt{p} \log p$. Then their result was firstly sharpened in the work Burgess (1957).

References

Burgess, D. (1957). The Distribution of quadratic residues and non-residues. *Mathematika*, *4*, 106–112.

Hecke, E. (1920). Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. *Math. Z. 6* (1), 11–51.

Varbanets, P. (1970). Problem of circle in aritmetic progression. *Mat. Zametki, 8* (6), 787–798 (in Russian).

Varbanets, S. (2007). General Kloosterman sums over ring of Gaussian integers. *Ukr. Math. J., 59* (9), 1179–2000.

VARIANTS OF A SEMILATTICE OF PARTITIONS OF A COUNTABLE SET

O. O. Desiateryk
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
sasha.desyaterik@gmail.com

Let S be a semigroup. For a fixed element $a \in S$ we consider the new operation

$$x *_a y = xay,$$

where $x, y \in S$ are arbitrary elements. The semigroup $(S, *_a)$ is called a variant of S.

The study of variants was initiated in monograph Liapin (1960).

If $|M| = n$ then Part_n denote the lattice of partition of the set M. In the present paper we consider the lattice $\mathrm{Part}_{\aleph_0}$ of partition of countable set. We define M_i as the block of a partition of the set M, cardinality of M_i is equal to the number of elements in it. Note that cardinality could be finite or countable. The variants of finite lattices are already studied in Ganyushkin (2013).

For each element ρ of the lattice Part_n we define its rank as $\mathrm{rank}(\rho)$, it is equal to the heights of the interval $[0, \rho]$. Note that the atom of lattice have the rank 1. The partition which have a countable block or countable number of finite blocks have countable rank.

The partition ρ have the type $\langle l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_\infty \rangle$, if it consists of l_2 blocks of length 2, l_i blocks of length i and so on. The number l_∞ is the quantity of countable blocks. The partition σ is a covering partition for ρ, if $\sigma > \rho$, and there is no partition χ for which inequality $\sigma > \chi > \rho$ holds.

Lemma 1.1 *Let ρ be a partition of a countable set M in subsets M_i, where $i \in I$. Then the interval $[0, \rho]$ is isomorphic to Cartesian product of partitions of subsets M_i, hence*

$$[0, \rho] \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Part}_i .$$

Lemma 2.2 *Let η be a partition with $\mathrm{rank}(\eta) = k$ and it have more than one block with cardinality greater than one. Then the interval $[0, \eta]$ and the lattice $Part_k$ have different number of atoms.*

Lemma 3.3 *Let partitions μ and σ be a covering partition for a partition ζ with only one nonzero block of length k. Consider partitions with different types. For each of them there is exist a different number lower than them partitions of rank k.*

Lemma 4.4 *The partitions* ρ *and* τ *have types* $\langle l_1, \dots, l_\infty \rangle$ *and* $\langle t_1, \dots, t_\infty \rangle$ *respectively. If the intervals* $[0, \rho]$ *and* $[0, \tau]$ *are isomorphic, then for each natural number* k *the equality* $l_k = t_k$ *holds.*

Lemma 5.5 *The partitions* ρ *and* τ *have types* $\langle l_1, \dots, l_\infty \rangle$ *and* $\langle t_1, \dots, t_\infty \rangle$ *respectively. If the intervals* $[0, \rho]$ *and* $[0, \tau]$ *are isomorphic, then the equality* $l_\infty = t_\infty$ *holds.*

Theorem 1.6 *Two variants* $(\mathrm{Par}_{\aleph_0}, *_\xi)$ *and* $(\mathrm{Part}_{\aleph_0}, *_\tau)$ *of a lattice* $Part_{\aleph_0}$ *are isomorphic if and only if partitions* ξ *and* τ *have the same type up to one-element blocks.*

Theorem 1 gives us the up to isomorphism classification of variants of a semi-lattice of partitions of a countable set.

References

Chase, K. (1979). Sandwich semigroups of binary relations. *Discrete Math.*, *28* (3), 231–236.

Ganyushkin, O. G., & Desiateryk, O. O. (2013). Variants of a semilattice. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics &* Mathematics, 2013 (4), 12–16.

Hickey, J. (1983). Semigroups under a sandwich operation. *Proc. Edinburg Math. Soc. (2)*, *26* (3), 371–382.

Liapin, E. (1960). *Polugrupy [Semigroups]*. Moskva: FIZMATGIZ. (in Russian)

MATHEMATICAL RESEARCH
OF THE COBWEB MODEL IN ECONOMICS

H. M. Hubal
Lutsk national technical university, Lutsk, Ukraine
niik-g@yandex.ru

Consider the cobweb model with the linear functions of demand d and supply s:

$$s(p) = s(p_{t-1}) = a + bp_{t-1}, \quad d(p) = d(p_t) = c - lp_t.$$

where p is a commodity price, p_{t-1} is the commodity price set in last time period $(t-1)$, p_t is the commodity price of this time period t [1–4].

Here $b > 0$, as the supply function increases; $l > 0$, as the demand function decreases; taking into account that $s(0) \geq 0$ and assuming that the demand exceeds the supply at a zero price, we write: $d(0) > s(0) \geq 0$, i.e. $c > a \geq 0$.

We write the condition of equilibrium:

$$d(p_t) = s(p_{t-1})$$

or

$$c - lp_t = a + bp_{t-1}. \qquad (1)$$

We find the equilibrium price p^* and the equilibrium demand volume d^*, the equilibrium supply volume s^*. They satisfy the equation $d^* = s^*$ or the equation $c - lp^* = a + bp^*$, whence

$$p^* = \frac{c-a}{b+l}, \quad d^* = s^* = a + bp^* = \frac{al+bc}{b+l}.$$

We conduct the mathematical analysis of this model. From formula (1), we obtain the recurrence relation:

$$p_t = \frac{c-a}{l} - \frac{b}{l}p_{t-1}.$$

Applying consistently the recurrence relation, we obtain:

$$p_1 = \frac{c-a}{l} - \frac{b}{l}p_0,$$

$$p_2 = \frac{c-a}{l} - \frac{b}{l}\left[\frac{c-a}{l} - \frac{b}{l}p_0\right] = \frac{c-a}{l}\left[1 - \frac{b}{l}\right] + \left(\frac{b}{l}\right)^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{c-a}{l} - \frac{b}{l}\left[\frac{c-a}{l}\left[1 - \frac{b}{l}\right] + \left(\frac{b}{l}\right)^2 p_0\right] = \frac{c-a}{l}\left[1 - \frac{b}{l} + \left(\frac{b}{l}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{l}\right)^3 p_0,$$

$$p_4 = \frac{c-a}{l} - \frac{b}{l}\left[\frac{c-a}{l}\left[1 - \frac{b}{l} + \left(\frac{b}{l}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{l}\right)^3 p_0\right] =$$

$$= \frac{c-a}{l}\left[1-\frac{b}{l}+\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{b}{l}\right)^3\right]+\left(\frac{b}{l}\right)^4 p_0$$

or in the general case:

$$p_t = \frac{c-a}{l}\left[1-\frac{b}{l}+\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{b}{l}\right)^3+\dots+(-1)^{t-1}\left(\frac{b}{l}\right)^{t-1}\right]+(-1)^t\left(\frac{b}{l}\right)^t p_0.$$

The expression in square brackets is the sum of t terms of a geometric progression. We use the formula for the sum of t terms of a geometric progression:

$$S_t = \frac{\beta(1-r^t)}{1-r}.$$

If $|\, r \,| < 1$, then

$$\lim_{t\to\infty} S_t = \frac{\beta}{1-r}.$$

For this cobweb model we have $r = -\frac{b}{l}$, $\beta = 1$, whence we obtain the expression for the price p_t at any discrete moment of time t ($t = 1, 2, 3, \dots$):

$$p_t = \frac{c-a}{l}\,\frac{1-(-1)^t\left(\frac{b}{l}\right)^t}{1+\frac{b}{l}}+(-1)^t\left(\frac{b}{l}\right)^t p_0 \text{ or}$$

$$p_t = \frac{c-a}{b+l}+(-1)^t\left(\frac{b}{l}\right)^t\left(p_0-\frac{c-a}{b+l}\right),$$

or

$$p_t = p^* + (-1)^t\left(\frac{b}{l}\right)^t (p_0 - p^*). \tag{2}$$

As can be seen from formula (2), it follows that:

If $\frac{b}{l} < 1$, i.e. the slope of the demand straight line is steeper than the slope of the supply straight line, then $\left(\frac{b}{l}\right)^t \to 0$ as $t \to \infty$, therefore,

$$p_t \to \frac{c-a}{b+l} = p^*,$$

and the equilibrium is stable.

If $\frac{b}{l} > 1$, i.e. the slope of the supply straight line is steeper than the slope of the demand straight line, then $\left(\frac{b}{l}\right)^t \to \infty$ as $t \to \infty$, process diverging (the equilibrium is unstable).

If $\frac{b}{l} = 1$, i.e. $b = l$, then the value

$$p_t = p^* + (-1)^t (p_0 - p^*) = p^* + (-1)^t \mathbb{A}$$

fluctuates with the constant amplitude $\mathbb{A} = p_0 - p^*$ about the equilibrium value p^* (the indifferent equilibrium).

References

1. Bedford, P., Bloor, C. (2009). *A cobweb model of financial stability in New Zealand* (No. DP2009/11). Reserve Bank of New Zealand.
2. Ma, J., & Mu, L. (2007). Complex dynamics in a nonlinear cobweb model for real estate market. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2007.
3. Nimish, J. A. (2003). The labour market of nurses: a cobweb model. Illinois Wesleyan University.
4. Pashigian, B. P. (2008). Cobweb theorem. *The New Palgrave Dictionary of Economics*.

ENUMERATION OF 2-COLOR CHORD n-DIAGRAMS OF GENUS ONE AND TWO THAT HAVE ONE BLACK (OR GREY) FACES UNDER ROTATION AND REFLECTION

O. A. Kadubovskyi, N. P. Baliasa
Donbas State Teachers' Training University, Slovyans'k, Ukraine
kadubovs@ukr.net, tatkova@ippo.dn.ua

Definition 1. *A configuration (graph) on a plane that consists of a circle and n chords that connects $2n$ different points on it is called a chord diagram of order n, or, briefly, an n-diagram. An n-diagram whose arcs of the circle are colored in two colors (black and grey) so that any two neighboring arcs have different colors is called a 2-color chord diagram* (e.g., Kadubovskyi (2010)).

All 2-color diagrams are constructed on a unit circle (in $\mathbb{R}^2$) with fixed clockwise enumeration of $2n$ points on it, which are the vertices of a regular $2n$-polygon.

Definition 2. A 2-color chord diagram that does not contain chords that connect points with numbers of the same parity is called an O-diagram.

Definition 3. A sequence of chords and black (grey) arcs that form a homeomorphic image of the oriented circle is called a black (grey) faces of a 2-color chord diagram with given direction on the circle.

Denote the set of all O-diagram with n chords that have one black (or grey) and k grey (black) faces by $\Im^{O}_{n;1,k}$.

Is well known, the genus of the diagram from the set $\Im^{O}_{n;1,k}$ is the non negative integer g given by (Euler formula)

$$2g = n - k.$$

Proposition 1. *For nature $n \geq 3$ the number of diagrams from the set $\Im^{O}_{n;1,n-2}$ can be calculated by the relation*

$$d(n) = \binom{n+1}{4} = C^{4}_{n+1}. \tag{1}$$

Lemma 1. *For $n \geq 3$ the number of the nonequivalent diagrams from the set $\Im^{O}_{n;1,n-2}$ under the action of the cyclic group can be calculated by the relation*

$$d^{*}(n) = \frac{1}{n}\left(C^{4}_{n+1} + \sum_{j|n,\, j\in\{2,3,4\}} \phi(j)\cdot\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)\right), \tag{2}$$

where

$$\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{8}, \qquad \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n}{3}, \qquad \rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}; \tag{3}$$

$\phi(q) = \left|\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1\}\right|$ — *is the Euler totient function.*

Lemma 2. *For* $n \geq 3$ *the number of the nonequivalent diagrams from the set* $\Im^{O}_{n;1,n-2}$ *under the action of the dihedral group can be calculated by the relation*

$$2d^{**}(n) - d^{*}(n) = \begin{cases} \dfrac{m\left(m+1\right)}{2}, & n = 2m+1, \\ \dfrac{\left(m-1\right)\left(m+2\right)}{2}, & n = 2m, \end{cases}$$

where $d^{*}(n)$ *— calculated by the relation* (2), (3).

Proposition 2. *For nature* $n \geq 5$ *the number of diagrams from the set* $\Im^{O}_{n;1,n-4}$ *can be calculated by the relation*

$$d(n) = C^{6}_{n+1} \cdot \frac{3n^2 - n - 6}{8}. \tag{4}$$

Lemma 3. *For* $n \geq 5$ *the number of the nonequivalent diagrams from the set* $\Im^{O}_{n;1,n-4}$ *under the action of the cyclic group can be calculated by the relation*

$$d^{*}(n) = \frac{1}{n}\left(C^{6}_{n+1} \cdot \frac{3n^2 - n - 6}{8} + \sum_{j|n, j \in \{2,3,4,5,6,8\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right)\right), \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} &\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{8}, && \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n}{3}, && \rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}, \\ &\rho\left(n, \frac{n}{5}\right) = \frac{3n}{5}, && \rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}, && \rho\left(n, \frac{n}{8}\right) = \frac{n}{8}. \end{aligned} \tag{6}$$

Lemma 4. *For* $n \geq 5$ *the number of the nonequivalent diagrams from the set* $\Im^{O}_{n;1,n-4}$ *under the action of the dihedral group can be calculated by the relation*

$$2d^{**}(n) - d^{*}(n) = \begin{cases} 5C^{4}_{m+2} - C^{3}_{m+1}, & n = 2m+1, \\ 5C^{4}_{m+1} + 3C^{3}_{m} + 2C^{2}_{m-1}, & n = 2m. \end{cases}$$

where $d^{*}(n)$ *— calculated by the relation* (5), (6).

Theorem 1. *For nature* g *and any* $n \geq 2g+1$ *we have*

$$\left|\Im^{O}_{n;1,n-2g}\right| = S_H\,(n-1; n-2g),$$

where $S_H\left(m,k\right)$ *— is the* ***Hultman number****, which can be computed as Doignon (2007, Theorem 14) or Grusea (2013, Theorem 4.1).*

References

Doignon, J. P., & Labarre, A. (2007). On Hultman Numbers. *Journal of Integer Sequences, 10* (6), Article 07.6.2.

Grusea, S., & Labarre, A. (2013). The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations. *Discrete Applied Mathematics, 161* (10–11), 1448–1466.

Kadubovskyi, O. A., Saprykina, Yu. S., & Mazur, S. Yu. (2010). Two-color O-diagrams with one black cycle. *Zbirnyk naukovykh prats "Poshuky i znakhidky", seriia "Fizykomatematychni nauky", 1* (10), 41–50. (in Ukrainian)

DARBOUX TRANSFORMATION OF MONIC GENERALIZED JACOBI MATRICES ASSOCIATED WITH P-FRACTIONS

Ivan Kovalyov
Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine
i.m.kovalyov@gmail.com

Class $\mathcal{H}$ consists of real sequences $\mathbf{s}=\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$. The set $\mathcal{N}(\mathbf{s})$ of normal indices of the sequence $\mathbf{s}$ consists of such n_j:

$$\mathcal{N}(s)=\{n_j : D_{n_j}\neq 0, j=1,2,\ldots\},\quad D_{n_j}=det(s_{i+k})_{i,k=0}^{n_j-1}. \tag{1}$$

With each sequence $\mathbf{s}\in\mathcal{H}$ we associate the so-called P-fraction (Magnus, 1962)

$$\mathop{\mathbf{K}}_{0}^{\infty}\left(\frac{-b_j}{a_j(z)}\right):=-\cfrac{b_0}{a_0(z)-\cfrac{b_1}{a_1(z)-\cfrac{b_2}{a_2(z)-\ldots}}} \tag{2}$$

where $b_j\neq 0$ are real numbers and a_j are monic polynomials of degree $k_j=n_{j+1}-n_j$ $(j\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\})$ (Derevyagin & Derkach, 2004; Peherstorfer, 1992).

The j-th convergent $f_j(z)$ of the P-fraction (2) is a rational function of degree n_j, which can be represented as

$$f_j(z)=-\frac{Q_{n_j}(z)}{P_{n_j}(z)}\quad (j\in\mathbb{N}), \tag{3}$$

where $P_{n_j}(z)$ is a monic polynomial of degree n_j. The polynomials $P_{n_j}(z)$ and $Q_{n_j}(z)$ are solutions of the three-term recurrence relation

$$u_{j+1}(z)-a_j(z)u_j(z)+b_ju_{j-1}(z)=0 \qquad j\in\mathbb{Z}_+ \tag{4}$$

subject to the initial conditions

$$u_{-1}(z)\equiv 0, u_0(z)\equiv 1 \text{ and } u_{-1}(z)\equiv -1, u_0(z)\equiv 0 \text{ respectively.} \tag{5}$$

Remark.1 Polynomials $P_{n_j}(z)$ can be calculated also in terms of the coefficients s_i $(0\leq i\leq 2n_j-1)$ by the formula

$$P_{n_j}(z) = \frac{1}{D_{n_j}} \begin{vmatrix} s_0 & \cdots & s_{n_j-1} & s_{n_j} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ s_{n_j-1} & \cdots & s_{2n_j-2} & s_{2n_j-1} \\ 1 & \cdots & z^{n_j-1} & z^{n_j} \end{vmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Let J be the monic generalized Jacobi matrix associated with the three-term recurrence relation (4) (Derevyagin & Derkach, 2004), defined by the equalities

$$J = \begin{pmatrix} C_{a_0} & D_0 & & \\ B_1 & C_{a_1} & D_1 & \\ & B_2 & C_{a_2} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{7}$$

where C_{a_j} is the companion matrix for the polynomial

$$a_j(z) = z^{k_j} + a_{k_j-1}^{(j)} z^{k_j-1} + \ldots + a_0^{(j)}$$

$$C_{a_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0^{(j)} & -a_1^{(j)} & \cdots & -a_{k_j-1}^{(j)} \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{Z}_+) \tag{8}$$

and B_j, D_{j-1} are $k_j \times k_{j-1}$ and $k_j \times k_{j+1}$ matrices, respectively, given by

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_j & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

Definition 12 (Derkach & Kovalyov, 2015). *Let us say* $\mathrm{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, *if* $\mathrm{s} \in \mathcal{H}$ *and* $P_{n_j}(0) \neq 0$ *for every* $j \in \mathbb{N}$.

Proposition 13 (Derkach & Kovalyov, 2015). *Let* $\mathrm{s} \in \mathcal{H}^{reg}$. *Then* s *is associated with the following* S*-fraction*

$$\cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{-zm_2(z) + \ldots}}}. \tag{10}$$

Theorem 14 (Derkach & Kovalyov, 2015). *Let* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$. *Then the* $2j$*-th convergent* $\frac{u_{2j}}{v_{2j}}$ *of the generalized* S*-fraction coincides with the* j*-th convergent of the* P*-fraction (10)*

$$\frac{u_{2j}}{v_{2j}} = -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \ldots - \cfrac{b_{j-1}}{a_{j-1}(z)}}}, \tag{11}$$

corresponding to the sequence $\mathbf{s}$. *The parameters* l_j *and* $m_j(z)$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *of the generalized* S*-fraction (10) are connected with the parameters* b_j *and* $a_j(z)$ $(j \in \mathbb{N})$ *of the* P*-fraction (2) by the equalities*

$$b_0 = \frac{1}{d_1}, \quad a_0(z) = \frac{1}{d_1}\left(zm_1(z) - \frac{1}{l_1}\right), \tag{12}$$

$$b_{j-1} = \frac{1}{l_{j-1}^2 d_{j-1} d_j}, \quad a_{j-1} = \frac{1}{d_j}\left(zm_j(z) - \left(\frac{1}{l_{j-1}} + \frac{1}{l_j}\right)\right) \quad (j = 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

where d_j is the leading coefficient of $m_j(z)$ ($j \in \mathbb{N}$).

Theorem 2.5 *Let* $s = \{s_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{H}^{req}$ *and let* J *be a generalized Jacobi matrix associated with the moment sequence* $s = \{s_j\}_{j=0}^{\infty}$. *Then* J *admits the following* LU*-factorization*

$$J = LU, \tag{14}$$

where L *and* U *are lower and upper two-diagonal block matrices, respectively:*

$$L = \begin{pmatrix} A_0 & & \\ L_1 & A_1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \end{pmatrix} \quad and \quad U = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 & \\ & U_1 & \ddots \\ & & \ddots \\ & & \end{pmatrix}, \tag{15}$$

the blocks A_j *and* U_j *are* $k_j \times k_j$ *matrices*

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -a_1^{(j)} & -a_2^{(j)} & \cdots & -a_{k_j-1}^{(j)} & 1 \end{pmatrix} \text{ and } U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \mathfrak{u}_j & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

D_j are $k_j \times k_{j+1}$ matrices defined by (8), L_{j+1} are $k_{j+1} \times k_j$-matrices

$$L_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{l}_{j+1} \end{pmatrix} \quad (j = 0,1,\ldots), \tag{17}$$

and $\mathfrak{u}_j$ $\mathfrak{l}_j$ can be found from the system of equations

$$\mathfrak{u}_0 = a_0(0), \quad \mathfrak{u}_j + \mathfrak{l}_j = -a_j(0), \quad \mathfrak{l}_{j+1} = \frac{b_{j+1}}{\mathfrak{u}_j}, \quad for all j \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

The transformation

$$J = LU \to \mathfrak{J} := UL \tag{19}$$

is called the Darboux transformation of the monic generalized Jacobi matrix J. As was shown in (Kovalyov, 2014, Theorem 3.10) $\mathfrak{J}$ is also a monic generalized Jacobi matrix.

Proposition 2 6(Kovalyov, 2014). *Let $s = \{s_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{H}^{reg}$, such that $k_j = n_{j+1} - n_j \geq 2$ $(j \in \mathbb{Z}_+,\ n_0 = 0)$, let J be a monic generalized Jacobi matrix associated with the sequence s and let l_j, d_j and $m_j(z)$ be determined by the generalized S-fraction (10). Then:*

1. The monic generalized Jacobi matrix J admits the LU-factorization (14).

2. The Darboux transformation of J takes the form

$$\mathfrak{J} = UL = \begin{pmatrix} C_{\tilde{m}1} & \mathfrak{D}_0 & & & \\ \mathfrak{B}_1 & 0 & \mathfrak{D}_1 & & \\ & \mathfrak{B}_2 & C_{\tilde{m}2} & \mathfrak{D}_2 & \\ & & \mathfrak{B}_3 & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{20}$$

where $C_{\tilde{m}_i}$ are companion matrices for polynomials

$$\tilde{m}_i(z) = \frac{1}{d_i} m_i(z) \ (i = 1,2,\ldots).$$

The blocks $\mathfrak{B}_{2i-1}$, $\mathfrak{B}_{2i}$ are $1 \times (k_{i-1} - 1)$ and $(k_i - 1) \times 1$, respectively,

$$\mathfrak{B}_{2i-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{d_i l_i} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{1}{d_{i+1} l_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1,2,\ldots), \tag{21}$$

$\mathfrak{D}_{2j}$ and $\mathfrak{D}_{2j+1}$ are $(k_j-1)\times 1$ and $1\times(k_{j+1}-1)$-matrices, respectively.

3. The matrix $\mathfrak{J}$ is associated with the following P-fraction

$$\mathop{\mathbf{K}}_{0}^{\infty}\left(\frac{-\mathfrak{b}_j}{\mathfrak{a}_j(z)}\right)=-\cfrac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{a}_0(z)-\cfrac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1(z)-\ddots}}, \tag{22}$$

where

$$\mathfrak{b}_0=b_0,\quad \mathfrak{b}_{2j-1}=\frac{1}{l_jd_j},\quad \mathfrak{b}_{2j}=\frac{1}{l_jd_{j+1}}\quad (j\in\mathbb{N}). \tag{23}$$

$$\mathfrak{a}_{2j}(z)=\widetilde{m}_{j+1}(z),\quad \mathfrak{a}_{2j+1}(z)=z\quad (j\in\mathbb{Z}_+). \tag{24}$$

4. The monic Jacobi matrix $\mathfrak{J}$ corresponds to the sequence $\mathfrak{s}=\{s_{j+1}\}_{j=0}^{\infty}$.

5. The k-th convergent of the P-fraction (22) is equal to

$$\mathfrak{f}_k(z)=\begin{cases}-\dfrac{z\left(Q_{n_i}(z)P_{n_{i-1}}(0)-P_{n_i}(0)Q_{n_{i-1}}(z)\right)}{P_{n_i}(z)P_{n_{i-1}}(0)-P_{n_i}(0)P_{n_{i-1}}(z)}, & k=2i-1, i\in\mathbb{N};\\[2ex] -\dfrac{zQ_{n_i}(z)}{P_{n_i}(z)}, & k=2i, i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

References

Derevyagin, M., & Derkach, V. (2004). Spectral problems for generalized Jacobi matrices. *Linear Algebra Appl., 382*, 1–24.

Derkach, V. A., & Kovalyov, I. (2015). On a class of generalized Stieltjes continued fractions. *Methods Funct. Anal. Topology*, *21* (4), 315–335.

Kovalyov, I. (2014). The Darboux transformation of generalized Jacobi matrices. *Methods of Funct. Anal. and Topology*, *20* (4), 301–320.

Magnus, A. (1962). Expansion of power series into P-fractions. *Math. Zeitschr., 80*, 209–216.

Peherstorfer, F. (1992). Finite perturbations of orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math., 44*, 275–302.

THE PROBLEM OF GLOBAL LEANING IN ARTIFICAL NEURAL NETWORKS

A. O. Prykhodko, O. P. Prykhodko

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov City, Ukraine

o.pryhodko@karazin.ua, prykhodkoaa@gmail.com

A process of machine learning, occurred either in supervised artificial neural networks, finding the local minimum among the distances to etalon, or in cluster analysis, extracting the cluster, basically is an application of a certain numeric method.

For instance, the traditional algorithm of backpropagation (Minsky & Papert, 1969; Haykin, 2006), that represents a hybrid of gradient descent and the principle of dynamic programming, allows an investigation of a local minimum of the error energy. However, it will lead to a wide hypothesis space causing an indetermination in the modeling.

A substantial reduction of the hypothesis space (usually to a single classifier) takes place during the transition of the given problem to a problem of searching a global minimum. But contemporary algorithms of mathematical programming are not able to resolve the introduced problem in general.

Nevertheless, this publication presents a relatively universal approach which enables to perform learning in the artificial neural networks by means of finding of a global minimum for a narrow, but still universal, class of models.

Definition. The global learning of an artificial neural network is detecting minimum of errors' declines for retrieving the main parameters of the neural network (particularly elements of a weight transformation matrix W_{ij}).

The complexity of the learning appears due to a nonlinearity of artificial neural networks. The first and innate source of it, caused by application of a nonlinear evaluation functions of a various nature unlike the linear model of perceptron (Minsky & Papert, 1969), secures universality in the modern models of artificial neural networks with a sophisticated architecture (Haykin, 2006).

The suggested solution is to limit the class of eligible evaluation functions, adjusting it to a specific of a certain problem with either piecewise constant functions or piecewise linear functions, the last ones often come up with more precise results regarding the number of approximation areas.

The elementary Heaviside unit step function, also well-known as a barrier function, contains two areas of approximation.

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, if & v \geq 0 \\ 0, if & v < 0 \end{cases} \tag{1}$$

While, the elementary piecewise linear function has three areas of approximation.

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & if \quad v \geq \frac{1}{2} \\ |v|, & if \quad -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2} \\ 0, & if \quad v < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

The second source of nonlinearity arises with a selection of a suitable metric, according to the features of a clusterization or pattern recognition problem. Let's have a short look at the most popular metrics:

Taxicab geometry: $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

Chebyshev distance: $\rho(x,y) = \max_i |x_i - y_i| \; x, y \in \mathbb{R}^n$

Generalised mean: $\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^q \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

Euclid—Mahalanobis distance: $\rho(x,y) = \sqrt{((x-y)' G(x-y))} \; x, y \in \mathbb{R}^n$

Considering an approximation of the metric, in which a convex sphere represented as a convex polyhedron, that admits next form of notation:

$$\rho(x,y) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j^i (x_j - y_j) \right\} \; x, y \in \mathbb{R}^n$$

In a detailed view metric

$$\hat{\rho}(x,y) = \|x - y\|$$

will have representation

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left| c_j^i (x_j - y_j) \right| \right\}. \tag{3}$$

Further, the class of artificial neural network models will be examined with the piecewise constant or piecewise linear evaluation functions (1, 2) and the metric (3), also "Chebyshev" and "L1" metric have representation (3).

It should be highlighted that the mentioned artificial neural network, with the evaluation function (1, 2) and metrics (3), defines the dynamic process of signal passage due to the network's architecture, making it possible to apply the results from the linear dynamic system optimization. On the other hand, regarding the features of conditions (1, 2, 3) it may be converted into the equivalent linear programming problems of a large dimension which admit finding of an exact solution in a finite number of steps. The appropriate dynamic control system has following appearance:

$$z_{n+1} = Az_n + Bu_n,\ z_0 \in Z_0, n = 0,\dots,N$$
$$u_n \in U_n, \quad (4)$$
$$J = (c, z_N) \xrightarrow[u_n \in U_n]{} min.$$

Where Z_0, U_N determine the polyhedron of conditions. Introduced problem allows an application of the principle of dynamic programming and the maximum principle (Болтянский, 1973). Moreover, its solution can be calculated with the method of reverse gradual solving for the linear programming sub-problems on each step $n = \left(N-1\right),\dots,0$.

The notable fact is that we will also obtain a solution for the global minimization problem because of the problem's convexity (4).

The represented approximation, in particular, can have an interval estimation from the both above and beneath

$$\rho_*(x,y) \le \rho(x,y) \le \rho^*(x,y)$$

where metrics ρ_*, ρ^* are given in form (3) for each circumscribed and inscribed polyhedrons into unit sphere:

$$S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(0,x) \le 1\}.$$

In this case a relaxation principle from dynamic programming (Lincoln & Rantzer, 2006) should be applied, based on the inequality below instead of a Bellman equation:

$$\min_u\{V(f(x,u) + l_*(x,u)\} \le V(x) \le \min_u\{V(f(x,u) + l^*(x,u)\}.$$

References

Callan, R. (1998). Essence of neural networks. Prentice Hall PTR.

Haykin, S. (2006). Neural Networks. (2nd ed.).

Lincoln, B., & Rantzer, A. (2006). Relaxing dynamic programming. *Automatic Control, IEEE Transactions on, 51* (8), 1249–1260.

Minsky, M. L, & Papert, S. (1969). *Perseptrons*: *An essay in computational geometry*. Cambridge, MA: MIT Press.

Болтянский, В. Г. (1973). *Оптимальное управление дискретными системами*. Москва: Наука.

GENERALIZED γ-GENERATING MATRICES AND NEHARI–TAKAGI PROBLEM

Olena Sukhorukova
Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine
alena.dn.ua@rambler.ru

For a bounded function f defined on $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ let us set

$$\gamma_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ik\theta} f(e^{i\theta})d\theta \quad (k = 1,2,...).$$

The Nehari problem consists of the following: given a sequence of complex numbers γ_k $(k \in \mathbb{N})$ find a function $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ such that $\|f\| \le 1$ and $\gamma_k(f) = \gamma_k, (k = 1,2,...)$.

In Adamyan, Arov and Krein (1971) considered the following indefinite version of the Nehari problem, so called Nehari–Takagi problem $\mathbf{NTP}_\kappa(\Gamma)$: Given $\kappa \in \mathbb{N}$ and a sequence $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ of complex numbers, find a function $f \in L_\infty(\mathbb{T})$, such that $\|f\|_\infty \le 1$ and $\operatorname{rank}(\Gamma(f) - \Gamma) \le \kappa$. Here $\Gamma(f)$ is the Hankel matrix

$$\Gamma(f) := (\gamma_{i+j-1}(f))_{i,j=1}^{\infty}.$$

We will consider the general matrix Nehari – Takagi problem and show that this problem can be reduced to Takagi – Sarason interpolation problem studied earlier in (Derkach & Dym, 2010).

The following basic classes: $H_2^{p\times q}$ (resp., $H_\infty^{p\times q}$) is the class of $p\times q$ mvf's with entries in the Hardy space H_2 (resp., H_∞), and $(H_2^p)^\perp = L_2^p \ominus H_2^p$, $\mathcal{S}^{p\times q}$ is the Schur class of $p\times q$ mvf's holomorphic and contractive on $\mathbb{D}$, $\mathcal{S}_{in}^{p\times q}$ (resp., $\mathcal{S}_{out}^{p\times q}$) is the class of inner (resp., outer) mvf's in $\mathcal{S}^{p\times q}$:

$$\mathcal{S}_{in}^{p\times q} = \{s \in \mathcal{S}^{p\times q} : s(\mu)^* s(\mu) = I_p \ a.e. \text{ on } \mathbb{T}\}; \quad \mathcal{S}_{out}^{p\times q} = \{s \in \mathcal{S}^{p\times q} : \overline{sH_2^q} = H_2^p\}.$$

The Nevanlinna class $\mathcal{N}^{p\times q}$ and the Smirnov class $\mathcal{N}_+^{p\times q}$ are defined by

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{p\times q} &= \{f = h^{-1}g : g \in H_\infty^{p\times q}, h \in \mathcal{S} := \mathcal{S}^{1\times 1}\},\\
\mathcal{N}_+^{p\times q} &= \{f = h^{-1}g : g \in H_\infty^{p\times q}, h \in \mathcal{S}_{out} := \mathcal{S}_{out}^{1\times 1}\},\\
\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q} &= \{\varphi(z) = \varphi_0(z) + r(z), \varphi_0 \in \mathcal{N}_+^{p\times q}, r \in \mathcal{R}^{p\times q}, M_\pi(r,\mathbb{D}) \le \kappa\}.
\end{aligned}$$

Let $\mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ denote *the generalized Schur class* of $q\times p$ mvf's s that are meromorphic in $\mathbb{D}$ and for which the kernel

$$L_\omega^s(\lambda) = \frac{I_p - s(\lambda)s(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)}$$

has κ negative squares on $\mathfrak{h}_s^+ \times \mathfrak{h}_s^+$.

Let j_{pq} be an $m \times m$ signature matrix

$$j_{pq} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \quad \text{where } p + q = m,$$

Definition 1 (Alpay & Dym, 1986).**1** *An* $m \times m$ *mvf* $W(\lambda) = [w_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2$ *that is meromorphic in* $\mathbb{D}$ *is said to belong to the class* $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ *of generalized* j_{pq}*-inner mvf's, if:*

(i) the kernel $K_\omega^W(\lambda) = \dfrac{j_{pq} - W(\lambda) j_{pq} W(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)}$ *has* κ *negative squares in* $\mathfrak{h}_W^+ \times \mathfrak{h}_W^+$*;*

(ii) $j_{pq} - W(\mu) j_{pq} W(\mu)^* = 0$ *a. e. on* $\mathbb{T}$.

The Potapov–Ginzburg transform of W

$$S(\lambda) = PG(W) := \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1}$$

It is well known that $S(\lambda) \in \mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$ and $S(\mu)$ is unitary for a. e. $\mu \in \mathbb{T}$ (see Alpay & Dym, 1986; Derkach & Dym, 2009).

Definition 22 (Derkach & Dym, 2009). *An* $m \times m$ *mvf* $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ *is said to be in the class* $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$*, if*

$$s_{21} := -w_{22}^{-1} w_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}.$$

Let $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ and let the Krein–Langer factorization of s_{21} be written as

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1} s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda) b_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+),$$

where $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $s_\ell, s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$. Then, as was shown in Derkach and Dym (2009), the mvf's

$$b_\ell s_{22} \in \mathcal{S}^{q\times q} \quad \text{and} \quad s_{11} b_r \in \mathcal{S}^{p\times p}.$$

Definition 33 (Derkach & Dym, 2009). *Consider inner-outer factorization of* $s_{11} b_r$ *and outer-inner factorization of* $b_\ell s_{22}$

$$s_{11} b_r = b_1 a_1, \qquad b_\ell s_{22} = a_2 b_2, \tag{3}$$

where $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $a_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $a_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$. *The pair* $\{b_1, b_2\}$ *of inner factors in the factorizations (1) is called the associated pair of the mvf* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

Definition 4 (Arov, D. Z., & Dym, H. (2008). *An ordered pair* $\{b_1, b_2\}$ *of inner mvf's* $b_1 \in \mathcal{S}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}^{q\times q}$ *is called a denominator of the mvf* $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, *if*

$$b_1 f b_2 \in \mathcal{N}_+^{p\times q}.$$

The set of denominators of the mvf $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$ is denoted by $den(f)$.

Problem $\mathbf{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$. Let $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ be inner mvf's, let $K \in H_\infty^{p\times q}$ and let $\kappa \in \mathbb{Z}$. A $p \times q$ mvf s is called a solution of the Takagi–Sarason problem $\mathbf{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$, if s belongs to $\mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$ for some $\kappa' \le \kappa$ and satisfies

$$b_1^{-1}(s - K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}.$$

The set of solutions of the Takagi–Sarason problem will be denoted by

$$\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K) = \bigcup_{\kappa' \le \kappa} \{s \in \mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q} : b_1^{-1}(s - K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}\}.$$

The problem $\mathbf{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$ has been studied in Ball and Helton. (1983). As was shown, the set of solutions of this problem was parameterized by the formula

$$f(\lambda) = T_W[\varepsilon] = (w_{11}(\lambda)\varepsilon(\lambda) + w_{12}(\lambda))(w_{21}(\lambda)\varepsilon(\lambda) + w_{22}(\lambda))^{-1},$$

where $W = (w_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_2^{m\times m}$.

Definition 5. *Let* $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ *denote the class of* $m \times m$ *mvf's* $\mathfrak{A}(\mu)$ *on* $\mathbb{T}$ *of the form*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix},$$

with blocks a_{11} and a_{22} of size $p \times p$ and $q \times q$, respectively, such that:

(1) $\mathfrak{A}(\mu)$ *is a measurable mvf on* $\mathbb{T}$ *and* j_{pq}*-unitary a.e. on* $\mathbb{T}$*;*

(2) the mvf's $a_{22}(\mu)$ *and* $a_{11}(\mu)^*$ *are invertible for a.e.* $\mu \in \mathbb{T}$ *and the mvf*

$$s_{21}(\mu) = -a_{22}(\mu)^{-1}a_{21}(\mu) = -a_{12}(\mu)^*(a_{11}(\mu)^*)^{-1}$$

is the boundary value of a mvf $s_{21}(\lambda)$ *that belongs to the class* $\mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$*;*

(3) $a_{11}(\mu)^*$ *and* $a_{22}(\mu)$*, are the boundary values of mvf's* $a_{11}^{\#}(\lambda)$ *and* $a_{22}(\lambda)$ *that are meromorphic in* $\mathbb{C}_+$ *and, in addition,*

$$a_1 := (a_{11}^{\#})^{-1}b_r \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}, \quad a_2 := b_\ell a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q},$$

where b_ℓ, b_r *are Blaschke–Potapov products of degree* κ*, determined by Krein–Langer factorizations of* s_{21}*.*

Mvf's in the class $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ are called *generalized right* γ*-generating* mvf's.

Let $f \in L_\infty^{p\times q}$ and let $\Gamma(f)$ be the Hankel operator associated with f_0:

$$\Gamma(f) := \Pi_- M_f \mid_{H_2^q},$$

where M_f denotes the operator of multiplication by f, acting from L_2^q into L_2^p and let Π_- denote the orthogonal projection of L_2^p onto $(H_2^p)^\perp$. The operator $\Gamma(f)$ is bounded as an operator from H_2^q to $(H_2^p)^\perp$, moreover, $\|\Gamma(f)\| \le \|f\|_{L_\infty^{p\times q}}$.

Consider the following Nehari–Takagi problem

Problem NTP$_\kappa(f_0)$: Given a mvf $f_0 \in L_\infty^{p\times q}$. Find $f \in L_\infty^{p\times q}$, such that

$$\operatorname{rank}(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)) \le \kappa \quad \text{and} \quad \| f \|_\infty \le 1.$$

The set of solutions of the Nehari–Takagi problem will be denoted by

$$\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \{f \in L_\infty^{p\times q} : \operatorname{rank}(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)) \le \kappa \text{ and} \|f\| \le 1\}.$$

Theorem 1. 4*Let* $f_0 \in L_\infty^{p\times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0)$ *and* $K = b_1 f_0 b_2$. *Then*

$$f \in \mathcal{NT}_\kappa(f_0) \Leftrightarrow s = b_1 f b_2 \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K).$$

Theorem 2. *Let* $f_0 \in L_\infty^{p\times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\kappa_1 := \nu_-(I - \Gamma^*\Gamma)$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0)$, $K = b_1 f_0 b_2$, $W \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$ *and let*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} b_1(\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} W(\mu)$$

Then:

(1) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$;

(2) $\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \cup_{k=\kappa_1}^{\kappa} T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}_{k-\kappa_1}^{p\times q}]$.

References

Adamyan, V. M., Arov, D. Z., & Krein, M. G. (1971). Analytic properties of the Schmidt pairs of a Hankel operator and the generalized Schur–Takagi problem. *Matem. Sb.*, *86*, 34–75.

Alpay, D., & Dym, H. (1986). On applications of reproducing kernel spaces to the Schur algorithm and rational J unitary factorization. *I. Schur methods in operator theory and signal processing*, 89–159, Oper. Theory Adv. Appl., **18**. Basel: Birkhäuser.

Arov, D. Z., & Dym, H. (2008). *J-Contractive Matrix Valued Functions and Related Topics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ball, J. A., & Helton, J. W. (1983). A Beurling–Lax theorem for the Lie group $U(m, n)$ which contains most classical interpolation theory. *J. Operator Theory, 9* (1), 107–142.

Derkach, V., & Dym, H. (2009). On linear fractional transformations associated with generalized J-inner matrix functions. *Integ. Eq. Oper. Th.*, *65*, 1–50.

Derkach, V., & Dym, H. (2010). Bitangential interpolation in generalized Schur classes. *Complex Analysis and Operator Theory, 4* 4, 701–765.

НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ПОЛІНОМАМИ

І. М. Александрович, О. Ю. Клименко, М. В.-С. Сидоров

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ms123@ukr.net

В основі результатів даної роботи лежить інтегральне зображення y^k-аналітичних функцій (Положий, 1973), яке встановлює взаємно-однозначну відповідність між y^k-аналітичними й аналітичними функціями, уявні частини яких на відрізку дійсної осі обертаються в нуль. Це інтегральне зображення дає можливість ряд теорем рівномірного наближення аналітичних функцій поліномами (Дзядик, 1977), перенести на y^k-аналітичні функції.

Узагальнені степені *z*. Нехай G — довільна однозв'язна область площини z, симетрична відносно дійсної осі, $D = G \cap \{y > 0\}$, і нехай $\omega(z)$ — аналітична в G функція з дійсними значеннями на дійсній осі. Тоді функція

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = A[\omega(z)] =$$

$$= -iC_k y^{1-k} \int_\Gamma \omega(\zeta)\left[(z-\zeta)(\overline{z}-\zeta)\right]^{\frac{k-2}{2}} d\zeta + \tag{1}$$

$$+C_k \int_\Gamma \omega(\zeta)\left[(z-\zeta)(\overline{z}-\zeta)\right]^{\frac{k-2}{2}} \left(\zeta - \frac{z+\overline{z}}{2}\right) d\zeta,$$

де Γ — довільний контур у G, що з'єднує точки $z = x+iy$ і $\overline{z} = x - iy$,

$$C_k = \left[\int_0^\pi \sin^{k-1}\theta d\theta\right]^{-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

є y^k — аналітичною функцією в області D, тобто функцією, яка є розв'язком системи

$$y^k u_x = v_y, y^k u_y = -v_x,$$

має неперервні похідні аж до $l = G \cap \{y = 0\}$ і задовольняє на l умову

$$f(x) = \omega(x), \tag{2}$$

$\arg[(z-\sigma)(\overline{z}-\sigma)]$ вибирається так, щоб він дорівнював нулеві при $z = x+iy, \sigma = x + i\tau, \tau < y$.

Обернення інтегрального зображення (1) для круга: $G = \{|z| < R\}$ відоме (Пахарєва, Бєлова, 1972), і має вигляд

$$\omega(z) = A^{-1}\left[f(z)\right] = \frac{k\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{2-k}\pi\Gamma\left(k\right)}\int_0^{\pi} u\left(r,\theta\right)\frac{\left(1-\frac{z^2}{r_1^2}\right)\sin^k\theta d\theta}{\left(1-2\frac{z}{r_1}\cos\theta+\frac{z^2}{r_1^2}\right)^{\frac{k+2}{2}}}$$

(3)

$$\omega'(z) = \frac{k\left(\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2\left(\frac{k}{2}+1\right)}{2^{1-k}\pi\Gamma\left(k\right)r_1^{k+1}}\int_0^{\pi} v\left(r,\theta\right)\frac{\left(1-\frac{z^2}{r_1^2}\right)\sin\theta d\theta}{\left(1-2\frac{z}{r_1}\cos\theta+\frac{z^2}{r_1^2}\right)^{\frac{k}{2}+2}}$$

Формули (3) справедливі для будь-якого фіксованого значення $r_1 < R, \left|z\right| < r_1, z = x + iy = re^{i\theta}$.

Побудуємо послідовність y^k-аналітичних функцій $\left\{f_n(z)\right\}_0^{\infty}$, що відповідає за формулою (1) послідовності аналітичних функцій $\left\{\omega_n(z) = z^n\right\}_0^{\infty}$, тобто при $\zeta = x + iy\cos t$, маємо

$$f_n\left(z\right) = \tilde{f}_n\left(r,\theta\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi}}r^n\int_0^{\pi}\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-1}\cos t\right)^n\sin^{k-1}tdt +$$

$$+i\frac{n\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi}k}r^{n-1}\left(r\sin\theta\right)^{k+1}\int_0^{\pi}\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-1}\cos t\right)^{n-1}\sin^{k+1}tdt$$

або, користуючись інтегральним зображенням поліномів Гегенбауера $C_n^{\lambda}\left(x\right)$, матимемо

$$\tilde{f}_n\left(r,\theta\right) = \frac{n!\Gamma\left(k\right)}{\Gamma\left(k+n\right)}r^nC_n^{\frac{k}{2}}\left(\cos\theta\right) + i\frac{n!\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k+n+1\right)}\left(r\sin\theta\right)^{k+1}r^{n-1}C_{n-1}^{\frac{k}{2}+1}\left(\cos\theta\right). \quad (4)$$

y^k-аналітичні функції назвемо узагальненими степенями z і позначимо

$$\tilde{f}_n\left(r,\theta\right)\frac{\Gamma\left(k+n\right)}{n\Gamma\left(k\right)} = \tilde{C}_n^k\left(r,\theta\right) = C_n^k\left(x,y\right),$$

а функції

$$P_n^k(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m C_m^k\left(x, y\right), \tag{5}$$

де $\left(a_m\right)_0^n$ — довільні сталі, назвемо узагальненими y^k-поліномами. У випадку дійсних коефіцієнтів a_m, функції (5) називатимуться просто y^k-поліномами степеня n.

Поліноми Фабера. Поліноми Фабера використовуються в теорії рівномірного наближення функцій (Дзядык, 1977; Fryant, 1978). Наведемо відомості про них.

Лема. *Для довільного обмеженого континуума K з однозв'язним доповненням існує функція $\Phi(z) = \Phi\left(z; K\right)$, яка конформно і однолисто відображає зовнішність K на зовнішність одиничного круга і*

$$0 < \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi\left(z\right)}{z} < \infty.$$

Континуумом будемо називати зв'язну замкнуту множину.

Означення 1. *Під допустимим континуумом K будемо розуміти замкнуту обмежену однозв'язну множину з кусково-гладкою межею.*

Означення 2. Многочленом Фабера n-го порядку для допустимого континуума K називається многочлен $F_n(z)$, який становить собою сукупність членів з невід'ємними степенями лоранівського розвинення в околі точки $z = \infty$ функції

$$\left(\Phi(z)\right)^n = \left(cz + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \cdots\right)^n,$$

тобто

$$F_n\left(z\right) = c^n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_0.$$

Означення 3. Назвемо для допустимого континуума K лінією рівня Γ_R, де R — будь-яке фіксоване число не менше за одиницю, множину точок z, які при $R > 1$ задовольняють умову $\left|\Phi(z)\right| = R$, а при $R = 1$ збігаються з межею Γ області $G_\infty = CK$.

Аналогом теореми Рунге теорії наближення аналітичних функцій може бути в класі y^k-аналітичних функцій наступна теорема.

Теорема 1. Нехай $f\left(z\right)$ є y^k-аналітичною функцією в замкнутій області $\overline{D}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує узагальнений y^k-поліном $P_n^k(z)$ такий, що

$$\left\| f(z) - P_n^k(z) \right\| = \max_{z \in \overline{D}} \left| f(z) - P_n^k(z) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Якщо G — обмежена однозв'язна область, зіркова відносно початку координат і $f(z)$ є y^k-аналітичною в області D і неперервною в $\bar{D}$ функцією, то знайдеться послідовність узагальнених y^k-поліномів $P_n^k(z)$, рівномірно збіжних до $f(z)$ у $\bar{D}$.*

Використовуючи теорему Уолта — Рассела для аналітичних функцій, приходимо до наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай $f(z)$ є y^k-аналітичною функцією в $\bar{D}$. Тоді знайдеться послідовність узагальнених y^k-поліномів $P_n^k(z)$ таких, що для всіх $1 < R < \rho$*

$$\left|f(z) - P_n^k(z)\right| < \frac{M}{R^n}, \forall z \in \bar{D}$$

При цьому $\rho > 1$ — найбільше число, при якому $f\left(z\right)$ є y^k-аналітичною функцією в області D_ρ. Стала M залежить від R і не залежить від n та z.

Нехай тепер границя однозв'язної області G є лінією рівня для деякого допустимого континуума *K*, симетричного відносно дійсної осі, $\partial G = \Gamma_R$, і нехай функція $\omega(z)$ — аналітична в області, обмеженій лінією рівня Γ_R, однозначно представлена рядом по поліномам Фабера

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z).$$

Тоді поліном Фабера $F_n(z)$ має дійсні коефіцієнти і функції

$$F_{n,k}(z) = A\left[F_n(z)\right]$$

будуть y^k-аналітичними функціями в області *D*, які назвемо y^k-поліномами Фабера n-го порядку для допустимого континуума K.

Теорема 4. *Нехай $f\left(z\right)$ є y^k-аналітичною функцією в області $D = G \cap \left\{y > 0\right\}$, де межа області G є лінією рівня для деякого допустимого континуума K, симетричного відносно дійсної осі. Тоді $f(z)$ розкладається в області D в ряд по y^k-поліномам Фабера $F_{n,k}(z)$:*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F_{m,k}(z),$$

де коефіцієнти a_m задовольняють умову

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\left|a_m\right|} \leq \frac{1}{R}.$$

Для встановлення коефіцієнтів розкладу a_m маємо:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\omega|=\rho} u\bigl(\psi(\omega),0\bigr)\omega^{-m-1} d\omega, \ 1 < \rho < R.$$

Тут $z = \psi(z)$ — функція, обернена до $\omega = \varphi(z)$, $u\bigl(x,y\bigr) = \mathrm{Re}\, f(z)$.

Список літератури

Fryant, A. J. (1978). Interpolation and approximation of generalized axisymmetrical potential. *SIAM J. Math. Anal.*, *9* (5), 906–914.

Дзядык, В. К. (1977). *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*. Москва: Наука.

Пахарєва, Н. О., Бєлова М. М. (1972). Про формули обернення основного інтегрального зображення y^k-аналітичних функцій в полярних координатах. *Український математичний журнал*, *24* (2), 272—276.

Положий, Г. Н. (1973) *Теория и применение* p*-аналитических и* (p,q)*-аналитических функций* (2-ое изд.). Киев: Наукова думка.

НАПІВГРУПА ПЕРЕТВОРЕНЬ НЕСКІНЧЕННОЇ ЧАСТКОВО ВИЗНАЧЕНОЇ МНОЖИНИ

К. С. Алексеєва
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна kseniia.tretiak@gmail.com

Розглянемо деяку частково впорядковану множину $\mathcal{M}$.

Означення 1.1 *Напівгрупа всіх частково визначених ін'єкцій $a:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, що зберігають частковий порядок на $\mathcal{M}$ (тобто для всіх $x\le y$ з області визначення a маємо, що $a(x)\le a(y)$) називається* ***інверсною напівгрупою, що зберігає частковий порядок*** *на множині $\mathcal{M}$. Надалі позначатимемо цю напівгрупу символом $\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$.*

Для кожної підмножини $A\subset\mathcal{M}$ позначимо

$$A_{\le} := \{(x,y) : x\in A, y\in A, x\le y\}.$$

Для довільної пари рівнопотужних підмножин A та B чвм M будемо вважати, що $A_{\le}\le B_{\le}$, якщо існує такі ін'єктивне перетворення $\varphi : A\to B$ та підмножина $C_{\le}$ множини $B_{\le}$, що перетворення

$$\varphi' : A_{\le}\to C_{\le},\ \varphi'(x,y) = (\varphi(x),\varphi(y))$$

є ізоморфізмом множин $A_{\le}$ і $C_{\le}$. Якщо одночасно $A_{\le}\le B_{\le}$ та $B_{\le}\le A_{\le}$, то множини $A_{\le}$ і $B_{\le}$ ізоморфні між собою.

Для кожної такої пари підмножин однакової потужності A та B множини $\mathcal{M}$, що $A_{\le}\le B_{\le}$, існує таке перетворення a напівгрупи $\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$, що $\mathrm{dom}(a)=A$ та $\mathrm{im}(a)=B$. Напівгрупа $\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$ містить одиницю — тотожне перетворення $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ та нуль — ніде не визначене перетворення.

Множина ідемпотентів

$$E(\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}) = \{\mathrm{id}_A, A\subset\mathcal{M}\} := \{\pi_{A,A}, A\subset\mathcal{M}\}$$

утворює напівгрупу, ізоморфну булеану $\mathfrak{B}(\mathcal{M})$ відносно перетину. Напівгрупа $\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$ не є інверсною напівгрупою, оскільки для елемента $\pi_{A,B}$ інверсний елемент існує лише у випадку, коли $A_{\le}\le B_{\le}$ та $B_{\le}\le A_{\le}$.

Теорема 1.2 *Нехай $a\in\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$. Тоді*

1) головний лівий ідеал, породжений елементом a, має вигляд

$$\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}\cdot a = \{b\in\mathcal{IO}_{\mathcal{M}} : \mathrm{im}(b)\subseteq\mathrm{im}(a), \exists A\subseteq\mathrm{dom}(a), \mathrm{dom}(b)_{\le}\le A\}$$

2) головний правий ідеал, породжений елементом a, має вигляд

$$a\cdot\mathcal{IO}_{\mathcal{M}} = \{b\in\mathcal{IO}_{\mathcal{M}} : \mathrm{dom}(b)\subseteq\mathrm{dom}(a), \exists A\subseteq\mathrm{im}(a), A\le\mathrm{im}(b)_{\le}\}$$

3) головний двосторонній ідеал, породжений елементом a, має вигляд

$$\mathcal{IO}_{\mathcal{M}} \cdot a \cdot \mathcal{IO}_{\mathcal{M}} =$$
$$= \{b \in \mathcal{IO}_{\mathcal{M}} : \exists A \subseteq \mathrm{dom}(a), \exists B \subseteq \mathrm{im}(a), \mathrm{dom}(b)_{\leq} \leq A, B \leq \mathrm{im}(b)_{\leq}\}.$$

Будову відношень Гріна на напівгрупі $\mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$ описує наступна

Теорема 2.3 *Нехай* $a, b \in \mathcal{IO}_{\mathcal{M}}$. *Тоді*

1) $a\mathcal{L}b$ *тоді й лише тоді, коли* $\mathrm{im}(a) = \mathrm{im}(b)$, $\mathrm{dom}(a)_{\leq} = \mathrm{dom}(b)_{\leq}$,

2) $a\mathcal{R}b$ *тоді й лише тоді, коли* $\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(b)$, $\mathrm{im}(a)_{\leq} = \mathrm{im}(b)_{\leq}$,

3) $a\mathcal{H}b$ *тоді й лише тоді, коли* $a = b$,

4) $a\mathcal{J}b$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\mathrm{rank}(a) = \mathrm{rank}(b),\ \mathrm{dom}(a)_{\leq} = \mathrm{dom}(b)_{\leq},\ \mathrm{im}(a)_{\leq} = \mathrm{im}(b)_{\leq},$$

5) $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Список літератури

Ganyushkin, O., & Mazorchuk, V. (2003). On the structure of $\mathcal{IO}_n$. *Semigroup Forum*, *66* (3), 455–483.

Ganyushkin, O., & Mazorchuk, V. (2009). *Introduction to classical finite transformation semigroup*. London: Springer.

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОДНИМ КЛАССОМ СОПРЯЖЁННЫХ НЕДОПОЛНЯЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

П. П. Барышовец[1], И. Ю. Раевская[2], М. Ю. Раевская[2]
[1]*Национальный авиационный университет,*
[2]*Институт математики НАН Украины, Киев, Украина*
pbar@ukr.net

Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и $AB = 1$. Ф. Холл (Hall, 1937) изучал конечные группы с дополняемыми подгруппами еще в 1937 году. Полное описание произвольных (как конечных, так и бесконечных) групп с таким свойством, получивших название вполне факторизуемых, было получено позже, в в работе Баевой (1953) (см. также Черникова, 1956; 1972). В работах Черникова (1954) и Горчакова (1960) было показано, что произвольные вполне факторизуемые группы совпадают с группами, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Для конечных групп полная факторизуемость следует уже из условия дополняемости одних только элементарных абелевых подгрупп (Черников, 1954) или даже циклических элементарных абелевых подгрупп (Горчаков, 1960). В связи с этими результатами по инициативе С. Н. Черникова были выделены и изучались группы с теми или иными системами дополняемых абелевых или нециклических подгрупп (см. Зуб, 1971; Сысак, 1977).

Естественно продолжить эти исследования в следующем направлении. Пусть K — класс сопряженных подгрупп группы G. Если подгруппа A из класса K дополняема (недополняема) в группе G, то и все подгруппы из этого класса дополняемы (недополняемы) в G. Не вполне факторизуемые группы (т.е. группы, в которых дополняемы не все подгруппы) содержат то или иное число классов сопряженных недополняемых подгрупп. Естественно было бы изучить влияние числа таких классов на строение группы, аналогично тому, как это делается для свойства инвариантности (нормальности) в работах Шмидта (1926, 1938).

В работе Баришовець (2011). доказано, что локально конечные группы с конечным числом классов сопряженных недополняемых подгрупп конечны. В настоящей работе приведено описание бесконечных локально конечных групп с одним классом сопряженных недополняемых абелевых подгрупп.

Теорема 1. *Если бесконечная локально конечная неабелева группа G содержит недополняемые абелевы подгруппы и все они сопряжены в группе G, то*

$$G = [A]\langle u \rangle,$$

где подгруппа A разложима в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в G, причем централизатор каждой из них в $\langle u \rangle$ равен 1 и порядок элемента u равен квадрату простого числа.

При доказательстве теоремы используется описание бесконечных локально конечных не вполне факторизуемых групп с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков (Зайцев, Зуб, 1973) и следующая

Лемма (Барышовец, 1973). *Пусть* A *— абелев нормальный делитель группы* G*, дополняемый в* G*. Тогда для того, чтобы подгруппа* $A_1 \subset A$ *была дополняема в группе* G*, необходимо и достаточно, чтобы она имела в группе* A *дополнение, нормальное в группе* G.

Список литературы

Hall, Ph. (1937). Complemented groups. *J. L. Math.. Soc.*, *12*, 201–204.

Баева, Н. В. (1953). Вполне факторизуемые группы. *ДАН СССР*, *92* (5), 877—880.

Баришовець, П. П. (2011). Про групи з класами спряжених недоповнюваних підгруп. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, *12*, 19—23.

Барышовец, П. П. (1973). Конечные неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп. В сб. *Группы с заданными свойствами подгрупп* (с. 15—77). Киев: Ин-т математики АН УССР.

Горчаков, Ю. М. (1960). Примитивно факторизуемые группы. *Учен. зап. Пермск. ун-та., 17* (2), 15—31.

Зайцев, Д. И., Зуб, О. Н. (1973). Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков. В сб. *Группы с заданными свойствами подгрупп* (с. 105—126). Киев: Институт математики АН УССР.

Зуб, О. Н. (1971). Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы. В кн. *Группы с ограничениями для подгрупп* (с. 134—158). Киев: Наукова думка.

Сысак, Я. П. (1977). Конечные элементарно факторизуемые группы. *Укр. мат. журн., 29* (1), 67—76.

Черников, С. Н. (1954). Группы с системами дополняемых подгрупп. *Матем. сб., 35*, 93—128.

Черникова, Н. В. (1956). Группы с дополняемыми подгруппами. *Матем. сб., 39*, 273—292.

Черникова, Н. В. (1972). К основной теореме о вполне факторизуемых группах. В кн. *Группы с системами дополняемых подгрупп* (с. 49—58). Киев: Ин-т математики АН УССР.

Шмидт, О. Ю. (1926). Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп. *Матем. сб., 33*, 161—172.

Шмидт, О. Ю. (1938). Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп. В кн. *Труды семинара по теории групп* (с. 7—26), М.—Л.: ГОНТИ.

ПРО ОЦІНКИ ТИПУ ДЖЕКСОНА — СТЄЧКІНА ДЛЯ КУСКОВО q-ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

С. І. Безкрила
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
sveti1988@gmail.com

Посилено контрприклад, який показує, що для кускового q-опуклого $(q \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона — Стєчкіна є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують.

Нехай $C[a,b]$ — простір неперервних на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функцій f з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

$C^r[a,b]$ позначає простір r разів неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Нехай $Y_s[a,b]$, $s \in \mathbb{N}$,— набір з $(s+2)$-х точок

$$y_i \in [a,b], a = y_{s+1} < \ldots < y_1 < y_0 = b.$$

Якщо $q \in \mathbb{N}$, то $\Delta^q(Y_s[a,b])$ — це множина функцій $f \in C[a,b]$, таких, що $f^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для парних i та $f^{(q)}(x) \leq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для непарних i. Функції $f \in \Delta^q(Y_s[a,b])$ називаються кусково q-опуклими.

Нехай $W^r[a,b]$ — соболевський клас функцій $f \in AC^{r-1}[a,b]$, таких що

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{[a,b]} \leq 1,$$

де $r \in \mathbb{N}$ і

$$\|g\|_{[a,b]} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Якщо $g \in C[a,b]$, то

$$\|g\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Коли $[a,b] = [-1,1]$, позначаємо

$$Y_s := Y_s[-1,1]$$

(також

$$\Delta^q(Y_s) = \Delta^q(Y_s[-1,1])),\ W^r := W^r[-1,1] \text{ і } \|\cdot\| := \|\cdot\|_{[-1,1]}.$$

Нехай $Y_1^* = \{-1, 0, 1\}$.

Нехай P_n — простір алгебраїчних многочленів степеня $\le n$. Для $f \in \Delta^q\left(Y_s\left[a,b\right]\right)$ позначимо

$$E_n^{(q)}\left(f, Y_s, \left[a,b\right]\right) := \inf_{P_n \in \mathsf{P}_n \cap \Delta^q\left(Y_s\left[a,b\right]\right)} \left\| f - P_n \right\|_{\left[a,b\right]}$$

величину найкращого кусково q-опуклого наближення многочленами.

У роботі Ющенко (2009) побудовано контрприклад, який показує, що для кусково q-опуклого $\left(q \ge 4\right)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона — Стєчкіна з похідною $r \ge q$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають.

Теорема 1 (Ющенко, 2009). *Для будь-яких $q \ge 4$, $r \ge q$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \ge 0$, такої, що*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n = +\infty,$$

існує функція

$$f \in \Delta^q\left(Y_s\left[a,b\right]\right) \cap C^r\left[a,b\right]$$

така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n E_n^{(q)}\left(f, Y_s, \left[a,b\right]\right) n^{r-q+3} = +\infty.$$

У моїй роботі побудовано новий контрприклад, який посилює результат роботи Ющенко (2009) та узагальнює на випадок $q \ge 4$ теорему 1.6 роботи Leviatan, Shevchuk (2016). Основним результатом роботи є

Теорема 2. *Для будь-яких $q \ge 3$, $r \ge q$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \ge 0$, такої, що*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n = +\infty,$$

існує функція $f \in \Delta^q\left(Y_s\right) \cap W^r$ така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n E_n^{(q)}\left(f, Y_s\right) n^{r-q+2} = +\infty.$$

Контрприклади для інших пар $\left(q, r\right)$, $q \ge 3$, побудовані в роботі Leviatan, Shevchuk (2016).

Список літератури

Leviatan, D., & Shevchuk, I. A. (2016). Jackson type estimates for piecewise q-monotone approximation, $q \ge 3$, are not valid. *Pure and Applied Functional Analysis, 1* (1), 85—96.

Ющенко, Л. П. (2009) Негативні результати у кусково-опуклому наближенні вищих порядків. Вісник Київського університету. Математика і Механіка, *22*, 8—10.

ОБ УСЛОВИЯХ СОХРАНЕНИЯ ТЕНЗОРА РИМАНА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВТОРОГО ТИПА

В. Е. Березовский, Л. Е. Ковалёв

Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина

berez.volod@rambler.ru, leokova60@ukr.net

Напомним основные понятия теории почти геодезических отображений, которые изложены в Sinyukov (1984), Mikeš, Berezovski at al. (2015).

Рассмотрим n-мерное пространство аффинной связности без кручения, отнесённое к системе координат $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$. Предположим, что $n>2$ и все рассматриваемые функции будем считать достаточно гладкими.

Кривую, определённую в пространстве аффинной связности A_n, называют *геодезической*, если её касательный вектор параллелен вдоль неё.

Кривую, определённую в пространстве аффинной связности A_n, называют *почти геодезической*, если вдоль неё существует двумерная параллельная площадка, содержащая её касательный вектор.

Диффеоморфизм $f: A_n \to \bar{A}_n$ называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Для того чтобы отображение пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$ тензор деформации связностей

$$P_{ij}^h(x)=\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)-\Gamma_{ij}^h(x),$$

где Γ_{ij}^h и $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно в указанной системе координат, удовлетворял условиям

$$A_{\alpha\beta\gamma}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = aP_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\lambda^h, \tag{1}$$

где

$$A_{ijk}^h = P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h, \tag{2}$$

λ^h — произвольный вектор, a и b — некоторые функции переменных x^h и λ^h.

Здесь и в дальнейшем знак «,» обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n.

Синюковым (1984) на основании уравнений (1) были выделены три типа почти геодезических отображений: π_1, π_2 и π_3. В работе Berezovskij, Mikeš (1996) доказано, что при $n>5$ других типов не существует.

Почти геодезические отображения типа π_2 характеризуются уравнениями

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h + \sigma_i(x)F_j^h(x) + \sigma_j(x)F_i^h(x), \qquad (3)$$

$$F_{(i,j)}^h(x) + F_\alpha^h F_{(i}^\alpha \sigma_{j)} = \mu_{(i}F_{j)}^h + \gamma_{(i}\delta_{j)}^h, \qquad (4)$$

где δ_i^h — символы Кронекера, $\psi_i(x)$, σ_i, μ_i, γ_i — некоторые ковариантные векторы, F_i^h — некоторый тензор типа $\binom{1}{1}$.

Отображения $\pi_2 : A_n \to \bar{A}_n$ характеризующиеся в общей по отображению системе координат уравнениями (3) и (4) будем считать соответствующим аффиннору $F_i^h(x)$.

Отображение π_2 удовлетворяет условию взаимности, если обратное ему отображение также является почти геодезическим отображением второго типа и соответствует тому же аффиннору $F_i^h(x)$.

Почти геодезическое отображение типа π_2 называют *каноническим*, если $\psi_i = 0$. Известно, что любое почти геодезическое отображение π_2 можно представить в виде композиции канонического почти геодезического отображения и геодезического отображения.

Рассмотрим канонические почти геодезические отображения π_2, которые удовлетворяют условию взаимности. Такие отображения характеризуются уравнениями

$$P_{ij}^h(x) = \sigma_i(x)F_j^h(x) + \sigma_j(x)F_i^h(x), \qquad (5)$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h \qquad (e = \pm 1), \qquad (6)$$

$$F_{i,j}^h = \gamma_i\delta_j^h + \mu_i F_j^h + \frac{e}{4}N_{i\alpha}^h F_j^\alpha, \qquad (7)$$

$$\gamma_i + \mu_\alpha F_i^\alpha = 0, \qquad (8)$$

где N_{ij}^h — тензор Нейенхейса e-структуры $(e \neq 0)$.

В работе Berezovski, Bácsó, Mikeš (2015) доказано, что тензор Римана сохраняется при диффеоморфизмах, тогда и только тогда, когда тензор A_{ijk}^h удовлетворяет условиям

$$A_{ijk}^h = A_{ikj}^h. \qquad (9)$$

Если тензор деформации связностей P_{ij}^h выражается по формулам (5), то на основании (2) имеем

$$\begin{aligned} A_{ijk}^h &= \sigma_{i,k}F_j^h + \sigma_i F_{j,k}^h + \sigma_{j,k}F_i^h + \sigma_j F_{i,k}^h + \sigma_i\sigma_\alpha F_j^\alpha F_k^h + \\ &+\sigma_i\sigma_k F_j^\alpha F_\alpha^h + \sigma_j\sigma_\alpha F_i^\alpha F_k^h + \sigma_j\sigma_k F_i^\alpha F_\alpha^h. \end{aligned} \qquad (10)$$

Учитывая (6) и (7) из (10) получим

$$
\begin{aligned}
A^h_{ijk} &= \sigma_{i,k}F^h_j + \sigma_i(\gamma_k\delta^h_j + \mu_k F^h_j + \frac{e}{4}N^h_{k\alpha}F^\alpha_j) + \\
&+\sigma_{j,k}F^h_i + \sigma_j(\gamma_i\delta^h_k + \mu_i F^h_k + \frac{e}{4}N^h_{i\alpha}F^\alpha_k) + \\
&+\sigma_i\sigma_\alpha F^\alpha_j F^h_k + \sigma_j\sigma_\alpha F^\alpha_i F^h_k + e\delta^h_j\sigma_i\sigma_k + e\delta^h_i\sigma_j\sigma_k.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Потребуем, чтобы тензор A^h_{ijk} удовлетворял условиям (9). Отсюда находим

$$
\sigma_{i,k}F^h_j - \sigma_{i,j}F^h_k + \sigma_{j,k}F^h_i - \sigma_{k,j}F^h_i = B^h_{ijk}, \tag{12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
B^h_{ijk} &= \sigma_i(\gamma_j\delta^h_k + \mu_j F^h_k + \frac{e}{4}N^h_{j\alpha}F^\alpha_i - \gamma_k\delta^h_j - \mu_k F^h_j - \frac{e}{4}N^h_{k\alpha}F^\alpha_j) - \\
&-\sigma_j(\gamma_i\delta^h_k + \mu_i F^h_k + \frac{e}{4}N^h_{i\alpha}F^\alpha_k) + \sigma_k(\gamma_i\delta^h_j + \mu_i F^h_j + \frac{e}{4}N^h_{i\alpha}F^\alpha_j) - \\
&-\sigma_i\sigma_\alpha F^\alpha_j F^h_k + \sigma_i\sigma_\alpha F^\alpha_k F^h_j - \sigma_j\sigma_\alpha F^\alpha_i F^h_k + \sigma_k\sigma_\alpha F^\alpha_i F^h_j - \\
&-e\delta^h_j\sigma_i\sigma_k + e\delta^h_k\sigma_i\sigma_j.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Уравнения (12) свернём с аффиннором F^m_ρ по индексам ρ и h. В результате находим

$$
e\sigma_{i,k}\cdot\delta^m_j - e\sigma_{i,j}\cdot\delta^m_k + e\sigma_{j,k}\cdot\delta^m_i - e\sigma_{k,j}\cdot\delta^m_i = B^\alpha_{ijk}F^m_\alpha,
$$

или

$$
\sigma_{i,k}\delta^m_j - \sigma_{i,j}\delta^m_k + \sigma_{j,k}\delta^m_i - \sigma_{k,j}\delta^m_i = eB^\alpha_{ijk}F^m_\alpha. \tag{14}
$$

Уравнения (14) свернём по индексам m и j. Получим

$$
n\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i} = eB^\alpha_{i\beta k}F^\beta_\alpha. \tag{15}
$$

Проальтернируем уравнения (15) по индексам i и k. В результате находим

$$
\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i} = \frac{e}{n+1}F^\beta_\alpha(B^\alpha_{i\beta k} - B^\alpha_{k\beta i}). \tag{15}
$$

Учитывая (16) уравнения (15) можно записать в виде

$$
\sigma_{i,k} = \frac{e}{n-1}F^\beta_\alpha(B^\alpha_{i\beta k} - \frac{1}{n+1}(B^\alpha_{i\beta k} - B^\alpha_{k\beta i})). \tag{16}
$$

Поэтому, имеет место

Теорема. *Если при почти геодезических отображениях второго типа, определяемых уравнениями* (5)—(8)*, сохраняется тензор Римана, то ковектор* σ_i *удовлетворяет условиям* (17).

Список литературы

Berezovski, V. E., Bácsó, S., & Mikeš, J. (2015). Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the riemannian curvature. *Annales Mathematicae et Informaticae*, *45*, 3–10.

Berezovskij, V., & Mikeš, J. (1996). On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, *35*(1), 21—24.

Mikeš, J., & Berezovski, V. E., at al. (2015). *Differential geometry of special mappings*. Olomouc: Palacky University.

Sinyukov, N. S. (1984). Almost-geodesic mappings of affinely connected and Riemann spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, *25*(4), 1235–1249.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, КОТОРЫЕ ДОПУСКАЮТ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В. Е. Березовский, Й. Микеш
Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина,
Университет Палацкого, Оломоуц, Чехия
berez.volod@rambler.ru, josef.mikes@upol.cz

Под диффеоморфизмом пространств аффинной связности понимают взаимно однозначное гладкое отображение, обратное к которому также является гладким отображением. Среди диффеоморфизмов пространств аффинной связности важную роль играют геодезические отображения.

Предположим, что пространство аффинной связности A_n допускает диффеоморфизм f на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению системе координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Положим

$$P_{ij}^h(x) = \overline{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x), \tag{1}$$

где Γ_{ij}^h и $\overline{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\overline{A}_n$ соответственно в указанной системе координат, $P_{ij}^h(x)$ — тензор деформации связностей при диффеоморфизме f.

Нами доказана

Теорема 1. *Тензор Римана сохраняется при диффеоморфизме* $f : A_n \to \overline{A}_n$ *тогда и только тогда, когда тензор*

$$A_{ijk}^h = P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h$$

удовлетворяет условиям $A_{ijk}^h = A_{ikj}^h$.

Кривую, определенную в пространстве A_n , называют *геодезической*, если ее касательный вектор параллелен вдоль нее.

Диффеоморфизм $f : A_n \to \overline{A}_n$ называют *геодезическим отображением*, если при этом все геодезические линии пространства A_n переходят в геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Известно (Berezovski, Bácsó, Mikeš, 2015; Mikeš, Berezovski at al., 2015), что для того чтобы отображение f пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

тензор деформации связностей представлялся в виде

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h, \tag{2}$$

где δ_i^h — символы Кронекера и $\psi_i(x)$ — некоторый градиентный вектор.

Нами доказана

Теорема 2. *Пространство аффинной связности A_n допускает геодезическое отображение на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ с сохранением тензора Римана тогда и только тогда, когда система Коши $\psi_{i,j} = \psi_i\psi_j$ имеет в нем решение относительно неизветных функций $\psi_i(x)$.*

Допустим, что пространство A_n плоское. Тогда основные уравнения в аффинной системе координат принимают вид

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x^k} = \psi_i\psi_j. \tag{3}$$

Вектор ψ_i является градиентным, то есть, существует функция ψ, такая, что $\psi_i = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}$. Тогда уравнения (3) принимают вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j} = \psi_i\psi_j.$$

Общим решением этих уравнений будут функции

$$\psi = -\ln\left|C_0 + C_1x^1 + \dots + C_nx^n\right|,$$

где $C_0, C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Поэтому, тензор

$$\psi_i = -C_i \cdot (C_0 + C_1x^1 + \dots + C_nx^n)^{-1}.$$

Учитывая, что пространство A_n плоское, на основании формул (1) и (2) получим

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h = -\frac{1}{C_0 + C_1x^1 + \dots + C_nx^n}(C_i\delta_j^h + C_j\delta_i^h). \tag{4}$$

Учитывая, что тензор Римана $\overline{R}_{ijk}^h$ пространства аффинной связности $\overline{A}_n$ выражается через компоненты объекта аффинной связности по формулам

$$\overline{R}_{ijk}^h = \partial_j\overline{\Gamma}_{ik}^h + \overline{\Gamma}_{ik}^\alpha(x)\overline{\Gamma}_{\alpha j}^h(x) - \partial_k\overline{\Gamma}_{ij}^h - \overline{\Gamma}_{ij}^\alpha(x)\overline{\Gamma}_{\alpha k}^h(x),$$

можно убедиться в том, что $\overline{R}_{ijk}^h = 0$.

Тем самым мы доказали, что плоские пространства аффинной связности A_n допускают геодезические отображения на пространства афинной связности $\overline{A}_n$ с компонентами аффинной связности (4), причем тензор Римана таких пространств тождественно обращается в нуль.

В силу того, что в общем случае $\psi_i(x) \neq 0$, указанные геодезические отображения отличные от аффинных.

Список литературы

Berezovski, V. E., Bácsó, S., Mikeš, J. (2015). Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemannian curvature. *Ann. Math. Informat., 45*, 3–10.

Mikeš J., Berezovski, V. E. at al. (2015). *Differential geometry of special mappings*. Olomouc: Palacky University.

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО МІНІМУМУ ДОВІЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Р. Р. Бігун

Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна

bigunroman@ukr.net

У Цегелик (2013) побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, який використано для: апроксимації функцій; побудови чисельних методів обчислення визначених інтегралів; побудова чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій; оптимізації гладких і негладких вгнутих функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

У Глебена (2013), Bihun, Tsehelyk (2014) уперше побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для апроксимації функцій та розробки чисельних методів оптимізації гладких і негладких опуклих функцій однієї та двох дійсних змінних.

У Bihun, Tsehelyk (2015). побудовано чисельний метод для відшукання всіх точок екстремуму довільних гладких і негладких функцій однієї дійсної змінної.

У доповіді розглядається побудова чисельного методу відшукання абсолютного мінімуму гладкої і негладкої довільної функції двох дійсних змінних, використовуючи апарат некласичних мінорант Ньютона функцій, заданих таблично (Bihun & Tsehelyk, 2014).

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $f(x,y)$, визначену в області

$$D=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

Вважатимемо, що $f(x,y)>0$ для всіх $(x,y)\in D$. Якщо функція $f(x,y)<0$ на *D*, то замість неї можна розглядати функцію $f(x,y)+C$, де стала C підібрана так, що $f(x,y)+C>0$ для всіх $(x,y)\in D$. Побудуємо в області *D* сітку:

$$x=x_i=a+ih, i=0,1,...,n; h=\frac{b-a}{n};$$

$$y=y_j=c+js, j=0,1,...,m; s=\frac{c-d}{m};$$

Позначимо

$$f(x_i,y_j=a_{ij}, i=0,1,...,n; j=0,1,...,m).$$

Алгоритм методу. Алгоритм складається з низки кроків. Покладемо $j = 1$. На першому кроці покладаємо $i = 0$ і визначаємо

$$r_{ij} = \max_{i<\nu\leq n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{\nu j}}\right)^{\frac{1}{\nu-i}} \tag{1}$$

Якщо $r_{ij} \leq 1$, то переходимо до другого кроку. Якщо $r_{ij} > 1$, то визначаємо максимальне значення індексу ν, для якого в (1) досягається максимум, позначаємо його через i і повторюємо (1) поки не отримаємо, що максимальне значення індексу ν, для якого досягається максимум, дорівнює n або $r_{ij} \leq 1$.

На другому кроці, якщо $r_{ij} \leq 1$, перевіряємо чи знайдена точка є точкою локального мінімуму. Обчислюємо

$$r_1 = \frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}} \tag{3}$$

$$r_2 = \frac{a_{ij}}{a_{i,j+1}} \tag{4}$$

Якщо $r_1 > 1, r_2 \leq 1$, то точка (x_i, y_j) є точкою локального мінімуму. Приймаємо $\tilde{r}_{ij} = r_{ij}$. Якщо $j < m-1$, то приймаємо $j = j+1$ і переходимо до першого кроку, інакше переходимо до третього кроку.

На третьому кроці шукаємо точку абсолютного мінімуму серед знайдених точок локального мінімуму. Для цього обчислюємо

$$\overline{r}_{ij} = \min_{i,j} \tilde{r}_{ij}.$$

За точку абсолютного мінімуму приймаємо точку (x_i, y_j).

Приклад. Знайдемо точку абсолютного екстремуму функції Растрігіна при $n = 2$:

$$f(x, y) = 20 + x^2 + y^2 - 10(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y).$$

Графік цієї функції зображено на рис.1.

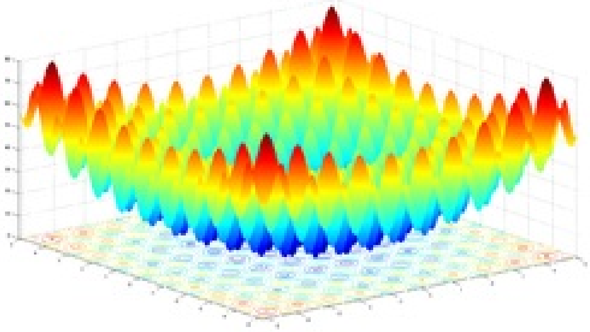


Рис. 1. Графік функції Растрігіна при $n = 2$

Оскільки $f(x,y)=0$ при $x=0, y=0$, то шукатимемо точку абсолютного екстремум для функції

$$f(x,y)=20+x^2+y^2-10(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y)+10.$$

Нехай $h=s=0.01, a=-5, b=5, c=-5, d=5$.

Виконавши третій крок алгоритму, знаходимо $\overline{r_{ij}}=0,909$ і отримаємо з точністю $0,01$ точку $\left(0;\ 0\right)$, у якій функція досягає свого мінімуму:

$$f(x,y)=10.$$

Список літератури

Bihun, R. R., & Tsehelyk, G. G. (2014). Device of non-classical Newton's minorant of functions of two real table-like variables and its application in numerical analysis, *International Journal of Information and Communication Technology Research*, *4* (7), 284–287.

Bihun, R. R., & Tsehelyk, G. G. (2015). Numerical Method for Finding All Points of Extremum of Random as Smooth and Non-Smooth Functions of One Variable. *Global Journal of Science Frontier Research: F Mathematics and Decision Sciences*, *15* (2), 87–93.

Глебена, М. І. (2013). Апарат некласичних мінорант Ньютона та його використання. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. та інформ*., *24* (1), 16—21.

Цегелик, Г. Г. (2013). *Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія*. Львів: ЛНУ імені Івана Франка.

ТЕХНІКА ЗАСТОСУВАННЯ ІЗОТОПНИХ ФУНКЦІЙ

О. П. Бондар
Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, Кіровоград, Україна
bondarkla@ukr.net

Розглядається простір нескінченно диференційовних або достатньо гладких функцій на компактному многовиді без краю або з краєм, на якому функція приймає постійне значення і не має критичних точок.

Відомо, що при малому збуренні функції, які не мають вироджених критичних точок та кратних критичних значень — так звані функції Морса — є стійкими, тобто диференційовними замінами незалежних і залежної змінних функція Морса з малим збуренням зводиться до початкової функції. Варіант техніки замін дають відомі леми Адамара і Морса. Але вони не вказують на гомотопію або шлях відповідного виду, що може поєднувати функції замін.

Тут подано варіант техніки замін, який, по-перше, дає можливість виявити приналежність відображень одній орбіті ліво-правої дії, по-друге, дозволяє перетворювати функції з несуттєво критичними точками (Шарко, 2003) у функції без критичних точок. Для цього застосовуються функції, що узагальнюють ізотопні функції Морса.

Шарко (1980) назвав функції Морса f_0 и f_1 на многовиді M^n *ізотопними*, якщо існує шлях $\gamma : [0,\ 1] \to C^{\infty}(M^n, \mathbb{R})$, такий, що $\gamma(0) = f_0, \gamma(1) = f_1$ і $\gamma(t)$ — функція Морса для всіх $t \in [0,1]$.

В. В. Шарко дав необхідну і достатню умову ізотопності для правильних мінімальних функцій Морса на однозв'язному многовиді вимірності, більшої за п'ять.

Природнє узагальнення (Бондарь, 2015) поняття ізотопних функцій Морса на більш широкий клас функцій дозволяє отримати корисний інструмент дослідження функцій на многовидах, а, відтак, і самих многовидів.

Нехай в позначеннях (Власенко, Максименко, Полулях, 2006):

— група $Iso(M)$ m-вимірного многовиду M — за контекстом група C^r-дифеоморфізмів $D^r(M), r = 1,\ldots,\infty$, гомеоморфізмів $Hom(M)$ або PL-гомеоморфізмів $PL(M)$, відповідні відображення названо ізоморфізмами;

— $Iso(M, X)$ — група ізоморфізмів, нерухомих на підмножині $X \subset M$, тоді $Iso(M, \varnothing) = Iso(M)$;

— $Iso^{+}(M)$ — група ізоморфізмів, що зберігають орієнтацію M, якщо M орієнтовано;

— $Iso_0(M, X)$ — підгрупа в $Iso(M, X)$, яка складається зі всіх ізоморфізмів, ізотопних id_M у просторі $Iso(M, X)$;

— $T\left(M\right)$ — група ізотопій многовиду M.

Многовид M вважаємо компактним.

Означення (Бондарь, 2015). *Нехай* $f_0 : M \to \mathbb{R}$ *неперервна або* r-*диференційовна* $(r = 1,...,\infty)$ *функція і ізотопії*

$$H : M \times \left[0,1\right] \to M \times \left[0,1\right],$$
$$h : \mathbb{R} \times \left[0,1\right] \to \mathbb{R} \times \left[0,1\right],$$

такі, що

$$H_t \subset Iso_0\left(M\right), H_0 = id_M,$$
$$h_t \subset Iso_0{}^{+}(\mathbb{R}), h_0 = id_{\mathbb{R}}.$$

Тоді функції

$$f_t : M \to \mathbb{R}, t \in \left[0,1\right],$$
$$f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t{}^{-1},$$

що мають той же тип (неперервні, r*-диференційовні або функції Морса), що і функція* f_0, *називаються* ***ізотопними функції*** f_0 ***(неперервно ізотопними,*** r***-диференційовно ізотопними*** *або* ***ізотопними функціями Морса)****, або просто ізотопними, якщо контекст не потребує уточнень.*

Наведемо приклад техніки застосування ізотопних функцій на двовимірному компактному многовиді. При достатньо малих ε і δ сімейство відображень компактного двовимірного многовиду M на пряму

$$f_0 : M \to \mathbb{R},$$

$$f_0(x,y) = \{z \mid z = x^2 + \varepsilon x + y^2 + \delta y\}$$

можна розглядати як мале збурення функції $z = x^2 + y^2$.

Ізотопії

$$H : M \times I \to M \times I,$$
$$h : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R} \times I,$$

$$H_t\left(x,y\right) = \left\{\left(U_t,V_t\right)\middle| U_t = x + \frac{t\varepsilon}{2}, V_t = y + \frac{t\delta}{2}\right\}$$

і

$$h_t\left(z\right) = \left\{s_t \middle| s_t = z + t\frac{\varepsilon^2 + \delta^2}{4}\right\}$$

дають можливість побудувати гомотопію відповідних функцій Морса, що перетворює функцію з малим збуренням у початкову функцію:

$$H_t^{-1}\left(U_t,V_t\right) = \left\{\left(x,y\right)\middle| x = U_t - \frac{t\varepsilon}{2}, y = V_t - \frac{t\delta}{2}\right\},$$

$$f_0 \circ H_t^{-1}\left(U_t, V_t\right) = \left\{ z \middle| z = U_t^{\,2} + V_t^{\,2} + \left(1 - t\right)\left(\varepsilon U_t + \delta V_t\right) + t\left(t - 2\right)\frac{\varepsilon^2 + \delta^2}{4} \right\},$$

$$f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t^{-1}\left(U_t, V_t\right) =$$

$$= \left\{ s_t \middle| s_t = U_t^{\,2} + V_t^{\,2} + \left(1 - t\right)\left(\varepsilon U_t + \delta V_t - t\frac{\varepsilon^2 + \delta^2}{4}\right) \right\}.$$

Список літератури

Бондарь, О. П. (2015). Об определении изотопных функций. В кн. *Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі-2015»* (с. 67).

Власенко, И. Ю., Максименко, С. И., Полулях, Е. А. (2006). Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий. *Тр. Ин-та математики НАН Украины*, *61*, 338.

Шарко, В. В. (1980). *Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты).* Киев: Наукова думка.

Шарко, В. В. (2003). Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях. *Укр. мат. журн.*, *55* (5), 687—700.

ДО ПИТАННЯ ПРО ВИКОРИСТАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА В АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОМУ МЕТОДІ

Я. П. Василенко

Тернопільський національний педагогічний університет імені В. Гнатюка, Тернопіль, Україна

yava07@gmail.com

У своїх працях В. К. Дзядик (1980, 1986, 1988) запропонував та теоретично обґрунтував апроксимаційно-ітеративний метод (АІ-метод) побудови поліноміального наближення розв'язків задачі Коші:

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0,\ x \in [x_0, x_0 + h]. \tag{1}$$

У подальшому Дзядиком (1988) та його учнями цей метод був розповсюджений на розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь, гіперболічних рівнянь другого порядку в $\mathbb{R}^2$, крайових задач тощо.

Стосовно функції $f(x,y)$ будемо припускати, що вона:

i) визначена на деякому прямокутнику $P = [x_0, x_0 + h] \times [y_0 - H, y_0 + H]$;

ii) є аналітичною по обох змінних в $\operatorname{int} P$ і неперервною на P;

iii) на деякому малому інтервалі з $[x_0, x_0 + h]$ її похідна $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ є достатньо великою по абсолютній величині.

Як правило задачі виду (1) з такими властивостями функції $f(x,y)$ називають *жорсткими* (див., наприклад, Деккер, 1988) і в останні десятиліття їх відносять до числа найбільш важливих в теорії диференціальних рівнянь.

У даному дослідженні до розв'язування жорстких задач виду (1) застосовується АІ-метод, у якому ітераційний процес Пікара замінюється на процес Ньютона — Канторовича (Канторович, 1957). Установлена оцінка відхилення отриманих многочленних наближень від точного розв'язку в рівномірній метриці.

Як відомо, задача Коші (1) рівносильна інтегральному рівнянню Вольтера

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2}$$

Із метою використання ітераційного процесу Ньютона — Канторовича для наближення розв'язків рівняння (2) розглянемо допоміжний нелінійний оператор $B : K(y_0, H) \to C[x_0, x_0 + h]$, що діє за формулою

$$(By)(x) = y(x) - y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \tag{3}$$

де через $K(y_0, H)$ позначена куля в $C[x_0, x_0 + h]$ деякого радіуса H з центром у точці y_0, тобто

$$K(y_0, H) = \left\{ y \in C[x_0, x_0 + h] : \left\| y(x) - y_0 \right\|_{C[x_0, x_0 + h]} \le H \right\}.$$

Оскільки оператор B маю таку властивість, що, якщо $y^*(x)$ є розв'язком рівняння (2), то $(By^*)(x) \equiv 0$, і навпаки, із того, що $By^* = 0$ випливає, що $y^*(x)$ є розв'язком рівняння (2), то замість інтегрального рівняння (2) розглядатимемо операторне рівняння

$$By = 0. \tag{4}$$

Це рівняння, згідно з Канторович (1981), будемо розв'язувати наступним чином. Покладемо $y^0 = y^0(x) \equiv y_0$ і після цього кожне наступне наближення $y^\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ будуватимемо за формулою

$$y^{\nu+1} = y^\nu - \left[B'_{y^\nu} \right]^{-1} By^\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots,, \tag{5}$$

де через B'_{y^ν} позначена похідна Фреше оператора B в точці y^ν (див., наприклад, Канторович (1981)).

Зауважимо, що в силу аналітичності функції $f(x, y)$ похідна Фреше B'_y оператора B існує $\forall y \in K(y_0, H)$ і задається на множині елементів $z \in C[x_0, x_0 + h]$ за допомогою рівності

$$(B'_y z)(x) = z(x) - \int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t)) z(t) dt,$$

Лема 1. *Лінійний неперервний оператор* $B'_y : C[x_0, x_0 + h] \to C[x_0, x_0 + h]$ *при* $\forall y \in K(y_0, H)$ *має неперервний обернений оператор* $\left[B'_y \right]^{-1}$, *норма якого обмежена числом* e^q*:*

$$\left\| \left[B'_y \right]^{-1} \right\| \le e^q,$$

де $q := \left\| f'_y \right\|_{C(P)} \cdot h$.

Для компактності подальшого викладу введемо позначення

$$L_0 := \left\| f \right\|_{C(P)}, L_1 := \left\| f'_y \right\|_{C(P)}, L_2 := \left\| f''_{yy} \right\|_{C(P)},$$

$$\eta_0 := e^q \cdot L_0 h \ (q = L_1 h), \ \chi_0 := e^q \cdot L_2 h \eta_0.$$

Теорема 1. *Нехай в рівнянні (4) функція* $f \in A(\operatorname{int} P) \cap C(P)$ *і, крім того,*

$$\chi_0 < 1, \ H > H_0 = 2\eta_0.$$

Тоді послідовні наближення (5) сходяться до розв'язку рівняння (4) і ці розв'язки знаходяться в кулі $K(y_0, H_0)$.

Теорема 2. *За умов теореми 1 для відхилення наближеного розв'язку* $y^{\nu}(x)$, *який визначається за рекурентними співвідношеннями (5), від точного розв'язку* $y(x)$ *рівняння (4) (або, що те саме, рівняння (2) чи задачі Коші (1)) справедлива оцінка*

$$\left\| y(x) - y^{\nu}(x) \right\|_{C[x_0, x_0+h]} \le 2 \cdot \frac{\eta_0 \cdot \chi_0^{2^{\nu}-1}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} \cdot \exp\left\{ \frac{\chi_0^{2^{\nu}}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} \right\}, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $\alpha_{\nu} := (3!)^{2^{\nu-2}} (4!)^{2^{\nu}-3} \ldots (\nu!)^2 \cdot (\nu+1)! \cdot (\nu+2)!, \ \ \nu = 3, 4, \ldots,$

$\alpha_2 := 3! \cdot 4!, \ \ \alpha_1 := 3!, \ \ \alpha_0 := \sqrt{2}.$

Ітераційний процес містить операцію інтегрування (5) і його на практиці, як правило, важко реалізувати. Тому, слідуючи працям Дзядика (1986, 1988), для наближення розв'язків рівняння (2) (а, отже, і задачі коші (1)) було розглянуто і досліджено операторне рівняння виду

$$y(n, x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot, y(n, \cdot); t) dt, \tag{6}$$

У якому A_n — деякий суматорний оператор, що діє на множині функцій із $C[x_0, x_0 + h]$, а $y(n, x)$ — многочлен степеня не вище n. Зокрема, був досліджений інтерполяційний оператор, побудований при деякому фіксованому n по вузлах $\left\{x_j\right\}_{j=0}^{n} : x_j = x_0 + \frac{h}{2} \cdot (\xi_j + 1), \, \xi_j = -\cos\frac{j\pi}{n}, \, j = \overline{0, n}$.

З метою наближення розв'язків неявного відносно $y(n, x)$ рівняння (6) замість простих ітерацій використовується ітераційний процес Ньютона — Канторовича.

Для цього розглянемо рівняння виду

$$C\tilde{y} = 0, \tag{7}$$

у якому $\tilde{y}(x) := y(n, x)$, а оператор C задається рівністю

$$(C\tilde{y})(x) = \tilde{y}(x) - y_0 + \int_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot, y(\cdot); t) dt.$$

Наближений розв'язок рівняння (7) будемо шукати за допомогою наступного ітераційного процесу

$$\tilde{y}^{\nu+1} = \tilde{y}^{\nu} - \left[C'_{\tilde{y}^{\nu}} \right]^{-1} C\tilde{y}^{\nu}, \quad \tilde{y}^0 = y^0, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots,, \tag{8}$$

де через $C'_{\tilde{y}^{\nu}}$ позначена похідна Фреше оператора C в точці $\tilde{y}^{\nu}$.

У силу умов, накладених на функцію $f(x, y)$, похідна Фреше $C'_{\tilde{y}^{\nu}}$ існує і її дія на довільний елемент $z \in C[x_0, x_0 + h]$ задається рівністю

$$(C'_{\tilde{y}^{\nu}} z)(x) = z(x) - \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f'_y(\cdot, y(\cdot); t) z(t) dt,$$

Лема 2. *Лінійний неперервний оператор* $C'_y : C[x_0, x_0 + h] \to C[x_0, x_0 + h]$ *при* $\forall y \in K(y_0, H)$ *має неперервний обернений оператор* $\left[C'_y\right]^{-1}$*, норма якого обмежена числом* e^{q_1}*:*

$$\left\| \left[C'_y\right]^{-1} \right\| \le e^{q_1},$$

де $q_1 := \left\| A_n \right\| \cdot q$.

Теорема 3. *Якщо*

$$f \in A(\operatorname{int} P) \cap C(P),\ \tilde{\eta}_0 := e^{q_1} \left\| A_n \right\| \cdot L_0 h\ ,\ \tilde{\chi}_0 := e^{q_1} \left\| A_n \right\| \cdot L_2 h \tilde{\eta}_0$$

і $\tilde{\chi}_0 < 1$, $H > \tilde{H}_0 = 2\tilde{\eta}_0$, *то послідовні наближення (8) збігаються до розв'язку рівняння (7), який лежить у кулі* $K(y_0, \tilde{H}_0)$.

Для оцінки похибки AI-методу при використанні ітераційного процесу Ньтона — Канторовича побудуємо еліпс Жуковського (відштовхуючись від сегмента $[x_0, x_0 + h]$ і деякого $r > 1$)

$$\partial \mathrm{E}_r = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : z_1 = x_0 + \frac{h}{2} + a_r \cos t,\ z_2 = b_r \sin t,\ t \in [-\pi, \pi] \right\},$$

$$a_r = \frac{h}{2}(r + r^{-1}),\ \ b_r = \frac{h}{2}(r - r^{-1})$$

і розглянемо множину E_r, обмежену еліпсом $\partial \mathrm{E}_r$

$$\mathrm{E}_r = \left\{ z = z_1 + i z_2 \in C : \left(\frac{z_1 - (x_0 + \frac{h}{2})}{a_r} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{b_r} \right)^2 \le 1 \right\},$$

круг $\tilde{K} = \tilde{K}(y_0, H) = \left\{ w = w_1 + i w_2 \in C : \left| w - y_0 \right| \le H \right\}$ і біциліндр $D = \mathrm{E}_r \times \tilde{K}$.

Теорема 4. *При наближенні розв'язку задачі Коші (1) многочленами* $y(n, x)$ *степені не вище* $n + 1$*, які задовольняють операторному рівнянню (6), яке розв'язується за методом Ньютона — Канторовича (8), при дотриманні умов теореми 3 має місце оцінка відхилення*

$$\left\| y(x) - y^{\nu}(n, x) \right\|_{C[x_0, x_0 + h]} \le e^{q_1} h \cdot \left(\left\| A_n \right\| + 1 \right) \cdot \frac{2}{(r-1) r^n} \cdot \left(\tilde{L}_1 \eta_0 + \tilde{L}_0 \right) \cdot \frac{1 - \beta_2^{\nu}}{1 - \beta_2} +$$

$$+2\cdot\frac{\eta_0\cdot\chi_0^{2^\nu-1}}{2^{2^{\nu-1}}\cdot\alpha_\nu}\cdot\exp\left\{\frac{\chi_0^{2^\nu}}{2^{2^{\nu-1}}\cdot\alpha_\nu}\right\},$$

де

$$\tilde{L}_0 := \left\|f\right\|_{C(D)},\ \tilde{L}_1 := \left\|f_y^{'}\right\|_{C(D)},$$

$$\beta_2 := e^{q_1}h\cdot[\left(\left\|A_n\right\|+1\right)\cdot\frac{2}{\left(r-1\right)r^n}\tilde{L}_1 + L_2\eta_0 + 2L_1].$$

Описаний алгоритм тестувався на ряді прикладів (зокрема, на прикладах із Слоневский (1986)) і результати порівнювалися з чисельними розв'язками, отриманими за допомогою програми, яка реалізує добре відомий метод Гіра (див., наприклад, Холл, Уатт (1979)). Після аналізу результатів з'ясувалось, що обидва методи мають невеликі відмінності за обчислювальними затратами, але АІ-метод володіє тією перевагою, що дає рівномірне наближення шуканого розв'язку на всьому проміжку з можливістю отримання наближаючих поліномів в деякій комплексній області, тоді як метод Гіра наближає шуканий розв'язок на дискретній множині точок. Крім того, програма, складена за АІ-алгоритмом, успішно працює на межі машинної точності.

Список літератури

Dzjadik, V. (1980). Polynomial approximation to the solutions of the Cauchy and Goursat problems with applications. *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, 35* (Functions, series operators), 441–448.

Деккер, К., Вервер, Я. (1988). *Устойчивость методов Рунге — Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*. Москва: Мир.

Дзядык, В. К. (1986). Аппроксимационно-итеративний метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики, 26* (3), 357—372.

Дзядык, В. К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* Київ: Наукова думка.

Канторович, Л. В. (1957). Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. *Вестник Ленинградского университета*, *7*, 68—103.

Канторович, Л. В., Акилов, Г. П. (1981). *Функциональный анализ*. Москва: Наука.

Слоневский, Р. В. (1986). *Явные дробно-рациональные и итерационные методы решения жестких дифференциальных уравнений*. Деп. В УкрНИИНТИ 19.04.1986, № 644.

Холл Дж., Уатт Дж. (1979). *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: Наука.

КОНФЛІКТНИЙ ПЕРЕРОЗПОДІЛ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ: СТРАТЕГІЇ ВИРІШУЮТЬ ВСЕ

І. В. Веригіна, О. М. Бузинний

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

veringa@i.ua, 9alexua9.gmail.com

Постановка задачі. Розглянемо модель системи з двох протидіючих сторін, назвемо їх опонентами A а B, які взаємодіють (конфліктують) за певним правилом на спільному ресурсному просторі $\Omega = [0,1]$. Нехай простір конфлікту є подрібненим на регіони ітераційним способом:

$$\Omega = \bigcup_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \Omega_{i_1\dots i_k}, \; k = 1,2,\dots$$

де k — крок подрібнення. На кроці подрібнення $k = 1$ простір поділений на n регіонів, міри Лебега яких $q_1, q_2, \dots, q_n$, де $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. При подальшому подрібненні міра Лебега λ регіона $\Omega_{i_1\dots i_k}$ визначається за формулою

$$\lambda(\Omega_{i_1\dots i_k}) = \left|\Omega_{i_1\dots i_k}\right| = q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k} = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n},$$

$$m_i \in \{0,1,\dots,k\}, \sum_{i=1}^{n} m_i = k,$$

де m_i позначає кількість індексів i_s в $\Omega_{i_1\dots i_k}$ таких, що $i_s = i, \quad i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Розподіл присутності опонентів A та B на Ω задається кусково-рівномірними мірами μ та ν, відповідно:

$$\mu(\Omega_{i_1\dots i_k}) = p_{i_1\dots i_k}, \nu(\Omega_{i_1\dots i_k}) = q_{i_1\dots i_k},$$

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} p_{i_1\dots i_k} = a > 0; \quad \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} r_{i_1\dots i_k} = b > 0.$$

Стратегія кожного з опонентів A та B фіксується числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ та $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, відповідно, де

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \; 0 < \alpha_i < 1, \; 0 < \beta_i < 1 \text{ для всіх } i = 1,\dots,n.$$

Тоді на k-тому кроці подрібнення розподіл присутності опонентів визначається за формулами:

$$p_{i_1\dots i_k} = a \cdot \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{m_n}, \qquad r_{i_1\dots i_k} = b \cdot \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \beta_n^{m_n}.$$

Уважаємо, що $\exists i: \; \alpha_i \neq \beta_i$, тому, взагалі, $p_{i_1\dots i_k} \neq r_{i_1\dots i_k}$.

Якщо $p_{i_1\dots i_k} > r_{i_1\dots i_k}$, то вважаємо, що в цьому регіоні «перемагає» опонент A і він «захоплює» цю територію. Позначимо такий регіон $\Omega^{A}_{i_1\dots i_k}$. І навпаки, якщо $p_{i_1 \dots i_k} < r_{i_1 \dots i_k}$, то в цьому регіоні «перемагає» опонент B. Позначимо такий регіон $\Omega^B_{i_1 \dots i_k}$. Якщо ж $p_{i_1 \dots i_k} = r_{i_1 \dots i_k}$, то цей регіон не належить жодному з опонентів. Позначимо такий регіон $\Omega^{A=B}_{i_1 \dots i_k}$. На кроці подрібнення k зберемо всі регіони, «захоплені» A або B, та ті, де вони обидва втрачають свій вплив. Міри цих територій позначимо:

$$T_k^A = \sum \left|\Omega^A_{i_1 \dots i_k}\right|,\ T_k^B = \sum \left|\Omega^B_{i_1 \dots i_k}\right|,\ T_k^{A=B} = \sum \left|\Omega^{A=B}_{i_1 \dots i_k}\right|.$$

Основні теоретичні результати. Умова $p_{i_1 \dots i_k} > r_{i_1 \dots i_k}$, що забезпечує перемогу опонента A в регіоні $\Omega_{i_1 \dots i_k}$, рівносильна такій умові

$$\frac{1}{k}\ln\frac{a}{b} + \frac{m_1}{k}\ln\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{m_2}{k}\ln\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{m_n}{k}\ln\frac{\alpha_n}{\beta_n} > 0.$$

Подивимось на нумерацію регіону $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ як на випадкову послідовність індексів $\left\{i_1, \dots, i_k\right\}$. На кожному місці s можна очікувати появу одного з індексів $i \in \left\{1, \dots, n\right\}$ з відповідними ймовірностями q_i:

$$P\left\{i_s = i\right\} = q_i.$$

Тоді $\omega_i = \dfrac{m_i}{k}$ є частотою появи індексу i в послідовності $\left\{i_1, \dots, i_k\right\}$. Позначимо випадкові величини

$$\theta_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{k}\ln\frac{\alpha_i}{\beta_i},\ \eta_k = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{b} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{k}\ln\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{b} + \theta_k.$$

У випадку $a = b$ ці величини збігаються.

Теорема 1 (імовірнісна інтерпретація міри Лебега захопленої території).

$$T_k^A = P\left\{\eta_k > 0\right\},\ T_k^B = P\left\{\eta_k < 0\right\},\ T_k^{A=B} = P\left\{\eta_k = 0\right\}.$$

Математичне сподівання випадкової величини θ_k*:*

$$\tilde{\theta} := M\left\{\theta_k\right\} = \sum_{i=1}^{n} q_i \ln\frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Математичне сподівання випадкової величини η_k*:*

$$\tilde{\eta} := M\left\{\eta_k\right\} = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{b} + \tilde{\theta}.$$

Зауважимо, що величина $\tilde{\theta}$ залежить тільки від обраних стратегій та не залежить від кроку подрібнення k. Величина $\tilde{\eta}$ залежить від k, але з ростом k наближається до $\tilde{\theta}$.

Теорема 2 (про граничні значення мір Лебега захоплених територій).

Якщо $\tilde{\theta} > 0$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^A = T^A = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^B = T^B = 0$.

Якщо $\tilde{\theta} < 0$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^A = T^A = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^B = T^B = 1$.

Якщо $\tilde{\theta} = 0$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^A = T^A = \lim\limits_{k\to\infty} T_k^B = T^B = 1\big/2$.

$\lim\limits_{k\to\infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0$.

Розглянемо такі приклади.

Приклад 1. Нехай у випадку $n = 2$ поділ Ω задається числами $q_1 = q_2 = 0.5$, а стратегії опонентів A і B визначаються наборами $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.4$ та $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.8$, відповідно. Нехай $a = b = 1$, тобто сили опонентів рівні. Тоді значення $\tilde{\theta} = 0.203 > 0$, і тоді за теоремою 2 $T^A = 1, T^B = 0$. На рис. 1 показано поведінку T_k^A та T_k^B в залежності від k. При значеннях $k > 40$ опонент А захоплює більше 90% території.

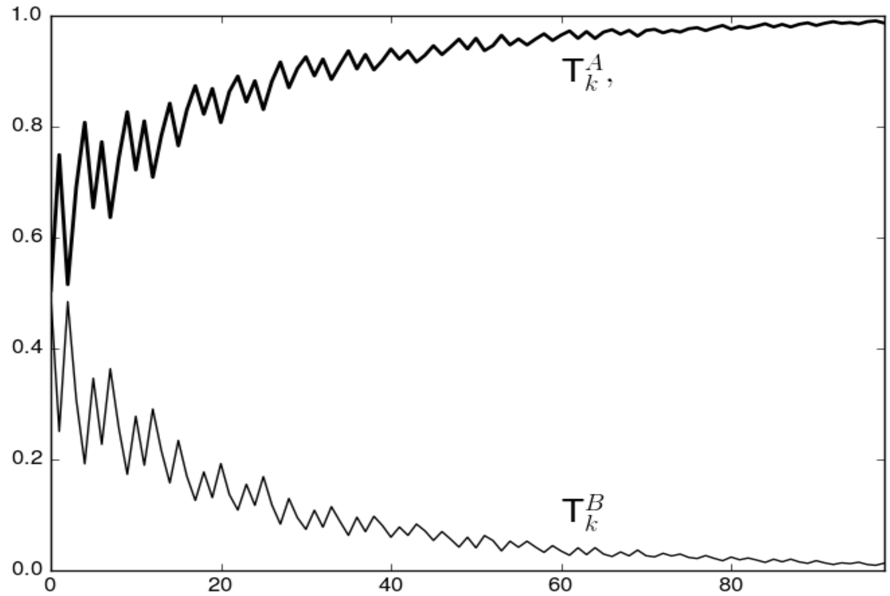


Рис. 1. Приклад 1. Міри Лебега захоплених територій T_k^A та T_k^B в залежності від кроку подрібнення k

Приклад 2. У випадку $n = 2$ поділ Ω задається числами $q_1 = q_2 = 0.5$, а стратегії опонентів: $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.4$ та $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.8$. Нехай сили опонентів не рівні, $a = 2, b = 100$. Значення $\tilde{\theta} = 0.203 > 0$, і тоді за теоремою 2 $T^A = 1, T^B = 0$. На рис. 2 показано поведінку T_k^A та T_k^B.

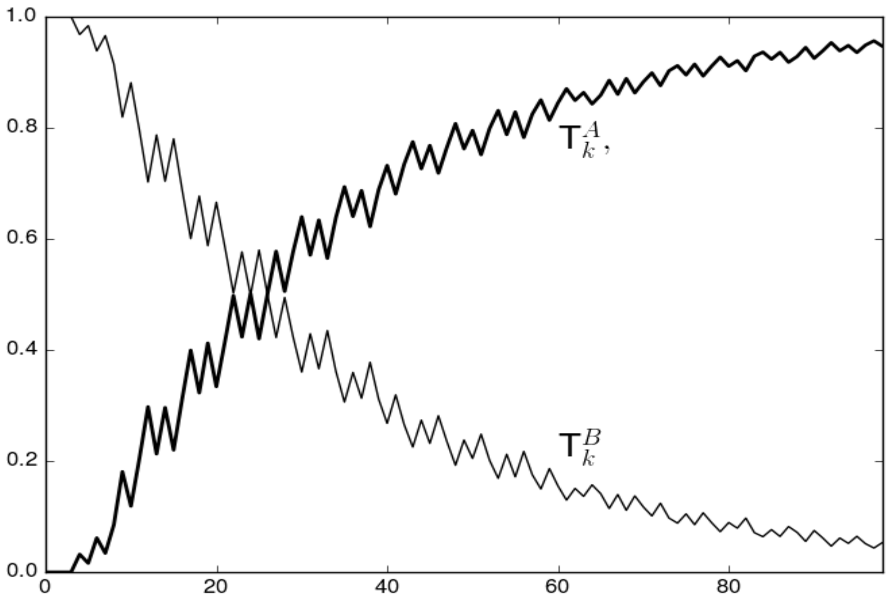


Рис. 2. Приклад 2. Міри Лебега захоплених територій T_k^A та T_k^B в залежності від кроку подрібнення k

Графік демонструє, що хоча опонент B має велику початкову перевагу над опонентом A, при збільшенні кроку k територія, яку він захоплює, наближається до 0, а міра території, контрольована опонентом A, наближається до 1. Вже при значеннях $k > 80$ опонент A захоплює більше 90% території.

Таким чином, граничні значення мір Лебега захоплених територій не залежать від значення міри присутності опонентів A та B на Ω, $\mu\left(\Omega\right) = a$ та $\nu\left(\Omega\right) = b$, а залежать тільки від обраних стратегій опонентів: наборів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ та $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, та способу поділу Ω на регіони, набору $q_1, q_2, ..., q_n$. Зауважимо, що оптимальною стратегією опонента A є така, що $\alpha_i = q_i$ для всіх $i = \overline{1, n}$, тоді при довільній стратегії опонента B (яка не збігається зі стратегією опонента A), опонент A захоплює майже всю територію.

Список літератури

Koshmanenko, V. (2014). Existence theorems of the ω-limit states for conflict dynamical systems. *Methods Funct. Anal. Topology, 20* (4), 379–390.

Веригіна, І. В.(2016). Порівняння стратегій пари опонентів у задачі «захоплення» території. *Доповіді НАН України* (у редакції).

Koshmanenko, V., & Verygina I. (2016). Dynamical systems of conflict in terms of structural measures. *Meth. Funct. Anal. And Topology, 22* (1), 81–93.

Кошманенко В. Д., Веригіна І. В (2016) Задача про оптимальну стратегію в моделях конфліктного перерозподілу ресурсного простору. *Укр. мат. журн.* (у редакції)

ПРО ПОРЯДОК ЗА ПОЙА
СУБГАРМОНІЙНОЇ У ПРОСТОРІ $\mathbb{R}^m$ ФУНКЦІЇ
З РАДІАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ МАС

О. В. Веселовська
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
veselovskaov@gmail.com

Для характеристики Неванлінни $T(r,f)$ цілої у площині функції f скінченного порядку з нулями, розташованими на скінченній системі променів, що виходять з початку координат, Д. Б. Майлзом (Miles, 1986) доведена нерівність

$$T(\alpha r,f) < MT(r,f),$$

де $r > r_0$, M — додатна стала.

У даній роботі встановлюється аналогічна нерівність для субгармонійної у просторі функції скінченного нижнього порядку, маси Рісса якої зосереджені на додатній частині x_1-осі. Крім того, доводиться, що зі скінченності нижнього порядку даної функції випливає скінченність її порядку за Пойа.

Нехай u — субгармонійна в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, функція, а Δ — оператор Лапласа. Оскільки $\Delta u \geq 0$ в розумінні узагальнених функцій, то кожній функції u відповідає єдиний розподіл мас

$$\mu_u = 1 / (d_m \omega_m)\Delta u,$$

який називається розподілом мас, асоційованих за Ріссом із субгармонійною функцією u.

Розподіл мас μ в $\mathbb{R}^m$ зосереджений на множині X, якщо $\mu(CX) = 0$, де CX — доповнення до множини X.

Функція

$$T(r,u) = \frac{1}{\omega_m}\int\limits_{S^m} u^+(r\xi)dS(\xi), \quad u^+ = \max(u;0),$$

називається *характеристикою Неванлінни* функції u, а величини

$$\lambda(u) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,u)}{\ln r},$$

$$\rho(u) = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,u)}{\ln r},$$

$$\rho^*(u) = \sup\left\{ s : \overline{\lim}_{r,A\to\infty} \frac{T(Ar,u)}{A^s T(r,u)} = +\infty \right\}$$

— її *нижнім порядком, порядком* та *порядком за Пойа* відповідно.

Теорема 1. *Нехай u — субгармонійна функція скінченного нижнього порядку і розподіл мас, асоційованих за Ріссом з функцією u, зосереджений на додатній частині x_1-осі.*

Тоді існує стала $M > 0$ така, що

$$T(\alpha r, u) < MT(r, u) \tag{1}$$

для $r > r_0$ і $\alpha > 1$.

Теорема 1 узагальнює результат Miles (1986) для характеристики Неванлінни $T(r, f)$ цілої у площині функції f скінченного порядку з нулями, розташованими на скінченній системі променів, що виходять з початку координат.

Можна показати, що скінченність порядку за Пойа функції u еквівалентна нерівності (1).

Дійсно, якщо $\rho^* = \rho^*(u) < \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться стала $B > 0$ така, що

$$T(Ar, u) \le BA^{\rho^* + \varepsilon}T(r, u)$$

при $A > A_0 > 1$, $r > r_0$.

Вибравши $A = 2A_0$, отримаємо

$$T(2r, u) < T(2A_0 r, u) \le B_1 T(r, u),$$

де $B_1 = B \cdot (2A_0)^{\rho^* + \varepsilon}$.

Навпаки, з нерівності (1) випливає, що

$$T(Ar, u) = T(2^{\log_2 A} r, u) < M^{\log_2 A + 1}T(r, u) = MA^{\log_2 M}T(r, u)$$

і, отже, $\rho^*(u) < \infty$.

Справедлива наступна

Теорема 2. *Якщо нижній порядок субгармонійної в $\mathbb{R}^m$ функції u, маси Рісса якої зосереджені на додатній частині x_1-осі, скінченний, то скінченний і її порядок за Пойа.*

Список літератури

Miles, J. (1986). On the growth of meromorphic functions with radially distributed zeros and poles. *Pacif. J. Math., 122* (1), 147–167.

УРАВНЕНИЯ С НИЖНЕЙ И ВЕРХНЕЙ НЕИЗВЕСТНЫМИ ТРЕУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ И ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. Г. Войтик, Г. С. Полетаев

Одесский национальный морской университет,

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,

Одесса, Украина

beauty5@i.ua, poletayev_gs@ukr.net

Изучаются уравнения с взаимно обратными матрицами — коэффициентами A, A^{-1},— неизвестными нижней и верхней треугольными матрицами X^{+},Y_{-}, X_1^{+} ,Y_{1-} вида:

$$AX^{+} + Y_{-} = B, \tag{1}$$

$$A^{-1}X_1^{+} + Y_{1-} = B. \tag{2}$$

Как отмечено [1], родственные (1) и связанные с ними уравнения возникают, в частности, при изучении специальных новых задач механики для совокупностей одинаковых по геометрическим и физическим характеристикам тел. Возникают также при исследовании общих видов и приложений, обнаруженных, сравнительно недавно, одночленных однопроекторных второго порядка уравнений в кольце с факторизационной парой. Абстрактные уравнения из работы [2] связывают уравнения (1) с интегральными типа Винера — Хопфа и с задачей о нахождении двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному соотношению на сомкнутой вещественной оси [2-10]. Последняя упомянутая задача «родственная» известной краевой задаче Римана (Римана — Гильберта — Привалова) теории аналитических функций. Такого же рода замечания верны соответственно и для уравнения (2). Уравнение (2) отличается от уравнения (1) лишь тем, что его коэффициентом при неизвестной X^{+} является обратная матрица для матрицы A.

1. Следуя [2, 3, 5—9] (ср. [10]), обозначим $\mathbb{R}_{n\times n}$ кольцо вещественных числовых квадратных матриц размера $n\times n$, $n\geq 2$, $n\in N$; $\mathbb{R}^{+}_{n\times n}$, $\mathbb{R}^{-}_{n\times n}$ — подкольца нижних, верхних треугольных из $\mathbb{R}_{n\times n}$; $\mathbb{R}^{0}_{n\times n} := \mathbb{R}^{+}_{n\times n}\cap\mathbb{R}^{-}_{n\times n}$, $\mathbb{R}^{\mp}_{n\times n} = \left(\mathbb{R}_{n\times n}\right)_{\pm}\oplus\mathbb{R}^{0}_{n\times n}$, соответственно. Результат применения соответствующих проекторов к матрицам, а также принадлежность матрицы из $\mathbb{R}_{n\times n}$ подмножеству $\mathbb{R}^{\mp,0}_{n\times n}$, $\left(\mathbb{R}_{n\times n}\right)_{\pm}$ [1—10] будем отмечать знаками $+$, $-$, 0, соответственно. Устанавливается, что $\mathbb{R}_{n\times n}$ — кольцо с факторизационной парой $(\mathbb{R}^{+}{}_{n\times n},\mathbb{R}^{-}{}_{n\times n})$ [11].

2. Важную роль при построении формул для матриц — решений рассматриваемых уравнений играют нормированные правильные факторизации по факторизационной паре ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$). А, именно, разложения матрицы A^{-1} на обратимые в соответствующих подкольцах $\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$ треугольные и диагональный множители [1—11]:

$$A^{-1} = \Gamma^+ S^0 T^- \;, \tag{3}$$

где матрицы-сомножители $T^- \in \mathbb{R}^-_{n\times n}; S^0 \in \mathbb{R}^0_{n\times n}; \Gamma^+ \in \mathbb{R}^+_{n\times n}; n \geq 2,\; n \in \mathbb{N}$. Нормирование осуществляется условием: $\Gamma^0 = T^0 = E$, где E - единичная матрица кольца $\mathbb{R}_{n\times n}$. Условия нормированной правильной факторизации матриц из $\mathbb{R}_{n\times n}$ по факторизационной паре (иначе, по подкольцам) ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$) можно сформулировать на основе соответствующих результатов [10—12]. Если некоторая матрица из $R_{n\times n}$ допускает в этом кольце матриц, как левую факторизацию, так и правую факторизацию по подкольцам ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$), будем говорить, что она допускает по указанным подкольцам соответствующего типа двустороннюю факторизацию [Л. П. Нижник, 1973; см. также Г.С. Полетаев 1988, 1991, 2003, 2010]. Двусторонняя правильная нормированная факторизация неособенной матрицы из $\mathbb{R}_{n\times n}$ по подкольцам ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$) имеет место тогда и только тога, когда эта матрица и её обратная допускают в $\mathbb{R}_{n\times n}$ левые нормированные правильные факторизации по факторизационной паре ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$) или правые нормированные правильные факторизации по той же факторизационной паре ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$). Устанавливается, что левая (правая) нормированная правильная факторизация единственна [2, 3, 5, 10, 11].

3. Постановка задачи. Будем рассматривать две следующие взаимосвязанные задачи.

Задача 1. «*Для заданных матрицы — коэффициента* $A \in \mathbb{R}_{n\times n}; n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ *и матрицы — правой части* $B \in \mathbb{R}_{n\times n}$ *найти пару матриц* $X^+ \in \mathbb{R}^+_{n\times n}, Y_- \in (\mathbb{R}_{n\times n})_-$, *удовлетворяющую уравнению:*

$$AX^+ + Y_- = B \quad ». \tag{1}$$

Задача 2. «*Для заданных матрицы — коэффициента* $A \in \mathbb{R}_{n\times n}; n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ *и матрицы — правой части* $B \in \mathbb{R}_{n\times n}$ *найти пару матриц* $X_1^+ \in \mathbb{R}^+_{n\times n}, Y_{1-} \in (\mathbb{R}_{n\times n})_-$, *удовлетворяющую уравнению:*

$$A^{-1}X_1^+ + Y_{1-} = B. \text{ »} \qquad (2)$$

4. При соответствующих левых нормированных правильных факторизациях матрицы — коэффициента $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$; $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ и её обратной матрицы:

$$A^{-1} = \Gamma^+ S^0 T^-, \qquad (3)$$

$$A = V^+ W^0 U^-, \qquad (4)$$

где $\Gamma^+, V^+ \in \mathbb{R}^+_{n\times n}; S^0, W^0 \in \mathbb{R}^0_{n\times n}; T^-, U^- \in \mathbb{R}^-_{n\times n}$ разрешимость этих задач и, стало быть, уравнений (1), (2), характеризует следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$; $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ неособенная матрица. Для того, чтобы при всех матрицах – правых частях $B \in \mathbb{R}_{n\times n}$, как бы они ни были выбраны, оба уравнения (1), (2) были в $\mathbb{R}_{n\times n}$ однозначно разрешимы, необходимо и достаточно, чтобы матрица A и её обратная допускали в $\mathbb{R}_{n\times n}$ левые нормированные правильные факторизации (3), (4) по факторизационной паре подколец ($\mathbb{R}^+_{n\times n}$, $\mathbb{R}^-_{n\times n}$). Если эти левые нормированные правильные факторизации имеют место, то при любой правой части $B \in \mathbb{R}_{n\times n}$, единственное решение $X^+ \in \mathbb{R}^+_{n\times n}, Y_- \in (\mathbb{R}_{n\times n})_-$ уравнения (1) и единственное в $\mathbb{R}_{n\times n}$ решение $X_1^+ \in \mathbb{R}^+_{n\times n}, Y_{1-} \in (\mathbb{R}_{n\times n})_-$ уравнения (2) можно определить через множители факторизаций (3), (4) и эту правую часть по следующим формулам, соответственно:*

$$X^+ = \Gamma^+ S^0 [T^- B^+]^+ , \; Y_- = B_- + T^{-'} [T^- B^+]_- ; \qquad (5)$$

$$X_1^+ = V^+ W^0 [U^- B^+]^+, \; Y_{1-} = B_- + (U^-)^{-1} [U^- B^+]_- . \qquad (6)$$

5. Иллюстративный пример. Пусть требуется найти пары треугольных матриц $X^+, X_1^+ \in \mathbb{R}^+_{3\times 3}; Y_-, Y_{1-} \in (\mathbb{R}_{3\times 3})_-$ из $\mathbb{R}_{3\times 3}$, удовлетворяющие (1), (2), соответственно, если:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \; \alpha, \beta \text{ — числа.}$$

Реализуя формулы (5), (6), найдём решения в $\mathbb{R}_{3\times 3}$ уравнений (1), (2), соответственно:

$$X^{+} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha + 3\beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, Y_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_1^{+} = \begin{pmatrix} 3\alpha - 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha + \beta & 0 & \frac{1}{3}\alpha \end{pmatrix}, Y_{1-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \frac{2}{3}\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подстановкой, можно убедиться, что это действительно искомые решения.

Список литературы

1. Войтик, Т. Г., Полетаев, Г. С. (2015). Уравнения с неизвестными треугольными матрицами, связанные с однопроекторными второго порядка. *Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, 14—15 травня 2015 р., Київ. Матеріали конференції ІІ. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз* (с. 82—84). Київ: НТУУ «КПІ».

2. Полетаев, Г. С. (1988). *Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами*. (Препринт / АН УССР). Институт математики: 88.31). Киев.

3. Полетаев, Г. С. (2000). Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой. *Вестник Херсонского гос. техн. университета*, (2), 191—195.

4. Крейн, М. Г. (1958). Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. *Успехи математических наук*, *13* (5), 3—120.

5. Полетаев, Г. С. (2000). О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния. *Матем. моделир. в образовании, науке и промышленности*, 146—148. Санкт-Петербург.

6. Полетаев, Г. С., Солдатов, Л. И. (2000). О задачах механики и уравнениях с неизвестной треугольной матрицей и проекторами. *Современные методы проектирования машин. Расчет, конструирование и технология изготовления / Сб. научных трудов*, *1* (3), 244—249. Минск: УП «Технопринт».

7. Полетаев, Г. С., Солдатов, Л. И. (2004). О моделировании некоторых задач механики матричными уравнениями с треугольными неизвестными. *Нелинейная динамика механических и биологических систем* : *Межвузовский научный сборник*, *2*, 133—136.

8. Полетаев, Г. С. (2016). Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары. *Математика в сучасному технічному університеті. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції 24—25 грудня 2015 р., Київ* (с. 85—88). Київ:

9. Гахов, Ф. Д., Черский, Ю. И. (1978). *Уравнения типа свертки*. Москва: Наука.

10. McNabb, A., & Schumitzky, A. (1972). Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples. *J. Funct. Anal.*, *9* (3), 262–295.

11. Полетаев, Г. С. (2002). Некоторые результаты о парных уравнения в кольцах с факторизационными парами. *Віcн. Харк. націон. ун-ту*. (582). – Сер. Матем., прикл. мат. і мех., *52*, 143—149.

12. Гантмахер, Ф. Р. (1988). *Теория матриц*. Москва: Наука.

ПРО ОДИН МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

А. В. Волков, А. Ю. Солодуха
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
wolkowaw@gmail.com

Досліджено метод підсумовування числових рядів, який визначено за допомогою послідовності лінійних позитивних операторів у просторі неперервних на проміжку $[0,+\infty)$ функцій, побудованої за методом роботи (Волков, 1963). Оператори будуються у вигляді

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\alpha_{n,k}\right)\Phi_{n,k}(x),$$

де $(\alpha_{n,k}), n\in\mathbb{N}, k=0,1,2,3,\ldots$ — певна числова матриця,

$$\Phi_{n,k}(x)=\frac{x^k}{\varphi_n(x)\prod\limits_{j=1}^{k}\alpha_{n,j}},$$

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\prod\limits_{j=1}^{k}\alpha_{n,j}}$$ — нормуючий множник.

Якщо розглянути $\alpha_{n,k}=\dfrac{k}{n}$, то можна отримати відомі оператори Мірак’яна (Мірак’ян, 1941).

Розглянемо

$$\alpha_{n,k}=\frac{k^3}{\left(k+1\right)^2 n},$$

тоді

$$\prod_{j=1}^{k}\alpha_{n,j}=\frac{k!}{n^k\left(k+1\right)^2},$$

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k\left(k+1\right)^2}{k!}=e^{nx}\left(n^2x^2+3nx+1\right),$$

$$\Phi_{n,k}(x)=\frac{e^{-nx}}{n^2x^2+3nx+1}\cdot\frac{n^k x^k\left(k+1\right)^2}{k!},$$

і оператори набувають вигляду

$$A_n(f,x)=\frac{e^{-nx}}{n^2x^2+3nx+1}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k^3}{\left(k+1\right)^2 n}\right)\frac{n^k x^k \left(k+1\right)^2}{k!}.$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ має суму S за методом $\left(A,x\right)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S(A,x),$$

якщо

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} S_k \frac{n^k x^k \left(k+1\right)^2}{\left(n^2x^2+3nx+1\right)e^{nx}k!}=S,$$

де $x>0$, S_k — k-та частинна сума ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Регулярність методу $\left(A,x\right)$ випливає зі збіжності побудованої послідовності $L_n(f,x)$ до $f(x)$ для будь-якої функції простору, що розглядається (Волков, 1970). Збіжність доведено із застосуванням відомої теореми Коровкіна «про три функції» (Коровкін, 1959).

Досліджено проблему еквівалентності методів при різних значення параметру $x>0$. Доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1\neq x_2$. Тоді існує ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, що підсумовується методом $\left(A,x_1\right)$ та не підсумовується методом $\left(A,x_2\right)$.*

З доведеної теореми випливає, що побудовані методи підсумовування числових рядів не будуть еквівалентними при різних значеннях параметру $x>0$.

Список літератури

Волков, В. И. (1963). Об одной последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. *Учёные записки Калининского гос. пед. института, 29,* 19—38.

Волков, В. И. (1970). О некоторых регулярных методах суммирования рядов. *Труды центрального зонального объединения математических кафедр, 1*, 38—75.

Коровкин, П. П. (1959). *Линейные операторы и теория приближений*, Москва, Физматгиз.

Миракьян, Г. М. (1941). Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx}\sum_{k=0}^{m} C_{n,k}x^k$. *Доклады Академии наук СССР, 31,* 201—205.

ПРО СТРУКТУРУ n-ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

О. С. Гаврилів
Orest1951@i.ua

Векторний добуток $\overline{a} \times \overline{b}$ векторів $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3$ є вектор, тобто має місце функціонування двомісного оператора $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in \mathbb{R}^3$.

Теорема 1. $\left(n-1\right)$*-лінійне відображення* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *векторів* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}$ *має вигляд для* $A : \left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right) \to \mathbb{R}^n$

$$A\left(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right) = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \ldots & \overline{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \ldots & a_{n-1n} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Лінійність по кожному з вектор-аргументів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}$ $A\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right)$ випливає з властивостей визначника.

Наслідок 1. Сумою двох $\left(n-1\right)$-лінійних форм $A\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right)$ та $B\left(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{n-1}\right)$ є $\left(n-1\right)$-лінійна форма

$$\left(A+B\right)\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}; \overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{n-1}\right),$$

визначена як $C\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_i + \overline{b}_i, \overline{a}_{i+1}, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right)$, якщо $a_i \neq b_i$, $i \leq n-1$; $a_k = b_k$, $k \neq i$, $k \leq n-1$.

Доведення. Тривіальне на основі (Шилов, 1969), причому

$$\left(\lambda A + \mu B\right)\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}; \overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{n-1}\right) \equiv \left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \lambda\overline{a}_i + \mu\overline{b}_i, \overline{a}_{i+1}, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right)$$

при реалізуванні умов $a_i \neq b_i$, $a_k = b_k$, $k \neq i$, $i \leq n-1$, $k \leq n-1$.

Теорема 2. n*-лінійне відображення* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *векторів* $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-1}$ *має вигляд для* $A : \left(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right) \to \mathbb{R}^n$

$$A\left(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n-1}\right) = \begin{vmatrix} a_{01}\overline{e}_1 & a_{02}\overline{e}_2 & \ldots & a_{0n}\overline{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \ldots & a_{n-1n} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Лінійність по кожному з аргументів перевіряється тривіально на основі властивостей визначника. Згідно властивостей визначника очевидним є $A\left(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2 \ldots, \overline{a}_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n$. Лінійність існує тільки по одному аргументу.

Теорема 3. $\left(n-k\right)$*-лінійне відображення* $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$*, залежне від вектор-параметрів* $\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,...,\ \overline{b}_k$ *векторів* $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,...,\ \overline{a}_{n-k}$ *має вигляд*

$$A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,...,\overline{b}_n;\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_{n-k}\right)=\begin{vmatrix} b_{11}\overline{e}_1 & b_{12}\overline{e} & ... & b_{1n}\overline{e}_n \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kn} \\ a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-k1} & a_{n-k2} & ... & a_{n-k\,n} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Доведення. Лінійність структури $A\left(\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,...,\ \overline{b}_k;\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_{nk}\right)$ не вважається суттєвою для вектор-параметрів $\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,...,\ \overline{b}_k$ і має місце. Лінійність структури

$$A\left(\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,...,\ \overline{b}_k;\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_{n-k}\right)$$

щодо векторів $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,...,\ \overline{a}_{n-k}$ встановлюється на основі властивостей визначника (Шилов, 1969). Лінійність можна розглядати тільки по одному аргументу.

Теорема 4. *Характеристичне рівняння* $\left(n-k\right)$*-лінійного відображення є рівнянням* $\left(n-k\right)$*-степеню.*

Доведення.

$$A\left(\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,...,\ \overline{b}_k;\lambda\overline{a}_1,\lambda\overline{a}_2,...,\lambda\overline{a}_{n-k}\right)=\lambda^{n-k}\left(\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,...,\ \overline{b}_k;\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_{n-k}\right)$$

згідно з властивостями визначника. Очевидно, серед $\left(n-k\right)$ коренів характеристичного рівняння є $\left(n-k\right)$ різних комплексних значень.

Список літератури

Колмогоров, А. Н., Фомин С. В. (1981). *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука.

Шилов, Г. Е. (1969). *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. Москва: Наука.

Крейн, С. Г. (Ред.). (1972). *Функциональный анализ*. Москва: Наука.

Мальгранж, Б. (1969). *Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных*. Москва: Наука.

ПРО ОРБІТИ C_0-ГРУП ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

В. М. Горбачук
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
v.m.horbach@gmail.com

Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — C_0-група лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$, тобто:

(i) $\forall t, s \in \mathbb{R} : U(t+s) = U(t)U(s)$;

(ii) $\forall x \in \mathfrak{B} : U(t)x \to x,$ коли $t \to 0$.

Позначимо через A генератор цієї групи:

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t}, \quad \mathcal{D}(A) = \left\{x \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t} \text{ існує}\right\},$$

$\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора.

Вектор-функція $U(t)x$ називається орбітою групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, породженою вектором x. Якщо оператор A є неперервним в $\mathfrak{B}$, то для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$ орбіта $U(t)x$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції $U(z)x$ експоненціального типу:

$$\left\|U(z)x\right\| \le e^{\left\|A\right\|\left|z\right|}\left\|x\right\|.$$

Це не так у випадку необмеженого A. Можна навести приклад C_0-групи, для якої орбіта $U(t)x$ може бути продовжена до цілої функції експоненціального типу лише для $x = 0$. Природно постають наступні питання:

1) за яких умов на вектор x, орбіта $U(t)x$ допускає зазначене продовження та

2) коли множина таких векторів є щільною в $\mathfrak{B}$?

Нехай $\mathfrak{B}_+$ — множина цілих векторів x експоненціального типу оператора A:

$$\mathfrak{B}_+ = \left\{x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(A^n) \mid \exists \alpha > 0, \exists c = c(\alpha, x), \forall n \in \mathbb{N} : \left\|A^n x\right\| \le c\alpha^n\right\}.$$

Теорема 1.1 *Орбіта $U(t)x$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції тоді й тільки тоді, коли $x \in \mathfrak{B}_+$. Якщо група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ є неквазіаналітичною, тобто*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\{U(t)\}}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

то $\overline{\mathfrak{B}_+} = \mathfrak{B}$.

Для довільного вектора $x_0 \in \mathfrak{B}_+$ позначимо через $\sigma(U(z)x_0)$ тип цілої вектор-функції $U(z)x_0$, а через $s(x_0) = s(x_0, A)$ — тип вектора x_0 відносно оператора

$$A : s(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| A^n x \right\|^{1/n}.$$

Покладемо також

$$\mathcal{E}_r^b(U(t)x) = \inf_{U(t)x_0 : \sigma(U(z)x_0) \le r} \sup_{t\in[-b,b]} \left\| U(t)x - U(t)x_0 \right\|,$$

$$\mathcal{E}_r(x, A) = \inf_{x_0 \in \mathfrak{B}_+ : s(x_0) \le r} \left\| x - x_0 \right\|.$$

Функції $\mathcal{E}_r^b(U(t)x)$ та $\mathcal{E}_r(x, A)$ (найкращі наближення орбіти $U(t)x$ цілими орбітами експоненціального типу та вектора x — цілими векторами експоненціального типу оператора A) є монотонно незростаючими за r і прямують до нуля тоді й тільки тоді, коли $\overline{\mathfrak{B}_+} = \mathfrak{B}$.

Теорема 2.2 *Нехай* $x \in \mathfrak{B}$ *і* $b \in (0, \infty)$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_r(x, A) \le \mathcal{E}_r^b(U(t)x) \le c_b \mathcal{E}_r(x, A), \tag{1}$$

де $c_b = \sup_{t\in[-b,b]} \left\| U(t) \right\|$.

Прямі й обернені теореми теорії наближень векторів банахового простору цілими векторами експоненціального типу замкненого оператора (Горбачук, В. И., Горбачук, М. Л., 1997) і співвідношення (1) дають змогу отримати прямі й обернені теореми для наближення орбіт C_0-групи її цілими орбітами експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між степенем гладкості орбіти і порядком прямування до нуля її найкращого наближення орбітами експоненціального типу. Так, наприклад,

$$U(t)x \in C^\infty(\mathbb{R}, b) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{E}_r^b(U(t)x) = o\left(\frac{1}{r^n}\right), \text{ коли } r \to \infty.$$

Список літератури

Горбачук, В. И., Горбачук, М. Л. (1997). Операторный подход к задачам аппроксимации. *Алгебра и анализ, 9* (6), С. 90—108.

ПРО ДЕЯКІ ЗВ'ЯЗКИ МІЖ ГЕОМЕТРІЄЮ МНОЖИН МОНОГЕННОСТІ ТА ВЛАСТИВОСТЯМИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

С. В. Горленко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Нагадаємо, що множина E називається *множиною першої категорії* в області $D \subset \mathbb{C}$, якщо її можна представити у вигляді зліченного об'єднання ніде не щільних у D множин. Тобто E є зліченним об'єднанням «рідких» множин (хоча може бути скрізь щільною в D!) (Окстби, 1974).

Нехай $f(z)$ — неперервна в області $D \subset \mathbb{C}$. Під множиною моногенності $\mathfrak{M}_z(f)$ функції $f(z)$ у точці $z \in D$ розуміємо множину всіх її похідних чисел ζ в точці z (випадок $\zeta = \infty$ не виключається) (Трохимчук, 1963).

У роботі встановлюються такі результати.

Теорема 1. *Нехай $w = f(z)$ — неперервна функція комплексної змінної $z = x + iy$, визначена в області $D \subset \mathbb{C}$. Якщо в кожній точці z множини E не першої категорії в D множина моногенності $\mathfrak{M}_z(f)$ не містить точку $\zeta = 0$, то знайдеться підобласть $\tilde{D} \subset D$, у якій $f(z)$ однолиста.*

Наслідок. Нехай $w = f(z)$ — неперервне відображення і $\Phi \subset D$ — досконала множина. Якщо $\forall z \in \Phi$ $\mathfrak{M}_z(f)$ не містить точку $\zeta = 0$, то знайдеться порція $\tilde{\Phi} \subset \Phi$, на якій $f(z)$ — однолиста.

Теорема 2. *Нехай $w = f(z)$ — неперервна в $D \subset \mathbb{C}$. Якщо на множині E не першої категорії в D множини моногенності $\mathfrak{M}_z(f)$ обмежені (тобто належать деякому фіксованому кругу), то знайдеться підобласть $\tilde{D} \subset D$, у якій $f(z)$ справджує умову Ліпшиця.*

Наслідок. Якщо для неперервної в області D функції $w = f(z)$ множини моногенності $\mathfrak{M}_z(f)$ обмежені в точках досконалої множини $\Phi \subset D$, то знайдеться порція $\tilde{\Phi} \subset \Phi$, на якій функція $f(z)$ справджує умову Ліпшиця.

Список літератури

Окстоби, Дж. (1974). *Мера и категория.* Москва: Мир.

Трохимчук, Ю. Ю. (1963). *Непрерывные отображения и условия моногенности.* Москва: Физматгиз.

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ ЯК ЗАДАЧА АПРОКСИМАЦІЇ

В. П. Денисюк, А. І. Бабко
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
didenko-babko@ukr.net

У застосуваннях часто вимагається знайти розв'язок задачі апроксимації деякої функції f у просторі Θ при додаткових обмеженнях на апроксимуючу функцію g. Наприклад, додатковими обмеженнями є вимоги того, щоб функція g мала неперервні похідні певного порядку (Березин, Жидков, 1965), або щоб функція g збігалась до функції f не лише в просторі Θ, але і в деякому іншому просторі. Зауважимо, що при розгляді задачі апроксимації функцій з такими додатковими обмеженнями, у ролі апроксимуючих функцій будемо розглядати лише класи тригонометричних функцій.

Додаткові обмеження, які полягають у тому, щоб апроксимуюча функція g мала достатньо гладку похідну порядку m, $m = 1, 2, \ldots$, можна звести до задачі мінімізації функціонала

$$\Psi(g) = \int_0^{2\pi} \left[g^{(m)}(t) \right]^2 dt.$$

У цьому випадку розв'язок задачі апроксимації функції f у просторі Θ з додатковими обмеженнями такого типу доцільно шукати у вигляді функції g, на якій досягається мінімум функціонала

$$\Phi_{\lambda,n}(t) = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[f(t) - g(t) \right]^2 + \lambda^{2n} \left[g^{(n)}(t) \right]^2 \right\} dt, \qquad (1)$$

де $\lambda \geq 0$; $n = 1, 2, \ldots$ — деякі параметри.

Задачу апроксимації функції f, при якій вимагається мінімізувати функціонал (1), називають задачею регуляризації, а параметри λ і n називають параметрами регуляризації (Бахвалов, 1975).

Якщо функція f може бути подана у вигляді ряду Фур'є

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt \right],$$

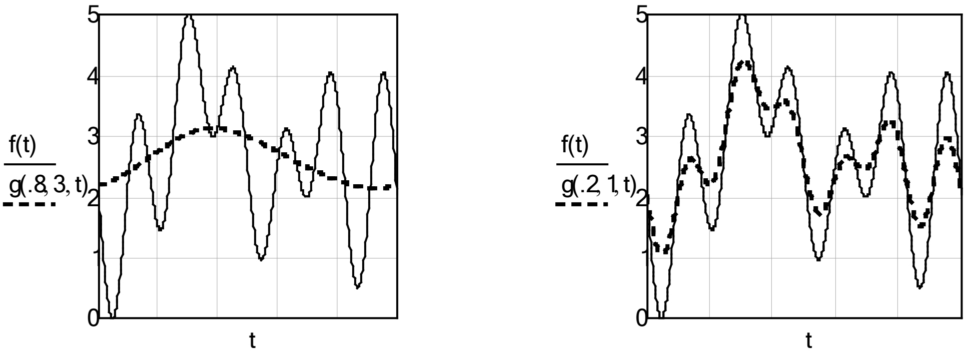
то безпосередньою перевіркою можна переконатись, що функцію $g(t)$, яка є розв'язком задачі регуляризації можна подати у вигляді

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\lambda k)^{2n}} \left[a_k \cdot \cos kt + b_k \cdot \sin kt \right].$$

Отже, коефіцієнти Фур'є функції $g(t)$, що є розв'язком задачі регуляризації (1), отримуються із коефіцієнтів Фур'є функції $f(t)$ шляхом множення їх на величини

$$C_k(\lambda, n) = \left[1 + (\lambda k)^{2n}\right]^{-1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

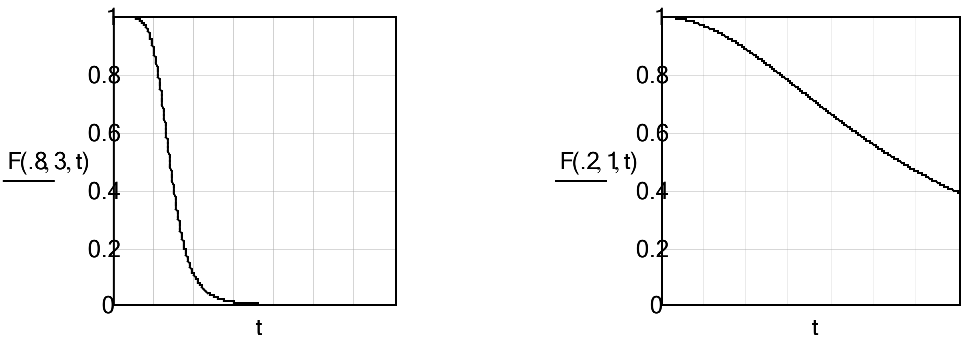
Проілюструємо наведений матеріал тестовими прикладами. На рис.1 наведено графіки функцій $f(t)$ та $g(t)$ для різних значень параметрів λ і n.



а) б)

Рис. 1 . Графік функції $f(t)$ та регуляризуючої функції $g(t)$ при значеннях параметрів $\lambda = 0{,}8, \;\; n = 3$ (а) та $\lambda = 0{,}2, \;\; n = 1$ (б).

Отже, задачу регуляризації функції f у просторі Θ можна тлумачити як процес фільтрації функції $f(t)$ з допомогою фільтра Баттерворта з параметрами λ і n. Цим параметрам можна надати таке тлумачення: значення параметра λ визначає частоту зрізу фільтра Баттерворта, а значення параметра n, $n = 1, 2, \ldots$ — крутизну спадання цього фільтру.



а) б)

Рис.2 . Графік фільтра Баттерворта при значеннях параметрів $\lambda = 0{,}8, \;\; n = 3$ (а) та $\lambda = 0{,}2, \;\; n = 1$ (б)

Список літератури

Бахвалов, Н. С. (1975). *Численные методы*. Москва: Наука.

Березин, И. С., Жидков, Н. П. (1965). *Методы вычислений* (Т. 1). Москва: Физматгиз.

Денисюк, В. П. (2007). *Сплайни та сигнали: Монографія*. Київ: ЗАТ «Віпол».

ДЕЯКІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ ТИПУ ПУАСОНА — АБЕЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ ФУР'Є

В. П. Денисюк, Л. В. Рибачук

Національний авіаційний університет, м. Київ, Україна

r_lv@mail.ru

Нехай періодичній з періодом 2π функції $f(t)$, абсолютно інтегрованій на проміжку $\left[-\pi,\pi\right]$, поставлено у відповідність її ряд Фур'є

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha\right]. \tag{1}$$

Методи підсумовування типу Пуасона — Абеля полягають в тому, що всі члени ряду одночасно помножуються на множники певного типу; інакше кажучи, ряду в правій частині (1) ставлять у відповідність ряд вигляду

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\left[a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha\right], \tag{2}$$

де $\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $(k = 1,2,\dots)$ — деякі множники, що залежать від n $(n = 1,2,\dots)$ параметрів $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$; часто такі множники називають множниками збіжності.

У залежності від типу множників $\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ розрізняють конкретні методи підсумовування. Ми обмежимось розглядом методу Пуасона — Абеля та методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників.

У випадку методу підсумовування Пуасона — Абеля покладають

$$\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = r^k \text{ , (тобто } n = 1,\ \alpha_1 = r).$$

У випадку ж методу підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками розглядають множники

$$\sigma_k(r,\alpha) = \left(\frac{\sin k\dfrac{\alpha}{2}}{k\dfrac{\alpha}{2}}\right)^r,\ (0 < \alpha < \pi;\ r = 1,2,\dots). \tag{3}$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $n = 2$, $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \alpha$.

Розглянемо ці методи детальніше.

1. Метод підсумовування Пуасона — Абеля. Згідно з цим методом функції $f(t)$ з (1) поставимо у відповідність ряд

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\left[a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha\right],\ (\ 0 < r < 1). \tag{4}$$

Ряд (4) можна подати у формі

$$f(r,t) \sim= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-t)+r^2}\,du\,.$$

Цей інтеграл називають інтегралом Пуасона, а ядро інтегрального перетворення функції $f(t)$ називають ядром Пуасона; теоретичне обґрунтування інтегралу Пуасона надав Шварц.

Можна показати, що метод підсумовування Пуасона — Абеля є F-ефективним (Харди, 1951).

2. Метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками. Перш, ніж перейти до розгляду цього методу, зауважимо, що множники

$$\gamma_k(2,h) = \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2$$

були отримані Ріманом при формальному подвійному інтегруванні тригонометричних рядів з подальшим знаходженням другої похідної Шварца (Бари, 1961), і застосовувалися для підсумовування тригонометричних рядів із подальшим граничним переходом $h \to 0$.

Множник такого ж типу було отримано в (Ланцош, 1961); цей множник застосовувався також у методах λ-підсумовування.

Нарешті, множники такого типу природно виникають при обчисленні коефіцієнтів Фур'є методом Філона та методі фантомних функцій (Денисюк, 2015).

Метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками полягає в тому, що ряду (1) ставиться у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(r,\alpha)\left[a_k\cos kt + b_k\sin k\alpha\right],\quad (r \geq 1) \tag{5}$$

де $\sigma_k(r,\alpha)$ визначається формулою (3).

Зрозуміло, що при $r > 1$ ряд (5) збігається рівномірно. Дійсно, оскільки коефіцієнти ряду a_k, b_k при $k \to \infty$ прямують до 0, то вони обмежені у сукупності

$$\left|a_k\right|, \left|b_k\right| < K\,,\quad (K = \text{const}),$$

і ряд (5) мажорується збіжним рядом

$$2K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r};$$

отже, за ознакою Ваєрштраса, цей ряд збігається рівномірно.

Як і раніше, нескладно отримати вираз

$$f(r,\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(r,\alpha)\cos k(u-t)\right\}du\,.$$

Позначимо

$$De(r,\alpha,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(r,h)\cos k(t).$$

Ядро $De(r,\alpha,t)$ будемо називати De-ядром r-го порядку. Розглянемо ці ядра детальніше, зробивши при цьому таке зауваження.

Прямою перевіркою нескладно переконатися, що ядро $De(r,\alpha,t)$ з точністю до сталого множника α співпадає з періодично продовженими поліноміальними нормалізованими B-сплайнами порядку $r-1$ $(r = 1,2, \ldots)$ при $\alpha = h$, побудованими на рівномірних сітках із кроком h (Денисюк, 2015; Завьялов и др., 1980). Позначаючи такі сплайни через $B_{r-1}(\alpha,t)$, маємо

$$\frac{1}{\alpha} B_{r-1}(\alpha,t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\frac{k\alpha}{2}}\right)^r \cos k t\right),$$

де сплайн $B_{r-1}(\alpha,t)$ будується на рівномірній сітці з кроком α, а центри симетрії обох функцій є узгодженими. Зауважимо, що при $r = 1,\ldots,5$ можна скористуватися явною формою подання B-сплайнів, наведеною в (Денисюк, 2015).

Враховуючи ці співвідношення, функції $f(r,\alpha,t)$ можна подати у вигляді

$$f(r,\alpha,t) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) B_{r-1}(\alpha,\mathrm{u})\, du, \quad (r = 1,2, \ldots).$$

Нескладно переконатися в тому, що ядра $De(r,\alpha,t)$ при кожному фіксованому $r = 1,2, \ldots$, утворюють δ-подібну послідовність при $\alpha \to 0$. З цього випливає, що

$$\lim_{\alpha\to 0} f(r,\alpha,t) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) B_{r-1}(\alpha,u)\, du = \frac{1}{2}\big[f(t-0) + f(t+0)\big].$$

Зокрема, у точці неперервності ця границя дорівнює $f(t)$.

Отже, як і раніше, можна зробити висновок про те, що метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками є F-ефективним (Харди, 1951).

Отриманий результат є узагальненням результатів, що наводяться у (Харди, 1951; Бари, 1961;). Так, А. Зігмунд та Г. Харді наводять ядро $De(2,\alpha,t)$, а Н. Барі — ядро $De(3,\alpha,t)$.

Список літератури

Бари, Н. К. (1961). *Тригонометрические ряды*. Москва: Госиздат физ.-мат. лит.

Денисюк, В. П. (2015). *Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни*. Київ: ЗАТ «ВІПОЛ».

Завьялов, Ю. С. и др. (1980). *Методы сплайн-функций*. Москва: Наука.

Зигмунд, А. (1965). *Тригонометрические ряды* (У 2 т.). Москва: Мир.

Ланцош, К. (1961). *Практические методы прикладного анализа*. Москва: Госиздат физ.-мат. лит.

Харди, Г. (1951). *Расходящиеся ряды*. Москва: Изд. иностр. лит.

ЕЛЕМЕНТИ ВІКІВСЬКОГО ЧИСЛЕННЯ В АНАЛІЗІ БІЛОГО ШУМУ ЛЕВІ

М. М. Дирів

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

mashadyriv@ukr.net

Запровадимо і вивчимо віківський добуток і віківські версії голоморфних функцій на просторах регулярних узагальнених функцій. Спочатку дамо необхідні означення.

Нехай $\mathcal{D}$ — класичний простір Шварца всіх дійснозначних нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ з компактними носіями, $\mathcal{D}'$ — множина лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$. Для $\omega \in \mathcal{D}'$ і $\varphi \in \mathcal{D}$ позначимо $\langle \omega,\varphi \rangle := \omega(\varphi)$; зазначимо, що можна розуміти $\langle \cdot,\cdot \rangle$ як спарювання, породжене скалярним добутком у просторі $L^2(\mathbb{R}_+)$ квадратично інтегровних за мірою Лебега дійснозначних функцій на $\mathbb{R}_+$. Позначення $\langle \cdot,\cdot \rangle$ зберігається і для дуальних спарювань у тензорних степенях комплексифікацій просторів.

Процес Леві $(L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ — це випадковий процес на $\mathbb{R}_+$ зі стаціонарними незалежними приростами і $L_0 = 0$ (Bertoin, 1996). Білий шум Леві — це похідна процесу Леві в сенсі узагальнених випадкових процесів (Gelfand, Vilenkin, 1964). Ми розглядаємо дійснозначний локально квадратично інтегровний процес Леві L без гауссівської частини і зсуву. Нехай ν — міра Леві процесу L (див., напр., Di Nunno, Oksendal, Proske, 2004), яка є мірою на $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, тут $\mathcal{B}$ означає борелівську σ-алгебру. Будемо вважати, що ν — міра Радона, носій якої містить нескінченну кількість точок, $\nu(\{0\}) = 0$, існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\varepsilon|x|}\nu(dx) < \infty, \text{ і } \int_{\mathbb{R}} x^2\nu(dx) = 1.$$

Також нехай μ — міра білого шуму Леві, визначена на $(\mathcal{D}',\mathcal{C}(\mathcal{D}'))$, де $\mathcal{C}$ — циліндрична σ-алгебра. Вважатимемо, що σ-алгебра $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ є поповненою відносно μ, тобто $\mathcal{C}(\mathcal{D}')$ містить усі підмножини всіх вимірних множин O таких, що $\mu(O) = 0$.

Позначимо

$$(L^2) := L^2(\mathcal{D}',\mathcal{C}(\mathcal{D}'),\mu)$$

— простір комплекснозначних квадратично інтегровних за μ функцій на $\mathcal{D}'$; нехай також $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$. Далі, за допомогою нижнього індексу $\mathbb{C}$, позначатимемо комплексифікації просторів. Наприклад, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ — комплексифікація $\mathcal{H}$, елементами якої є функції вигляду $f + ig, f, g \in \mathcal{H}$. Дійсний скалярний добуток в $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ є білінійним, тоді для $z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$,

$$\|z\| = \sqrt{(z, \overline{z})}.$$

Розглянемо

$$\langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle := (L^2) - \lim_{k \to \infty} \langle \circ, \varphi_k \rangle,$$

де $\mathcal{D} \ni \varphi_k \to 1_{[0,t)}$ в $\mathcal{H}$ при $k \to \infty$ (тут і нижче 1_A позначає індикатор множини A). $(\langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$ можна ототожнити з процесом Леві на ймовірнісному просторі $(\mathcal{D}', \mathcal{C}(\mathcal{D}'), \mu)$, тобто, можна записати (Di Nunno, Oksendal, Proske, 2004)

$$L_t = \langle \circ, 1_{[0,t)} \rangle \in (L^2).$$

Тоді білий шум, формально,

$$L_t'(\omega) = \langle \omega, 1_{[0,t)} \rangle' = -\langle \omega, \delta_t \rangle = -\omega(t)$$

— це узагальнений випадковий процес з фазовим простором $\mathcal{D}'$.

Розглянемо литвинівське узагальнення властивості хаотичного розкладу (Lytvynov, 2003). Позначимо $\widehat{\otimes}$ — симетричний тензорний добуток і $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{D}')$ — множина поліномів на $\mathcal{D}'$, яка складається з нуля та елементів вигляду

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N_f} \langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle, \omega \in \mathcal{D}', N_f \in \mathbb{Z}_+, f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, f^{(N_f)} \neq 0,$$

тут N_f називають *степенем полінома* f; $\langle \omega^{\otimes 0}, f^{(0)} \rangle := f^{(0)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} := \mathbb{C}$. Оскільки міра білого шуму Леві μ має голоморфне в нулі перетворення Лапласа (Lytvynov, 2003), то $\mathcal{P}$ є щільною множиною в (L^2) (Skorohod, 1974). Позначимо через $\mathcal{P}_n$ множину поліномів степеня не більше n, через $\overline{\mathcal{P}}_n$ — замикання $\mathcal{P}_n$ в (L^2). Нехай для $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$, (ортогональна різниця в (L^2)), $\mathbf{P}_0 := \overline{\mathcal{P}}_0$. Зрозуміло, що

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n.$$

Нехай $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}, n \in \mathbb{Z}_+$. Позначимо через $:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle:$ ортогональну проекцію монома $\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)} \rangle$ на $\mathbf{P}_n$. Визначимо дійсні (тобто білінійні) скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{ext}$ в $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, поклавши для $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$

$$(f^{(n)}, g^{(n)})_{ext} := \frac{1}{n!}\int\limits_{\mathcal{D}'} :\langle \omega^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle :: \langle \omega^{\otimes n}, g^{(n)}\rangle : \mu(d\omega),$$

і нехай $|\cdot|_{ext}$ — відповідні норми, тобто

$$\left|f^{(n)}\right|_{ext} = \sqrt{(f^{(n)}, \overline{f^{(n)}})_{ext}}.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, поповнення $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ відносно норми $|\cdot|_{ext}$ (для скалярних добутків і норм у $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ ми зберігаємо позначення $(\cdot,\cdot)_{ext}$ і $|\cdot|_{ext}$ відповідно). Для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ визначимо віківський моном

$$:\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle : \stackrel{def}{=} (L^2) - \lim_{k\to\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, f_k^{(n)}\rangle :,$$

де $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \to F^{(n)}$ при $k \to \infty$ в $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ множина $\{:\langle \circ^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle : | \, f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}\}$ є щільною в $\mathbf{P}_n$, $F \in (L^2)$ тоді і тільки тоді, коли існує єдина послідовність ядер $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, така, що

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes n}, F^{(n)}\rangle : \tag{1}$$

і

$$\left\|F\right\|_{(L^2)}^2 = \int\limits_{D'} \left|F(\omega)\right|^2 \mu(d\omega) = \mathbb{E}\left|F\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, | \, F^{(n)} \, |_{ext}^2 < \infty.$$

Таким чином, для $F, G \in (L^2)$ (дійсний) скалярний добуток має вигляд

$$(F, G)_{(L^2)} = \int\limits_{D'} F(\omega) G(\omega) \mu(d\omega) = \mathbb{E}[FG] = \sum_{n=0}^{\infty} n! (F^{(n)}, G^{(n)})_{ext},$$

де $F^{(n)}, G^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ — ядра з розкладу (1) для F і G відповідно.

Для $\beta \in (0,1]$ і $q \in \mathbb{Z}$ чи $\beta = 0$ і $q \in \mathbb{Z}_+$ визначимо простори $(L^2)_q^{\beta} \subseteq (L^2)$ як гільбертові, що складаються з елементів форми (1) для яких

$$\left\|F\right\|_{(L^2)_q^{\beta}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} \, | \, f^{(n)} \, |_{ext}^2 < \infty.$$

Покладемо $(L^2)^{\beta} := pr \lim_{q\to\infty} (L^2)_q^{\beta}$ (проективна границя просторів).

Розглянемо ланцюжок

$$(L^2)^{\beta} \subset (L^2)_q^{\beta} \subseteq (L^2) \subseteq (L^2)_{-q}^{-\beta} \subset (L^2)^{-\beta},$$

де $(L^2)^{-\beta}_{-q}, (L^2)^{-\beta} = ind \lim_{q\to\infty} (L^2)^{-\beta}_{-q}$ (індуктивна границя просторів) є дуальними просторами до просторів $(L^2)^{\beta}_{q}, (L^2)^{\beta}$ відповідно, відносно (L^2). Простори $(L^2)^{-\beta}_{-q}$ складаються з формальних рядів форми (1) таких, що

$$\left\|F\right\|^2_{(L^2)^{-\beta}_{-q}} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1-\beta}2^{-qn} \mid f^{(n)} \mid^2_{ext} < \infty.$$

А простори $(L^2)^{-\beta}$ складатимуться з формальних рядів вигляду (1) таких, що для деякого $q \in \mathbb{Z}_+$ норма $\left\|F\right\|_{(L^2)^{-\beta}_{-q}}$ є скінченною. Ланцюжок, побудований вище, називається *параметризованим регулярним оснащенням простору* (L^2) (Dyriv, Kachanovsky, 2014; Kachanovsky, 2013).

Для $F \in (L^2)^{-\beta}$ визначимо S-перетворення $(SF)(\lambda), \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, як формальний, взагалі кажучи, ряд

$$(SF)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}(F^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext}, \tag{2}$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}^{(m)}_{ext}, m \in \mathbb{Z}_+$ — ядра з розкладу (1) для F (кожен доданок даного ряду визначений коректно, але ряд може розбігатися). Зокрема, $(SF)(0) = F^{(0)}, S1 \equiv 1$.

Означення 1. *Для* $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ *та голоморфної у* $F^{(0)}$ *функції* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *визначимо віківський добуток та віківську версію* $h^{\Diamond}(F)$, *формально поклавши*

$$F \Diamond G := S^{-1}(SF \cdot SG), h^{\Diamond}(F) := S^{-1}h(SF).$$

Очевидно, що так визначений віківський добуток $\Diamond$, є комутативним, асоціативним і дистрибутивним (над $\mathbb{C}$). Функцію h, з даного означення, можна представити у вигляді

$$h(u) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m (u - (SF)(0))^m, \tag{3}$$

тоді

$$h^{\Diamond}(F) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m (F - (SF)(0))^{\Diamond m},$$

де $F^{\Diamond m} := \underbrace{F \Diamond \ldots \Diamond F}_{m \text{ разів}}$.

На просторах $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ можна ввести аналог симетричного тензорного добутку, який ми позначимо символом $\diamond$. Для цього виберемо представників $\dot{f}^{(n)} \in F^{(n)}$, $\dot{g}^{(m)} \in G^{(m)}$ з класів еквівалентності $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$.

Нехай $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ — симетризація $\dot{f}^{(n)} \cdot \dot{g}^{(m)}$ за всіма змінними, якщо їх аргументи різні, і нуль, якщо хоча б один аргумент $\dot{f}^{(n)}$ дорівнює хоча б одному аргументу $\dot{g}^{(m)}$. $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ — клас еквівалентності в $\mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$, породжений $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}}$ (тобто, $\widehat{f^{(n)}g^{(m)}} \in F^{(n)} \diamond G^{(m)}$).

У (Dyriv, Kachanovsky, 2014) доведено, що елемент $F^{(n)} \diamond G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+m)}$ є коректно визначеним (зокрема, $F^{(n)} \diamond G^{(m)}$ не залежить від вибору представників $F^{(n)}$ та $G^{(m)}$) і справедлива оцінка

$$\left| F^{(n)} \diamond G^{(m)} \right|_{ext} \leq \left| F^{(n)} \right|_{ext} \left| G^{(m)} \right|_{ext}. \qquad (4)$$

З результатів роботи (Kachanovsky, 2015) випливає, що для $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ і $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$

$$(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{ext} (G^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext} = (F^{(n)} \diamond G^{(m)}, \lambda^{\otimes n+m})_{ext}.$$

Використовуючи цю формулу, неважко підрахувати наступні координатні формули. Для $F, G \in (L^2)^{-\beta}$

$$F \Diamond G = \sum_{m=0}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{k=0}^{m} F^{(k)} \diamond G^{(m-k)} \rangle :; \qquad (5)$$

$$h^{\Diamond}(F) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} :\langle \circ^{\otimes m}, \sum_{n=1}^{m} h_n \sum_{k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}, k_1+\ldots+k_n=m} F^{(k_1)} \diamond \ldots \diamond F^{(k_n)} \rangle :, \qquad (6)$$

де $F^{(k_j)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k_j)}, j \in \{1, \ldots, n\}, k_j \in \mathbb{N}$ — ядра з розкладу (1) для F ; $F^{(k)}, G^{(k)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(k)}$ — ядра з цього ж розкладу для F і G відповідно; $h_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+$ — коефіцієнти з розкладу (3) для h.

Для того, щоб надати поняттям «віківський добуток» та «віківська версія голоморфної функції» неформального сенсу, слід, очевидно, вивчити питання збіжності рядів (5) та (6). Із використанням оцінки (4) так само, як і в майкснерівському аналізі (Kachanovsky, 2008), доводяться наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $F, G \in (L^2)^{-\beta}, \beta \in [0,1]$. *Тоді віківський добуток* $F \Diamond G \in (L^2)^{-\beta}$.

З теореми 1 випливає, що якщо $F \in (L^2)^{-\beta}$ та $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ є поліномом, то $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-\beta}$. Але, для загальних h ситуація є складнішою: виявляється, що випадки $\beta = 1$ та $\beta \in [0,1)$ є суттєво різними.

Теорема 2. *Нехай* $F \in (L^2)^{-1}$ *та функція* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *голоморфна в* $(SF)(0)$. *Тоді* $h^{\Diamond}(F) \in (L^2)^{-1}$.

Нехай тепер $\beta \in [0,1)$. Оскільки $(L^2)^{-\beta} \subset (L^2)^{-1}$, то для $F \in (L^2)^{-\beta}$ та голоморфної у $(SF)(0)$ функції $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, віківська версія $h^{\Diamond}(F)$ є коректно визначеним елементом $(L^2)^{-1}$. В той же час, $h^{\Diamond}(F)$ може не належати $(L^2)^{-\beta}$, якщо h не є поліномом. Точніше, справедливий такий результат.

Теорема 3. *Нехай* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *голоморфна в* $u_0 \in \mathbb{C}$ *функція, що не є поліномом, у якої всі коефіцієнти* h_n *з розкладу*

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (u - u_0)^n$$

є дійсними та невід'ємними. Тоді, для кожного $\beta \in [0,1)$ існує $F \in (L^2)^{-\beta}$ з $(SF)(0) = u_0$ така, що $h^{\Diamond}(F) \notin (L^2)^{-\beta}$.

Розглянемо оператор стохастичного диференціювання (Dyriv, Kachanovsky, 2014) та вивчимо зв'язок між ним та віківським численням. Нехай $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}, g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$. Визначимо узагальнений частковий добуток $(F^{(m)}, g)_{ext} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-1)}$, поклавши для кожного $g^{(m-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m-1)}$

$$((F^{(m)}, g)_{ext}, g^{(m-1)})_{ext} = (F^{(m)}, g^{(m-1)} \Diamond g)_{ext}.$$

Означення 2. *Визначимо оператор стохастичного диференціювання* $(D\circ)(g)$, $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *як лінійний неперервний оператор на просторі* $(L^2)^{-\beta}$, *поклавши*

$$(DF)(g) := \sum_{m=1}^{\infty} m :\langle \circ^{\otimes(m-1)}, (F^{(m)}, g)_{ext} \rangle \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) :\langle \circ^{\otimes m}, (F^{(m+1)}, g)_{ext} \rangle :,$$

де $F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ *— ядра з розкладу* (1) *для* $F \in (L^2)^{-\beta}$.

Визначимо характеризаційну множину простору $(L^2)^{-\beta}$ у термінах S -перетворення, поклавши

$$\mathcal{B}_\beta := S(L^2)^{-\beta} \equiv \{\mathcal{K} \mid \exists F \in (L^2)^{-\beta} : \mathcal{K} = SF\}.$$

Очевидно, $\mathcal{B}_\beta$ складається з формальних рядів вигляду (2), які можуть розбігатися як числові ряди, але ядра яких задовольняють умову: існує $q \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{1-\beta} 2^{-qm} \left| F^{(m)} \right|_{ext}^2 < \infty.$$

З теореми 1 випливає, що $\mathcal{B}_\beta$ є алгеброю відносно поточкового множення.

Нехай $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Визначимо «похідну за напрямом» $D_g^{\Diamond} : \mathcal{B}_\beta \to \mathcal{B}_\beta$. Покладемо для

$$(SF)(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} (F^{(m)}, \cdot^{\otimes m})_{ext} \in \mathcal{B}_\beta$$

($F \in (L^2)^{-\beta}, F^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ — ядра з розкладу (1))

$$(D_g^{\Diamond} SF)(\cdot) := \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(F^{(m+1)}, g\Diamond(\cdot^{\otimes m}))_{ext} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)((F^{(m+1)}, g)_{ext}, \cdot^{\otimes m})_{ext}.$$

Оскільки

$$S^{-1}(D_g^{\Diamond} SF) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) : \langle \circ^{\otimes m}, (F^{(m+1)}, g)_{ext} \rangle := (DF)(g) \in (L^2)^{-\beta},$$

то визначення $D_g^{\Diamond}$ є коректним і справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Оператор стохастичного диференціювання* $(D\circ)(g), g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, *є прообразом «похідної за напрямом»* $D_g^{\Diamond}$ *формального ряду* $S\circ$ *при* S*-перетворенні, тобто для всіх* $F \in (L^2)^{-\beta}$

$$(DF)(g) = S^{-1}(D_g^{\Diamond} SF) \in (L^2)^{-\beta}.$$

Теорема 4. *Оператор стохастичного диференціювання* D *є диференціюванням відносно віківського множення, тобто для будь-яких* $F, G \in (L^2)^{-\beta}$ *та* $g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$D(F\Diamond G)(g) = (DF)(g)\Diamond G + F\Diamond(DG)(g) \in (L^2)^{-\beta}. \tag{7}$$

Доведення. 1 етап: Застосовуємо S-перетворення до лівої і правої частини рівності (7) і, беручи до уваги результат твердження 1, можна показати, що достатньо довести

$$D_g^{\Diamond}(SF \cdot SG) = D_g^{\Diamond}(SF) \cdot SG + SF \cdot D_g^{\Diamond}(SG). \tag{8}$$

2 етап: Використовуючи означення S-перетворення і $D_g^{\Diamond}$, можна показати, що (8) виконується, якщо для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{gathered}(n+m)(F^{(n)}\Diamond G^{(m)}, \lambda^{\otimes(n+m-1)}\Diamond g)_{ext} = \\ = n(F^{(n)}, \lambda^{\otimes(n-1)}\Diamond g)_{ext}(G^{(m)}, \lambda^{\otimes m})_{ext} + m(F^{(n)}, \lambda^{\otimes n})_{ext}(G^{(m)}, \lambda^{\otimes(m-1)}\Diamond g)_{ext}\end{gathered} \tag{9}$$

(тут $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}, G^{(m)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(m)}$ — ядра з розкладу (1) для F та G відповідно).

3 етап: Формула (9) може бути перевірена шляхом безпосереднього обчислення.

Наслідок. *Нехай* $F \in (L^2)^{-\beta}$,$g \in \mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ та $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *голоморфна в* $(SF)(0)$ *функція. Тоді*

$$(Dh^{\Diamond}(F))(g) = h'^{\Diamond}(F)\Diamond(DF)(g) \in (L^2)^{-1},$$

де h' *— звичайна похідна функції* h .

Список літератури

Bertoin, J. (1996). *Levy Processes*. Cambridge: Cambridge University Press.

Di Nunno, G., Oksendal, B., Proske, F. (2004). White noise analysis for Levy processes. *J. Funct. Anal.*, *206* (1), 109–148.

Dyriv, M. M., Kachanovsky, N. A. (2014). On operators of stochastic differentiation on spaces of regular test and generalized functions of Levy white noise analysis. *Carpathian Mathematical Publications*, *6* (2), 212–229.

Gelfand, I. M., Vilenkin, N. Ya. (1964). Generalized Functions. In: *Applications of Harmonic Analysis*, 6. New York, London: Academic Press.

Kachanovsky, N. A. (2008). An extended stochastic integral and a Wick calculus on parametrized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, *11* (4), 541–564.

Kachanovsky, N. A. (2013). Extended stochastic integrals with respect to a Levy process on spaces of generalized functions. *Математичний Вісник Наукового Товариства ім. Тараса Шевченка*, *10*, 169—188.

Kachanovsky, N. A. (2015). Operators of stochastic differentiation on spaces of nonregular test functions of Levy white noise analysis. *MFAT*, *21* (4), 336–360.

Lytvynov, E. W. (2003). Orthogonal decompositions for Levy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, *6* (1), 73—102.

Skorohod, A. V. (1974). *Integration in Hilbert Space*. New York — Heidelberg: Springer.

АФІННІ ГРУПИ ВЕЙЛЯ СИСТЕМИ КОРЕНІВ ЯК КРИСТАЛОГРАФІЧНІ ГРУПИ ГЕОМЕТРІЙ

О. Я. Дишліс, О. С. Прохода, С. М. Покась

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

pokas@onu.edu.ua

Згідно з означенням Терстона геометрія — це пара $\Gamma = (X,G)$, де X — гладкий багатовид, а G — топологічна група, яка транзитивно діє на X таким чином, що стабілізатори точок є компактними підгрупами групи G (Скотт, 1986). Відоме означення кристалографічної групи рухів простору сталої кривини (Винберг, Шварцман, 1988) без змін переноситься на випадок геометрії.

Означення 1. *Кристалографічною групою геометрії* Γ *називається дискретна група рухів цієї геометрії, яка має фундаментальну область скінченного об'єму.*

У роботі Артамонов, Словохотов (2005) було наведене означення кристалічної множини K евклідової геометрії E^n, яке без змін переноситься на випадок довільної геометрії. У фізиці кристалічна множина атомів, або молекул називається ідеальним кристалом. Наступне означення 2 еквівалентне означенню 1.

Означення 2. *Кристалографічною групою геометрії* Γ *називається дискретна група рухів цієї геометрії, яка є групою симетрії кристалічної множини* $K \subset \Gamma$.

У книзі Бурбакі (1972) було дано означення системи коренів векторного простору V над полем P нульової характеристики і показано, що вивчення систем коренів зводиться до випадку, коли $P = \mathbb{Q}$, де $\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел.

Означення 3. *Нехай* V *— векторний простір над полем* $\mathbb{Q}$. *Будемо казати, що підмножина* Σ *є система коренів у просторі* V, *якщо виконані наступні умови:*

1) Σ *— скінченна множина, яка не містить нульового вектора і породжує* V;

2) при всіх відбиттях $S_a, a \in \Sigma$ *система* Σ *суміщається з собою;*

3) для довільних $a \in \Sigma$ *і* $b \in \Sigma, S_a(b) = b+ka$, *де* k *— ціле число.*

Якщо в означенні 3 розглядати векторний простір над полем $Q(\sqrt{d})$, $d \equiv 1,\ 2,\ 3 \pmod 4$ і k вважати цілим алгебраїчним числом цього поля, то ми одержимо означення узагальненої системи коренів, яке запропоновано М. В. Цибаньовим у роботі Дишліс, Цибаньов (2004).

Означення 4. *Якщо* T *— група переносів спряженого простору* V^*, *а* $W(\Sigma)$ *група Вейля системи коренів, то група* $W_a(\Sigma), a \in \Sigma$ *породжена групами* T *і* $W(\Sigma)$ *називається афінною групою Вейля системи коренів.*

Група $W(\Sigma)$ породжена відбиттями S_a — група Вейля системи коренів Σ є підгрупа скінченної групи автоморфізмів простору V, яка залишає Σ незмінною.

Означення 1—4 дозволяють сформулювати результати даної роботи.

Теорема. *Афінна група Вейля двовимірної геометрії* Γ *є кристалографічною групою евклідової площини, сфери або площини Лобачевского (в залежності від вибору метрики) і є півпрямим добутком*

$$W_a = T_2 \lambda D_n, n = 1,2,3,4,5,6,8,10,12,$$

де T_2 *для випадку* $n{=}1,2,3,4,6$ *є коренева гратка системи коренів простору* V_Q, *а при* $n = 5,8,10,12$ *коренева гратка узагальненої системи коренів.*

Ця теорема доведена першим та третім авторами на підставі результатів одержаних ними в роботі Дышлис, Покась (2015). Другим автором О. С. Проходою розроблені оригінальні комп'ютерні алгоритми за допомогою яких побудовані:

1) моделі кристалічних множин атомів кристалів (до числа яких зараз відносять і квазикристали);

2) моделі фрагментів розбиттів евклідової площини і сфери на фундаментальні області кристалографічної групи геометрії E^2 і S^2;

3) моделі ідеальних кристалів, які мають дискретні групи симетрії подібності Шубникова —Заморзаєва, які є рухами площини Лобачевского H^2.

Результати цієї роботи можна застосовувати для дослідження поверхонь (границь) трьохвимірних кристалів.

Список літератури

Артамонов, В. А., Словохотов, Ю. Л. (2005). *Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии*. Москва: Издательский центр «Академия».

Бурбаки, Н. (1972). *Группы и алгебры Ли*. Москва:

Винберг, Э. Б., Шварцман, О. В. (1988). *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. Итоги науки и техники, современные проблемы математики, фундаментальные направления* (Т. 29). Москва, С. 147—254.

Дишліс, А. А., Цибаньов, М. В. (2004). Про абстрактні системи коренів векторного простору. *Матеріали X Міжнародної наукової конференції імені академіка Кравчука*, Київ, 12—16 травня 2004, 367.

Дышлис, А. А., Покась, С. М. (2015). Применение принципа двойственности между геометриями S^2 и H^2 для совместного описания фуллеренов и квазикристаллов. *Материалы XVI Международной научной конференции имени академика Кравчука, Киев, 14—15 мая 2015*. Киев: НТУУ «КПІ», 94—96.

Скотт, П. (1986). *Геометрии на трехмерных многообразиях*. — Москва: Мир.

СПЕКТРАЛЬНІ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ ОПЕРАТОРІВ З МЕРОМОРФНОЮ РЕЗОЛЬВЕНТОЮ

М. І. Дмитришин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

m_dmytryshyn@hotmail.com

У банаховому просторі X з нормою $\|\cdot\|$ розглянемо замкнений необмежений оператор A з щільною областю визначення $D(A)$. Для числа $0<\nu<\infty$ визначимо послідовність

$$\left\{x_{k,\nu}:=(A/\nu)^k x\right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$$

і нехай $\left\{x^*_{k,\nu}\right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ — послідовність, яка складається з тих самих елементів, розміщених в порядку незростання норм

$$\left\|x^*_{0,\nu}\right\|\ge\left\|x^*_{1,\nu}\right\|\ge\ldots\ge\left\|x^*_{k,\nu}\right\|\ge\ldots.$$

Для чисел $1\le p\le\infty$ і $1<q<\infty$ визначимо простори

$$E^\nu_{q,p}(A)=\left\{x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}D\left(A^k\right):\|x\|_{E^\nu_{q,p}}<\infty\right\}$$

з нормою

$$\|x\|_{E^\nu_{q,p}}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\left\|x^*_{k-1,\nu}\right\|^p k^{\frac{p}{q}-1}\right)^{1/p}, & p<\infty,\\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left\|x^*_{k-1,\nu}\right\|k^{\frac{1}{q}}, & p=\infty.\end{cases}$$

При $q=p$ покладемо $E^\nu_{p,p}(A)=E^\nu_p(A)$.

Якщо $q=p=1$ або $q=p=\infty$, то покладемо $E^\nu_{1,1}(A)=E^\nu_1(A)$ або $E^\nu_{\infty,\infty}(A)=E^\nu_\infty(A)$.

На підпросторі $E_{q,p}(A)=\bigcup\limits_{\nu>0}E^\nu_{q,p}(A)$ задамо квазінорму

$$|x|_{E_{q,p}}=\|x\|+\inf\left\{\nu>0:x\in E^\nu_{q,p}(A)\right\}$$

і розглянемо функціонал вигляду

$$\mathbf{E}_{q,p}(t,x)=\inf\left\{\left\|x-x^0\right\|:x^0\in E_{q,p}(A),\left|x^0\right|_{E_{q,p}}\le t\right\},\ x\in X.$$

Для пар чисел $\{0<s<\infty,0<\tau\le\infty\}$ або $\{0\le s<\infty,\tau=\infty\}$ визначимо апроксимаційні простори

$$B^s_{q,p,\tau}\left(A\right)=\left\{x\in X:\left|x\right|_{B^s_{q,p,\tau}}<\infty\right\}$$

з квазінормою

$$\left|x\right|_{B^s_{q,p,\tau}}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty\left[t^s E_{q,p}\left(t,x\right)\right]^\tau\dfrac{dt}{t}\right)^{1/\tau}, & \tau<\infty,\\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^s E_{q,p}\left(t,x\right), & \tau=\infty.\end{cases}$$

Нехай $\left(X,\left|\cdot\right|_X\right)$ і $\left(Y,\left|\cdot\right|_Y\right)$ — квазінормовані комплексні простори. Для пар чисел $\left\{0<\theta<1,1\le p\le\infty\right\}$ або $\left\{0<\theta\le 1,p=\infty\right\}$ інтерполяційний простір визначається як множина

$$\left(X,Y\right)_{\theta,p}=\left\{a\in X+Y:\left|a\right|_{\left(X,Y\right)_{\theta,p}}<\infty\right\}$$

з квазінормою

$$\left|a\right|_{\left(X,Y\right)_{\theta,p}}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty\left[t^{-\theta}K\left(t,x;X,Y\right)\right]^p\dfrac{dt}{t}\right)^{1/p}, & p<\infty,\\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}K\left(t,x;X,Y\right), & p=\infty,\end{cases}$$

де

$$K\left(t,x;X,Y\right)=\inf_{a=x+y}\left(\left|x\right|_X+t\left|y\right|_Y\right),\ x\in X,\ y\in Y,\ t>0$$

(Bergh, Löfström,1976).

Відзначимо деякі інтерполяційні властивості просторів $B^s_{q,p,\tau}\left(A\right)$ (Дмитришин, Лопушанський, 2007). Якщо $\left[B^s_{q,p,\tau}\left(A\right)\right]^\theta$ — простір $B^s_{q,p,\tau}\left(A\right)$, наділений квазінормою $\left|x\right|^\theta_{B^s_{q,p,\tau}}$, то (з точністю до еквівалентності квазінорм) маємо

$$\left[B^s_{q,p,\tau}\left(A\right)\right]^\theta=\left(E_{q,p}\left(A\right),X\right)_{\theta,g},\ \theta=1/\left(s+1\right),\ \tau=g\theta.$$

Якщо $0<\tau<\infty$, $0<\theta<1$, $s=\left(1-\theta\right)s_0+\theta s_1$ і $s_0\ne s_1$, то

$$\left(B^{s_0}_{q,p,\tau_0}\left(A\right),B^{s_1}_{q,p,\tau_1}\left(A\right)\right)_{\theta,\tau}=B^s_{q,p,\tau}\left(A\right).$$

Якщо $0<\tau\le\rho<\infty$, то виконується неперервне вкладення

$$B^s_{q,p,\tau}\left(A\right)\subset B^s_{q,p,\rho}\left(A\right).$$

Вважається, що оператор A має мероморфну резольвенту, якщо спектр $\sigma\left(A\right)$ оператора A складається з ізольованих власних значень λ_k, які є полюсами резольвенти $R_\lambda\left(A\right)$, з можливою єдиною точкою скупчення на нескінченності. Покладемо

$$\bar{R}^\nu\left(A\right) = R^\nu\left(A\right) \cup \left\{x : Ax = \lambda_k x, \left|\lambda_k\right| = \nu\right\},$$

де $R^\nu\left(A\right)$ — лінійна оболонка об'єднання усіх кореневих підпросторів $R\left(\lambda_k\right)$, для яких $\left|\lambda_k\right| < \nu$.

Теорема. *Нехай оператор* A *має мероморфну резольвенту. Тоді виконуються такі нерівності*

$$\inf\left\{\left\|x - x^0\right\| : x^0 \in R^\nu\left(A\right)\right\} \le c\nu^{-s}\left|x\right|_{B^s_{p,p,\tau}},\ x \in B^s_{p,p,\tau}\left(A\right),$$

$$\inf\left\{\left\|x - x^0\right\| : x^0 \in \left(R^\nu\left(A\right), \bar{R}^\nu\left(A\right)\right)_{1-1/q,p}\right\} \le c\nu^{-s}\left|x\right|_{B^s_{q,p,\tau}},$$

$$x \in B^s_{q,p,\tau}\left(A\right).$$

Список літератури

Bergh, J., Löfström, J. (1976). *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Дмитришин, М. І., Лопушанський, О. В. (2007). Абстрактні простори Бєсова, асоційовані з замкненими операторами в банахових просторах. *Доповіді НАН України*, *2007* (12), 16—22.

ВЛАСТИВОСТІ КОМПЛЕКСНОЇ ДИНАМІКИ ПОРОДЖЕНОЇ ВІДОБРАЖЕННЯМ $z_{n+1}=z_n^2$

А. П. Дуліна
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
nastyamatan@mail.ru

Динаміка всередині репелера $|z|=1$ є досить нетривіальною. Для з'ясування динаміки на репелері зауважимо, що довільна точка репелера z_0 може бути записана у вигляді

$$z_0=\cos(2\pi\cdot\varphi)+i\sin(2\pi\cdot\varphi),$$

де $\varphi\in[0;1)$. Тоді

$$z_n=\cos(2\pi\cdot 2^n\cdot\varphi)+i\sin(2\pi\cdot 2^n\cdot\varphi).$$

Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо φ — двійково раціональна точка, тобто $\varphi=\dfrac{m}{2^k}$, де $m\in\{0,1,...,2^k-1\}$ для деякого $k\in\mathbb{N}$. Тоді, очевидно, що

$$z_k=\cos\left(2\pi\cdot 2^k\cdot\frac{m}{2^k}\right)+i\sin\left(2\pi\cdot 2^k\cdot\frac{m}{2^k}\right)=1 \text{ і } z_n=1, \forall n>k.$$

Тому для всіх двійково-раціональних точок z_0 має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} z_n=1.$$

Для більш детального аналізу розглянемо точку

$$\varphi_0=0,(100)=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+...=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}.$$

У цьому випадку відображення має нерухому точку порядку 3:

$$z_0=z_3=z_6=...$$

$$z_1=z_4=z_7=...$$

$$z_2=z_5=z_6=...$$

Тому з теореми О. М. Шарковського (Canovas & Linero, 2005) випливає, що існують періодичні точки всіх можливих періодів! Опишемо їх в пункті 2.

2. Якщо φ записується у вигляді нескінченного періодичного двійкового дробу (довжина періоду ≥ 2), то

$$\varphi=0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\left(\beta_1\beta_2...\beta_p\right).$$

Тоді

$$2^n\varphi = \alpha_1 ... \alpha_n, (\beta_1\beta_2 ... \beta_p)$$
$$2^{n+p}\varphi = \alpha_1 ... \alpha_n\beta_1 ... \beta_p, (\beta_1\beta ... \beta_p).$$

Тому

$$z_n = z_{n+p} = z_{n+2p} = ...$$
$$z_{n+i+p} = z_{n+i+2p}, \ \forall i \in \{0,1,...,p-1\}.$$

У цьому випадку має періодичні точки періоду p.

3. Покажемо, що існують такі точки на одиничному колі, для яких траєкторія z_n є всюди щільною на одиничному колі.

З цією метою нагадаємо означення слабонормального числа за основою 2 та нормального числа за основою 2.

Нехай

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k}$$

— двійковий розклад числа $\varphi \in [0;1)$, $\alpha_k(x) \in \{0,1\}$ («1» у періоді заборонена).

Нехай $N_i(\varphi, k)$ — кількість цифр «i» у двійковому розкладі числа φ до місця k включно. Якщо границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_i(\varphi, k)}{k}$$

існує, то її значення називається *частотою символа* «i» у двійковому розкладі φ.

Відомо (Borel, 1914), що для майже всіх $\varphi \in [0;1)$ має місце рівність:

$$\nu_0(\varphi) = \nu_1(\varphi) = \frac{1}{2}.$$

Такі числа називаються *слабонормальними* за основою 2.

Приклад: $\varphi = 0,010101...$

Аналогічного для довільного набору $(i_1, i_2, ..., i_n) \in \{0,1\}^n$ розглядається поняття частоти появи набору $(i_1, i_2, ..., i_n)$ у двійковому розкладі φ. Нехай $N_{(i_1, i_2, ..., i_n)}(\varphi, k)$ — кількість появ набору $(i_1, i_2, ..., i_n)$ серед перших k символів двійкового розкладу φ. Величина

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{(i_1, ..., i_n)}(\varphi, k)}{k} = \nu_{i_1, ..., i_n}$$

називається частотою набору $(i_1, i_2, ..., i_n)$ у двійковому розкладі числа φ (якщо ця границя існує).

Наприклад, якщо $\varphi = 0,001001001...$, то

$$\nu_{(00)}(\varphi)=\frac{1}{3},\ \nu_{(01)}(\varphi)=\frac{1}{3},$$
$$\nu_{(10)}(\varphi)=\frac{1}{3},\ \nu_{(11)}(\varphi)=\frac{1}{3}.$$

Відомо (Borel, 1914), що для довільного $n\in\mathbb{N}$ і для λ-майже всіх $\varphi\in[0;1)$:

$$\nu_{(i_1\dots i_n)}(\varphi)=\frac{1}{2^n},\ \forall(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n.$$

Такі числа називаються *нормальними за основою* 2. Зрозуміло, що якщо φ_0 — число, яке є нормальним за основою 2, то траєкторія z_n є всюди щільною на одиничному колі. Для того, щоб це довести досить показати, що для довільного двійкового інтервалу (як завгодно малого) $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}$ знайдеться таке $n\in\mathbb{N}$, що $\varphi_n\in\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}$, де φ_n — дробова частина від $2^n\varphi_0$.

Справді, оскільки φ_0 – нормальне за основою 2, то набір $(i_1,\dots,i_s)=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ знайдеться хоч один раз у двійковому розкладі числа φ (такий набір насправді зустрічається безліч разів і з частотою $\frac{1}{2^s}$).

Тому $\varphi_0=0,\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\dots$ Тоді $\varphi_n=0,\alpha_1\dots\alpha_s\dots\in\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_s}$, що й треба було довести.

Зауваження. Побудувати число, яке нормальне за основою 2 — нетривіальна проблема. Тому спробуємо побудувати інше φ_0, для якого траєкторія z_n є всюди щільною на $|z|=1$.

Нехай

$$\varphi_0=0,\underbrace{01}\underbrace{00011011}\underbrace{000001010011100101110111}\dots$$

Тобто у двійковому розкладі φ_0 по черзі йдуть усеможливі варіанти 0 та 1 у наборах по 1, по 2, по 3,…. Очевидно, що для довільного двійкового циліндру $\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ знайдеться таке n, що $\varphi_n\in\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_s}$.

Список літератури

Borel, É. (1914). *Leçons sur la théorie des fonctions*. (2ème édition). Paris: Gauthier-Villars.

Canovas, J. S., & Linero A. (2001). Topological dynamic classification of duopoly games. *Chaos Solitons Fractals, 12* (7), 1259–1266.

Canovas, J. S., & Linero, A. (2005). Non-chaotic antitriangular maps. *Appl. Gen. Topol., 6* (2), 171–183.

Sharkovsky, A. N., Kolyada, S. F., Sivak, A. G., & Fedorenko, V. V. (1997). *Dynamics of One Dimensional Maps*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

ЖОРСТКІ ТА МАЙЖЕ ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ

О. В. Зеленський[1], В. М. Дармосюк[2], О. І. Новицька[2]

[1]*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський,*

[2]*Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв, Україна.*

zelik82@mail.ru, darmosiuk@gmail.com, olga-noviskaya@mail.ru

Один з аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем (Hazewinkel, Gubareni & Kirichenko, 2004). Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників (Hazewinkel, Gubareni & Kirichenko, 2007; Kirichenko, Zelenskiy & Zhuravlev, 2005), зокрема, сагайдаки таких кілець (Hazewinkel et al., 2004). Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. З появою вагових функцій, з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків (Журавлев, 2008). Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в Кириченко, Журавлёв, Цыгановская (2006). У Журавльов, Зеленський, Дармосюк (2012) установлено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака.

Означення 1 (Hazewinkel et al., 2004, c. 353). Матриця

$$\mathrm{E} = \left(\alpha_{ij}\right) \in M_n\left(Z\right),$$

для якої виконуються наступні умови:

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \ldots, n$,

2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, називається *матрицею показників*.

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i, j \in \left\{1, \ldots, n\right\} \left(i \neq j\right)$ називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $\mathrm{E} = \left(\alpha_{ij}\right)$ — зведена матриця показників.

Означення 2 (Hazewinkel et al., 2004, c. 357). Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q\left(\mathrm{E}\right)$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою

$$\left[Q\right] = \mathrm{E}^{(2)} - \mathrm{E}^{(1)} \; (\mathrm{E}^{(1)} = \left(\beta_{ij}\right) = \mathrm{E} + \mathrm{E}_n \in M_n\left(Z\right),$$
$$\mathrm{E}^{(2)} = \left(\gamma_{ij}\right) \in M_n\left(Z\right) : \gamma_{ij} = \min_k \left\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\right\}) .$$

Означення 3 (Hazewinkel et al., 2004, c. 357). Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників E, така що $Q\left(\mathrm{E}\right) = Q$.

Означення 4 (Журавлев, 2008). Сагайдак $Q = \left(VQ, AQ\right)$ називається *зваженим*, якщо визначена функція $\omega : AQ \to R$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Теорема 1 (Журавлев, 2008). Сильнозв'язний сагайдак $Q = \left(VQ, AQ\right)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to N \cup \left\{\varnothing\right\}$, яка задовольняє наступним умовам:

1) вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$;

2) вага петлі в точці i менше за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжини $l \geq 2$;

3) вага будь-якого циклу більше або дорівнює 1;

4) вага петлі дорівнює 1;

5) через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Означення 5 (Кириченко та ін., 2006). Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, називають допустимою ваговою функцією.

Означення 6 (Журавльов та ін., 2012). Простий цикл в сагайдаку $Q = \left(VQ, AQ\right)$, вага якого дорівнює 1, називають *одиничним.*

Означення 7 (Журавльов та ін., 2012). Допустимий сагайдак Q будемо називати *одиничним*, якщо об'єднання одиничних циклів допустимого сагайдака Q утворює сильнозв'язний сагайдак Q_1 такий, що $VQ = VQ_1$.

Означення 8 (Кириченко та ін., 2006). Допустимий сагайдак Q називається *жорстким*, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників E така, що $Q\left(\mathrm{E}\right) = Q$.

Означення 9. Нежорсткий допустимий сагайдак Q, який одержується з скінченної кількості (з точністю до еквівалентності) матриць показників, називається *майже жорстким*.

Теорема 2. Якщо для довільної вагової функції допустимий сагайдак одиничний, то він жорсткий або майже жорсткий. Якщо існує вагова функція, для якої сагайдак не є одиничним, то існує нескінченна кількість попарно нееквівалентних матриць показників, з яких він одержується.

Теорема 3. На чотирьох вершинах існує тільки чотири жорстких не ізоморфних сагайдака та жодного майже жорсткого.

Список літератури

Hazewinkel, M., Gubareni, N., & Kirichenko, V. V. (2004). *Algebras Rings and Modules* (Vol. 1). Kluwer Academic Publisheers.

Hazewinkel, M., Gubareni, N., & Kirichenko, V. V. (2007). *Algebras Rings and Modules* (Vol. 2). Kluwer Academic Publisheers.

Kirichenko, V. V., Zelenskiy, O. V., & Zhuravlev, V. N. (2005). Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings. *International Journal of Algebra and Computation*, *15* (5–6), 1–16.

Журавлев, В. Н. (2008). Допустимые колчаны. *Фундаментальная и прикладная математика*, *14* (7), 121—128.

Журавльов, В. М., Зеленський, О. В., Дармосюк, В. М. (2012). Одиничні сагайдаки матриці показників. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, *2012* (4), 27—31.

Кириченко, В. В., Журавлёв, В. Н., Цыгановская, И. Н. (2006). О жестких колчанах. *Фундаментальная и прикладная математика*, *12* (8), 105—120.

ПРО СТРУКТУРУ КРОНЕКЕРІВСЬКИХ ДОБУТКУ ТА СУМИ МАТРИЦЬ

В. Р. Зеліско, Г. В. Зеліско
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
zelisko_vol@yahoo.com, zelisko_halyna@yahoo.com

При дослідженні питання про існування розв'язків лінійних матричних рівнянь типу Сильвестра використовуються структурні властивості інваріантних множників кронекерівських добутку і суми матриць. Із результатів праці Newman (1971) для матриць $A, B \in M_n(K)$, де K — область головних ідеалів, випливає, що інваріантні множники $\varepsilon_i(A)$ та $\varepsilon_i(B)$ цих матриць є дільниками відповідних інваріантних множників їх кронекерівського добутку $A \otimes B$, визначеного як матриця $A \otimes B = (a_{ij}B)$. У Thomson (1980) досліджуються властивості інваріантних множників суми $A + B$.

Для інваріантних множників кронекерівської суми матриць A і B, визначеної як матриця

$$A \hat{+} B = A \otimes E + E \otimes B,$$

де E — одинична матриця, встановлено такі результати.

Теорема 1. *Якщо* $\varepsilon_i(A)$ *та* $\varepsilon_i(B)$ — *інваріантні множники матриць* $A, B \in M_n(K)$, K *– комутативна область головних ідеалів, а*

$$D = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\varepsilon_1(A), \ \ldots, \ \varepsilon_1(A)}_{n}, \ldots, \underbrace{\varepsilon_n(A), \ \ldots, \ \varepsilon_n(A)}_{n}\right) \oplus$$

$$\oplus \operatorname{diag}\left(\underbrace{\varepsilon_1(B), \ \ldots, \ \varepsilon_1(B)}_{n}, \ldots, \underbrace{\varepsilon_n(B), \ \ldots, \ \varepsilon_n(B)}_{n}\right),$$

то інваріантні множники $h_1(D), \ldots, h_{2n}(D)$ цієї матриці задовольняють умову

$$h_k(D) \mid \varepsilon_k(A \hat{+} B), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2. $(\varepsilon_k(A \otimes E), \varepsilon_j(E \otimes B)) \mid \varepsilon_{k+j-1}(A \hat{+} B)$, де $1 \le j, k < n$ та $k + j - 1 < n$.

У випадку, коли $K = C[x]$ – кільце многочленів, досліджується питання про напівскалярну еквівалентність кронекерівського добутку та кронекерівської суми многочленних матриць (Казімірський, 2015).

Список літератури

Казімірський, П. С. (2015). *Розклад матричних многочленів на множники.* Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Newman, M. (1971). A property of equivalence. *J. Res. Bur. Stand. Sect., 78B* (2), 71–72.

Thomson, R. (1980). The Smith invariants of a matrix sum. *Proc. Amer. Math. Soc., 78* (2), 162–164.

ПРОСУНУТІ РОЗБИТТЯ І ТОП-ЕЛЕМЕНТИ ДІЛУОРСА СКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

М. В. Зельдіч
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
zeldich@mail.ru

Одержано важливе і суттєве посилення класичної теореми Ділуорса (Холл, 1970, с. 90), яка стверджує, що скінченна частково впорядкована множина (надалі — ч. в. м.) ширини k (що, за означенням, позначає максимально можливу чисельність довільних підмножин даної ч. в. м., які не містять двох різних порівнюваних між собою елементів, тобто елементів, що перебувають у заданому відношенні часткового порядку) допускає розбиття на k ланцюгів («ланцюгів Ділуорса»), тобто певних лінійно впорядкованих підмножин даної ч. в. м. («розбиття Ділуорса» даної ч. в. м.).

На множині всіх баз, тобто підмножин даної ч. в. м. ширини k, що складаються з k попарно не порівнюваних елементів, розглядається природне відношення, індуковане вихідним відношенням часткового порядку на даній ч. в. м. Виявляється, що відносно так запровадженого відношення, множина всіх баз даної ч. в. м. утворює не лише нову ч. в. м., але й більш того, повну гратку (структуру), а отже завжди існує найбільша та найменша бази даної ч. в. м. (*теорема про структуру множини всіх баз скінченної ч. в. м.*).

Використовуючи цей факт, установлюється, що для найбільшої (відповідно, найменшої) бази даної ч. в. м. ширини k існує таке «просунуте» розбиття Ділуорса на k ланцюгів, що один з елементів зазначеної бази буде «просунутим» у відповідному ланцюгу, тобто буде максимальним чи передмаксимальним (відповідно, мінімальним чи передмінімальним) для деякого з ланцюгів Ділуорса цього розбиття, до якого даний елемент належить (*теорема про існування «просунутого» розбиття Ділуорса*).

Більш того, для довільного скінченного ч. в. м. автором цієї доповіді даний повний і явний опис як для множини верхніх топ-елементів Ділуорса (тобто максимальних елементів усіх можливих ланцюгів Ділуорса), так і, відповідно, для множини нижніх топ-елементів Ділуорса (тобто мінімальних елементів усіх таких ланцюгів). Зокрема, доведено, що множина верхніх (відповідно, нижніх) топ-елементів Ділуорса скінченної ч. в. м. містить найбільшу (відповідно, найменшу) базу даної ч. в. м. При цьому, як виявляється, зазначена найбільша (відповідно, найменша) база даної ч. в. м. міститься у згаданій множині верхніх (відповідно, нижніх) топ-елементів Ділуорса в якості підмножини всіх її мінімальних (відповідно, максимальних) елементів.

У підсумку, ми встановлюємо, що сама множина верхніх (відповідно, нижніх) топ-елементів Ділуорса довільної скінченної ч. в. м. є об’єднанням верхніх (відповідно, нижніх) конусів усіх елементів найбільшої (відповідно, найменшої) бази даної скінченної ч. в. м., тобто множиною всіх тих елементів заданої скінченної ч. в. м., кожен з яких є мажорантою (тобто є більшим, або рівним) (відповідно, є мінорантою (тобто є меншим або рівним)) для деякого елемента з найбільшої (відповідно, з найменшої) бази даної ч. в. м. (*теорема-опис множин усіх верхніх та всіх нижніх топ-елементів Ділуорса довільної скінченної ч. в. м.*).

Зазначені результати наукових досліджень увійшли в підсумковий колективний звіт по науковій держбюджетній темі 11БФ038-03 механіко-математичного факультету КНУ ім. Т. Шевченка за 2011—2015 роки в якості відповідного розділу за моїм авторством, а також були оприлюднені у доповідях на трьох міжнародних наукових конференціях і відображені в тезах цих конференцій, а саме, у публікаціях Зельдіч (2014а, 2014б, 2015) (відповідні наукові статті на даний час готуються до друку).

Список літератури

Зельдич, М. В. (2014а). О некотором усилении теоремы Дилуорса. In: *X International Algebraic conference in Ukraine dedicated to the 70-th anniversary of Y. A. Drozd, August, 20—27, 2015, Book of abstracts*, (с. 131—132). Odessa.

Зельдіч, М. В. (2014б). Про бази скінченних частково впорядкованих множин і одне посилення теореми Ділуорса. In *Book of abstracts of the International Algebraic conference dedicated to 100-th anniversary of L .A. Kaluzhnin, July, 7-12, 2014*. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv.

Зельдіч, М. В. (2015). «Об экстремальных базисах и базисных элементах конечних частично упорядоченных множеств». У кн. *Матеріали конференції ім. акад. І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика», 8—9 жовтня 2015*, (с. 49—51). Київ: КНУ.

Холл, М. (1970). *Комбинаторика*. Москва: Мир.

КВАДРАТУРНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ МЕЖАМИ ІНТЕГРУВАННЯ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Для лінійних інтегральних рівнянь (Калайда та ін., 1995) зі змінними межами інтегрування

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} K(x, s)y(s)ds,\ x \in [a, b],\ s \in [\phi(x), \psi(x)], \lambda - const, \quad (1)$$

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} K(x, s)y(s)ds = f(x),\ f(0) = 0,\ x \in [a, b],\ s \in [\phi(x), \psi(x)], \quad (2)$$

де ϕ, ψ — диференційовні функції, область інтегрування є об'єднання опуклих областей, аналогічно (Калайда, 2010), будується квадратурний метод високого порядку.

Для побудови методу апроксимуємо підінтегральний вираз в (1), (2) многочленом Лагранжа за змінною s за вузлами s_j, $j = \overline{0, n}$, у вигляді многочлена Тейлора за степенями $s - c$, $c \in [a, b]$,

$$K(x, s)y(s) \approx \Omega(c)\left(E + \theta(s - c) + \frac{\theta^2(s - c)^2}{2!} + ... + \frac{\theta^n(s - c)^2}{n!}\right)\mathrm{K}(x)Y(y), \quad (3)$$

де $\Omega(c)$ — матриця значень $\omega_j(c)$ базисних функцій ω_j многочлена Лагранжа, E — одинична матриця $(n + 1)$-порядку, θ — матриця чисельного диференціювання [3] того ж порядку, $\mathrm{K}(x)$ — діагональна матриця з елементами $K(x, s_j)$, $Y(y) = (y_0 \ ... \ y_n)^T$ — вектор значень $y_j = y(x_j)$ шуканого розв'язку $y(x)$. Зафіксувавши в рівняння (1) (рівнянні (2)) змінну x у вузлових точках s_i, $i = \overline{0, n}$, з урахуванням (3) дістанемо лінійне алгебричне векторне рівняння (для рівняння (1))

$$Y(y) = F + \lambda A Y(y),\ A Y(y) = F,\ F = (f_i),\ A = (a_{ij}),$$

$$a_{ij} = \Omega(c)\left((\phi_i - \psi_i) + \frac{\theta({u_i}^2 - {v_i}^2)}{2!} + ... + \frac{\theta^n({u_i}^{n+1} - {v_i}^{n+1})}{(n + 1)!}\right)\mathrm{K}(s_i),$$

$$u_i = \phi(s_i) - \phi(c),\ v_i = \psi(s_i) - \psi(c).$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Калайда, О. Ф. (2010). Двосторонні методи типу Крилова розв'язування рівнянь Вольтерра другого роду. *Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука*, Київ, (Т. 2), 134.

Калайда, О. Ф., Вдовенко, Є. О., Макаренко, О. В. (1995). Про нелінійні інтегральні рівняння другого роду зі змінними межами інтегрування. *Вісник Київськ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки*, *1995* (1), 49—57.

ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ КОЛОКАНТ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЗА ПРОСТИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Побудова колокант функцій за простими вузлами — многочленів Лагранжа (многочленів типу Лагранжа) — легко здійснюється у випадку функцій однієї дійсної та комплексної змінної:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\omega_j(x),\ \omega_j(x) \Leftarrow \omega_j(x_i) = \delta_{ji},\ \omega_j(x) = \prod_{l=0,\ l\neq j}^{n} \frac{\sigma(x) - \sigma(x_l)}{\sigma(x_j) - \sigma(x_l)} \quad (1)$$

(x — дійсна або комплексна змінна, при $\sigma(x) = x$ — многочлен Лагранжа). У випадку ж багатовимірних функцій використанням одновимірних многочленів типу Лагранжа (1) це знову ж таки легко будується, але лише при прямокутній сітці вузлів (методом вичерпування за кожною із змінних), а для функцій двох змінних за довільно розташованими вузлами — за допомогою векторного подання координат вузлів та скалярних добутків цих векторів (Березин, Жидков, 1959). Тут пропонується загальний простий підхід побудови колокант функції довільної кількості змінних при довільному розташування вузлів.

В області апроксимації функції $P \mapsto f(P)$ задаймо точки P_i, занумеровані в певному порядку, функцію $P \mapsto \sigma(P)$ (при виконанні умови

$$\sigma(P_j) - \sigma(P_i) \neq 0,\ i \neq j, i, j = \overline{0, N})$$

та побудуємо колоканту $L(P)$ за умовами

$$f(P_i) = L(P_i), i = \overline{0, N}. \quad (2)$$

Легко переконатись, що шуканою колокантою, яка справджує умови (2), є

$$L(P) = \sum_{j=0}^{N} f(P_j)\omega_j(P),\ \omega_j(P) = \prod_{i=0,\ i\neq j}^{N} \frac{\sigma(P) - \sigma(P_i)}{\sigma(P_j) - \sigma(P_i)} \Rightarrow \quad (3)$$

$$f(P) - L(P) = A(P)\prod_{j=0}^{N} \omega_j(P).$$

Зрозуміло, що за допомогою многочленів (3) можна при довільному розташуванні вузлів здійснювати й чисельне диференціювання, а при умові точної інтегровності степенів функції σ також і чисельне інтегрування функцій.

Список літератури

Березин, И. С., Жидков, Н. П. (1959). *Методы вычислений* (Т. 1). Москва: Физматгиз.

КВАДРАТУРНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Принципові нові прості апроксиманти функцій, похідних та інтегралів і їх застосування до побудови двосторонніх методів розв'язування різних рівнянь (інтегральних, диференціальних, інтегро-диференціальних) розроблено в Калайда (2000). Клас так званих симетричних двосторонніх методів винайдено і викладено стосовно інтегральних рівнянь Вольтерра в статті Калайда (2010).

Тут за схемою статті Калайда (2010) побудуємо квадратурний метод високого порядку розв'язування сингулярних рівнянь другого роду (для першого роду – за аналогією)

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s)\, \phi(s))(x - s)^{-1} ds,\ x \in (a, b), \tag{1}$$

Для цього функцію $K\phi$ в (1) апроксимуємо многочленом Лагранжа за $(n+1)$ вузлами $s_j \in (a, b),\ j = \overline{0, n}$, (системою вузлів відкритого типу)

$$L_n(s; K) = \Omega(s) Y(K(x)\, \phi)) = (\omega_0(s) \ldots \omega_n(s))(K(x, s_0)\, \phi_0 \ldots K(x, s_n)\, \phi_n))^T, \tag{2}$$

з нормальною матрицею $\Omega(s)$ базисних функцій $\omega_j(s)$, поданою у вигляді многочлена Тейлора (з центром у точці $x \in (a, b)$; E – одинична матриця)

$$\Omega(s) = \Omega(x)(E + \theta(s - x) + \ldots \theta^n (s - x)^n \ / \ n!), \tag{3}$$

де θ — матриця чисельного диференціювання (Калайда, 2000). Підставивши (2) з урахуванням (3) в (1) та зінтегрувавши результат, дістанемо наближену рівність

$$\phi(x) \approx f(x) + \sum_{j=0}^{n} \mu_j(x) K(x, s_j)\, \phi_j$$

(позначення в ній зберігаємо). Зафіксувавши тут змінну x в точках $s_i,\ i = \overline{0, n}$, відносно невідомих ϕ_j дістаємо лінійну систему алгебричних рівнянь

$$\phi_i = f_i + \sum_{j=0}^{n} \mu_j(s_i) K(s_i, s_j) \phi_j, i = \overline{0, n}.$$

$$\mu_0(x_i) = \ln \frac{b - x_i}{x_i - a}, \mu_j(x_i) = \frac{(b - x_i)^j - (a - x_i)^j}{j!\, j}$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Калайда, О. Ф. (2010). Двосторонні методи типу Крилова розв'язування рівнянь Вольтерра другого роду. *Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Ч. 2), 134.

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ НЕЛОКАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ З КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Як відомо, сплайни відповідного дефекту будуються у вигляді кускових многочленів (Завьялов и др., 1980) певних базисних (здебільшого степеневих) функцій з невідомими коефіцієнтами, визначуваними з умов гладкості сплайна у вузлах. Це приводить до громіздких викладок. Тут з використанням Ермітових сплайнів пропонується конструктивно більш простий спосіб таких побудов.

Подаймо шуканий з одноланковими елементами сплайн $S(x)$ з $k-$кратними вузлами $x_i, i = \overline{0, N}$, дефекту m у вигляді (обмежимось алгебричним сплайном)

$$S(x) = H_{i,2k-1}(x) + \omega_i^k(x) P_{i,m}(x), x \in \Delta_i, \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

$H_{i,2k-1}(x)$ — ермітовий двовузловий сплайн з k-кратними вузлами x_{i-1}, x_i,

$$\omega_i(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)$$

— так званий буферний вираз,

$$P_{i,m}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}(x - x_{i-1})^{j-1} \quad (2)$$

— многочлен з невідомими коефіцієнтами (зауважимо, що ермітові сплайни легко будувати за рекурентними формулами (Калайда, 2009), починаючи з двочлена Лагранжа $L_{i,1}(x)$).

Для визначення коефіцієнтів многочлена (2) використовуємо умови гладкості сплайна (1) у вузлах

$$S^{(l)}(x_i + 0) - S^{(l)}(x_i - 0) = 0, l = \overline{k + 1, k + m},$$

У результаті безпосередньо дістанемо відповідну систему алгебричних рівнянь лише для істотних m шуканих коефіцієнтів a_{ij}.

Список літератури

Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л. (1980). *Методы сплайн функций*. Москва: Наука.

Калайда, О. Ф. (2009). Про один простий алгоритм побудови многочленів Маркова — Ерміта. *Матеріали III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика» присвяченої пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка*, Київ, 11—12 вересня 2009 р., 39.

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ КОМБІНОВАНИХ АПРОКСИМАНТ ФУНКЦІЙ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Комбіновані апроксиманти функції будуються в тому випадку, коли частину її параметрів необхідно знайти одним способом (наприклад, методом колокації), а решту — іншим способом (наприклад, методом найменших квадратів). Це приводить до системи рівнянь для загальної кількості параметрів. Тут пропонується більш економно, ніж безпосередньо у вигляді многочлена з невідомими коефіцієнтами, будувати шукану апроксиманту у вигляді многочлена типу Лагранжа за заданою нормальною системою базисних функцій, у якому частина значень функції є невідомі параметри, які й знаходяться методом найменших квадратів.

Нехай відомі значення $f_j,\ j = \overline{0, N}$, функції f, решту ж параметрів a_i, $i = \overline{1, M}$, з певних причин необхідно визначити іншим способом. Апроксимуємо функцію f за вузлами X_k многочленом типу Лагранжа (Калайда, 2010)

$$\begin{gathered} L(X,A) = \sum_{j=0}^{N} \omega_j(X) f_j + \sum_{i=1}^{M} \omega_i(X) a_i, \\ \omega_k(X) = \frac{\psi_k(X)}{\psi_k(X_k)},\ \psi_k(X_l) = \delta_{k,l} = \begin{cases} 0,\ k \neq l, \\ 1,\ k = l, \end{cases} \quad A = (a_1 \ldots a_M)^T. \end{gathered} \tag{1}$$

Невідомі параметри a_i знаходимо методом найменших квадратів з вагою $\rho(X) \geq 0$, з умови

$$A \to \min J(a_1, \ldots, a_M) = \int_D \rho(X)(f(X) - L(X, A))^2 d\omega_X.$$

тобто з необхідної умови

$$\partial J(a_1, \ldots, a_M) \,/\, \partial a_i = 0,\ i = \overline{1, M},$$

екстремуму функції J. У результаті матимемо лінійну систему не $M + N + 1$, а лише M алгебричних рівнянь

$$\int_D \rho(X)(f(X) - \sum_{l=1}^{M} \omega_l(X) a_l) \omega_i(X) d\omega_X = \int_D \rho(X)(f(X) - \sum_{j=0}^{N} \omega_j X) f_j),\ i = \overline{1, M}.$$

Визначивши з цієї системи значення параметрів a_i, дістанемо шукану апроксиманту функції f у вигляді многочлена (1).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

ПРО УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ПРОСТИХ ІТЕРАЦІЙ ЗНАХОДЖЕННЯ НУЛІВ ОДНОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Йтиметься про прості умови збіжності знаходження нулів одновимірних неперервних функцій, тобто коренів рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

за допомогою ітеративного процесу ($f(x) = x - \phi(x)$, α — корінь рівняння (1))

$$x_{n+1} = \phi(x_n). \tag{2}$$

Прості міркування показують, що процес (2) збіжний до кореня рівняння (2) при умові ($x_0 > \alpha$)

$$\alpha \le \phi(x) < x \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha \tag{3}$$

або при умові ($x_0 < \alpha$)

$$x < \phi(x) \le \alpha \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha. \tag{4}$$

Дійсно, при цих умовах та умові $\left|x - \alpha\right| < 1$ стала Ліпшиця функції ϕ менша за одиницю, а отже, процес (2) збіжний. У разі монотонної диференційовної функції ϕ тут виконується достатня умова збіжності (Березин, Жидков, 1959; Калайда, 2000) $\left|\phi'(x)\right| < 1$.

Після відокремлення коренів рівняння (1) умови (3), (4) легко перевіряються і згідно з ними слід здійснювати вибір функції ϕ. Так, наприклад, для рівняння

$$10x - x^2 = 0$$

маємо збіжний процес (2) при $x = \phi(x) = x^2 / 10$ до кореня $\alpha = 0$ та збіжний процес (4) $x = \phi(x) = \sqrt{10x}$ до кореня $\alpha = 10$. Легко переконатись, для першого випадку виконуються умови (3), для другого — умови (4).

Процес (3) можна використати для знаходження наближень числа π з наближеного для нього рівняння

$$x = 0,5m\sin(2x / m) \text{ (адже } \pi \approx 0,5m\sin(360^\circ / m) \underset{m\to\infty}{\to} \pi\text{)},$$

утвореного з формули площі правильного m −кутника, вписаного в коло одиничного радіуса.

Список літератури

Березин, И. С., Жидков, Н. П. (1959). *Методы вычислений* (Ч. 1). Москва: Физматгиз.
Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА НЕУПРУГИХ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ

Т. В. Карнаухова

НТУУ «Київский политехнический институт», Киев, Украина

karn@inmech.kiev.ua

Тонкостенные элементы конструкций широко используются в различных областях современной техники. Одним из основных и наиболее распространенных режимов работы таких элементов являются вынужденные гармонические колебания, в частности, резонансные. Любой материал при колебаниях в той или иной степени обладает гистерезисными потерями, в результате чего механическая или электромеханическая энергия превращается в тепловую. Гистерезисные потери существенно увеличиваются в неупругих материалах - вязкоупругих, упругопластических и вязоупругопластических. Этот эффект широко используется при разработке пассивных методов демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонкостенных элементов с целью уменьшения их динамической напряженности, когда в структуру элемента включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями, приводящими к существенному уменьшению амплитуды колебаний конструкции. Однако повышение гистерезисных потерь может сопровождаться существенным повышением температуры, так называемой температуры диссипативного разогрева, которая может повлиять на все стороны механического и теплового состояния конструкци: на распределение напряжений и деформаций в деформируемом теле, на динамические характеристики резонансных колебаний (амплитудно–, температурно–частотные характеристики, на частотную зависимость коэффициента демпфирования), на динамическую и статическую устойчивость тонкостенных элементов, на их механическое и тепловое разрушение, на ползучесть [1—3]. Кроме того, каждый материал при определенной температуре (точке деградации) теряет свое функциональное назначение. Как правило, точке деградации отвечает переход материала из одного фазового состояния в другое. Для пассивного материала точкой деградации является, например, температура плавления, а для пьезоэлектрического материала – точка Кюри, при достижении которой теряется пьезоэффект. Поэтому влияние температуры диссипативного разогрева необходимо обязательно учитывать при исследовании вынужденных колебаний элементов конструкций из неупругих материалов, поскольку неучет этого явления может привести к недостоверным результатам.

В последние годы для демпфирования колебаний тонкостенных элементов начали эффективно применять активные методы, базирующиеся на включении пьезоактивных компонент в структуру пассивного тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала. В подавляющем числе случаев в качестве активных элементов выступают пьезоэлектрические компоненты. Одни из указанных выше пьезоактивных элементов (сенсоры) дают информацию о механическом состоянии тела, а при помощи других (так называемых актуаторов) к конструкции прикладывается электрическая нагрузка, компенсирующая действие механической нагрузки. Конструкции из пассивных материалов с присоединенными к ним пьезоактивными сенсорами и актуаторами, позволяющими управлять их механическим состоянием, называют смарт – конструкциями, а активные материалы – смарт – материалами. Одним из наиболее ярких примеров эффективного применения таких материалов и является активное демпфирование стационарных и нестационарных колебаний тонкостенных элементов при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Эффективность активного демпфирования колебаний существенно зависит от эффективности работы сенсоров и актуаторов, на которую, в свою очередь, влияет много факторов: их геометрические и электромеханические характеристики, геометрические и механические характеристики пассивного элемента, механические и электрические граничные условия. Особенно заметное влияние на эффективность работы сенсоров и актуаторов оказывает температура. При гармонических, в частности, резонансных колебаниях, в результате таких специфических особенностей многих активных и пассивных неупругих материалов, как значительные гистерезисные потери и низкая теплопроводность, существенная зависимость их электромеханических свойств от температуры, вызванные гармоническими во времени механическими и электрическими нагрузками вынужденные колебания могут сопровождаться значительным повышением температуры из–за превращения электромеханической энергии в тепловую, когда имеет место, упомянутое выше явление диссипативного разогрева. Это явление может отрицательно повлиять на эффективность работы тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами по нескольким причинам.

Во-первых, зависимость электромеханических характеристик материала от температуры может существенно повлиять на эффективность работы пьезоэлектрических включений и, как следствие этого, на эффективность активного демпфирования колебаний тонкостенных элементов.

Во-вторых, при достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри активный материал теряет пьезоэффект и становится пассивным, т.е. имеет место специфический тип теплового разрушения, когда тело не разделяется на части, но перестает выполнять свое функциональное назначение.

В-третьих, при нарушениии баланса между образованием тепла в результате гистерезиса и его отводом в окружающую среду в теле может наблюдаться катастрофическое повышение температуры, так называемый тепловой взрыв. При резонансных колебаниях, высоких уровнях механической нагрузки возникает необходимость в учете влияния физической нелинейности, диссипативных свойств материалов и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования колебаний тонкостенных элементов с их помощью.

В даной работе представлена математическая модель вынужденных гармонических колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов с пьезоэлектрическими сенсорами. Рассматривается трехслойная оболочка, составленная из внутреннего изотропго пассивного (без пьезоэффекта) слоя с нанесенными на его поверхности сенсорами с одинаковыми электромеханическими характеристиками, но с противоположной поляризацией. Для моделирования электромеханического состояния неупругих материалов при гармонических колебаниях используется концепция комплексных характеристик [1—3]. Считается, что действительная и мнимая составляющие модуля сдвига пассивного материала зависят от второго инварианта девиатора тензора деформаций. Пьезоактивные слои считаются упругими. Для описания термоэлектромеханического состояния такой структурно-неоднородной оболочки используются механические гипотезы Кирхгоффа — Лява, дополненные адекватными им предположениями о распределении электрических полевых величин: считается, что нормальная составляющая вектора индукции значительно больше его тангенциальных составляющих. Тогда из уравнения электростатики получаем, что нормальная составляющая вектора индукции постоянна по толщине оболочки. В результате указанных предположений получены упрощенные определяющие уравнения для оболочки. Интегрируя их по ее толщине, получаем определяющие соотношения для усилий и моментов указанной трехслойной пьезооболочки. Универсальные уравнения (уравнения движения, кинематические соотношения, граничные условия) остаются без изменения.

Для сведения уравнения энергии к двумерному принимаем, что температура постоянна по толщине оболочки.

При механическом нагружении для случая разомкнутых электродов из условия равенства нулю заряда находится снимаемая с сенсора разность потенциалов.

В результате приходим к комплексному нелинейному дифференциальному уравнению движения относительно поперечного прогиба и линейному уравнению энергии с известным источником тепла для определения температуры диссипативного разогрева.

Для решения указанной нелинейной краевой задачи можно применять численные и аналитические методы. В качестве примера использования аналитических методов рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой прямоугольной пластины из физически нелинейного пассивного материала при действии на нее изменяющегося по гармоническому закону нормального давления. Зависимость действительной и мнимой составляющих комплексного модуля от обобщенной интенсивности девиатора тензора деформаций аппроксимируется квадратичным законом. Решение нелинейной задачи получено методом Бубнова – Галеркина с одномодовой аппроксимацией комплексного поперечного прогиба. Задача сведена к кубическому уравнению относительно квадрата модуля поперечного перемещения. Затем по полученному решению задачи электромеханики вычисляется диссипативная функция и решается уравнение теплопроводности с известным источником тепла. Рассматриваются температурные граничные условия, отвечающие теплоизоляции торцов пластины. В этом случае точное аналитическое решение уравнения энергии получено в тригонометрических функциях. При расчетах использованы литературные даные о зависимости комплексных характеристик от деформаций. Построены амплитудно- и температурно-частотные характеристики колебаний пластины, иллюстрирующие влияние на них физической нелинейности.

Затем решается задача о тепловом разрушении указанной пластины. В качестве критерия теплового разрушения выбрано достижение температурой диссипативного разорева точек деградации пассивного или пьезоактивного материалов. Для пассивного материала такой точкой является точка плавления материала, а для активного — точка Кюри активного материала. Эта задача разделена на две отдельные задачи. Первая из них заключается в определении критической механической загрузки, при которой активный или пассивный материал достигает точки деградации. Если точка Кюри выше точки плавления пассивного материала, в качестве точки деградации выбирается точка плавления, если же точка Кюри ниже точки плавления поступаем наоборот. Вторая задача состоит в определении критического времени, при котором температура достигает точки Кюри при закритическом нагружении пластины. Первая из указанных задач решается путем приравнивания максимальной температуры точке деградации. Для решения второй задачи методом Бубнова — Галеркина находится решение нестацонарного уравнения энергии, из которого и определяется критическое время.

Список литературы

1. Булат, А. Ф., Дырда, В. И., Карнаухов, В. Г., Звягильский, Е.Л., Кобец, А. С. (2013). *Термомеханическая теория вязкоупругих тел.* Киев: Наукова думка.
2. Булат, А. Ф., Дырда, В. И., Карнаухов, В. Г., Звягильский, Е. Л., Кобец, А. С. (2014). *Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел.* Киев: Наукова думка.
3. Карнаухов, В. Г., Михайленко, В. В. (2005). *Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении.* Житомир: ЖГТУ.

ПРО ДВОБІЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

О. О. Кільчинський, Т. В. Крижановська, Т. Н.Семененко
Державний економіко- технологічний університет транспорту, Київ, Україна
vnsvns60@gmail.com

Нехай функція $f(x)$ визначена та двічі диференційовна на проміжку $\left[a,b\right]$, похідні $f'(x)$ і $f''(x)$зберігають на цьому проміжку сталі знаки і $f(a)f(b)<0$. Розглянемо задачу про знаходження єдиного кореня $\xi\in\left[a,b\right]$для рівняння

$$f(x)=0. \tag{1}$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $f''(x)>0$ та $f(b)>0$ $\Big($при $f''(x)>0$ достатньо перейти від функції $f(x)$ до $(-1)f(x)$, при $f(b)<0$ — перейти від змінної x до $(-1)x\Big)$. Чисельні методи пошуку наближених значень кореня рівняння (1) ґрунтовно розроблені в Демидович, Марон (1996). Сутністю таких методів є побудова послідовності $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ ($a\le x_n\le b$), збіжної до кореня ξ, і знаходження серед членів x_n цієї послідовності першого, який дає наближене значення цього кореня з абсолютною похибкою, не більшою від наперед заданої величини Δ:

$$\left|\xi-x_n\right|\le\Delta. \tag{2}$$

Залежно від застосування того чи іншого обчислювального методу похибка $\left|\xi-x_n\right|$ оцінюється по-різному, що не може не вплинути на точність оцінювання і швидкість процесу наближень до точного значення кореня.

За чисельними методами хорд і дотичних похибка оцінюється, виходячи з теореми Лагранжа, на основі рівності:

$$f(\xi)-f(x_n)=f'(\theta_n)(\xi-x_n)\quad(a<\theta_n<b) \tag{3}$$

Ураховуючи, що $f(\xi)=0$, звідси звичайно виводять оцінку:

$$\left|\xi-x_n\right|\le\frac{\left|f(x_n)\right|}{m}\quad(m=\inf f(x),\ x\in(a;b)). \tag{4}$$

Відповідно до нерівності (4) корінь ξ шукають в інтервалі, симетричному відносно чергового наближення x_n: $\xi\in I_n=(x_n-q;x_n+q)$, де $q=\dfrac{\left|f(x_n)\right|}{m}$.

Аналогічна ідея оцінювання похибок задіяна і в методі ітерацій.

За комбінованим методом (що поєднує переваги методу хорд і методу дотичних) процес знаходження кореня складається з послідовності кроків, на кожному з яких знаходяться нижні та верхні наближення ($\underline{x}_n$ та $\overline{x}_n$) до кореня ξ. Точне значення кореня на кожному кроці оцінюється двобічною нерівністю:

$$\underline{x}_n<\xi<\overline{x}_n, \tag{5}$$

з якої наближене значення $\tilde{\xi}_n$ кореня і абсолютна похибка оцінюються за формулою:

$$\tilde{\xi}_n = 0,5(\underline{x}_n + \overline{x}_n), \ \Delta_n \le 0,5(\overline{x}_n - \underline{x}_n). \qquad (6)$$

(як і при застосуванні чисельного методу половинного ділення).

У доповнення ідеї покрокового оцінювання кореня ξ нами реалізується метод, у якому будуються двобічні оцінки

$$a_n \le \xi \le b_n \ (n \in Z_0, \, a_0 = a, \, b_0 = b)$$

та послідовність пошукових проміжків $I_n = [a_n; b_n]$, що стягуються до точки ξ:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset \cdots, (\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi). \qquad (7)$$

Пошук наближення $\tilde{\xi}_n$, яке задовольняє заданій нерівності

$$\Delta_n = \left|\xi - \tilde{\xi}_n\right| \le \Delta, \qquad (8)$$

здійснюється за n кроків наступного алгоритму двобічних оцінок.

Згідно з алгоритмом на n-му кроці ($n = 1, 2, 3, \ldots$) треба:

1. За обраним чисельним методом (методом хорд, дотичних, тощо) на пошуковому проміжку $I_{n-1} = [a_{n-1}; b_{n-1}]$ вибрати початкову точку x_0 і знайти наближене значення x_n кореня ξ:

а) (для методу хорд) покласти

$$x_0 = a_{n-1}, \, x_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}(b_{n-1} - a_{n-1}), \qquad (9)$$

б) (для методу дотичних) покласти

$$x_0 = b_{n-1}, \, x_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}. \qquad (10)$$

2. Виходячи зі співвідношення (3), визначити проміжок L_n:

а) (для методу хорд) покласти

$$L_n = [\underline{x}_n; \overline{x}_n], \, \underline{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(b_{n-1})}, \, \overline{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (11)$$

б) (для методу дотичних) покласти

$$L_n = [\underline{x}_n; \overline{x}_n], \, \underline{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(a_{n-1})}, \, \overline{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (12)$$

3. Знайти пошуковий проміжок I_n і оцінити похибку Δ_n наближеного значення $\tilde{\xi}_n$ кореня ξ:

$$I_n = I_{n-1} \cap L_n = [a_n; b_n], \quad \Delta_n = \left|\xi - \tilde{\xi}_n\right| \le 0,5(b_n - a_n); \qquad (13)$$

процес наближень завершити й обчислити наближене значення

$$\tilde{\xi}_n = 0,5(a_n + b_n), \qquad (14)$$

коли на n-му кроці буде виконуватись нерівність (8).

З можливостями алгоритму двобічних оцінок можна познайомимось, розв'язуючи одну й ту саму задачу (Демидович, Марон, 1996) з позицій різних підходів.

Приклад. Обчислити з точністю до $\Delta = 5 \cdot 10^{-4}$ корінь рівняння

$$x^5 - x - 0,2 = 0 \ (x \in [1;1,1]). \qquad (15)$$

$\lhd$З виразів $f(x) = x^5 - x - 0,2$, $f'(x) = 5x^4 - 1$ $f''(x) = 20x^3$ встановлюємо [1] , що на проміжку [1;1,1] похідні $f'(x)$ і $f''(x)$зберігають сталі знаки і $f(1)f(1,1) < 0$, тобто існує один і тільки корінь $\xi \in \left[1;1,1\right]$. Оскільки $f(1,1) > 0$, то попередній алгоритм можна застосувати безпосередньо. Задачу розв'яжемо двома способами.

1-спосіб (алгоритм двобічного оцінювання поєднаємо із методом хорд).

1-й крок.

1. Покладемо $n = 1$, $I_0 = [a_0;b_0]$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1,1$, , $x_0 = a_0$. Обчислимо $f(a_0)$, $f(b_0)$ і за формулою (9) знайдемо $x_1 = 1,0391176509$.

2. Обчислимо $f(x_1), f'(b_0), f'(x_1)$ і за формулою (11) знайдемо

$$L_1 = [\underline{x}_1;\overline{x}_1],\ \underline{x}_1 = 1,043500981,\ \overline{x}_1 = 1,044834555.$$

3. Знайдемо $I_1 = I_0 \cap L_1 = [a_1;b_1]$=$L_1$, $a_1 = \underline{x}_1$, $b_1 = \overline{x}_1$. Оцінимо похибку наближеного значення $\tilde{\xi}_1$:

$$\Delta_1 = \left|\xi - \tilde{\xi}_n\right| \le 0,5(b_1 - a_1)\text{=}1,333574 \cdot 10^{-3} > \Delta = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Точність недостатня, перейти до наступного кроку.

2-й крок.

1. Покладемо $n = 2$, $I_1 = [a_1;b_1]$, $a_1 = \underline{x}_1$, $b_1 = \overline{x}_1$, $x_1 = a_1$. Обчислимо $f(a_1)$, $f(b_1)$ і за формулою (9) знайдемо $x_2 = 1,040437017$.

2. Обчислимо $f(x_2), f'(b_1), f'(x_2)$ і за формулою (11) знайдемо $L_2 = [\underline{x}_2;\overline{x}_2]$, $\underline{x}_2 = 1,044717417$, $\overline{x}_2 = 1,044805232$.

3. Знайдемо $I_2 = I_1 \cap L_2 = [a_2;b_2]$=$L_2$, $a_2 = \underline{x}_2$, $b_2 = \overline{x}_2$. За формулою (13) оцінимо похибку наближеного значення

$$\tilde{\xi}_2\text{: } \Delta_2 = \left|\xi - \tilde{\xi}_2\right| \le 0,5(a_2 - b_2) = 4.39075 \cdot 10^{-5} < \Delta = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Потрібну точність досягнуто. За формулою (14) знайдемо

$$\tilde{\xi}_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1,0447613245 \approx 1,0448,\ \left|\xi - \tilde{\xi}_2\right| < 9 \cdot 10^{-5} < \Delta.$$

2-спосіб (алгоритм двобічного оцінювання поєднаємо з методом дотичних).

1-й крок.

1. Покладемо $n = 1$, $I_0 = [a_0; b_0]$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1{,}1$, $x_0 = b_0$. Обчислимо $f(b_0)$, $f'(b_0)$ і за формулою (10) знайдемо $x_1 = 1{,}050872558$.

2. Обчислимо $f(x_1), f'(a_0), f'(x_1)$ і за формулою (12) знайдемо

$$L_1 = [\underline{x}_1; \overline{x}_1],\ \underline{x}_1 = 1{,}043192352,\ \overline{x}_1 = 1{,}044846218.$$

3. Знайдемо $I_1 = I_0 \cap L_1 = [a_1; b_1] = L_1$, $a_1 = \underline{x}_1$, $b_1 = \overline{x}_1$. Оцінимо похибку наближеного значення

$$\tilde{\xi}_1 \colon \Delta_1 = \left|\xi - \tilde{\xi}_n\right| \le 0{,}5(b_1 - a_1) = 8{,}26933 \cdot 10^{-4} > \Delta = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Точність недостатня, перейти до наступного кроку.

2-й крок.

1. Покладемо $n = 2$, $I_1 = [a_1; b_1]$, $a_1 = \underline{x}_1$, $b_1 = \overline{x}_1$, $x_1 = b_1$. Обчислимо $f(b_1)$, $f'(b_1)$ і за формулою (10) знайдемо $x_2 = 1{,}044761717$.

2. Обчислимо $f(x_2), f'(a_1), f'(x_2)$ і за формулою (12) знайдемо

$$L_2 = [\underline{x}_2; \overline{x}_2],\ \underline{x}_2 = 1{,}044761700,\ \overline{x}_2 = 1{,}044761700 = \underline{x}_2$$

3. Знайдемо $I_2 = I_1 \cap L_2 = [a_2; b_2] = L_2$, $a_2 = \underline{x}_2$, $b_2 = \overline{x}_2$. За формулою (13) оцінимо похибку наближеного значення

$$\tilde{\xi}_2 \colon \Delta_2 = \left|\xi - \tilde{\xi}_2\right| \le 0{,}5(a_2 - b_2) < 1 \cdot 10^{-9} < \Delta = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Потрібну точність досягнуто. За формулою (14) знайдемо

$$\tilde{\xi}_2 = 0{,}5(a_2 + b_2) = 1{,}044761700 \approx 1{,}04476170,\ \left|\xi - \tilde{\xi}_2\right| < 1 \cdot 10^{-9}. \ \triangleright$$

У книзі Демидович, Марон (1996, с. 134) рівняння (15) було розв’язано за комбінованим методом у два кроки.

На **1-му кроці** отримано:

$$\underline{x}_1 \approx 1{,}039,\ \overline{x}_1 \approx 1{,}051,\ 0{,}5(\overline{x}_1 - \underline{x}_1) = 6 \cdot 10^{-3} > 5 \cdot 10^{-4}$$

(точність ще недостатня).

На **2-му кроці** знайдено:

$$\underline{x}_2 \approx 1{,}04469, \overline{x}_2 \approx 1{,}04487,\ 0{,}5(\overline{x}_2 - \underline{x}_2) = 9 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-4}$$

(точність достатня).

Наближене значення кореня і сумарну похибку (з врахуванням округлень) було знайдено за формулою (6): $\tilde{\xi}_2 = 1{,}045$, $\left|\xi - \tilde{\xi}_2\right| < 4 \cdot 10^{-4}$.

Порівнюючи між собою наведені три розв’язки задачі (15), приходимо до висновку, що поєднуючи класичні методи хорд і дотичних з процедурою двобічного оцінювання можна отримати пришвидшення процесу збіжності наближень до кореня рівняння.

Список літератури

Демидович, Б. П., Марон, И. А. (1996). *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука.

ПРО АБСТРАКТНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІВ МАРКОВА ВІДОБРАЖЕНЬ ДЕРЕВ У СЕБЕ

С. О. Козеренко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

kozerenkosergiy@ukr.net

Нехай X скінченне дерево, а $\sigma : V(X) \to V(X)$ відображення множини його вершин в себе. *Графом Маркова* $\Gamma = \Gamma(X,\sigma)$ називається орграф із множиною вершин $V(\Gamma) = \{v_e : e \in E(X)\}$ та множиною дуг

$$A(\Gamma) = \left\{\left(v_{e_1}, v_{e_2}\right) : u_2, v_2 \in \left[\sigma(u_1), \sigma(v_1)\right]_X, e_i = u_i v_i, i = 1,2\right\},$$

де $[a,b]_X$ позначає множину вершин єдиного найкоротшого ланцюга, який з'єднує вершини a та b в дереві X. Орграф Γ будемо називати M-*графом*, якщо він ізоморфний графу Маркова $\Gamma(X,\sigma)$ для деякої пари (X,σ).

За допомогою графів Маркова можна отримати елегантне комбінаторне доведення відомої теореми Шарковського (Ho & Morris, 1981) та її аналогів для топологічних дерев загального вигляду (Bernhardt, 2006). Дослідження теоретико-графових властивостей графів Маркова $\Gamma(X,\sigma)$ для ланцюгів X та їх циклічних перестановок σ було розпочато в роботі Павленко (1988).

Твердження 1. *Для кожного орграфа* Γ *існує ланцюг* X *та циклічна перестановка* σ *множини* $V(X)$ *такі, що* Γ *є підграфом* $\Gamma(X,\sigma)$.

Орграф, який отримується з повного орграфа видаленням всіх петель називається *квазі-повним*.

Твердження 2. *Квазі-повний орграф з не менше ніж чотирма вершинами не є породженим підграфом жодного* M*-графа.*

Оскільки кожне дерево з не менше ніж двома вершинами містить висяче ребро, кожний нетривіальний M-граф завжди містить вершину, видалення якої залишає орграф у класі M-графів.

Твердження 3. *Нехай* Γ *є* M*-графом, а вершина* $v \in V(\Gamma)$ *має нульовий степінь виходу в* Γ. *Тоді* $\Gamma - \{v\}$ *теж є* M*-графом.*

Наслідок 1. Орграф, який отримується з деякого M-графа видаленням ізольованої вершини також є M-графом.

Твердження 4. *Орграф, який отримується з деякого* M*-графа додаванням ізольованої вершини також є* M*-графом.*

Для орграфа Γ через $V_0(\Gamma)$ будемо позначати множину всіх вершин Γ з нульовим степенем входу.

Твердження 5. *Для кожного* M*-графа* Γ *та числа* $0 \le k \le |V_0(\Gamma)|$ *існує множина вершин* $V' \subseteq V_0(\Gamma)$ *з* $|V'| = k$ *така, що* $\Gamma - V'$ *є* M*-графом.*

Легко бачити, що неперетинне об'єднання двох M-графів завжди є породженим підграфом деякого M-графа.

Теорема 1. *Нехай* Γ_1 *та* Γ_2 *два* M*-графа з парною кількістю петель у кожному. Тоді неперетинне об'єднання* $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ *є* M*-графом.*

Проте, не кожне неперетинне об'єднання двох M-графів є M-графом (достатньо розглянути повний орграф з однією вершиною та орграф, отриманий з повного орграфа на двох вершинах видаленням однієї петлі).

Для орграфа Γ та його вершини $v \in V(\Gamma)$ розглянемо орграф Γ', який отримується з Γ додаванням нової вершини v' з дугами вигляду (v', x) для всіх вершин $x \in V(\Gamma)$, для яких існує дуга $(v, x) \in A(\Gamma)$. Кажуть, що Γ' отриманий з Γ подвоєнням вершини v. Аналогічно, розглянемо орграф Γ'', який отримується з Γ додаванням нової вершини v'' з дугами вигляду (x, v'') для всіх вершин $x \in V(\Gamma)$, для яких існує дуга $(x, v) \in A(\Gamma)$. У цьому випадку кажуть, що Γ'' отриманий з Γ оберненим подвоєнням вершини v.

Теорема 2. *Орграф, який отримується з* M*-графа подвоєнням або оберненим подвоєнням деякої вершини також є* M*-графом.*

Орграф називається *квазі-функціональним*, якщо степінь виходу кожної його вершини не перевищує одиниці. Орграф, який отримується заміною орієнтацій дуг даного орграфа на протилежні називається його *оберненим орграфом*.

Теорема 3. *Квазі-функціональні орграфи та обернені до квазі-функціональних орграфів є* M*-графами.*

Сумою двох орграфів Γ_1 та Γ_2 називається орграф $\Gamma_1 + \Gamma_2$ з множиною вершин $V(\Gamma_1) \sqcup V(\Gamma_2)$ та множиною дуг

$$V(\Gamma_1) \sqcup V(\Gamma_2) \sqcup \{(u,v),(v,u) : u \in V(\Gamma_1), v \in V(\Gamma_2)\}.$$

Дерево називається *павуком*, якщо воно містить не більше однієї вершини степеня не менше трьох. *Степенем павука* називається максимальний степінь його вершини (наприклад, ланцюг з не менше ніж трьома вершинами є павуком зі степенем два).

Теорема 4. *Нехай* X *дерево,* $\sigma : V(X) \to V(X)$ *деяке відображення. Якщо граф Маркова* $\Gamma(X, \sigma)$ *є сумою двох нетривіальних орграфів, то* X *є павуком зі степенем не більше трьох.*

Список літератури

Bernhardt, C. (2006). Vertex maps for trees: algebra and periods of periodic orbits. *Disc. Contin. Dyn. Syst., 14,* 399–408.

Ho, C-W., & Morris, C. (1981). A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions. *Pacific J. of Math., 96,* 361–370.

Kozerenko, S. (2016). Discrete Markov graphs: loops, fixed points and maps preordering. *J. Adv. Math. Stud., 9,* 99–109.

Павленко, В. А. (1988). Периодические орграфы и их свойства. *Укр. мат. журн., 40,* 528—532.

ДВОСТОРОННІ ПІДМОДУЛІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

М. Я. Комарницький, М. О. Малоїд-Глєбова
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
martamaloid@gmail.com

Нехай R асоціативне кільце з $1 \neq 0$, M лівий унітарний R-модуль.

Означення 1. Кажуть, що підмодуль N лівого R-модуля M володіє властивістю вставки множників (IFP), якщо з умови $am \in N$, де $a \in R$ і $m \in M$ випливає що $aRm \subseteq N$ (Groenewald, Ssevviiri, 2013).

Означення 2. *Підмодуль N лівого R-модуля M називається двостороннім підмодулем, якщо кожний підмодуль K модуля M, розглядуваний як підмодуль модуля M, володіє властивістю вставки множників (IFP).*

Означення 3. *Лівий модуль, всі підмодулі якого є двосторонніми, називається лівим дуо-модулем.*

Твердження 1. *Нехай M модуль над асоціативним кільцем R. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1. Кожен підмодуль $K \subseteq M$ володіє властивістю вставки множників IFP.

2. Кожен скінченно-породжений підмодуль $L \subseteq M$ володіє властивістю вставки множників IFP.

3. Кожен циклічний підмодуль $Q \subseteq M$ володіє властивістю вставки множників IFP.

4. Для кожного підмодуля $N \subseteq M$, фактор-модуль M / N володіє

5. Властивістю вставки множників IFP, і правий анулятор M / N є двостороннім ідеалом.

Твердження 2. *Нехай M, S, P довільні модулі. Якщо M двосторонній підмодуль модуля S, а S двосторонній підмодуль модуля P, то M двосторонній підмодуль модуля P.*

Теорема 1. *Двосторонні підмодулі довільного модуля утворюють повну гратку.*

Список літератури

Groenewald, N. J., & Ssevviiri, D. (2013). Completely prime submodules. *International Electronic Journal of Algebra*, *13* (1), 1–14.

Bell, H. E. (1970). Near-rings in which each element is a power of inself. *Bull. Aust. Math. Soc.*, *2*, 363–368.

Ozcan, A. C., Harmanci, A., & Smith, P. F. (2006). Duo modules. *Glasgow Math. J.*, *48*, 533–545.

ВЛАСТИВІСТЬ ВИРОДЖЕНОСТІ МАТРИЦІ ПРІОРИТЕТІВ У ВИПАДКУ ІДЕАЛЬНОЇ УЗГОДЖЕНОСТІ

І. П. Кудзіновська, В. І. Трофименко
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
kudzinovskaya@ukr.net

Метод аналізу ієрархій широко застосовується в задачах оптимізації і ухвалення рішень за кількома, у тому числі й суперечливими критеріями, а також у конфліктних ситуаціях (Чунаев, 2008; Саати, 1989). Він використовується для виведення шкал відношень за результатами парних порівнянь у складних ієрархічних системах. Попарно порівнюючи структурні елементи системи, отримують матриці пріоритетів. Шкали відносної важливості пріоритетів виводяться з цих матриць (у неперервному випадку — з ядер лінійних операторів) шляхом розв'язання задачі на власні значення.

Матриці пріоритетів є додатними і обернено симетричними:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \;\; a_{ij} > 0; \;\; i, j = \overline{1, N}; \;\; a_{ij} = 1\big/ a_{ji}.$$

У роботах (Чунаев, 2008; Гантмахер, 1966) досліджувались властивості цих матриць, але деякі важливі питання, зокрема, властивість виродженості матриць такого спеціального вигляду не розглядались. У роботі Vinogradov, Drovovozov, Savchenko, Kudzinovskaya (2011) зроблена спроба заповнити цю прогалину, але строгого доведення виродженості матриць не наведено.

Нехай $\left\{ a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n \right\}$ — множина об'єктів, що підлягають порівняльній оцінці. Кількісні результати оцінювання пар об'єктів $\left\{ a_i, \; a_j \right\}$ записуються у вигляді матриці, причому відносна перевага i-го об'єкта над j-м виражається дробом $a_{ij} = a_i \big/ a_j$. Передбачається, що $a_i \neq 0, \; i = \overline{1, N}$, інакше об'єкт з нульовою якістю немає сенсу включати в сукупність характеристик системи.

В ідеальному випадку абсолютно точних суджень про відносну важливість цих об'єктів і, відповідно, безпомилкових кількісних оцінок за наслідками цих суджень матриця пріоритетів буде строго обернено симетричною:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \;\; a_{ij} = 1\big/ a_{ji} \text{ або } a_{ij} = a_i \big/ a_j, \; a_{ji} = a_j \big/ a_i.$$

Відзначимо, що в усіх випадках $a_{ii} = 1$. Отже, матриця пріоритетів у разі ідеальної узгодженості має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1\big/a_2 & a_1\big/a_3 & \ldots & a_1\big/a_n \\ a_2\big/a_1 & 1 & a_2\big/a_3 & \ldots & a_2\big/a_n \\ a_3\big/a_1 & a_3\big/a_2 & 1 & \ldots & a_3\big/a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n\big/a_1 & a_n\big/a_2 & a_n\big/a_3 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

При розв'язанні матричних рівнянь будь-якого вигляду особливу роль відіграє величина визначника матриці. Якщо визначник матриці $\det A$ дорівнює нулю, розв'язки матричних рівнянь є нестійкими, тобто чутливими до малих відхилень початкових даних і помилок обчислень.

Дослідимо властивість визначника додатної строго обернено симетричної матриці. Доведемо, що визначник обернено симетричної матриці будь-якого порядку завжди дорівнює нулю. Доведення проведемо методом математичної індукції.

1. $n=2: A=\begin{pmatrix} 1 & a_1/a_2 \\ a_2/a_1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 - \dfrac{a_1}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1} = 0.$

2. Припустимо, що визначник обернено симетричної матриці n-го порядку дорівнює нулю:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_1/a_2 & a_1/a_3 & \ldots & a_1/a_{n-1} & a_1/a_n \\ a_2/a_1 & 1 & a_2/a_3 & \ldots & a_2/a_{n-1} & a_2/a_n \\ a_3/a_1 & a_3/a_2 & 1 & \ldots & a_3/a_{n-1} & a_3/a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1}/a_1 & a_{n-1}/a_2 & a_{n-1}/a_3 & \ldots & 1 & a_{n-1}/a_n \\ a_n/a_1 & a_n/a_2 & a_n/a_3 & \ldots & a_n/a_{n-1} & 1 \end{pmatrix},\ \det A = 0. \quad (1)$$

3. Доведемо це твердження для обернено симетричної матриці $(n+1)$ -го порядку.

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & a_1/a_2 & a_1/a_3 & \ldots & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ a_2/a_1 & 1 & a_2/a_3 & \ldots & a_2/a_n & a_2/a_{n+1} \\ a_3/a_1 & a_3/a_2 & 1 & \ldots & a_3/a_n & a_3/a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n/a_1 & a_n/a_2 & a_n/a_3 & \ldots & 1 & a_n/a_{n+1} \\ a_{n+1}/a_1 & a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_3 & \ldots & a_{n+1}/a_n & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Користуючись теоремою Лапласа (Гантмахер, 1966), розкладемо визначник матриці (2) за елементами першого стовпця:

$$\det A' = \begin{vmatrix} 1 & a_2/a_3 & \ldots & a_2/a_n & a_2/a_{n+1} \\ a_3/a_2 & 1 & \ldots & a_3/a_n & a_3/a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n/a_2 & a_n/a_3 & \ldots & 1 & a_n/a_{n+1} \\ a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_3 & \ldots & a_{n+1}/a_n & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{a_2}{a_1}\begin{vmatrix} a_1/a_2 & a_1/a_3 & \ldots & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ a_3/a_2 & 1 & \ldots & a_3/a_n & a_3/a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n/a_2 & a_n/a_3 & \ldots & 1 & a_n/a_{n+1} \\ a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_3 & \ldots & a_{n+1}/a_n & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{a_3}{a_1}\begin{vmatrix} a_1/a_2 & a_1/a_3 & ... & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ 1 & a_2/a_3 & ... & a_2/a_n & a_2/a_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n/a_2 & a_n/a_3 & ... & 1 & a_n/a_{n+1} \\ a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_3 & ... & a_{n+1}/a_n & 1 \end{vmatrix}-$$

$$-...+(-1)^{n+1}\frac{a_n}{a_1}\begin{vmatrix} a_1/a_2 & a_1/a_3 & ... & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ 1 & a_2/a_3 & ... & a_2/a_n & a_2/a_{n+1} \\ a_3/a_2 & 1 & ... & a_3/a_n & a_3/a_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_3 & ... & a_{n+1}/a_n & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{n+2}\frac{a_{n+1}}{a_1}\begin{vmatrix} a_1/a_2 & a_1/a_3 & ... & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ 1 & a_2/a_3 & ... & a_2/a_n & a_2/a_{n+1} \\ a_3/a_2 & 1 & ... & a_3/a_n & a_3/a_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n/a_2 & a_n/a_3 & ... & 1 & a_n/a_{n+1} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Перший доданок у виразі (3) є визначником обернено симетричної матриці n-го порядку, який за припущенням (1) дорівнює нулю. У всіх наступних доданках внесемо коефіцієнт, що стоїть перед визначником, під знак визначника. Для цього, спираючись на властивості визначників (Гантмахер, 1966), помножимо на коефіцієнт у першому визначнику елементи першого стовпчика, у другому — другого стовпчика і т. д. Тобто в k-му визначнику помножимо на коефіцієнт a_k/a_1 елементи k-го стовпчика. Отримаємо:

$$\det A' = 0 - \begin{vmatrix} 1 & a_1/a_3 & ... & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ a_3/a_1 & 1 & ... & a_3/a_n & a_3/a_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n/a_1 & a_n/a_3 & ... & 1 & a_n/a_{n+1} \\ a_{n+1}/a_1 & a_{n+1}/a_3 & ... & a_{n+1}/a_n & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1/a_2 & 1 & ... & a_1/a_n & a_1/a_{n+1} \\ 1 & a_2/a_1 & ... & a_2/a_n & a_2/a_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n/a_2 & a_n/a_1 & ... & 1 & a_n/a_{n+1} \\ a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_1 & ... & a_{n+1}/a_n & 1 \end{vmatrix}-...$$

$$-...+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_1/a_2 & a_1/a_3 & ... & 1 & a_1/a_{n+1} \\ 1 & a_2/a_3 & ... & a_2/a_1 & a_2/a_{n+1} \\ a_3/a_2 & 1 & ... & a_3/a_1 & a_3/a_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n+1}/a_2 & a_{n+1}/a_3 & ... & a_{n+1}/a_1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} a_1/a_2 & a_1/a_3 & \ldots & a_1/a_n & 1 \\ 1 & a_2/a_3 & \ldots & a_2/a_n & a_2/a_1 \\ a_3/a_2 & 1 & \ldots & a_3/a_n & a_3/a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n/a_2 & a_n/a_3 & \ldots & 1 & a_n/a_1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Перший визначник у виразі (4) дорівнює нулю за припущенням. У другому визначнику переставимо перший та другий стовпчики, у третьому — послідовно переставимо перший та другий стовпчики, а потім — новий другий стовпчик переставимо із третім. Для всіх наступних визначників виконаємо послідовні перестановки стовпчиків таким чином, щоб для k-го визначника його k-й стовпчик після $(k-1)$-ої перестановки став першим. Як відомо (Гантмахер, 1966), такі перетворення впливатимуть лише на знак визначника. Тому кожен з отриманих доданків є визначником обернено симетричної матриці n-го порядку, тобто дорівнює нулю за припущенням. Отже, $\det A' = 0$. Цим доведено, що визначник обернено симетричної матриці будь-якого порядку дорівнює нулю.

Список літератури

Vinogradov, N., Drovovozov, V., Savchenko, A., & Kudzinovskaya, I. (2011). An analysis of singularity of the matrices of priorities and sensitibility of decisions as key performance indicators of the analytic hierarchies process. Journal of Qafqaz University (Mathematics and Computer Science): An International Journal, (32), 40–48.

Гантмахер, Ф. Р. (1966). *Теория матриц*. Москва: Наука.

Саати, Т. (1989). *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. Москва: Радио и связь.

Чунаев, А. В. (2008). Задачи многокритериального выбора оптимальных маршрутов в сетях новых поколений. *Радиотехника: сб. науч. трудов. — Харьков: ХНУРЕ*, 148—154.

ПРО P-ВИЗНАЧАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ДЛЯ НЕСЕРІЙНИХ ДІАГРАМ ДИНКІНА

В. А. Лісикевич

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

vikadrug@ukr.net

Ми досліджуємо реберно-локальні деформації квадратичних форм, які запроваджено в Бондаренко (2014). Нагадаємо відповідні означення.

Нехай

$$f(z) = f(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \qquad (1)$$

— квадратична форма над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + t f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j)\neq(p,q)} f_{ij} z_i z_j, \qquad (2)$$

де p і q ($p < q$) такі, що $f_{pq} \neq 0$, а t — параметр, що пробігає поле $\mathbb{R}$.

Квадратична форма (2) називається також *локальною деформацією квадратичної форми* (1) *відносно* $z_p z_q$.

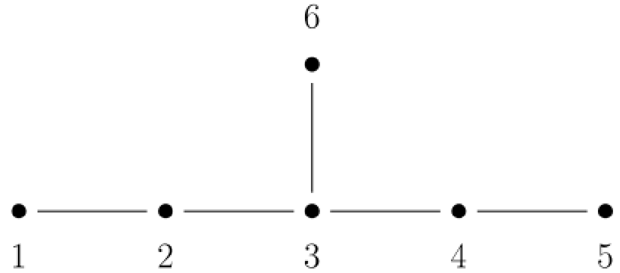
Число $a \in \mathbb{R}$ називається P*-граничним числом квадратичної форми* $f(z)$ *для* $z_p z_q$ або (p,q)*-м* P*-граничним числом квадратичної форми* $f(z)$, якщо $f(z,a)$ не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа a існує число c таке, що $f(z,c)$ є додатною квадратичною формою.

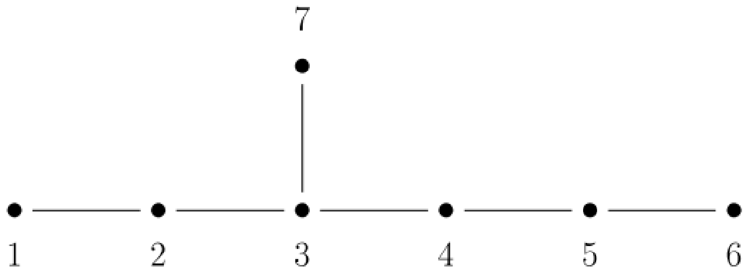
У випадку, коли квадратична форма $f(z)$ додатна, існує рівно два (p,q)-х P-граничних числа і якщо їх позначити b_1 та b_2, то поліном

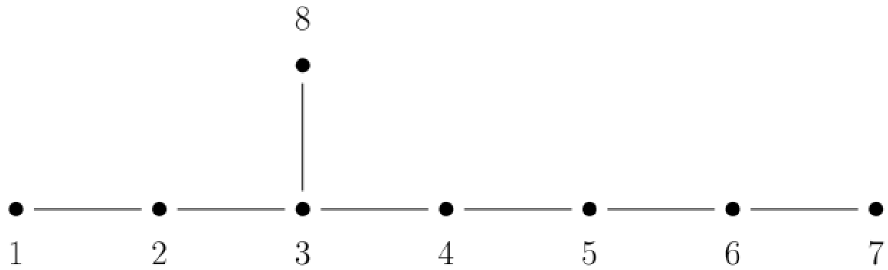
$$\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t-b_1)(t-b_2)$$

називається P*-визначальним поліномом квадратичної форми* $f(z)$ *для* $z_p z_q$ або P*-визначальним* (p,q)*-поліномом квадратичної форми* $f(z)$.

Ми описуємо P-визначальні поліноми квадратичної форми Тітса для діаграм Динкіна E_6, E_7, E_8, тобто для наступних графів:







Нагадаємо, що квадратична форма $q_Q(z)$ (скінченного) орієнтованого графа $Q = (Q_0, Q_1)$ задається наступною рівністю:

$$q_Q(z) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \to j} z_i z_j,$$

де $i \to j$ пробігає множину Q_1. Якщо ж граф Q не орієнтований (як у нашому випадку), то його квадратична форма Тітса — це квадратична форма Тітса відповідного орієнтованого графа при будь-якій фіксованій орієнтації. Замість $\Delta_{q_Q}^{(p,q)}(t)$ ми пишемо $\Delta_Q^{(p,q)}(t)$.

Теорема 1. *Визначальними поліномами квадратичної форми Тітса діаграм Динкіна E_6, E_7 і E_8 є наступні поліноми:*

1) $\Delta_{E_6}^{(1,2)}(t) = \Delta_{E_6}^{(4,5)}(t) = t^2 - \dfrac{8}{5}, \Delta_{E_6}^{(2,3)}(t) = \Delta_{E_6}^{(3,4)}(t) = t^2 - \dfrac{5}{4}, \Delta_{E_6}^{(3,6)}(t) = t^2 - \dfrac{4}{3};$

2) $\Delta_{E_7}^{(1,2)}(t) = t^2 - \dfrac{4}{3},\ \Delta_{E_7}^{(2,3)}(t) = t^2 - \dfrac{9}{8},\ \Delta_{E_7}^{(3,4)}(t) = t^2 - \dfrac{10}{9},$
$\Delta_{E_7}^{(4,5)}(t) = t^2 - \dfrac{6}{5},\ \Delta_{E_7}^{(5,6)}(t) = t^2 - \dfrac{3}{2},\ \Delta_{E_7}^{(3,7)}(t) = t^2 - \dfrac{7}{6};$

3) $\Delta_{E_8}^{(1,2)}(t) = t^2 - \dfrac{8}{7}, \Delta_{E_8}^{(2,3)}(t) = t^2 - \dfrac{21}{20}, \Delta_{E_8}^{(3,4)}(t) = t^2 - \dfrac{25}{24},$
$\Delta_{E_8}^{(4,5)}(t) = t^2 - \dfrac{16}{15}, \Delta_{E_8}^{(5,6)}(t) = t^2 - \dfrac{9}{8}, \Delta_{E_8}^{(6,7)}(t) = t^2 - \dfrac{4}{3}, \Delta_{E_8}^{(3,8)}(t) = t^2 - \dfrac{16}{15}.$

Ці результати отримано разом із проф. В. М. Бондаренком.

Список літератури

Bondarenko, V. M. (2014). On types of local deformations of quadratic forms, *Algebra Discrete Math.*, *18* (2), 163—170.

ЭНДОСПЕКТР ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Е. С. Мазяева
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, Старобельск, Украина
elenamazyaeva@gmail.com

Преобразование $f : X \to X$ называется *эндоморфизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$, если для любых $a,b \in X$ из того, что $(a,b) \in \rho$ следует $(f(a), f(b)) \in \rho$. Множество всех эндоморфизмов отношения ρ образует полугруппу относительно композиции преобразований и обозначается $End(X,\rho)$.

Эндоморфизм $f : X \to X$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *полусильным*, если для любых $a,b \in X$ из того, что $(f(a), f(b)) \in \rho$ следует существование прообразов a',b' ($f(a') = f(a)$, $f(b') = f(b)$) таких, что $(a',b') \in \rho$. Множество всех полусильных эндоморфизмов отношения ρ обозначается $HEnd(X,\rho)$.

Эндоморфизм $f : X \to X$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *локально-сильным*, если для любых $a,b \in X$ из того, что $(f(a), f(b)) \in \rho$ вытекает, что для каждого прообраза a' элемента $f(a)$ существует прообраз b' элемента $f(b)$ такой, что $(a',b') \in \rho$, и для каждого прообраза b' элемента $f(b)$ существует прообраз a' элемента $f(a)$ такой, что $(a',b') \in \rho$. Множество всех локально-сильных эндоморфизмов отношения ρ обозначается $LEnd(X,\rho)$.

Эндоморфизм $f : X \to X$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *квази-сильным*, если для любых $a,b \in X$ из того, что $(f(a), f(b)) \in \rho$ следует существование прообраза a' элемента $f(a)$, который является смежным с каким-либо прообразом b' элемента $f(b)$ и аналогично для прообраза $f(b)$. Множество всех квази-сильных эндоморфизмов отношения ρ обозначается $QEnd(X,\rho)$.

Эндоморфизм $f : X \to X$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *сильным*, если для любых $a,b \in X$ из того, что $(f(a), f(b)) \in \rho$ вытекает $(a,b) \in \rho$. Множество всех сильных эндоморфизмов отношения ρ образует подполугруппу полугруппы $End(X,\rho)$ и обозначается $SEnd(X,\rho)$.

Эндоморфизм $f : X \to X$ бинарного отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *автоморфизмом*, если f — биекция, а f^{-1} — обычный эндоморфизм. Множество всех автоморфизмов отношения ρ обозначается $Aut(X,\rho)$.

Пусть X — произвольное непустое множество,

$$\rho = A \times B,$$

где $A, B \subseteq X,\ A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, и $\overline{A} = X \setminus A$, при этом

$$\left|X\right| = n, \left|A\right| = k, \left|B\right| = l,\ \left|A \cap B\right| = p.$$

Через $U^*(X)$ обозначим множество всех непустых подмножеств множества X. Через ω_X обозначим универсальное отношение на множестве X, т. е., $\omega_X = X \times X$. Если $\varphi : A \to B$ — произвольное отображение, то через φ^* обозначим отображение множества $A \cup \{\varnothing\}$ в $B \cup \{\varnothing\}$, такое что $\varphi^* |_A = \varphi$ и $\varphi^*(\varnothing) = \varnothing$.

Лемма 1. (i) *Преобразование* $f : X \to X$ *является эндоморфизмом отношения* $\rho = A \times B$ *тогда и только тогда, когда*

$$f^*(A \setminus B) \subseteq A,\ f^*(B \setminus A) \subseteq B,\ f^*(A \cap B) \subseteq A \cap B.$$

(ii) *Эндоморфизм* $f : X \to X$ *отношения* $\rho = A \times B$ *является сильным тогда и только тогда, когда*

$$f^*(A \setminus B) \subseteq A \setminus B, \quad f^*(B \setminus A) \subseteq B \setminus A, \quad f^*(\overline{A \cup B}) \subseteq \overline{A \cup B}.$$

(iii) *Эндоморфизм* $f : X \to X$ *отношения* $\rho = A \times B$ *является квазисильным или локально сильным тогда и только тогда, когда* f *— сильный.*

(iv) *Эндоморфизм* $f : X \to X$ *отношения* $\rho = A \times B$, $A \neq B$ *является полусильным тогда и только тогда, когда*

$$f^*(A \setminus B) \subseteq f^*(A \cap B) \cup (A \setminus B), \quad f^*(B \setminus A) \subseteq f^*(A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

$$f(\overline{A \cup B}) \subseteq f(A \cup B) \cup \overline{A \cup B}.$$

(v) *Эндоморфизм* $f : X \to X$ *отношения* $\rho = A \times B$ *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого непустого*

$$\Omega \in \{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A, \overline{A \cup B}\}$$

имеем $f(\Omega) = \Omega$.

Все классы эндоморфизмов заданного типа образуют цепь включений:

$$End(X,\rho) \supseteq HEnd(X,\rho) \supseteq LEnd(X,\rho) \supseteq$$

$$\supseteq QEnd(X,\rho) \supseteq SEnd(X,\rho) \supseteq Aut(X,\rho).$$

Если X — конечное множество, то с этой последовательностью ассоциируется последовательность соответствующих мощностей:

$$Endospec(X,\rho) = (\left|End(X,\rho)\right|, \left|HEnd(X,\rho)\right|, \left|LEnd(X,\rho)\right|,$$

$$\left|QEnd(X,\rho)\right|, \left|SEnd(X,\rho)\right|, \left|Aut(X,\rho)\right|).$$

Эта последовательность называется *эндоспектром* (или спектром эндоморфизма) реляционной системы $\left(X,\rho\right)$.

Теорема 1. *Для любого непустого отношения* $\rho = A \times B$ *на множестве* X, *где* $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A, B \subseteq X$, *имеем:*

1) $\left|End(X,\rho)\right| = k^{k-p}p^p l^{l-p} n^{n-k-l+p}$;

2) $\left|HEnd(X,\rho)\right| = \sum\limits_{M \in U^*(A \cup B)} \mid M \mid^{k+l-p}(n-k-l+p+\mid M \mid)^{n-k-l+p}$;

3) $\left|LEnd(X,\rho)\right| = \left|QEnd(X,\rho)\right| = \left|SEnd(X,\rho)\right| =$

$$= (k-p)^{k-p} p^p (l-p)^{l-p} (n-k-l+p)^{n-k-l+p};$$

4) $\left|Aut(X,\rho)\right| = (k-p)!\,p!(l-p)!(n-k-l+p)!$.

Следствие 1. *Для любого непустого отношения* $\rho = A \times B$ *на множестве* X, *где* $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A, B \subseteq X$, *имеем:*

$$Endospec(X,\rho) = (k^{k-p} \cdot p^p \cdot l^{l-p} \cdot n^{n-k-l+p},$$

$$\sum_{M \in U^*(A \cup B)} \left|M\right|^{k+l-p}(n-k-l+p+\left|M\right|)^{n-k-l+p},$$

$$(k-p)^{k-p} p^p (l-p)^{l-p} (n-k-l+p)^{n-k-l+p},$$

$$\left|QEnd(X,\rho)\right|, \left|SEnd(X,\rho)\right|,$$

$$(k-p)!\,p!(l-p)!(n-k-l+p)!).$$

Также мы вычисляем всевозможные значения эндотипа (Böttcher, Knauer, 1992) прямоугольных отношений, определенных на произвольном множестве.

Список литературы

Böttcher, M., & Knauer, U. (1992) Endomorphism spectra of graphs. *Discrete Mathematics, 109* (1–3) 45–57.

Zhuchok, Y. V. (2010) Endomorphism semigroups of 2-nilpotent binary relations. *Journal of Mathematical Sciences, 164* (1), 49–55.

Мазяєва, О. С. (2012) Напівгрупи ендоморфізмів прямокутних відношень. *Науковий пошук молодих дослідників,* 48—54.

РОЗВИНЕННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

О. В. Махней

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

oleksandr.makhnei@pu.if.ua

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено в літературі досить добре (див., наприклад, Наймарк (1969)). Останнім часом з'явилось чимало результатів, які тією чи іншою мірою узагальнюють дослідження спектральних властивостей цих операторів.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda\sigma(x)y, \tag{1}$$

де $\sigma^{(n-1)}$, $p_1^{(n-2)}$ — неперервні справа дійснозначні функції обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$, $\sigma(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $p_j = q_j'$, q_j — неперервні справа комплекснозначні функції обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$, $j = \overline{2,n}$, тобто p_j — міри, λ — комплексний параметр.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо крайові умови

$$U_\nu(y) \equiv \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(a) + \beta_\nu y^{(k_\nu)}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\alpha}_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\beta}_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \tag{2}$$

де

$$n - 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \geq 0,$$

$$k_{s+2} < k_s, \quad s = \overline{1, n-2}, \quad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \ \ \nu = \overline{1,n}.$$

Для непарного n $(n = 2\mu - 1)$ крайові умови (2) називаємо регулярними для задачі (1), (2), якщо не дорівнюють нулю числа θ_0 і θ_1, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \hat{\alpha}_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \hat{\alpha}_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\hat{\alpha}_1 + s\hat{\beta}_1)\omega_\mu^{k_1} & \hat{\beta}_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \hat{\beta}_1\omega_n^{k_1} \\ \hat{\alpha}_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \hat{\alpha}_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\hat{\alpha}_2 + s\hat{\beta}_2)\omega_\mu^{k_2} & \hat{\beta}_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \hat{\beta}_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \hat{\alpha}_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\hat{\alpha}_n + s\hat{\beta}_n)\omega_\mu^{k_n} & \hat{\beta}_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \hat{\beta}_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

де

$$\hat{\alpha}_\nu = \alpha_\nu E(a)\left(\sqrt[n]{|\sigma(a)|}\right)^{k_\nu}, \hat{\beta}_\nu = \beta_\nu E(b)\left(\sqrt[n]{|\sigma(b)|}\right)^{k_\nu}, E(x) = |\sigma(x)|^{-\frac{n-1}{2n}} e^{-\frac{1}{n}\int_a^x p_1(\xi)d\xi},$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — різні корені n-го степеня з -1.

Для парного n $(n = 2\mu)$ крайові умови (2) називаємо регулярними для задачі (1), (2), якщо не дорівнюють нулю числа θ_{-1} і θ_1, що визначаються рівністю

$$\theta_{-1}/s + \theta_0 + \theta_1 s =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\alpha}_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \hat{\alpha}_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\hat{\alpha}_1 + s\hat{\beta}_1)\omega_\mu^{k_1} & (\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1/s)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \hat{\beta}_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \hat{\beta}_1\omega_n^{k_1} \\ \hat{\alpha}_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \hat{\alpha}_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\hat{\alpha}_2 + s\hat{\beta}_2)\omega_\mu^{k_2} & (\hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2/s)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \hat{\beta}_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \hat{\beta}_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \hat{\alpha}_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\hat{\alpha}_n + s\hat{\beta}_n)\omega_\mu^{k_n} & (\hat{\alpha}_n + \hat{\beta}_n/s)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \hat{\beta}_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \hat{\beta}_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}.$$

Теорема. Нехай на коефіцієнти рівняння (1) накладено вказані вище умови. Тоді у випадку регулярних крайових умов (2), якщо для парного n, крім того, справджується нерівність $\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$, будь-яку функцію з $L_2[a,b]$ можна розвинути в ряд

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu y_\nu(x)$$

за власними функціями крайової задачі (1), (2), де

$$d_\nu = \int_a^b \sigma(s) f(s) \overline{z_\nu(s)} ds,$$

а $z_\nu(s)$ — власні функції спряженої крайової задачі.

Доведення ґрунтується на використанні базису Рісса і близькості асимптотичних формул для власних функцій крайових задач з мірами і крайових задач із сумовними коефіцієнтами.

Якщо покласти $p_i \in L_1[a,b]$, $i = \overline{2,n}$, то отримаємо відомий результат (Михайлов, 1962; Кесельман, 1964).

Список літератури

Наймарк, М. А. (1969). *Линейные дифференциальные операторы.* Москва: Наука.

Михайлов, В. П. (1962). О базисах Рисса в $L_2(0,1)$. *ДАН СССР, 144* (5), 981—984.

Кесельман, Г. М. (1964). О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов. *Известия вузов СССР, Серия Математика, 2,* 82—93.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ТЕРНАРНОЇ ЗМІННОЇ

В. М. Мельничук
Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського, Вінниця, Україна
viki-ang@mail.ru

У роботах Вотякова (2008, 2009) побудовано алгебру тернарних чисел і означено функції тернарної змінної. У цій роботі закладено початки побудови диференціального числення таких функцій.

Нехай функція

$$u = f(t) = f_0(x,y,z)e_0 + f_1(x,y,z)e_1 + f_2(x,y,z)e_2$$

означена в деякому околі точки t_0 окрім, можливо, самої точки t_0.

Означення 1. *Тернарне число* τ *називається границею функції* $f(t)$ *у точці* t_0, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що для всіх* t, *які задовольняють нерівність* $0 < \left\| t - t_0 \right\| < \delta$ *виконується нерівність*

$$\left\| f(t) - \tau \right\| < \varepsilon$$

і позначається

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \tau.$$

Теорема 1. *Границя функції* $f(t)$ *у точці* $t_0 = x_0e_0 + y_0e_1 + z_0e_2$ *існує тоді й тільки тоді, коли функції* $f_0(x,y,z)$, $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ *мають границі в точці* (x_0, y_0, z_0), *причому*

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f_0(x,y,z)e_0 + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f_1(x,y,z)e_1 + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f_2(x,y,z)e_2 \quad (1)$$

Покажемо, що

$$\lim_{t \to 0e_0 + 0e_1 + 0e_2} \frac{\sin t}{t} = e_0.$$

Функція

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

означена для всіх $t = xe_0 + ye_1 + ze_2$, для яких $Nrt \neq 0$, тобто у будь-якому околі точки $t = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2$ функція не означена для t вигляду $xe_0 + ye_1 + ze_2$, де $x + y + z = 0$ або $xe_0 + xe_1 + xe_2$. В останніх випадках функцію будемо доозначувати. Нехай $\mathrm{Nr}(t) \neq 0$. Тоді

$$\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{\mathrm{Nr}(t)}\sin\overline{t}=\frac{1}{\mathrm{Nr}(t)}\sin t\left(\left(x^2-yz\right)e_0+\left(z^2-xy\right)e_1+\left(y^2-xz\right)e_2\right).$$

Таким чином, коли $Nr\mathrm{t}\neq 0$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f_0\left(x,y,z\right)}{\mathrm{Nr}(t)}=1.$$

Підрахувавши, коефіцієнт при e_1. Матимемо:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f_1\left(x,y,z\right)}{\mathrm{Nr}(t)}=0.$$

Аналогічно

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f_2\left(x,y,z\right)}{\mathrm{Nr}(t)}=0.$$

Якщо ж $t=xe_0+ye_1+ze_2$, де $x=y=z$, то приймаємо

$$\frac{\sin t}{t}:=e_0+o\left(1\right).$$

Якщо ж $x=y=z$, то також приймаємо

$$\frac{\sin t}{t}:=e_0+o\left(1\right).$$

Доозначивши функцію $f\left(t\right)=\dfrac{\sin t}{t}$, дістанемо, що

$$\lim_{t\to 0e_0+0e_1+0e_2}\frac{\sin t}{t}=e_0. \tag{2}$$

Можна обґрунтувати, що

$$\lim_{t\to 0e_0+0e_1+0e_2}\frac{e^t-e_0}{t}=e_0.$$

Нехай функція тернарної змінної $u=f\left(t\right)$ означена в деякому околі точки t_0.

Означення 2. *Функція $u=f\left(t\right)$ називається неперервною в точці t_0, якщо $\lim\limits_{t\to t_0}f\left(t\right)=f\left(t_0\right)$.*

Неперервними в кожній точці області визначення є такі елементарні функції тернарної змінної: e^t, $\cos t$, $\sin t$, $\ln\left(e_0+t\right)$.

Означення 3. *Функція $u=f\left(t\right)$ називається диференційовною у точці t_0, якщо її приріст при зміщенні з точки*

$$f\left(t_0+\triangle t\right)-f\left(t_0\right)=A\triangle t+o\left(\triangle t\right), \tag{3}$$

де

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left\|o\left(\Delta t\right)\right\|}{\left\|\Delta t\right\|}=0.$$

Тернарне число A *називають похідною функції* f *у точці* t_0 *і позначають* $f'\left(t_0\right)=A$.

Очевидно, що функції $f\left(t\right)=c$, $f\left(t\right)=t$ диференційовані в кожній точці і похідна першої рівняється $0e_0+0e_1+0e_2$, а похідна другої $e_0+0e_1+0e_2$.

Розглянувши функцію $f\left(t\right)=t^n$, де $n\geq 2$, яка визначена на алгебрі T, отримаємо, що функція $f\left(t\right)=t^n$ диференційована і похідна її рівняється

$$f'\left(t\right)=nt^{n-1}. \tag{4}$$

Скориставшись результатом (2),

$$\lim_{t\to 0e_0+0e_1+0e_2}\frac{\sin t}{t}=e_0,$$

маємо:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\left(t+\Delta t\right)-\sin t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\cos\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}=\cos t.$$

Має місце рівність

$$\sin' t=\frac{\partial}{\partial x}\sin t. \tag{5}$$

Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{6}$$

збігається на інтервалі $\left(-r;r\right)$ і має суму $S\left(x\right)$, то тернарний степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n \tag{7}$$

збігається в області

$$G=\left\{t\middle|\left|\lambda_0\right|<r,\ \left|\lambda_1\right|<r\right\},$$

причому його сума рівняється

$$S\left(t\right)=\frac{1}{3}\left(S\left(\lambda_0\right)+S\left(\lambda_1\right)+S\left(\lambda_2\right)\right)e_0+ \tag{8}$$

$$\frac{1}{3}\left(S\left(\lambda_0\right)+\tau_2 S\left(\lambda_1\right)+\tau_1 S\left(\lambda_2\right)\right)e_1+\frac{1}{3}\left(S\left(\lambda_0\right)+\tau_1 S\left(\lambda_1\right)+\tau_2 S\left(\lambda_2\right)\right)e_2.$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – власні значення матричного подання тернарного числа, $\tau_0 = 1,\ \tau_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \tau_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ — коефіцієнти в канонічному поданні тернарного числа.

Розглянемо ряд, складений з похідних членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1}.$$

Оскільки степеневий ряд (6) можна почленно диференціювати, причому ряд, складений з похідних,

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1},$$

збігається на тому ж інтервалі $(-r;r)$, причому його сума рівняється $S'(x)$, то в силу сформульованого результату ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} \tag{9}$$

збігається в області $G = \{t \| \lambda_0 | < r,\ |\lambda_1| < r\}$, причому його сума рівняється

$$\frac{1}{3}\left(S'(\lambda_0) + S'(\lambda_1) + S'(\lambda_2)\right)e_0 + \frac{1}{3}\left(S'(\lambda_0) + \tau_2 S'(\lambda_1) + \tau_1 S'(\lambda_2)\right)e_1 + \\ + \frac{1}{3}\left(S'(\lambda_0) + \tau_1 S'(\lambda_1) + \tau_2 S'(\lambda_2)\right)e_2. \tag{10}$$

Урахувавши, що

$$\lambda_0 = x_0 + x_1 + x_2,\ \lambda_1 = x_0 + \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2,\ \lambda_2 = x_0 + \tau_2 x_1 + \tau_1 x_2,$$

то для аналітичної функції має місце рівність

$$\begin{gathered} S'(t) = \frac{\partial}{\partial x}S(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_0) + \frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_1) + \frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_2)\right)e_0 + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_0) + \tau_2\frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_1) + \tau_1\frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_2)\right)e_1 + \\ + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_0) + \tau_1\frac{\partial}{\partial x_0}S(\lambda_1) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_0}\tau_2 S(\lambda_2) \end{pmatrix} e_2. \end{gathered} \tag{11}$$

На підставі рівності (11) маємо, що

$$\left(e^t\right)' = e^t,$$

$$\left(\cos t\right)' = -\sin t.$$

Справедлива наступна формула

$$\ln'\left(e_0 + t\right) = \frac{e_0}{e_0 + t}.$$

Список літератури

Вотякова, Л. А. (2008). Нормована алгебра тернарних чисел. *Вісник Київського університету Секція: фізико-математичні науки*, *2008* (4), 7—9.

Вотякова, Л. А. (2009). Елементарні функції тернарної змінної. *Вісник Київського університету Секція: фізико-математичні науки*, *2009* (1), 11—13.

Кантор, И. Л., Солодовников, А. С. (1973). *Гиперкомплексные числа.* Москва: Наука.

Садбери, Э. (2004). Кватернионный анализ. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, *2004* (2), 130—157.

КЛАСИФІКАЦІЯ ГРАФІВ ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ ЗА ЇХ ЕНДОТИПОМ

А. А. Михайловський
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, Старобільськ, Україна
mikhaylovskiy1994@mail.ua

Нехай $T(X)$ — симетрична напівгрупа на множині X, $\rho \subseteq X \times X$ — довільне відношення. Перетворення $f \in T(X)$ називається *ендоморфізмом* (див. напр., Жучок (2007) системи $\left(X,\rho\right)$, якщо для будь-яких $a,b \in X$ з того, що $\left(a,b\right) \in \rho$, випливає $\left(af,bf\right) \in \rho$. Множина всіх ендоморфізмів реляційної системи $\left(X,\rho\right)$ утворює напівгрупу відносно звичайної композиції перетворень і позначається $End(X,\rho)$.

Ендоморфізм $f \in End\left(X,\rho\right)$ називається *напівсильним* ендоморфізмом, якщо для будь-яких $x,y \in X$ з умови $\left(xf,yf\right) \in \rho$ випливає, що існують прообрази $x',y' \in X$, тобто $xf = x'f$, $yf = y'f$, такі що $\left(x',y'\right) \in \rho$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів системи $\left(X,\rho\right)$ позначається $HEnd(X,\rho)$.

Ендоморфізм $f \in End\left(X,\rho\right)$ називається *локально сильним* ендоморфізмом, якщо для будь-яких $x,y \in X$ з умови $\left(xf,yf\right) \in \rho$ випливає, що для кожного прообразу $x' \in X$ елемента xf існує такий прообраз $y' \in X$ елементу yf, що $\left(x',y'\right) \in \rho$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів системи $\left(X,\rho\right)$ позначається $LEnd(X,\rho)$.

Ендоморфізм $f \in End\left(X,\rho\right)$ називається *квазі-сильним* ендоморфізмом, якщо для будь-яких $x,y \in X$ з умови $\left(xf,yf\right) \in \rho$ випливає, що існує такий прообраз $x' \in X$ елемента xf , що для будь-якого прообразу $y' \in X$ елемента yf виконується $\left(x',y'\right) \in \rho$. Множина всіх квазісильних ендоморфізмів системи $\left(X,\rho\right)$ позначається $QEnd(X,\rho)$

Ендоморфізм $f \in End\left(X,\rho\right)$ називається *сильним* ендоморфізмом, якщо для будь-яких $x,y \in X$ з умови $\left(xf,yf\right) \in \rho$ випливає, що $\left(x,y\right) \in \rho$. Множина всіх сильних ендоморфізмів реляційної системи $\left(X,\rho\right)$ утворює напівгрупу відносно звичайної композиції перетворень і позначається $SEnd(X,\rho)$.

Ендоморфізм $f \in End\left(X,\rho\right)$ називається *автоморфізмом*, якщо f бієктивно і f^{-1} ендоморфізм. Група всіх автоморфізмів системи $\left(X,\rho\right)$ позначається $Aut(X,\rho)$.

Усі класи ендоморфізмів заданого типу утворюють ланцюг включень: $End(X,\rho) \supseteq HEnd(X,\rho) \supseteq LEnd(X,\rho) \supseteq QEnd(X,\rho) \supseteq SEnd(X,\rho) \supseteq Aut(X,\rho)$, якому відповідає послідовність (s_1,s_2,s_3,s_4,s_5), де $s_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,...,5\}$.

Ціле число

$$\sum_{i=1}^{5} s_i 2^{i-1}$$

називається *ендотипом* системи (X,ρ) і позначається $Endotype(X,\rho)$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i-й позиції у наведеній вище послідовності включень ендоморфізми збігаються, $s_i = 1$ — в інших випадках.

Якщо X — скінчена множина, то з цією послідовністю асоціюється послідовність відповідних потужностей:

$$Endospec(X,\rho) =$$
$$= (|End(X,\rho)|,|HEnd(X,\rho)|,|LEnd(X,\rho)|,|QEnd(X,\rho)|,|SEnd(X,\rho)|,|Aut(X,\rho)|).$$

Ця послідовність називається *ендоспектром* (або спектром ендоморфізмів) системи (X,ρ).

Нагадаємо, що (X,ρ) називається графом відношення порядку, якщо відношення ρ є рефлексивним, транзитивним й антисиметричним.

Для натуральних $n \leq 4$ побудовано всі n-елементні графи відношення порядку, які були розбиті на ізоморфні класи. Для відношень порядку кожного класу знайдено всі ендоморфізми будь-якого з його 6 типів (звичайні, напівсильні, локально сильні, квазісильні, сильні та автоморфізми). Після чого для кожного графа відношення порядку був обчислений його ендотип і ендоспектр. Таким чином, всі n-елементні $(n \leq 4)$ графи відношення порядку розподіляються за значенням їх ендотипу на 8 різних класів. При цьому їх ендотипи можуть приймати лише такі значення як 0, 4,6,7, 8,13,14,15.

Крім того, вивчається задача класифікації n-елементних графів відношення порядку за їх ендотипом для натуральних $n > 4$. Ендоморфізми відношень еквівалентності й прямокутних відношень вивчались у Бондарь (2014), Мазяєва (2012).

Список літератури

Бондарь, Е. А. (2014). О регулярностинекоторых под. полугрупп моноида эндоморфизмов отношения эквивалентности. *Прикладная дискретная математика*, (3), 5—11.

Жучок, Ю. В. (2007). Ендоморфізми відношень еквівалентності. *Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки*, *3*, 22—26.

Мазяєва, О. С. (2012). Напівгрупи ендоморфізмів прямокутних відношень. *Науковий пошук молодих дослідників*, 48—54.

ФУНКЦІОНАЛЬНА МОДЕЛЬ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСАХ НЕВАНЛІННИ

Є. В. Нейман
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
evg_sqrt@mail.ru

М. Г. Крейн (Крейн, 1946) запровадив поняття Q-функції симетричного оператора A в гільбертовому просторі з обмеженими індексами дефекту (m,m). Ця функція відіграє важливу роль у опису узагальнених резольвент оператора A. У Krein, Langer (1973) також була розглянута та досліджена функціональна модель для симметричного оператора. Ця модель дозволяє вирішувати обернену проблему для Q-функцій, проблему пошуку критерію для узагальненої Неванліннівської функції, яка є Q-функцією симетричного оператора.

Нехай $\mathcal{L}$ є Гільбертовим простором. Ядром називають функцію $N_\omega(\lambda)$ на $\Omega\times\Omega$ із значеннями у просторі неперервних операторів у Гільбертовому просторі $\mathcal{L}$ $(\Omega\subset\mathbb{C})$. Ми будемо казати, що ядро $N_\omega(\lambda)$ має κ *від'ємних квадратів*, якщо для будь-яких точок $\omega_1,\dots,\omega_n$ в Ω, векторів $u_1,\dots,u_n$ в $\mathcal{L}$ та ξ_j у просторі $\mathbb{C}^n$ квадратична форма

$$\sum_{i,j=1}^{n}(N_{\omega_j}(\omega_i)u_j,u_i)_{\mathcal{L}}\xi_j\bar{\xi}_i$$

має не менше κ від'ємних власних значень, і при деякому виборі n, ω_j, u_j ця форма має рівно κ від'ємних власних значень (Alpay, Dijksma, Rovnyak & de Snoo, 1997).

Нагадаємо, що клас $N_\kappa(\mathcal{L})$ складається з мероморфних в $\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-$ операторно-значних функцій $m(\lambda)$, таких що $m(\bar{\lambda})=m(\lambda)^*$, і ядро

$$N_\omega^m(\lambda)=\frac{m(\lambda)-m(\omega)^*}{\lambda-\bar{\omega}} \tag{1}$$

має κ від'ємних квадратів у $\mathfrak{h}_m$-області голоморфності m.

Означення 1.1 *Пара* $\{\varphi,\psi\}$ $[\mathcal{L}]$*-значних функцій* $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ *мероморфних на* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *з загальною областю голоморфності* $\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$ *називається* N_κ*-парою (узагальненою Неванліннівською парою) якщо:*

1) ядро

$$N_\omega^{\varphi\psi}(\lambda)=\frac{\psi(\bar{\lambda})^*\varphi(\bar{\omega})-\varphi(\bar{\lambda})^*\psi(\bar{\omega})}{\lambda-\bar{\omega}},$$

має κ від'ємних квадратів на $\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$;

2) $\psi(\bar{\lambda})^*\varphi(\lambda)-\varphi(\bar{\lambda})^*\psi(\lambda)=0$ для всіх $\lambda\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$;

3) для всіх $\lambda\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}\cap\mathbb{C}_+$ існує $\mu\in\mathbb{C}_+$, таке що

$$0\in\rho(\varphi(\lambda)-\mu\psi(\lambda)) \text{ і } 0\in\rho(\varphi(\bar{\lambda})-\bar{\mu}\psi(\bar{\lambda})).$$

Дві N_κ -пари $\{\varphi,\psi\}$ і $\{\varphi_1,\psi_1\}$ називаються *еквівалентними*, якщо $\varphi_1(\lambda)=\varphi(\lambda)\chi(\lambda)$ та $\psi_1(\lambda)=\psi(\lambda)\chi(\lambda)$ для деякої операторно-значної функції $\chi(\cdot)\in[\mathcal{H}]$, яка голоморфна і обернена для всіх $\lambda\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$.

N_κ-пара $\{\varphi,\psi\}$ називається *нормалізованною* N_κ-парою, якщо:

3') $\varphi(\lambda)-\lambda\psi(\lambda)\equiv I_{\mathcal{L}}$ для всіх $\lambda\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$.

Нехай A — це самоспряжене лінійне відношення в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{L}$, і $\Pi_{\mathcal{L}}$ — це ортогональний проектор на масштабний простір $\mathcal{L}$. Пара операторно-значних функцій $\{\varphi,\psi\}$, що визначена формулою

$$\varphi(\lambda):=I_{\mathcal{L}}+\lambda\Pi_{\mathcal{L}}(A-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}},\quad \psi(\lambda):=\Pi_{\mathcal{L}}(A-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{L}}\quad (\lambda\in\rho(A))$$

називається N_κ-парою, що відповідає самоспряженому лінійному відношенню A і масштабу $\mathcal{L}$.

Нехай (φ,ψ) є нормалізованою N_κ-парою. Розглянемо простір $\mathcal{H}(\varphi,\psi)$, який є простором Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathcal{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)$, що характеризується властивостями:

1) $\mathcal{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u\in\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ для всіх $\omega\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}$ та $u\in\mathcal{L}$;

2) для всіх $f\in\mathcal{H}(\varphi,\psi)$ виконується наступна тотожність

$$\left[f(\cdot),\mathcal{N}_\omega^{\varphi\psi}(\cdot)u\right]_{\mathcal{H}(\varphi,\psi)}=(f(\omega),u)_{\mathcal{L}},\quad \omega\in\mathfrak{h}_{\varphi,\psi},u\in\mathcal{L}.$$

Для функції m з класу $N_\kappa(\mathcal{L})$ простір Понтрягіна з відтворюючим ядром $\mathcal{N}_\omega^m(\cdot)$ будемо позначати через $\mathcal{H}(m)$.

У наступній теоремі ми отримаємо функціональну модель для самоспряженого лінійного відношення A.

Теорема 12 (Neiman, 2010). *Нехай $\mathcal{L}$ є Гільбертовим простором, і $\{\varphi,\psi\}$ є нормалізованою N_κ-парою. Тоді лінійне відношення*

$$A(\varphi,\psi)=\left\{\left\{\begin{bmatrix}f\\u\end{bmatrix},\begin{bmatrix}f'\\u'\end{bmatrix}\right\}:\begin{array}{c}f,f'\in\mathcal{H}(\varphi,\psi);u,u'\in\mathcal{L};\\ f'(\lambda)-\lambda f(\lambda)=\varphi(\lambda)u-\psi(\lambda)u'\ \ \lambda\in\mathfrak{h}_{\varphi\psi}\end{array}\right\}$$

є самоспряженим відношенням в $\mathcal{H}(\varphi,\psi)\oplus\mathcal{L}$, і нормалізована пара $\{\varphi,\psi\}$ є N_κ -парою, що відповідає самоспряженому відношенню $A(\varphi,\psi)$ та масштабу $\mathcal{L}$.

Калкіним був розроблений підхід, що базується на понятті «абстрактних граничних умов». Цій метод зводить проблему розширення оператора до проблеми опису гіпер-максимальних симетричних підпросторів деяких допоміжних

Гільбертових просторів. У 1975 році Кочубеєм було розроблене поняття граничної трійки. Головним об'єктом цієї концепції є абстрактна версія тотожності Гріна для щільно заданого симетричного оператора A з рівними індексами дефекту (Деркач, Маламуд, 1985).

Означення 2.3 *Нехай* $\mathcal{L}$ *є Гільбертовим простором. Трійка* $\Pi = \{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *де* $\Gamma_i : \mathrm{dom}\, A^* \to \mathcal{L}$, $i = 0,1$, *називається граничною трійкою для* A^*, *якщо для всіх* $f, g \in \mathrm{dom}\, A^*$ *виконується формула*

$$(A^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, A^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{L}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{L}},$$

і відображення $\Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix} : \mathrm{dom}\, A^* \to \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix}$ є сюр'єктивним.

Означення 3.4 *Операторно-значна функція* M, *що визначається рівністю*

$$\Gamma_1 \widehat{f}_\lambda = M(\lambda) \Gamma_0 \widehat{f}_\lambda, \quad \widehat{f}_\lambda \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda, \lambda \in \rho(A_0),$$

називається абстрактною функцією Вейля для оператора A, *що відповідає граничній трійці* $\Pi = \{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$.

Функція Вейля, що відповідає граничній трійці Π для спряженого оператора A^*, була введена і досліджена в роботах Деркач, Маламуд (1985; 1987). Як показано в роботі Деркач, Маламуд (1985) функція Вейля належить до класу Неванліннівськіх функцій N. Абстрактна функція Вейля M визначає оператор A, а також саму граничну трійку Π, однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.

У наступній теоремі буде побудовано модельний симетричний оператор $S(m)$ у просторі $\mathcal{H}(m)$ і деяку граничну трійку $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для лінійного відношення $S(m)^*$, таку що оператор функція $m(\lambda)$ є функцією Вейля оператора $S(m)$, яка відповідає граничній трійці $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$.

Теорема 2. 5*Нехай* $m \in N_\kappa(\mathcal{L})$, $\dim \mathcal{L} < \infty$ *і* $\det \mathrm{Im}\, m(\lambda) \not\equiv 0$. *Нехай* $\mathcal{H}(m)$ *— це простір Понтрягіна з відтворюючим ядром* (1), $S(m)$ *— оператор множення в* $\mathcal{H}(m)$. *Тоді:*

1) $S(m)$ *є симетричним оператором в* $\mathcal{H}(m)$;

2) спряжене лінійне відношення $S(m)^*$ *збігається з*

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} \in \mathcal{H}(m)^2 : g'(\lambda) - \lambda g(\lambda) = u_1 - m(\lambda) u_0, \ u_0, u_1 \in \mathcal{L} \right\};$$

3) гранична трійка для $S(m)^*$ *може бути задана у вигляді* $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$

$$\Gamma_0 \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} = u_1, \quad \Gamma_1 \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} = u_0;$$

4) функція Вейля, що відповідає тройці $\{\mathcal{L}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *збігається з* $m(\lambda)$.

Результат Теореми 2 було поширено на випадок N_κ-пар у роботі (Behrndt, Derkach, Hassi & de Snoo, 2011, Th. 4.7).

Список літератури

Alpay, D., Dijksma, A., Rovnyak, J., & de Snoo, H. (1997) *Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces* (Vol. 96). Birkhäuser.

Behrndt, J., Derkach, V. A., Hassi, S., & de Snoo, H. (2011). A realization theorem for generalized Nevanlinna families. *Oper. Matrices*, *5* (4), 679–706.

Kren, M. G., Langer, H. (1973). Uber die Q-function eines π-*H*ermiteschen Operators im Raume Π_κ. *Acta. Sci. Math.*, *34*, 191—230.

Neiman, E. (2010). A functional model associated with a generalized Nevanlinna pair. *Ukrainian Math. Bull.*, *7* (2), 197–211.

Деркач, В. А., Маламуд, М. М. (1985). *Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией*. Донецк: Донецкий физ.-тех. ин-ут АН УССР, 9.

Деркач, В. А., Маламуд, М. М. (1987). О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами. *ДАН СССР*, *293* (5), 1041—1046.

Кочубей, А. Н. (1975). О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. *Мат. заметки*, *17* (1), 41—48.

Крейн, М. Г. (1946). О резольвентах эрмитовых операторов с индексами дефекта (m, m). *Докл. АН СССР*, *52* (8), 657—660.

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ТОПОЛОГІЧНЕ ВКЛАДЕННЯ

В. Д. Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Суми, Україна
mathematicsspu@mail.ru

Свого часу автор займався проблемами топологічного вкладення топологічних лінійних просторів, зокрема упорядкованих топологічних лінійних просторів, і серед них — топологічних лінійних (векторних) решіток (ТЛР). Був одержаний, зокрема, такий результат:

Нехай E_1 — псевдобанахова решітка, E_0 — ТЛР. Якщо E_1 структурно вкладена в E_0, то E_1 топологічно вкладена в E_0 (Погребний, 1978).

У 2007 році наша магістрантка, І. С. Лазаренко, встановила наступний результат у цьому напрямі:

Якщо p-банахова решітка структурно вкладена в ТЛР, то вона в неї вкладена топологічно (Лазаренко, 2007).

Недавно, займаючись, з науково-педагогічною метою, основними метричними функціями, які задають топологічні структури, автор звернув увагу на квазінормовані простори (Погребний, 2015).

Квазінормований простір — це топологічний лінійний простір (ТЛП), топологія якого задається метричною функцією — *квазінормою* (також вона називається c-нормою), $x \to \|x\|_c$, $x \in X$, яка задовольняє наступні умови: аксіоми невід'ємності, віддільності, абсолютної однорідності такі ж, як для звичайної норми, а *аксіома субаддитивності* (нерівність трикутника) замінюється наступною умовою:

$$\forall x, y \in X \left[\|x+y\|_c \le c\left(\|x\|_c + \|y\|_c \right), c = \text{const} \ge 1 \right].$$

При $c = 1$ одержуємо звичайну норму. Повний по квазінормі ТЛП називається *квазібанаховим*. Зокрема, розглянемо квазінормовані і квазібанахові решітки. Квазінормованою решіткою називається лінійна решітка, що є квазінормованим простором і обидві структури узгоджені умовою:

$$|x| \le |y| \Rightarrow \|x\|_c \le \|y\|_c .$$

Така квазінорма називається *монотонною*. Умову існування монотонної квазінорми можна сформулювати і довести аналогічно відомим результатам. (Вулих, 1961; Погребний, 1979).

Теорема 1. *Нехай X — лінійна решітка і одночасно квазінормований простір. В X можна розглянути еквівалентну квазінорму тоді й тільки тоді, коли вихідна квазінорма узгоджена з структурою лінійної решітки умовою:*

$$|y_n| \le |x_n| \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_c \to 0 \Rightarrow \|y_n\|_c \to 0 \tag{1}$$

Доведення. 1. Необхідність. Нехай вихідна квазінорма є монотонною. Тоді умова (1) виконана, оскільки

$$\left|y_n\right| \le \left|x_n\right| \Rightarrow \left\|y_n\right\|_c \le \left\|x_n\right\|_c \to 0,$$

отже, $\left\|y_n\right\|_c \to 0$.

2. Достатність. Нехай умова (1) виконана. Побудуємо на X нову квазінорму за правилом:

$$\left\|x\right\|_c^* = \sup_{\theta \le y \le |x|} \left\|y\right\|_c$$

(θ — нульовий елемент простору). Перш за все покажемо, що таке означення конкретне, тобто

$$\left\|x\right\|_c^* < +\infty \, \forall x \in X.$$

Це доводиться цілком так, як і для норми звичайної (Вулих, 1961), оскільки при цьому не використовується змінена субаддитивність. Нехай $\lambda_n \to 0$, тоді $\lambda_n x \to \theta$, отже $\left\|\lambda_n x\right\|_c \to 0$. Якщо $\theta \le y_n \le \left|x\right|$, то $\left\|\lambda_n y_n\right\|_c \to 0$ з умови (1). При даному $x \in X$ множина

$$\left\{y : \theta \le y \le \left|x\right|\right\}$$

обмежена по квазінормі і $\left\|x\right\|_c^* < +\infty$ для всіх $x \in X$.

Далі перевіримо виконання аксіом квазінорми.

1. Невід'ємність. $\left\|x\right\|_c^* = \sup\limits_{\theta \le y \le |x|} \left\|y\right\|_c \ge 0$ для всіх $x \in X$.

2. Віддільність. Якщо $x = \theta$, то з $\theta \le y \le \theta \Rightarrow y = \theta$, $\left\|\theta\right\|_c^* = 0$. Якщо

$$\sup_{\theta \le y \le |x|} \left\|y\right\|_c = 0,$$

то $x = \theta$, інакше $\left\|x\right\|_c^* \ne 0$.

3. Абсолютна однорідність.

$$\left\|\lambda x\right\|_c^* = \sup_{\theta \le y \le |\lambda x|} \left\|y\right\|_c^* = \left|\lambda\right| \sup_{\theta \le y \le |x|} \left\|y\right\|_c^* = \left|\lambda\right| \left\|x\right\|_c^*.$$

4. Субаддитивність. Нехай

$$x = a + b, \; \theta \le y \le \left|x\right| \Rightarrow y = y_1 + y_2,$$

де $\theta \le y_1 \le \left|a\right|$, $\theta \le y_2 \le \left|b\right|$ (Вулих, 1961, теорема 3.6.2,). Оскільки

$$\left\|y\right\|_c \le c\left(\left\|a\right\|_c + \left\|b\right\|_c\right),$$

то з $c \ge 1$ і умови (1) маємо:

$$\left\|x\right\|_c^* \le \sup_{\theta \le y_1 \le |a|} \left\|y_1\right\|_c^* + \sup_{\theta \le y_2 \le |b|} \left\|y_2\right\|_c^* = \left\|a\right\|_c + \left\|b\right\|_c.$$

5. Монотонність нової квазінорми виконана: якщо $|x| \le |y|$, то

$$\|x\|_c^* = \sup_{\theta \le z \le |x|} \|z\|_c \le \sup_{\theta \le z \le |y|} \|z\|_c = \|y\|_c^*,$$

оскільки

$$\{z : 0 \le z \le |x|\} \subset \{z : 0 \le z \le |y|\}.$$

Покажемо еквівалентність старої і нової квазінорми. З означення нової квазінорми,

$$\|x\|_c^* \ge \|x_+\|_c,\ \|x\|_c \ge \|x_-\|_c.$$

Тоді

$$\|x\|_c \le 2\|x\|_c^*,\ \|x_n\|_c^* \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_c \to 0.$$

Навпаки, нехай $\|x_n\|_c \to 0$. Припустимо супротивне. Тоді з послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна виділити підпослідовність

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : \|x_{n_k}\|_c^* > \varepsilon > 0.\ \forall k \in N \exists y_k : \theta \le y_k \le |x_{n_k}| \wedge \|y_k\|_c > \varepsilon.$$

Але з узгодженості даної норми маємо $\|y_k\| \to 0$. Суперечність.

Далі будемо розглядати квазібанахові решітки. Нехай X — така решітка. Позначимо $\tau(X)$ — вихідну топологію (утворену квазінормою), (τ) — збіжність у цій топології, (r) — збіжність з регулятором (Вулих, 1961), $(c*r)$ — конфінальну зіркову збіжність відносно (r)-збіжності, $\tau^{(c*r)}$— топологію, породжену $(c*r)$-збіжністю. Відомо, що в ТЛР, які є архімедовими, і в квазінормованих, $(r) \Rightarrow (\tau)$, $(c*r) \Rightarrow (\tau)$, $\tau^{(c*r)} \ge \tau$ (Погребний, 1978). Для квазібанахових решіток розглянемо і обернені співвідношення.

Теорема 2. *У квазібанаховій решітці* $(\tau) \Rightarrow (c*r)$.

Доведення. Нехай $x_n \xrightarrow{(\tau)} \theta$. Візьмемо довільну її підпослідовність $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, з неї виділимо таку підпослідовність $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, що

$$\|x_k\|_c < \frac{1}{k^3},$$

що, очевидно, можливо. Маємо далі:

$$\|k|x_k|\|_c \le k\||x|\|_c < \frac{1}{k^2}.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left|x_k\right|_c$$

збіжний абсолютно, бо мажорується збіжним додатнім рядом

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Оскільки простір X повний, то

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left|x_k\right|_c$$

збіжний до елемента $u \in X$. Очевидно, $u \geq \theta$. Отже,

$$\forall k \in N \Rightarrow k\left|x_k\right| \leq u,\ \left|x_k\right| \leq \frac{1}{k}u.$$

При $k > k_0$ буде

$$\frac{1}{k} < \varepsilon \Rightarrow \left|x_k\right| \leq \varepsilon u,$$

тобто $x_k \xrightarrow{(r)} \theta$. За означенням $\left(c * r\right)$ збіжності, $x_n \xrightarrow{(c*r)} \theta$.

Безпосередньо звідси випливає

Теорема 3. *У квазібанаховій решітці* $\tau \geq \tau^{(c*r)}$.

Тепер нехай E_1 — квазібанахова решітка, E_0 — топологічна лінійна решітка і E_1 структурно вкладена в E_0. Можна одержати топологічне вкладення.

Теорема 4. *Якщо квазібанахова решітка структурно вкладена в топологічну лінійну решітку, то вона в неї вкладена топологічно.*

Доведення. В силу структурності вкладення, ${\tau_1}^{(c*r)} \geq {\tau_{01}}^{(c*r)}$. Також ${\tau_{01}}^{(c*r)} \geq \tau_{01}$. В силу теореми 3, $\tau_1 \geq {\tau_1}^{(c*r)}$. Одержуємо:

$$\tau_1^2 \geq {\tau_1}^{(c*r)} \geq {\tau_{01}}^{(c*r)} \geq \tau_{01},\ \tau_1 \geq \tau_{01}$$

і оператор вкладення неперервний в топологіях $\tau\left(E_1\right)$, $\tau\left(E_0\right)$.

Список літератури

Вулих, Б. З. (1961). *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*. Москва: ГИФМЛ.

Лазаренко, І. С. (2007). *Топологічне вкладення упорядкованих топологічних лінійних просторів : магістерська робота*. Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка.

Погребний, В. Д. (2015). Деякі метричні функції, що задають топологію. *Фізико-математична освіта. Науковий журнал*. Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, *2015* (1 (4)), 15—19.

Погребний, В. Д. (1978). Одна теорема про топологічне вкладення векторних решіток. *Вісник Київського університету. Математика. Механіка*, *20*, 96—98.

Погребний, В. Д. (1979). Про узгодження структур топологічного векторного простору і векторної решітки. *Вісник Київського університету. Математика. Механіка*, *21*, 118—120.

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Б. М. Подлевський[1], Т. В. Коваль[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я. С. Підстригача,*

[2]*Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна*

taras94koval@gmail.com, bpodlev@gmail.com

У рамках варіаційної постановки задачі синтезу діаграми направленості решітки за заданою ДН за потужністю, яка приводить до чисельного розв'язування нелінійного інтегрального рівняння, пропонується алгоритм знаходження точок галуження оптимальних розв'язків шляхом знаходження власних значень відповідної нелінійної за спектральним параметром задачі на власні значення.

При дослідженні нелінійних рівнянь вигляду

$$A(\lambda, f) = f,$$

де оператор $A(\lambda, f)$ нелінійно залежить від параметра λ і функції f, застосовують формальний підхід, в основі якого лежить лінеаризація. Застосування цього підходу показує, що точками галуження рівняння можуть бути лише ті значення параметра λ, для яких одиниця є власним значенням відповідного однорідного рівняння

$$A(\lambda)f = 0$$

з операторнозначною функцією $A : C \to X(H)$ ($X(H)$ — множина лінійних операторів, $\lambda \in C$ — спектральний параметр), яка нелінійно залежить від параметра λ. Якщо оператор $A(\lambda)$ — лінійний за параметром λ, то його власні значення будуть точками галуження вихідного рівняння. У загальному ж випадку з'являються криві власних значень $\nu(\lambda)$ і тоді точками можливого галуження будуть ті значення параметра λ задачі

$$A(\lambda)f = \nu(\lambda)f,$$

для яких $\nu(\lambda) = 1$.

Застосування вказаного підходу до нелінійного інтегрального оператора, який виникає при розв'язуванні задачі синтезу лінійної антенної решітки за заданою енергетичною діаграмою направленості, приводить до нелінійної спектральної задачі $Tf = f$ з інтегральним оператором $T(\lambda)$, який аналітично залежить від параметра λ.

Для випромінюючої системи, яка складається з $N = 2M + 1$ ідентичних і однаково орієнтованих випромінювачів з однаковою для всіх випромінювачів діаграмою направленості (ДН), у яких фазові центри розміщені на прямій лінії — осі решітки (тобто початок осі Ox збігається з центром середнього випромінювача), функція, яка описує ДН (множник решітки) лінійної системи випромінювачів (лінійної решітки), має вигляд (Андрийчук та ін., 1993)

$$f(\xi) = \sum_{n=-M}^{M} I_n e^{icn\xi},$$

де I_n — комплексні струми на випромінювачах, $c = kd$, d — віддаль між сусідніми випромінювачами, k — хвильове число.

Надалі вважатимемо, що необхідна енергетична діаграма направленості $P(\xi)$ задана в області $\Omega:\{|\ \xi\ |\leq 1\}$ й описується функцією, яка є неперервною та невід'ємною в області Ω і тотожно дорівнює нулю за її межами, причому

$$\max_{\xi\in\Omega} P(\xi) = 1.$$

Задача синтезу полягає у знаходженні таких струмів I_n на випромінювачах, щоб створювана ними діаграма направленості за потужністю

$$p(x) = \left|f(\xi)\right|^2$$

найкращим чином наближалася до заданої $P(\xi)$. З цією метою розглянемо варіаційну постановку задачі, тобто задачу синтезу сформулюємо як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma(I) = \int_{-1}^{1}\left[P(\xi') - \left|f(\xi')\right|^2\right]^2 d\xi' + \alpha\sum_{n=-M}^{M}\left|I_n\right|^2$$

у просторі $H_I = C^N$, тобто

$$\sigma(I) \to \min_{I\in H_I}, \quad I_n \in H_I,$$

який характеризує величину середньоквадратичного відхилення модулів заданої та синтезованої діаграм направленості в області Ω, а другий накладає обмеження на норму струмів. Тут α — деякий дійсний параметр.

З необхідної умови мінімуму функціонала $\sigma(I)$ отримуємо нелінійну систему рівнянь для оптимальних струмів на випромінювачах

$$\alpha I_n = 2\int_{-1}^{1}\left[P(\xi') - \left|f(\xi')\right|^2\right]e^{-icn\xi'}\sum_{n=-M}^{M} e^{icn\xi'}d\xi',$$

Домноживши обидві частини рівняння на $e^{icn\xi}$ та підсумувавши за n, отримуємо еквівалентне нелінійне рівняння для оптимальної діаграми

$$\alpha f(\xi) = 2\int_{-1}^{1}\left[P(\xi') - |\ f(\xi')\ |^2\right]K(\xi,\xi' c)f(\xi')d\xi'. \qquad (1)$$

Тут $f(\xi)$ — шукана функція, а $K(\xi,\xi' c)$ — ядро вигляду

$$K(\xi,\xi',c) = \sum_{n=-M}^{M} e^{icn(\xi-\xi')} .$$

Оскільки рівняння (1) є нелінійним рівнянням, то воно може мати неєдиний розв'язок, кількість і властивості яких залежать від кількості елементів ґратки та їх розміщення, а також від властивостей заданої діаграми направленості за потужністю $P(\xi)$.

Легко переконатися, що при будь-яких обмежених значеннях параметра c рівняння (1) має нульовий розв'язок. Числові експерименти показують, що при певних значеннях параметра c існують відмінні від нуля розв'язки рівняння (1).

Точками можливого галуження розв'язків інтегрального рівняння (1) є такі значення дійсного фізичного параметра c, при якому однорідне лінійне рівняння

$$f(\xi) = T(c)f(\xi) \equiv \frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1} P(\xi')K(\xi,\xi',c)f(\xi')d\xi' , \tag{2}$$

отримане лінеаризацією рівняння (1) має відмінні від тотожного нуля розв'язки.

Отже ми отримали нелінійну (за параметром c) задачу на власні значення

$$\Big(T(c) - I\Big)f(\xi,c) = 0. \tag{3}$$

Урахувавши, що $P(\xi) > 0$, приведемо оператор $T(c)$ у (2) до самоспряженого вигляду стандартним чином. Розглядаючи нову функцію

$$\varphi(\xi,c) = \sqrt{P(\xi)}\ f(\xi,c),$$

отримуємо інтегральне рівняння

$$\varphi(\xi,c) = \int_{-1}^{1} \Phi(\xi,\xi',c)\varphi(\xi',c)d\xi'$$

із симетричним ядром

$$\Phi(\xi,\xi',c) = K(\xi,\xi',c)\sqrt{P(\xi)P(\xi')}.$$

Отже, ми отримали самоспряжену узагальнену задачу на власні значення

$$L(\lambda)\varphi \equiv \Big(T(\lambda) - I\Big)\varphi = 0, \quad \lambda = c ,$$

з неперервно диференційовним за параметром c оператором $T(c)$. Існування похідних Фреше

$$\frac{dT(c)}{dc} \text{ та } \frac{d^2T(c)}{dc^2}$$

в довільній точці c випливає з неперервності ядра $\Phi(\xi,\xi',c)$ за сукупністю своїх змінних в області $\Omega\times\Omega$ та існування й неперервності в $\Omega\times\Omega$ похідних

$$\frac{d\Phi(\xi,\xi',c)}{dc} \text{ та } \frac{d^2\Phi(\xi,\xi',c)}{dc^2},$$

які, з огляду на їхню громіздкість, тут не наводяться.

Використовуючи властивість виродженності ядра $K(\xi, \xi', c)$, рівняння (2) зводиться до еквівалентної системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{D}_N(\lambda)\mathbf{b}_N \equiv (\mathbf{A}_N(\lambda) - \mathbf{I}_N)\mathbf{b}_N = 0 \tag{4}$$

із симетричною матрицею $\mathbf{A}_N(\lambda)$ розмірності N, $\mathbf{I}_N$ — одинична матриця, $\mathbf{b}_N \in \mathbb{R}^N$, $\lambda = c$.

Отже, задача знаходження ліній галуження розв’язків рівняння (3) зводиться до знаходження власних значень нелінійної спектральної задачі (4). Очевидноно, для того щоб задача (4) мала відмінний від нуля розв’язок необхідно, щоб

$$\psi(\lambda) \equiv \det \mathbf{D}_N(\lambda) = 0, \tag{5}$$

тобто власні значення задачі (4) — це нулі функції $\psi(\lambda)$.

Отже, розв’язуючи рівняння (6), отримуємо точки, у яких від нульового розв’язку можуть відгалужуватися інші розв’язки.

В основі алгоритму — чисельна процедура обчислення похідних детермінанта матриці та алгоритм знаходження всіх власних значень у заданій області зміни спектрального параметру (Подлевський, 2013, 2014).

Деякі результати числових розрахунків наведено у таблиці, де в першому стовпчику наведено задану енергетичну діаграму направленості P, для якої проводилися розрахунки, у другому та третьому — наближене значення для першої та другої точок галуження, відповідно. Обчислення проводилися до досягнення точності 10^{-6}

Таблиця

$P(\xi)$	Точки галуження	
	$\approx \lambda_1$	$\approx \lambda_2$
$\mathrm{const} = 1$	0.119788	0.418697
$\cos^2 \frac{\pi}{2}\xi$	0.282143	0.804951
$\lvert \sin \pi\xi \rvert^2$	0.185714	0.671427

Список літератури

Андрийчук, М. И., Войтович, Н. Н., Савенко, П. А., Ткачук, В. П. (1993). *Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы.* Киев: Наукова думка.

Подлевський Б. М. (2013). Обчислення точних похідних детермінанта матриці. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математ. та інформ., 20,* 42—48.

Подлевський, Б. М. (2014). *Двосторонні методи розв’язування нелінійних спектральних задач*. Київ: Наукова думка.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

М. В. Приймак, Л. П. Дмитроца, М. З. Олійник
Тернопільський національний технічний університет імені І. Пулюя, Тернопіль, Україна
dmytrotsa.lesya@gmail.com

Функції зі змінним періодом є важливою областю досліджень у багатьох теоретичних та практичних напрямках. Особливу увагу при цьому привертають питання, які в сукупності можна розглядати як *окремий* розділ наближеного подання (наближення, апроксимації) функцій. Чому саме окремий напрям? Щоб відповісти на це запитання та розглянути деякі задачі *наближення* функцій зі змінним періодом, зупинимось спочатку на питаннях оглядового характеру щодо самого поняття наближення функцій.

Задача наближення функції $f\left(x\right)$, що належить деякій множині функцій F (множина наближуваних функцій), в загальному випадку рівнозначна задачі про її заміну близькою до неї іншою, більш простою і зручною, функцією $g\left(x\right)$ із фіксованої множини G (множини наближуючих функцій). Особливої ваги наближення набуває для задач практики, коли виникає потреба наближення емпіричних функцій, заданих у вигляді графіка чи, наприклад, таблиці.

Питання наближення функцій бере свій початок з робіт Д. Бернуллі, Ж. Лагранжа, Б. Тейлора, Ж. Фур'є. Основи теорії наближення функцій закладені П. Л. Чебишовим, який вперше поставив і дослідив проблему про многочлени, що найменше відхиляються від даної функції. Фундаментальні результати про можливості наближення неперервних на відрізку функцій многочленами належить К. Веєрштрасу, який довів теореми про наближення функцій. Продовжив і розвинув теорію наближення функцій поліномами та створив нову вітку теорії функцій — *конструктивну* теорію функцій Н. С. Бернштейн. Суттєві результати з різноманітних питань наближення функцій і рядів Фур'є отримали науковці колишнього СРСР та України, зокрема, М. Лузін, С. Нікольський, С. Стечкін, О. Тіман, П. Ульянов, М. Корнійчук, В. Дзядик, О. Степанець та багато інших.

При розгляді питань наближення функцій в основному обмежуються двома підходами:

— наближення дійсних функцій, заданих, на деякому сегменті $\left[a,b\right]$, для такого наближення використовують алгебраїчні поліноми;

— наближення дійсних періодичних з періодом T функцій, заданих на всій осі $\left(-\infty,+\infty\right)$, тоді для наближення використовують тригонометричні поліноми

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{2\pi}{T}x+b_k\sin\frac{2\pi}{T}x\,.$$

Цей підхід (напрям) можна віднести до *теорії рядів Фур'є*.

Щодо другого підходу, тобто наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами, то дослідження в цьому напрямку мають різноманітні розгалуження в залежності від конкретизації постановки задач, тобто від умов, що накладаються на наближувані функції. Такими умовами можуть бути неперервність функцій, їх диференційовність, модуль неперервності, виконання умови Ліпшіца, наближення неперервних періодичних функцій багатьох змінних тощо. Ці та подібні їм умови в загальному називають конструктивними. Зауважимо при цьому, що хоча конструктивні умови, що накладаються на наближувані періодичні функції, різні, проте без будь яких застережень вважається, що їх *період* T *є постійним*, в найпростішому випадку $T = 2\pi$.

Уважається, що наближення періодичних функцій досліджено достатньо різносторонньо. Проте в роботі Василенко, Дмитроца, Приймак (2014) був визначений новий клас функцій — функції зі змінним періодом, який є розширенням класу періодичної функції. При наближенні функції зі змінним періодом виникає ціла низка проблемних запитань. Щоб сформулювати їх, нагадаємо означення функції зі змінним періодом. Функція $f\left(x\right)$, $x \in I$, де I — область визначення, називається *періодичною зі змінним періодом*, якщо існує така неперервна функція $T\left(x\right) > 0$, що значення функції $f\left(x\right)$ в точках x і $x + T\left(x\right)$ повторюється, тобто

$$f\left(x\right) = f\left(x + T\left(x\right)\right).$$

Функцію $T\left(x\right)$ називають *змінним періодом*. Найпростішими прикладами функцій зі змінним періодом є тригонометричні функції

$$\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha}, x \geq 0, \alpha > 0,$$

для яких їх змінний період

$$T\left(x\right) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha}, x \geq 0.$$

Якщо $\alpha = 1$, отримуємо тригонометричні функції $\sin x, \cos x$ з періодом $T = 2\pi$.

Які ж питання виникають при розгляді задачі наближення функцій зі змінним періодом? Якщо зіставити цю задачу з подібною задачею про наближення періодичних функцій (з постійним періодом), то першочерговими є питання про:

— наявність ортогональної тригонометричної системи функцій зі змінним періодом;

— наявність формул для визначення коефіцієнтів Фур'є тригонометричного ряду.

На деякі із поставлених питань часткові розв'язки отримані раніше. У праці Василенко та ін. (2014) побудована система тригонометричних функцій

$$\sin kx^{\alpha}, \cos kx^{\alpha}, x \geq 0,\ \alpha > 0,\ k = 1, 2, ...,$$

та показано, що вона є ортогональною на інтервалі

$$\left[x_0,\ x_0+T\left(x_0\right)\right],\ x_0>0,$$

із ваговою функцією $\rho\left(x\right)=\alpha\, x^{\alpha-1}$. Якщо врахувати, що для цієї системи її змінний період

$$T\left(x\right)=-x+\left(x^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha},$$

інтервал ортогональності набуває вигляду $\left[x_0,\left(x_0^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha}\right]$. Скалярний добуток визначається за формулою

$$\left(f,g\right)=\int\limits_{x_0}^{x_0+T\left(x_0\right)}\rho\left(x\right)f\left(x\right)g\left(x\right)dx,$$

де $\rho\left(x\right)=\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ — вагова функція. При цьому норма кожної функції системи $\sin kx^{\alpha}$, $\cos kx^{\alpha}$, $k=1,2,\ldots$ рівна $\sqrt{\pi}$.

Ще один важливий результат, що має пряме відношення до теорії наближення функцій зі змінним періодом — розроблено способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом.

Розглянемо тепер питання визначення коефіцієнтів Фур'є функції зі змінним періодом $f\left(x\right)$, при умові, що її змінний період

$$T\left(x\right)=-x+\left(x^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha}.$$

Для цього виберемо тригонометричну систему функцій $\sin kx^{\alpha}$, $\cos kx^{\alpha}$, $k=1,2,\ldots$. Оскільки змінний період цієї системи

$$T\left(x\right)=-x+\left(x^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha},$$

тобто збігається зі змінним періодом функції $f\left(x\right)$, цим забезпечується виконання умови узгодженості змінних періодів наближуваної функції і тригонометричної системи. Наведені результати є підставою записати формули для визначення коефіцієнти Фур'є функції $f\left(x\right)$:

$$a_0=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{x_0}^{\left(x_0^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha}}x^{\alpha-1}f\left(x\right)dx,\ a_k=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{x_0}^{\left(x_0^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha}}x^{\alpha-1}f\left(x\right)\cos kx^{\alpha}dx,$$
$$b_k=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{x_0}^{\left(x_0^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha}}x^{\alpha-1}f\left(x\right)\sin kx^{\alpha}dx \tag{1}$$

Як приклад, розглянемо задачу наближення (побудови скінченого ряду Фур'є) функції

$$f(x)=\operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right),$$

де $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin x\right)$ — знак функції. Для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є використаємо систему функцій $\sin kx^{2/3}, \cos kx^{2/3}$, $x \geq 0$, $k = 1,2,\ldots$, змінний період якої

$$T\left(x\right) = -x + \left(x^{2/3} + 2\pi\right)^{3/2}.$$

Нехай $x_0 = 25$, відповідно

$$T\left(x_0\right) = T(25) \approx 32{,}1276 \;\; T\left(x_0\right) = T\left(25\right) \approx 32{,}1276.$$

При цих значеннях інтервал ортогональності

$$\left[x_0, x_0 + T\left(x_0\right)\right] = \left[25; 57{,}1276\right].$$

Тоді формули (1) набувають вигляду:

$$a_0 = \frac{2}{3\pi}\int\limits_{25}^{57{,}1276} x^{-1/3}\operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)dx,$$

$$a_k = \frac{2}{3\pi}\int\limits_{25}^{57{,}1276} x^{-1/3}\operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)\cos kx^{2/3}dx,$$

$$b_k = \frac{2}{3\pi}\int\limits_{25}^{57{,}1276} x^{-1/3}\operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)\sin kx^{2/3}dx.$$

Результати обчислень коефіцієнтів Фур'є функції $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)$ наведені в таблиці 1. У правій стороні таблиці наведені коефіцієнти Фур'є функції $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin x\right)$ з періодом $T = 2\pi$, обчислені згідно цих же формул, але при $\alpha = 1$.

Порівняння коефіцієнтів Фур'є для функцій

$$f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right) \text{ і } f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin x\right)$$

показує їх «практичну» збіжність. Деякі неузгодженості можна пояснити похибками обчислень притаманним програмному комплексу PTC Mathcad 15, що використовувався при обчисленні. Для графічного представлення функцій зі змінним періодом і їх ряду Фур'є використано програмне забезпечення AdvancedGrapher.

Використовуючи наведені в таблиці коефіцієнти, для функції

$$f\left(x\right) = \operatorname{sign}\left(\sin x^{2/3}\right),$$

побудований її скінчений ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{9} a_k \cos kx^{2/3} + b_k \sin kx^{2/3}.$$

Таблиця 1

№ коефіцієнта	Коефіцієнти Фур'є (з точністю до 10^{-4})			
	Функція зі змінним періодом $f(x) = \mathrm{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)$		Функція з постійним періодом $f(x) = \mathrm{sign}\left(\sin x\right)$	
	Інтервал ортогональності $\left[25; 57{,}1276\right]$		Інтервал ортогональності $\left[0; 2\pi\right] \approx \left[0; 6{,}2832\right]$	
	$a_k,\ k = \overline{0,9}$	$b_k,\ k = \overline{1,10}$	$a_k,\ k = \overline{0,9}$	$b_k,\ k = \overline{1,9}$
0	0.0003		0.0016	
1	−0.0082	1.2732	0.0050	1.2732
2	−0.0003	0.0000	−0.0017	0.0000
3	−0.0082	0.4244	0.0050	0.4244
4	−0.0003	0.0000	−0.0017	0.0000
5	−0.0082	0.2546	0.0050	0.2546
6	−0.0003	0.0000	−0.0017	0.0000
7	−0.0082	0.1818	0.0050	0.1819
8	−0.0003	0.0000	−0.0017	0.0000
9	−0.0082	0.1414	0.0050	0.1415

На рис. 1 показаний графік цього ряду, а також зображено графік функції

$$f\left(x\right) = \mathrm{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)$$

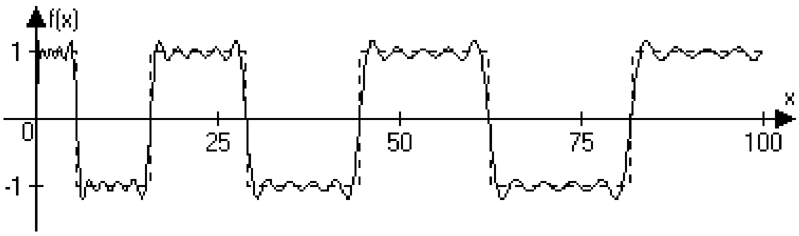


Рис.1. Графіки функції $f(x) = \mathrm{sign}\left(\sin x^{2/3}\right)$ (пунктирна лінія) та її скінченого ряду Фур'є (суцільна лінія).

Порівнюючи ці графіки, видно, що скінчений ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx^{2/3} + b_k \sin kx^{2/3}$$

вже при $n = 9$ достатньо «добре» відтворює форму самої функції.

Список літератури

Василенко, Я. П., Дмитроца, Л. П., Приймак, М. В. (2014). Клас функцій зі змінним періодом. *Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління,* (24), 21—32.

ПРИНЦИП ДИНАМІЧНОГО ВИБОРУ

А. О. Приходько, О. П. Приходько
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна
o.pryhodko@karazin.ua, prykhodkoaa@gmail.com

Проблема вибору придатного варіанту розглядається у просторі елементарних переходів $(X, \mapsto)$, де X являє множину фазових станів , а $\mapsto$ операція елементарного переходу з x_1 в x_2, визначена у формі $x_1 \mapsto x_2$, означена властивостями:

1. $x \mapsto x$, $\forall x \in X$ -рефлексивність.

2. $(x \mapsto y) \wedge (y \mapsto x) = False : x \neq y$ -односпрямованість.

3. $(x \mapsto y) \wedge (y \mapsto z) \Rightarrow (x \mapsto z)$ -транзитивність.

Означення 1. *Слідом* $S(x)$ *з початком в* x *назвемо будь-який ланцюг з найменшим елементом* x. *Тобто,* $\forall y \in S(x) : x \mapsto y$.

Означення 2. *Шляхом* $Sh(x)$ *назвемо максимальний за включенням слід:* $\forall S(x) : S(x) \subseteq Sh(x)$.

Очевидно,

$$Sh(x) = \bigcup_{\substack{S(x) \in L \\ L}} S(x),$$

де $L = \{S(x)\}$ ланцюг впорядкованих за включенням слідів:

$$\forall S_1(x), S_2(x) \in L : (S_1(x) \subseteq S_2(x)) \vee (S_2(x) \subseteq S_1(x)).$$

Проблема вибору придатного варіанту будується за принципом фінального оцінювання на цільовій множині $C \subseteq X$.

Задача влучання з початкового стану x_0 на C полягає у виборі .шляху $Sh(x_0)$ такого, що $Sh(x_0) \cap C \neq \varphi$, надалі такий шлях назвемо допустимим.

Для кожного допустимого шляху $Sh(x_0)$ визначимо кінцевий елемент x_1 з умови

$$x_1 = \inf_C (Sh(x_0) \cap C),\ x_1 \in C,$$

якщо такий елемент існує.

Означення 3. *Множину* $C \subseteq X$ *назвемо замкненою згідно динаміки простору* $(X, \mapsto)$, *якщо для кожного допустимого шляху:* $\forall Sh(x) : Sh(x) \cap C \neq \varphi$ *існує кінцевий елемент* x_1.

Означення 4. *Множиною влучання назвемо множину всіх кінцевих елементів*

$$V(x_0) = \{x = \inf_C (Sh(x_0) \cap C) \in Sh(x_0) :\ \forall Sh(x_0)\} \subseteq C.$$

Нехай правило вибору придатних елементів задано через багатозначне множинне відображення $\pi : 2^X \to 2^X$, визначене для будь-якої множини влучання $V(x_0)$ дає $\pi(V(x_0)) \subseteq C$, тоді множиною придатних елементів $P(x_0)$ буде

$$P(x_0) = \pi(V(x_0)) \subseteq C .$$

Теорема 1 (динамічний принцип вибору придатних варіантів). *Припустимо, що підмножина* $C \subseteq X$ *замкнена згідно динаміки простору* $\left(X, p\right)$, *позначимо через многовид*

$$S_V^*(x_0) = \bigcup_{V(x_0)=P(x_0)} Sh(x_0)$$

множину всіх елементів придатних шляхів, тоді для будь-якої точки $u \in S_V^*(x_0)$ *маємо*

$$P(u) \subseteq P(x),$$

яка реалізується вибором кінцевого відрізка відповідного придатного шляху

$$Sh(u) \subseteq Sh(x_0),\ Sh(u) = \{v \in Sh(x_0) : u \mapsto v\}.$$

Розглянемо приклади реалізацій елементарних переходів та правил вибору придатних варіантів.

Елементарні переходи:

Р1.Фінальні проблеми варіаційного числення та теорії оптимального керування: перехід $x_1 \mapsto x_2$ за допустимою траєкторією з x_1 в x_2.

Р2. Дискретні системи керування, нейронні мережі, графи: перехід $x_1 \mapsto x_2$ за допустимим ланцюжком станів з x_1 в x_2.

Р3. Диференціальні включення, диференціальні ігри: перехід $x_1 \mapsto x_2$ за допустимим рухом з x_1 в x_2.

Правило вибору π:

$\pi 1$. Задачі Лагранжа, Больца зводяться до задачі Маєра з фінальним критерієм $J = \psi(x(T),T) \to extr$.

$\pi 2$. Багатокритеріальна оптимізація: побудова фронту Парето, Слейтера; наближення до ідеального значення I у певній метриці ($I_f = \sup_{\succ} f(D)$ для визначеного часткового порядку).

Фінальний аналіз конфліктів:

K1. у некооперативній грі у формі ситуації рівноваги за Нешем.

K2. у кооперативній грі у формі: точки рівноваги; c-ядра; розв'язку Неймана — Моргенштейна; вектора Шеплі.

N. Нечіткий аналіз складних систем:

1. нечітка оптимізація однокритеріальних і багатокритеріальних задач;

2. керування нечітко заданими об‘єктами.

Поєднання наведених реалізацій відображає:

(P1, $\pi 1$) Класичний принцип динамічного програмування (Bellman, 1957).

(P2, $\pi 1$). Дискретний принцип динамічного програмування, метод гілок та меж в дискретному програмуванні (Aris, 1964).

(P2,N.1). Релаксаційний дискретний принцип динамічного програмування (Lincoln & Rantzer, 2006).

Список літератури

Aris, R. (1964). *Discrete dynamic programming*. New York: Blaisdell.

Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Lincoln, B., & Rantzer, A. (2006). Relaxing dynamic programming. *Automatic Control, IEEE Transactions on, 51* (8), 1249–1260.

ПРО ОКРЕМИЙ ВИПАДОК ГЕОМЕТРІЇ ДОТИЧНОГО РОЗШАРУВАННЯ, ЯКА ІНДУКОВАНА ІНВАРІАНТНИМИ НАБЛИЖЕННЯМИ БАЗОВОГО РІМАНОВА ПРОСТОРУ

О. М. Синюкова
Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна
olachepok@ukr.net

Використання рімановою системи координат з початком координат у довільній точці відповідного рімановa простору дозволило отримати інваріантний ряд типу Тейлора, який залежить не тільки від координат змінної точки, а й від дотичного елемента у ній, як для довільного тензора, так і для об'єкта афінного зв'язку рімановa простору V^n (Синюков, Синюкова, Мовчан, 1994).

Якщо в рядах для компонент g_{ij} метричного тензора простору V^n і для компонент Γ^h_{ij} об'єкта афінного зв'язку простору V^n відмовитися від доданків другого й більших порядків малості відносно компонент y^h дотичного елемента, отримуємо, відповідно, компоненти метричного тензора

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij}(x) + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j}(x) y^\alpha y^\beta \tag{1}$$

і компоненти об'єкта афінного зв'язку

$$\tilde{\Gamma}^h_{\tilde{ij}}(x;y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3} R^h_{(ij)\alpha}(x) y^\alpha , \tag{2}$$

які визначають на V^n геометрію, подібну до фінслерової.

Для тензорних полів, які залежать також і від дотичного елемента, коваріантне диференціювання вводиться за правилом

$$T^h_i(x;y)_{;j} = \frac{\partial T^h_i}{\partial x^j} - y^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha j} \frac{\partial T^h_i}{\partial y^\beta} + \Gamma^h_{j\alpha} T^\alpha_i - \Gamma^\alpha_{ji} T^h_\alpha \tag{3}$$

У відповідності до (3) на підставі (2) отримуємо

$$g_{ij;k} = \frac{1}{3} R_{k(ij)\alpha} y^\alpha$$

(тут «;» позначає коваріантне диференціювання згідно з формулами (3)).

Звідси випливає

Теорема 1. *Цикльована коваріантна похідна метричного тензора рімановa простору V^n відносно його поширеного зв'язку дорівнює нулю.*

Аналогічним чином з (1) знаходимо

$$\tilde{g}_{ij;k} = \frac{1}{3} R_{\alpha(ij)\beta,k}(x) y^\alpha y^\beta .$$

У лівій частині рівності коваріантне диференціювання відбувається за законом (3), а у правій — коваріантна похідна $R_{hijl,k}$ знаходиться за допомогою об'єкту афінного зв'язку Γ_{ij}^{h} простору V^n. Звідси випливає

Теорема 2. *Коваріантна похідна поширеного метричного тензору симетричного ріманова простору дорівнює нулю.*

На дотичному розшаруванні $T(V^n)$ розглянуто метрику

$$ds^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)Dy^{\alpha}Dy^{\beta},$$

де

$$Dy^h = dy^h + \Gamma_{\alpha\beta}^{h}(x)y^{\alpha}dx^{\beta}$$

Такий тип метрики є загальнішим у порівнянні з повними ліфтами і синектичними подовженнями (Широков, 1969).

Досліджені геометричні властивості дотичного розшарування $T(V^n)$ з такою метрикою. Зокрема, розглянуті питання про те, у яких випадках подібні простори $T(V^n)$ допускають нетривіальні (відмінні від афінних) геодезичні відображення у випадку, коли базовий простір V^n є простором постійної кривини або простором Ейнштейна.

Список літератури

Синюков, Н. С., Синюкова, Е. Н., & Мовчан, Ю. А. (1994). Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и ее обобщении. *Известия высших учебных заведений. Математика*, (3), 76—80.

Широков, А. П. (1969). Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки и техники. Серия «Алгебра. Топология. Геометрия»*, (0), 127—188.

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ РОСТУ ПЕТЛЕВИХ АВТОМАТІВ

В. М. Скочко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
vovaskochko@gmail.com

Нехай маємо скінченну множину X, яку називатимемо алфавітом.

Означення 1.1 *Автоматом над алфавітом* X *називається набір*

$$A = \left\langle X, Q, \pi, \lambda \right\rangle,$$

де:

1) Q *— множина (множина внутрішніх станів автомата);*
2) $\pi : X \times Q \to Q$ *— відображення (функція переходів);*
3) $\lambda : X \times Q \to X$ *— відображення (функція виходів).*

Якщо зафіксувати деякий стан q_0 як початковий, то отримаємо ініціальний автомат A_{q_0}.

Інакше кажучи, довільний стан такого автомату кожній літері з X ставить у відповідність деяку літеру і визначає перехід до наступного стану. Якщо розглянути слова над X, то можна визначити відображення, яке кожному слову $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_k$, $\omega_i \in X, k \in \mathbb{N}$ ставить у відповідність деяке слово ω'. Дійсно, для цього достатньо подати першу літеру ω_1 слова ω на початковий стан q_0. При цьому отримаємо деяку іншу літеру ω_1', а також деякий стан q'. Далі подаємо другу літеру слова ω на q'. Продовжуючи цей процес, отримуємо деяке відображення $\phi_{A_{q_0}} : \omega \mapsto \omega'$.

Потужністю автомата A називають кількість його станів, тобто $\left|Q\right|$. Надалі розглядатимемо тільки скінченні автомати, тобто автомати зі скінченною потужністю.

На множині автоматів над X можна визначити операцію композиції наступним чином.

Означення 2.2 *Нехай* A_1 *та* A_2 *— деякі два автомата над* X. *Тоді їх композицією називається автомат* $B = A_1 * A_2$ *з множиною станів* $Q_1 \times Q_2$, *функцією переходів* π *та функцією виходів* λ, *що визначені формулами:*

$$\pi(x,(s_1,s_2)) = (\pi_1(x,s_1), \pi_2(\lambda_1(x,s_1),s_2)),$$
$$\lambda(x,(s_1,s_2)) = \lambda_2(\lambda_1(x,s_1),s_2).$$

Якщо розглядати ініціальні автомати A_{1,q_1} і A_{2,q_2}, то їх композицією є автомат $B = A_1 * A_2$ з початковим станом (q_1, q_2). Варто зазначити, що композиція ініціальних автоматів відповідає їх послідовному підключенню. Тобто для будь-якого слова ω має місце рівність

$$\phi_{B_{(q_1,q_2)}}(\omega) = \phi_{A_{1,q_1}}(\phi_{A_{2,q_2}}(\omega)).$$

Зауважимо, що потужність композиції двох скінченних автоматів дорівнює добутку їх потужностей. Однак серед станів композиції можуть з'явитися тотожні, а також недосяжні(жодна літера жодного слово не потрапить на такий стан). Тому доцільно розглядати так званий редукований автомат, що отримується відкиданням недосяжних станів та заміною кількох тотожних станів на один.

Означення 3.3 *Нехай автомат A має початковий стан q_0. Тоді функцією росту $\gamma_A(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають функцію, що ставить у відповідність кожному n потужність редукованого автомата для $A_{q_0}^n$.*

Якщо розглядати автомати у яких для кожного стану q функція виходу $\pi(\cdot, q)$ є підстановкою на X, то для такого автомата існує обернений автомат. Такий автомат називатимемо оборотним. Зауважимо, що якщо розглядати лише редуковані автомати, то вони утворюють групу відносно операції композиції. З іншого боку, якщо розглянути повне $|X|$-арне дерево T, то кожному оборотному автомату можна поставити у відповідність деякий автоморфізм з $Auto(T)$.

Означення 4.4 *Порядком оборотного автомата називають порядок відповідного йому автоморфізма як елемента групи $Auto(T)$.*

Означення 5.5 *Петлевим ініціальним автоматом називатимемо автомат A_{q_0} для якого виконуються насиупні умови:*

1) функції переходів усіх станів, крім початкового, тотожно дорівнюють тривіальному стану;

2) у початковому стані є рівно одна петля $(\exists! x \in X : \pi(x, q_0) = q_0)$.

Результатом дослідження є наступні твердження.

Теорема 1.6 *Нехай A_{q_0} — петлевий автомат, і $\gamma(n)$ — відповідна функція росту. Тоді існує строго зростаюча послідовність $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ така, що*

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0 \forall i : \quad \gamma(n_i) < C_1 \log n_i + C_2.$$

Теорема 2. 7*Генератриса функції росту петлевого автомата є алгебраїчною тоді й лише тоді, коли він має скінченний порядок.*

Список літератури

Eilenberg, S. (1974). *Automata, languages, and machines* (Vol A). New York; London: Academic Press.

Григорчук, Р. И., Некрашевич, В. В., Сущанский, В. И. (2000). Автоматы, динамические системы и группы. *Труды математического института им. В. А. Стеклова, 231*, 134—214.

ОСНОВНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПОДВІЙНОГО ПОЛЯ В N-ВИМІРНОМУ АФІННОМУ ПРОСТОРІ

П. О. Тадеєв
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна
ptadeyev@gmail.com

Дослідження в диференціальній геометрії векторних полів привертають увагу багатьох учених. Результати в цій галузі, одержані (Бюшгес, 1946; Синцов, 1972; Слухаев, 1967), вже давно стали основою для новіших знахідок. Використання методу зовнішніх форм (Картан, 1963) та інваріантного методу продовжень (Лаптев, 1953) дозволило знайти нові результати як у класичній теорії векторних полів у евклідовому просторі, так і при дослідженні векторних полів у просторах з більш широкою групою перетворень. Наприклад, афінною (Тадеєв, Кравчук, 2006).

Загальновідомо, що з афінним простором A_n, тісно пов'язаний двоїстий афінний простір A_n^*, елементами якого є лінійні оператори задані у просторі A_n. Ці лінійні оператори ще називають *ковекторами*. Геометрично вони задають сукупність паралельних гіперплощин. Таким чином, представляє інтерес вивчення диференціальної геометрії геометричного образу, який складається з вектора й ковектора. Такий геометричний образ надалі будемо називати *подвійним полем*.

Диференціальні рівняння n-вимірного афінного простору A_n, відносно рухомого реперу $(\vec{A},\vec{e}_\alpha)$, мають вигляд:

$$d\vec{A} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha \ , \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta \ , \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,n} \tag{1}$$

Лінійні форми Пфаффа ω^α, ω_β^α підпорядковані, при цьому, рівнянням структури простору A_n :

$$D\omega^\alpha = \left[\omega^\beta \omega_\beta^\alpha\right], \ D\omega_\beta^\alpha = \left[\omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha\right]. \tag{2}$$

Означення. *Подвійним полем в n-вимірному афінному просторі A_n називається відповідність, при якій кожній точці A цього простору зіставлено певним чином пару $(\vec{v},V)$, яка складається з вектора $\vec{v} \in A_n$ та ковектора $V \in A_n^*$.*

Необхідно взяти до уваги, що вектор $\vec{v}$ геометрично являє собою упорядковану пару точок, а ковектор V — упорядковану пару гіперплощин. При цьому будемо виключати з розгляду той випадок, коли вектор $\vec{v}$ лежить в одній із гіперплощин, що визначена ковектором V.

Реперу $(A, \vec{e}_\alpha)$ відповідає взаємний (двоїстий) репер (A, E^α), де E^α — n лінійно незалежних ковекторів простору A_n^*.

Довільний ковектор V розкладається по векторах базису наступним чином

$$V = V_\alpha E^\alpha .$$

Отже, ковектор V матиме координати V_α. Це будемо позначати так $V(V_\alpha)$. У свою чергу вектор $\vec{v}$ має координати

$$v^i : \vec{v} = v^i \vec{e}_i .$$

Ураховуючи співвідношення

$$E^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta ,$$

одержимо деривაційні формули ковекторного реперу у вигляді:

$$dE^\alpha = -\omega^\alpha_\beta E^\beta . \tag{3}$$

Для ефективного використання методу зовнішніх форм Е. Картана будемо вважати, що всі функції, які розглядаються в даній статті є аналітичними в розглядуваному просторі.

Не зменшуючи загальності можемо вибрати системи координат у просторах A_n і A_n^* таким чином, щоб:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{e}_n , \\ V &= E^n . \end{aligned} \tag{4}$$

У випадку, коли елемент подвійного поля $(\vec{v}, V)$ нерухомий одержимо, що

$$d\vec{A} = 0,\ d\vec{e}_n = 0 \text{ і } dE^n = 0,$$

а отже форми $\omega^\alpha, \omega^\alpha_n$, і ω^n_α є головними. Оскільки форми ω^α — лінійно незалежні, то всі інші головні форми ω^α_n і ω^n_α можуть бути виражені через них:

$$\begin{aligned} \omega^\alpha_n &= \Lambda^\alpha_{n\beta}\omega^\beta \\ \omega^n_\alpha &= \Lambda^\alpha_{n\beta}\omega^\beta \end{aligned} \tag{5}$$

Система диференціальних рівнянь (5) називається *основною системою* диференціальних рівнянь подвійного поля в n-вимірному афінному просторі.

Продовжуючи цю систему, одержимо:

$$\begin{aligned} d\lambda^\alpha_{n\beta} + \lambda^\gamma_{n\beta}\omega^\alpha_\gamma - \lambda^\alpha_{n\gamma}\omega^\gamma_\beta &= \lambda^\alpha_{n\beta\gamma}\omega^\gamma, \\ d\lambda^n_{\alpha\beta} - \lambda^n_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - \lambda_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\alpha &= \lambda^n_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

Зі співвідношення (6) видно, що величини $\lambda^\alpha_{n\beta}$ і $\lambda^n_{\alpha\beta}$ утворюють тензори.

Продовжуючи диференціальні рівняння (6), одержимо послідовність фундаментальних об'єктів

$$\{\lambda^{\alpha}_{n\beta},\ \lambda^{n}_{\alpha\beta}, \lambda^{\alpha}_{n\beta\gamma},\ \lambda^{n}_{\alpha\beta\gamma,\dots}\},$$

яка лежить в основі диференціальної геометрії подвійного поля в n-вимірному афінному просторі A_n.

Виділимо поля лінійних геометричних об'єктів, інваріантно пов'язаних з векторним полем.

А. **Поле векторів.** Диференціальні рівняння інваріантності вектора $\vec{v} = v^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ мають вигляд:

$$dv^{\alpha} + v^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta} = v^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \tag{7}$$

В. **Поле векторів.** Диференціальні рівняння інваріантності ковектора $V = V_{\alpha}E^{\alpha}$ мають вигляд:

$$dV_{\alpha} + V_{\beta}\,\omega^{\beta}_{\alpha} = V_{\alpha\beta}\omega^{\beta}. \tag{8}$$

Виділимо величини λ^{α}_{nn}. Їх диференціальне рівняння має вигляд:

$$d\lambda^{\alpha}_{nn} + \lambda^{\beta}_{nn}\omega^{\alpha}_{\beta} = \lambda^{\alpha}_{nn\beta}\omega^{\beta},$$

тобто за структурою подібні до рівнянь (7).

Таким чином, вектор

$$\vec{r} = \lambda^{\alpha}_{nn}\vec{e}_{\alpha}, \tag{9}$$

інваріантно пов'язаний з подвійним полем.

Оскільки поле векторів $\left\{\vec{v}\right\}$ можна трактувати, як поле швидкостей потоку рідини, то векторні лінії цього поля будемо називати в подальшому *лініями течії*.

Ураховуючи, що

$$\vec{v} = \frac{d\vec{A}}{dt}, \text{і } \vec{r} = \frac{d\vec{v}}{dt},\ dt = \omega^{n}\ |_{\omega^{1}=\omega^{2}=\dots=\omega^{n-1}=0},$$

вектор $\vec{\tau}$ є прискоренням потоку рідини в задній точці.

Розглянемо величини $\lambda^{n}_{\alpha n}$. Їх диференціальне рівняння має вигляд:

$$d\lambda^{n}_{\alpha n} - \lambda^{n}_{\beta n}\omega^{\beta}_{\alpha} = \lambda^{n}_{\alpha n\beta}\omega^{\beta},$$

а отже за структурою подібні до рівнянь (8). Таким чином, ковектор

$$N = \lambda^{n}_{\alpha n}E^{\alpha}, \tag{10}$$

інваріантно пов'язаний з подвійним полем. Геометричний зміст ковектора N випливає з наступної формули

$$N = \frac{dV}{dT},\ dt = \omega^{n}\ |_{\omega^{1}=\omega^{2}=\dots\omega^{n-1}=0}.$$

Побудова основної системи диференціальних рівнянь подвійного поля дозволила виділити ряд інваріантних геометричних образів, асоційованих з ним (вектори, ковектори). Подальших досліджень потребує вивчення властивостей подвійних полів у диференціальних околах вищого порядку.

Список літератури

Бюшгес, С. С. (1946). Геометрия векторного поля. *Изв. АН СССР. Мат*, (10), 78—96.

Картан, Е. (1963). *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера.* Москва: Из-во Московского университета.

Лаптев, Г. Ф. (1953). Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. *Труды Моск. матем. о-ва., 2*, 275—382.

Синцов, Д. М. (1972). *Работы по неголономной геометрии.* Київ: Вища школа.

Слухаев, В. В. (1967). Эквиафинно-инвариантые неголономные поверхности потока жидкости. *Труды Томского университета, 191*, 74—80.

Тадеєв, П. О., & Кравчук, О. А. (2006). До геометрії векторного поля n-вимірного афінного простору. *Вісник Київського національного університету. Серія фізико-математичні науки*, *4*, 61—69.

ВИКОРИСТАННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ ПРИРОДИ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛ КОМБІНАТОРНИХ ЧИСЕЛ

Н. К.Тимофієва

МННЦІТіС НАН та МОН України, Київ, Україна

TymNad@gmail.com

Вступ. Основним підходом до розв'язання перелічувальних задач у комбінаториці є метод твірних функцій. Твірна функція (формальний степеневий ряд від однієї або кількох змінних) дає можливість представити суттєву інформацію про числові послідовності, пов'язані з даною перелічувальною задачею. Але загальних підходів отримання твірних функцій досить небагато. Відомі правила їхнього знаходження не носять систематизованого характеру.

Для знаходження комбінаторних формул, які визначають кількість комбінаторних конфігурацій у комбінаторній множині використаємо фрактальну природу цих множин. Ця властивість проявляється при генеруванні комбінаторних конфігурацій методом, який ґрунтується на їхньому впорядкуванні з використанням властивості періодичності (Тимофієва, 2010). При знаходженні формул комбінаторних чисел утворена скінченна послідовність розкладається на прості арифметичні послідовності. Значення утворених послідовностей є многокутні та фігурні числа. Наприклад, значення послідовностей, які задають кількість розбиття n-елементної множини на підмножини та сполучення без повторень у їхній підмножині W_η, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Основна частина. Комбінаторною конфігурацією назвемо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ (Тимофієва, 2007). Позначимо її упорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,\dots,w_\eta^k)$, $\eta\in\{1,\dots,n\}$ — кількість елементів у w^k, $W=\{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k\in\{1,\dots,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q — кількість w^k у W. Під символом $w_j^k\in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки). Комбінаторні конфігурації, одна з яких утворена з $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ вибиранням, можуть утворюватися одна з другої певною операцією.

Означення 1. *Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k=(w_1^k,\dots,w_{\eta^k}^k)$ та $w^i=(w_1^i,\dots,w_{\eta^i}^i)$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k=\eta^i$.*

Означення 2. *Підмножину $W_{\eta^k}\subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи — ізоморфні комбінаторні конфігурації.*

Вважаємо, що комбінаторні множини *самоподібні*, якщо їхні елементи утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхнє впорядкування проводиться за одними і тими ж правилами (наприклад рекурентно-періодичним методом). З цією метою сформулюємо три правила, за якими утворюються (Тимофієва, 2010):

а) інтервал нульового рангу;

б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу);

в) інтервал σ-го рангу.

Множина W будь-якого типу комбінаторних конфігурацій упорядковується інтервалами нульового рангу і процес їхнього впорядкування — періодичний. Згідно з властивістю самоподібності інтервал σ-го рангу упорядкованої множини W складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу. При цьому W одночасно є скінченна та нескінченна, оскільки число n може набувати довільних значень. Підмножина W_η розміщень з повтореннями (або сполучень з повтореннями) — скінченна, а множина W цих же комбінаторних конфігурацій для того ж самого n — нескінченна. Такі властивості характерні для фракталів. Тобто, комбінаторні множини мають фрактальну природу.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу, а інтервал 1-го рангу — з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього впорядкувння, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині.

За певними правилами, які різні для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо скінченну послідовність, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ-го рангу. Тоді формулу комбінаторного числа (кількість w у множині W) подамо σ-значною сумою

$$\sum_{j_\sigma=1}^{H_\sigma}\Big(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{\sigma-1}}\Big(...\Big(\sum_{j_2=1}^{H_2}\Big(\sum_{j_1=1}^{H_1}(h)\Big)\Big)...\Big)\Big),$$

де H_t — кількість інтервалів σ-го рангу, $t\in\{1,...,\sigma\}$, $\sigma\in\{2,...,n\}$, h — кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалі нульового рангу.

Кількість розбиттів у підмножині ізоморфних розбиттів. У літературі наведено формулу кількості розбиттів n-елементної множини на підмножини (блоки) для підмножин ізоморфних розбиттів W_η:

$$S(n;\xi_1^k,...,\xi_\eta^k)=\frac{n!}{\xi_1^k!\ \xi_2^k!...\xi_\eta^k!}, \tag{1}$$

де ξ_l^k — кількість елементів у $w_l^k\subset w^k$.

Вираз (1) у Кофман (1975) виводиться з використанням властивостей вибірок, тобто кожен блок $w_l^k \subset w^k$ розглядається як r-неупорядкована вибірка без повторень.

Як доведено в Кофман (1975), кількість сполучень без повторень в інтервалах нульового рангу та інтервалах σ-го рангу у множині сполучень без повторень, якщо $\eta = 2$ та $n \in \{1, 3, ..., 2j-1\}$, дорівнює кількості розбиттів n-елементної множини на підмножини w^k в W_η. Але для $\eta = 2$, якщо $n \in (2, 4, ..., 2j\}$, $j = \overline{1, n}$, а $\xi_1^k = \xi_2^k$, кількість w^k в W_2 дорівнює

$$\frac{n\,!}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!\left(\dfrac{n}{2}\right)!\ 2!}\ .$$

З цього видно, що одержана формула (1), яка виведена з використанням властивостей вибірок, для випадку, якщо $\xi_l^k = \xi_p^k$, $l, p \in \{1, ..., \eta^k\}$, приводить до некоректного результату.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай $n = 4$, $\eta = 3$, $\xi_1^k = 2$, $\xi_2^k = 1$, $\xi_3^k = 1$. Кількість нетотожних розбиттів у $W_\eta \subset W$ для цих параметрів дорівнює $S(4; 2, 1, 1) = 6$. Але, згідно з виразом (1)

$$S\ (4; 2, 1, 1) = \frac{4!}{2!\ 1!\ 1!} = 12\,.$$

Приклад 2. Нехай $n = 4$, $\eta = 2$, $\xi_1^k = 3$, $\xi_2^k = 1$, а $S(4; 3, 1) = 4$. За формулою (1) кількість w_l^k в W_η також 4:

$$S\ (4; 3, 1) = \frac{4!}{3!\ 1!} = 4\,.$$

Приклад 3. Нехай $n = 6$, $\eta = 3$, $\xi_1^k = 2$, $\xi_2^k = 2$, $\xi_3^k = 2$, $S(6; 2, 2, 2) = 15$. За виразом (1) одержимо величину

$$S\ (6; 2, 2, 2) = \frac{6!}{2!\ 2!\ 2!} = 90\,.$$

Як випливає з прикладів, якщо розбиття w^k містить два і більше блоки w_l^k, кількість елементів у яких однакова, за формулою (1) одержуємо некоректний результат.

Узагальнимо вираз (1). Розбиття n-елементної множини A на підмножини утворюється рекурентними комбінаторними операторами: арифметичним та транспозицією, а їхня множина складається з підмножин ізоморфних розбиттів. Використовуючи властивість періодичності, задамо кількість w^k в W_η скінченними послідовностями. Значення цих послідовностей утворюють арифметичний трикутник. Знайшовши суму їхніх значень, запишемо число $S(n; \xi_1^k,..., \xi_\eta^k)$, яке визначає кількість розбиттів у W_η

$$\tilde{S}(n; \xi_1^k,..., \xi_\eta^k) = \frac{n!}{\xi_1^k!\ \xi_2^k!...\xi_\eta^k!\ \ m_1!m_2!...m_\chi!}, \tag{2}$$

де m_s — кількість підмножин $w_l^k, w_t^k \subset w^k$, у яких $\xi_j^k = \xi_t^k$, $s = 1,...,\chi$, χ — число блоків, кожний з яких об’єднує w_j^k з однаковою кількістю ξ_j^k. Сумарна кількість розбиттів, що знаходяться у підмножинах W_η, у яких w^k містить однакову кількість блоків, відповідає числам Стирлінга другого роду, тобто

$$S^*(n,\eta) = \sum_{j=1}^{P_\eta(n)} \tilde{S}(n; \xi_1^k,...,\xi_\eta^k),$$

де $S^*(n,\eta)$ — числа Стирлінга другого роду, $P_\eta(n)$ — кількість неупорядкованих розбиттів числа n у підмножині ізоморфних розбиттів числа, кількість компонентів у яких збігається з кількістю блоків розбиття w^k у підмножині W_η.

Використовуючи вираз (2), обчислимо кількість розбиттів у W_η

для прикладу 1:

$$\tilde{S}\ (4; 2, 1, 1) = \frac{4!}{2!\ \ 1!\ \ 1!\ \ 2!} = 6;$$

для прикладу 2:

$$\tilde{S}\ (4; 3, 1) = \frac{4!}{3!\ \ 1!\,0!} = 4;$$

для прикладу 3:

$$\tilde{S}\ (6; 2, 2, 2) = \frac{6!}{2!\ \ 2!\ \ 2!\ \ 3!} = 15.$$

Для $n = 6$, $\eta = 3$ число Стирлінга другого роду дорівнює

$$S^*(6,3)=\frac{6\,!}{4!\,1!\,1!\,2!}+\frac{6!}{3!\,2!\,1!\,0!}+\frac{6!}{2!\,2!\,2!\,3!}=90\,.$$

Висновок. Отже, рекурентнтно-періодичний метод генерування комбінаторних конфігурацій утворює комбінаторну множину, яка має фрактальну природу. Це дозволяє утворювати скінченні послідовності, сума значень яких визначає кількість w^k у W. Тобто, для розв’язування перелічувальних задач в комбінаториці використовуємо властивості фракталів.

Список літератури

Кофман, А. (1975). *Введение в прикладную комбинаторику* (Пер. с фран.). Москва: Наука.

Тимофієва, Н. К. (2007). Теоретико-числові методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ.

Тимофієва, Н. К. (2010). Рекурентно-періодичний метод для генерування комбінаторних конфігурацій. У кн. *Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали десятого міжвузівського науково-практичного семінару* (15—16 жовтня 2010 р.). Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т, с. 138—141.

ГЕОСУПЕРАЛГЕБРА ГАМИЛЬТОНА — АРХИМЕДА (ГЕОСУПЕРАЛГЕБРА ГАМИЛЬТОНИОНОВ)

А. Ф. Турбин

Национальный педагогический университет имени М. Драгоманова, Киев, Украина

turbin@imath.ua

Назовём кватернион

$$\vec{q} = q_0\vec{1} + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$$

рациональным, если q_m — рациональные числа ($q_m \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел). В множестве рациональных кватернионов $H(\mathbb{Q})$ фиксируем кватернионы

$$\vec{q}\left(\sqrt{m}\right) = q_0\vec{1} + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$$

с нормой $\|\vec{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$, равной $\sqrt{m}$, $m \in \mathbb{Q}$.

Число $\nu(m)$ рациональных кватернионов с фиксированной нормой $\sqrt{m}$ конечно и $\overline{\lim}_m \nu(m) = \propto$.

Кватернион $\vec{q}\left(\sqrt{m}\right)$ с нормой $\sqrt{m}$ — точка на гиперсфере

$$S_3\left(\sqrt{m}\right) = \left\{\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in E^4 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m\right\}$$

радиуса $\sqrt{m}$. Выпуклую оболочку $\nu(m)$ точек на гиперсфере $S_3\left(\sqrt{m}\right)$ я называю *гамильтоновым многогранником* $HP_4\left(\nu(m)\right)$ в E^4 или *гамильтонионом*.

Группа изотропии любого гамильтонова многогранника изоморфна группе симметрии гиперкуба Л. Шлефли (и двойственной ему 16-ячейки (8, 24, 32, 16), гипероктаэдра Б. Н. Делоне) порядка $2^{4\cdot} \cdot 4! = 384$ (рис. 1).

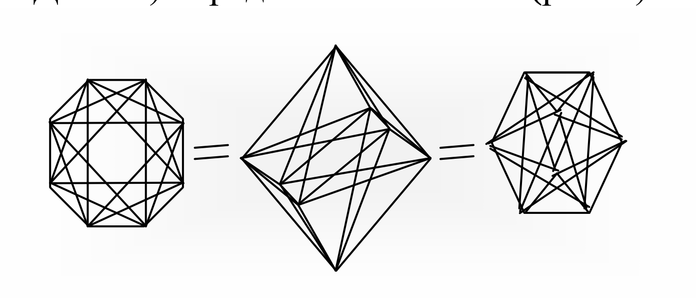


Рис. 1. Гипероктаэдр Б. Н. Делоне (8, 24, 32, 16)

В множестве гамильтоновых многогранников допустимы две бинарные операции и три унарные операции, переводящих многогранник(и) в многогранник.

Сумма многогранников $HP_4^1\left(\nu(m_1)\right)$ и $HP_4^2\left(\nu(m_2)\right)$ (по определению) есть гамильтонов многогранник (рис. 2)

$$HP_4\left(\nu(m_1)+\nu(m_2)\right) = HP_4^1\left(\nu(m_1)\right) \oplus HP_4^2\left(\nu(m_2)\right)$$

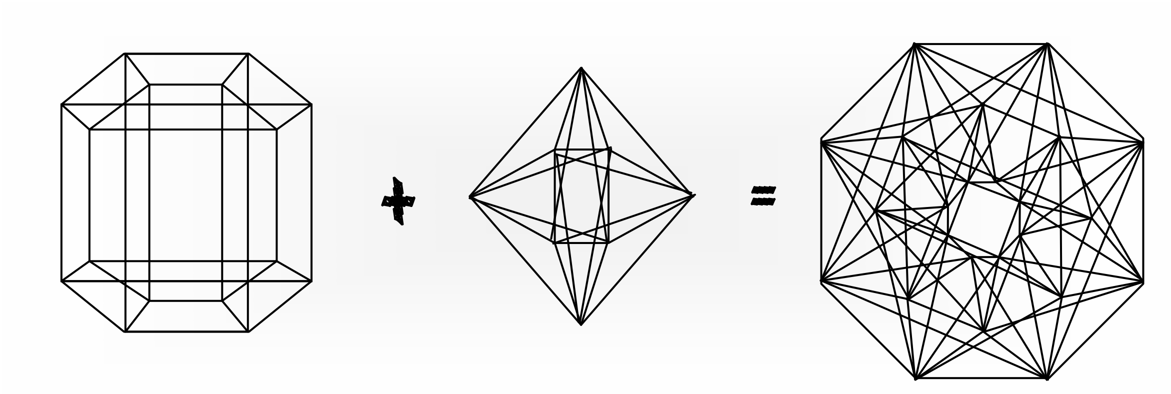


Рис. 2. Сумма гиперкуба Л. Шлефли и гипероктаэдра Б. Н. Делоне

Теорема. *Сумма* s *(*$s \geq 2$*) гипероктаэдров Б.Н. Делоне — правильный многогранник* $\left(8s, 32s, 32s, 8s\right)$*, трёхмерные грани которого октаэдры* (рис. 3).

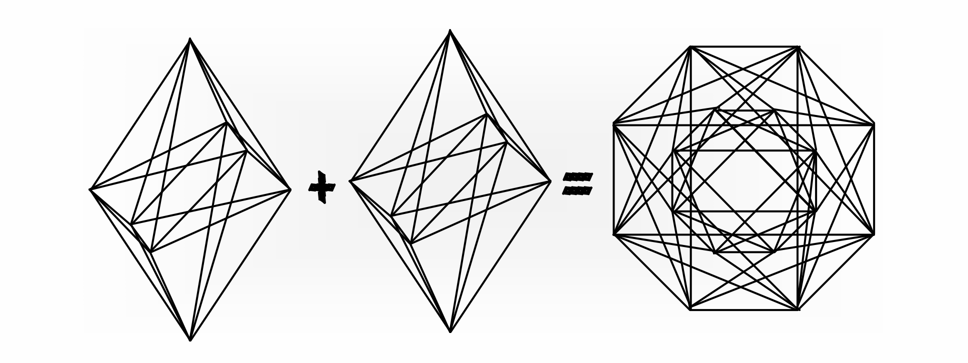


Рис. 3. Сумма двух гипероктаэдров Б.Н. Делоне (8, 24, 32, 16)

Произведение многогранников (по определению) есть гамильтонов многогранник

$$HP_4\left(\sigma(\nu(m_1), \nu(m_2))\right) = HP_4^1\left(\nu(m_1)\right) \otimes HP_4^2\left(\nu(m_2)\right).$$

(Число вершин многогранника $HP_4\left(\sigma(\nu(m_1), \nu(m_2))\right)$ равно не произведению $\nu(m_1)\cdot\nu(m_2)$, а числу попарных произведений кватернионов — вершин многогранников.

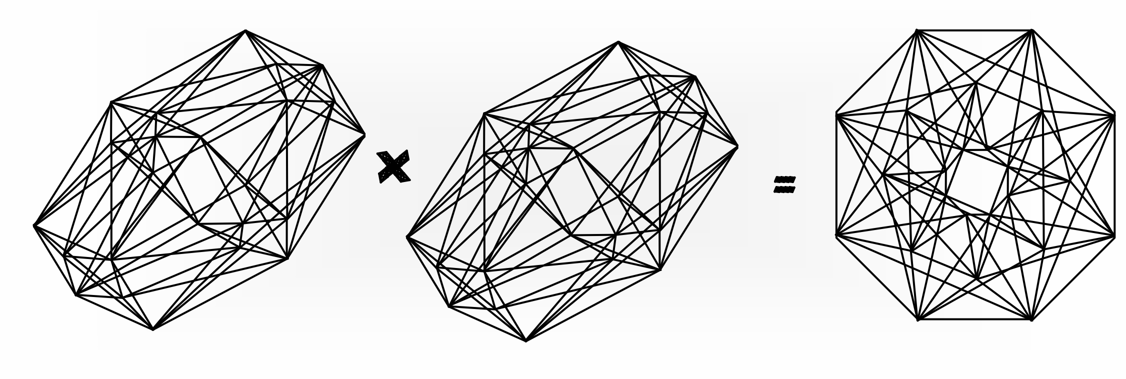


Рис. 4. Квадрат мегаоктаэдра Л. Шлефли — гиперкубооктаэдр А. И. Лобанова (24. 96, 96, 24)

$$((\vec{1}+\vec{i})\cdot(\vec{1}-\vec{i})=2\cdot\vec{1},\ (\vec{1}+\vec{i})\cdot(\vec{1}+\vec{j})=\vec{1}+\vec{j}+\vec{i}+\vec{k})$$

Умножение на рациональный скаляр λ**:** если $HP_4\left(\nu(m)\right)$ — гамильтонов многогранник, то $HP_4\left(\lambda\cdot\nu(m)\right)$ тоже гамильтонов многогранник при подходящем рациональном λ (рис. 5).

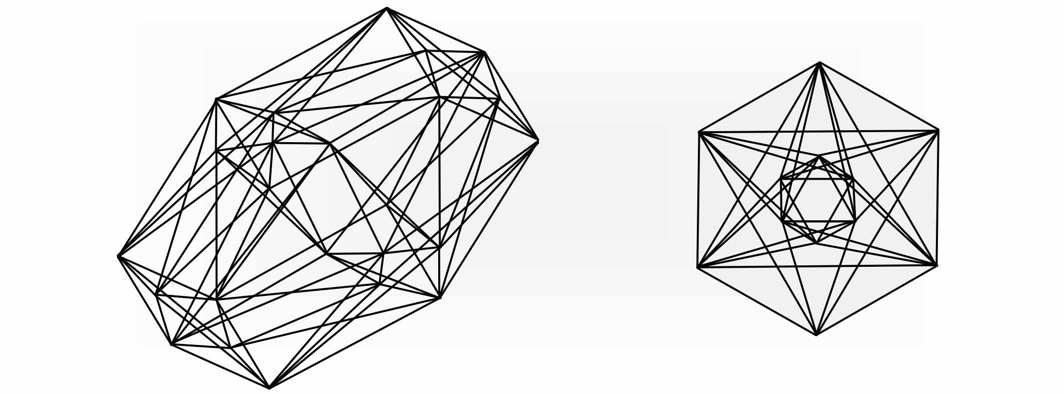


Рис. 5. Мегаоктаэдр Л. Шлефли (24, 96, 96, 24)
и его половина — мегаоктаэдр Г. Брэндта (12, 48, 48, 12)

$\frac{1}{2}$-*архимедово усечение многогранника* $HP_4\left(\nu(m)\right)$. Пусть $HP_4\left(\nu(m),b(m)\right)$ — гамильтонов многогранник, где $b\left(m\right)$ — число рёбер. Многогранник $HP_4\left(b(m)\right)$ — гамильтонов многогранник. (Рис. 6.)

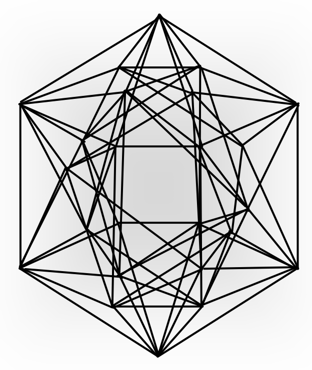


Рис. 6. $\frac{1}{2}$—усечённый гипероктаэдр Б. Н. Делоне (8, 24, 32, 16)

$\frac{1}{3}$-*архимедово усечение многогранника* $HP_4\left(\nu(m)\right)$. Пусть $HP_4\left(\nu(m),b(m)\right)$ – гамильтонов многогранник, где $b(m)$ – число рёбер. Многогранник $HP_4\left(2b(m)\right)$ – гамильтонов многогранник (рис. 7).

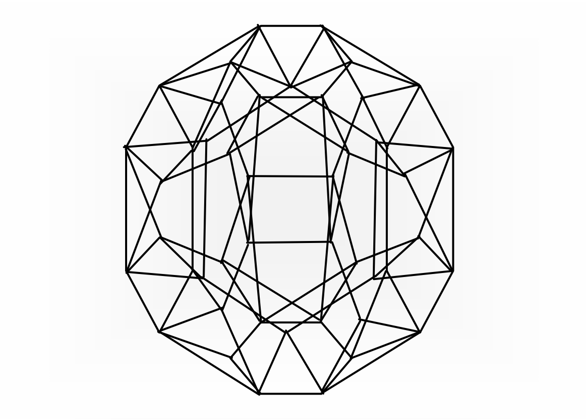


Рис. 7. $\frac{1}{3}$**—**усечённый гипероктаэдр Б. Н. Делоне (8, 24, 32, 16)

Определение. *Множество гамильтоновых многогранников* $GSAHP_4\left(\lambda,+,\cdot,\frac{1}{2}-,\frac{1}{3}-\right)$ *с указанными унарными и бинарными операциями я называю геосупералгеброй гамильтонионов.*

Дилемма Д. Гильберта. *Три (!?) гамильтониона (24, 96, 96, 24): мегаоктаэдр Л. Шлефли или мегакубооктаэдр А. И. Лобанова или усечённый гипероктаэдр Б. Н. Делоне представлены на рис. 8. Все три гамильтониона заполняют четырёхмерное пространство.*

Какой из этих гамильтонионов представлен на рис. 8?

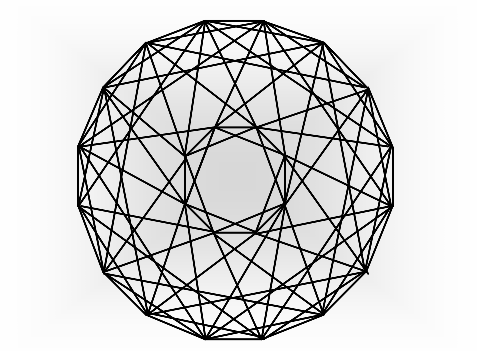


Рис. 8. Решение: указать **все** трёхмерные грани

Если группа изотропии гиперкуба Л. Шлефли действует на множестве флагов гамильтонова многогранника просто транзитивно, то многогранник правильный.

На множестве флагов гамильтонова многогранника $HP_4\left(\nu(365)\right)$, у которого 192 вершины группа изотропии гиперкуба Л. Шлефли действует 5-транзитивно.

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ НЕГЛАДКИХ УГНУТИХ ФУНКЦІЙ

Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

lfundak@gmail.com

Вступ. У Цегелик (1987, 1989, 2013) побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та багатьох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для апроксимації функцій, розробки чисельних методів обчислення визначених інтегралів, розв’язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку та їхніх систем. Оскільки для певного класу функцій некласична мажоранта Ньютона збігається зі самою функцією, то побудовані чисельні методи для цього класу функцій є точними, якщо не враховувати операцій заокруглення.

У Підківка, Цегелик (2002), Фундак, Цегелик (2005а, 2005б, 2009) розглянуто інший підхід до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, який використано для розробки чисельних методів розв’язування задачі Коші для диференціальних рівнянь та їхніх систем, які є точними на іншому класі функцій, якщо не враховувати операцій заокруглення.

У статті побудуємо чисельний метод відшукання максимального значення довільної негладкої вгнутої функції однієї дійсної змінної, використовуючи властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично (Фундак, Цегелик, 2005б).

Побудова методу. Нехай функція дійсної змінної $y = f(x)$ задана своїми значеннями у деяких точках x_i $(i = 0,1,...,n)$:

$$f\left(x_i\right) = y_i,\ i = 0,1,...,n,$$

де $y_i \le M$, $i = 0,1,...,n$, а M — деяка стала.

Припустимо, що для $f(x)$ ми побудували некласичні діаграму Ньютона $\tilde{\delta}_f$ і мажоранту Ньютона $\tilde{M}_f(x)$ (Фундак, Цегелик, 2005б). Нехай $\tilde{M}_f\left(x_i\right) = H_i$, $i = 0,1,...,n$, $I = \left\{i_1, i_2, ..., i_k\right\}$ — множина вершинних індексів діаграми $\tilde{\delta}_f$. Запровадимо числові нахили діаграми $\tilde{\delta}_f$ за формулою

$$\tilde{R}_i = \frac{e^{H_{i+1}}}{e^{H_i}} = e^{H_{i+1} - H_i},\ i = 0,1,...,n-1,$$

$$\tilde{R}_n = 0.$$

Тоді для числових нахилів будуть виконуватись умови:

$$\tilde{R}_{i_1} > \tilde{R}_{i_2} > ... > \tilde{R}_{i_{k-1}} > \tilde{R}_{i_k} = 0,$$
$$\tilde{R}_{i_s} = \tilde{R}_{i_{s+1}} = ... = \tilde{R}_{i_{s+1}-1}.$$

Припустимо, що $f(x)$ — довільна негладка вгнута функція на проміжку $[a,b]$. Виберемо на $[a,b]$ систему точок $x_0, x_1, ..., x_n$, де $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,...,n$, $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ і знайдемо значення функції $y = f(x)$ у цих точках.

$$f(x_i) = a_i,\ i = 0,1,...,n.$$

Оскільки $f(x)$ — угнута функція на проміжку $[a,b]$, то числові нахили некласичної діаграми Ньютона, побудованої за значеннями функції в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ визначатимуться за формулою

$$\tilde{R}_i = e^{a_{i+1}-a_i},\ i = 0,1,...,n-1,$$
$$\tilde{R}_n = 0.$$

У цьому випадку

$$\tilde{R}_0 > \tilde{R}_1 > ... > \tilde{R}_{n-1} > \tilde{R}_n.$$

Алгоритм відшукання максимального значення функції $f(x)$ є таким. Спочатку визначаємо $\tilde{R}_0$. Якщо $\tilde{R}_0 < 1$, то за точку максимуму функції беремо точку x_0. Якщо $\tilde{R}_0 > 1$, то визначаємо $\tilde{R}_{n-1}$. При $\tilde{R}_{n-1} > 1$ за точку максимуму функції беремо x_n. Припустимо, що $\tilde{R}_0 > 1$ і $\tilde{R}_{n-1} < 1$. Тоді шукаємо значення індекса ν $(\nu = 1,2,...)$, для якого виконується умова

$$\tilde{R}_\nu > 1,\ \tilde{R}_{\nu+1} < 1.$$

Тоді за точку максимуму функції $f(x)$ беремо x_ν. Очевидно, якщо $x = \alpha \in [a,b]$ є точкою максимуму функції, а $\overline{x}$ — знайдена згідно алгоритму точка максимуму, то $|\overline{x} - \alpha| < h$.

Приклад. Знайти максимум опуклої функції

$$E = \frac{1}{H_N}\left(N + H_N - \left(\frac{N}{n} - 1\right)\left(n - \frac{1}{2}\ln n - C_1\right)\right),$$

де $N = 10^3$, $H_N = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k}$, $C_1 = \dfrac{1}{2}\ln 2\pi$ на проміжку $[40;\ 55]$.

Функція E виражає математичне сподівання кількості порівнянь, необхідних для пошуку запису у файлі, методом блокового пошуку у випадку розподілу ймовірностей звертання до записів за законом Зіпфа (Цегелик, 2010). Оскільки функція є опуклою, то розглядатимемо функцію

$$-E = \frac{1}{H_N}\left(\left(\frac{N}{n} - 1\right)\left(n - \frac{1}{2}\ln n - C_1\right) - N - H_N\right),$$

яка при $n \in \left[40;55\right]$ буде вгнутою. Щоб графік не був під віссю розглядатимемо $-E + 20$. Тоді $E_{\text{оп}} = (-E + 20)_{\text{оп}} - 20$.

Застосувавши описаний вище алгоритм одержимо такі результати. У табл. 1 наведено значення максимуму n_{on}, обчислені при різних h.

Таблиця 1

h	$n_{\text{оп}}$ — максимум	$E_{\text{оп}}$
0.2	48.6	-14.974059
0.15	48.7	-14.973953
0.1	48.8	-14.973896
0.05	48.85	-14.973896

Висновки. Розроблено чисельний метод відшукання екстремуму довільних негладких вгнутих функцій з використанням нового підходу до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

Список літератури

Підківка, Л., Цегелик, Г. (2002). Інтерполяційний метод мажорантного типу розв’язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. *Вісник Львівського ун-ту. Серія приклад. матем. та інформ., 5,* 26—31.

Фундак, Л. І., Цегелик, Г. Г. (2009). Про обчислювальну стійкість інтерполяційного методу мажорантного типу розв’язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. *Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія математика і інформатика, 18,* 151—156.

Фундак, Л. І., Цегелик, Г. Г. (2005б). Новий підхід до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій та його застосування. *Волинський математичний вісник. Серія приклад. матем., 3* (12), 186—200.

Фундак, Л., Цегелик, Г. (2005а). Екстраполяційний метод мажорантного типу розв’язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, *Вісник Львівського ун-ту. Серія приклад. матем. та інформ., 10,* 41—48.

Цегелик, Г. Г. (1987). Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке. *Доклады АН УССР, Сер. А,* (6), 18-19.

Цегелик, Г. Г. (1989). Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение. *Укр. мат. журн., 41* (9), 1273—1276.

Цегелик, Г. Г. (2010). *Моделювання та оптимізація доступу до інформації файлів баз даних для однопроцесорних і багатопроцесорних систем: монографія*. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка.

Цегелик, Г. Г. (2013). *Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: Монографія*. Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка.

СТРУКТУРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ $\mathcal{HS}_{k}$-ГРАФІВ

М. П. Хоменко, Т. М. Виврот
Київ, Україна

Тут будуємо теорію графів певного підкласу одного класу k-класифікації всіх простих скінченних графів заданого порядку n запропонованої в 1972—73 рр. М. П. Хоменком сім'ї k-класифікацій, $k = 0(1)n$ всіх простих скінченних графів порядку n з погляду неіснування чи існування 1-фактора в самому графі чи в певних його підграфах, а саме $\mathcal{HS}_{k}$-графів — максимально насичених ребрами $\mathcal{S}_{k}$-графів. Ідея k-класифікацій всіх простих скінченних графів порядку n, $k = 0(1)n$ при $k = 0$ започаткована в 1971 р. авторами цієї роботи. Е побудованій теорії $\mathcal{HS}_{k}$-графів значне місце посідає дослідження структурних властивостей графів. Знайдена структура графів цього класу дає можливість побудувати всі такі графи заданого порядку n. Установлено критерій належності графа до класу $\mathcal{HS}_{k}$-графів. З цього критерію, як наслідок, при $k = 0$ випливає відома теорема Татта про примітивні графи (графи без 1-факторів) (Tutte, 1947). Дослідження проводимо створеним авторами цієї роботи загальним методом дослідження структурних властивостей графів різних класів кожної k-класифікації, $0 \le k \le n$, всіх простих скінченних графів порядку n, названим нами методом локалізованих переміжних ланцюгів.

У класі простих (без петель і кратних ребер) скінченних неорієнтованих $\mathcal{S}_{k}$-графів (Хоменко, Виврот, 1996, 2000, 2006, 2012) розглядаємо підклас $\mathcal{S}_{k}1$-графів G, $G = \left(G^0, G^1\right)$, кожен з яких містить принаймні одну таку пару несуміжних вершин a_{l_1}, a_{l_2}, що при добавленні до графа G ребра $\left(a_{l_1} a_{l_2}\right)$ з доповнюючого до нього графа $\hat{G}$ отримаємо уже не $\mathcal{S}_{k}$-граф $G_{k,\neg 1}$, $G_{k,\neg 1} = G + \left(a_{l_1} a_{l_2}\right)$, а граф, який, отож, містить $\mathcal{K}$-k-ку $\left\{a_{l_{t'}}\right\}_{t'=3}^{k+2}$. Властивості цих графів використовуємо для дослідження властивостей та структури $\mathcal{HS}_{k}$-графів.

Ребро $\left(a_{l_1} a_{l_2}\right)$, $\left(a_{l_1} a_{l_2}\right) \in \hat{G}^1$, називаємо k-факторизуючим ребром $\mathcal{S}_{k}1$-графа G, а множину $\mathcal{B}^*_{k,1}$, $\mathcal{B}^*_{k,1} = \left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{k+2}$, вершин $\mathcal{S}_{k}1$-графа G — його k-початком. Нехай $f_{k,1} = \mathbf{f}_{[1]}\left(G \setminus \left(\mathcal{B}^*_{k,1}\right)\right)$. При цьому

$$\mathbf{f}^1_{[1]}\left(G_{k,\neg 1} \setminus \left(\left\{a_{l_{t'}}\right\}_{t'=3}^{k+2}\right)\right) = f^1_{k,1} + \left(a_{l_1} a_{l_2}\right).$$

Порядок n $\mathcal{S}_{k}1$-графа G задовольняє умовам: $n - k \equiv 0 \pmod 2$ і

$n \geq \mathscr{k} + 2$. $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-граф G порядку n, $n - \mathscr{k} \equiv 0(\bmod 2)$ є $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графом, бо кожне ребро доповнюючого до нього графа $\hat{G}$ є $\mathscr{k}$-факторизуючим ребром графа G. Кожен граф G порядку n, $n - \mathscr{k} \equiv 1(\bmod 2)$ є $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}$-графом, тому $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графом порядку n, $n - \mathscr{k} \equiv 1(\bmod 2)$ є повний граф K_n, тобто $\mathscr{N}$-граф $\mathscr{N}_{n,n-1,2-n}$ [2].

Кожна з вершин a_{l_1}, a_{l_2} $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графа G разом з довільними іншими $\mathscr{k} - 1$ його вершинами складає $\mathscr{S}$-$\mathscr{k}$-ку як графа G, так і графа $G_{\mathscr{k},\neg 1}$, а тому лише одна $\mathscr{k}$-тка графа $G_{\mathscr{k},\neg 1}\left[\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}\right]$ є $\mathscr{K}$-$\mathscr{k}$-ткою як графа $G_{\mathscr{k},\neg 1}\left[\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}\right]$, так і графа $G_{\mathscr{k},\neg 1}$. Отож, граф $G_{\mathscr{k},\neg 1}$ є $(\mathscr{SK})_{\mathscr{k}}$-графом. Неважко переконатися, що $G^1\left[\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}\right] = \varnothing$, тобто множина $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ незалежна в $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G. Отже, $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-граф містить незалежну множину вершин потужності $\geq \mathscr{k} + 2$; степінь вершини a_{l_t}, $a_{l_t} \in \mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$, в $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G, тобто $\rho(a_{l_t}, G)$, не перевищує $n - \mathscr{k} - 2$.

Твердження 1. У $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графі G порядку n, $n \geq \mathscr{k} + 4$, $n - \mathscr{k} \equiv 0(\bmod 2)$ вершина a_{l_i}, $a_{l_i} \in G^0$, разом з довільними іншими $\mathscr{k} - 1$ його вершинами складають $\mathscr{S}$-$\mathscr{k}$-ку графа $G + u$ при довільному u, $u \in \hat{G}^1$ тоді і лише тоді, коли $\rho(a_{l_i}, G) = n - 1$.

Відносно переміжних ланцюгів і множин $\mathscr{A}_{\mathscr{k},1}$, $\mathscr{B}^{**}_{\mathscr{k},1}$ і $\mathscr{B}_{\mathscr{k},1}$ див. роботи Хоменко, Виврот (1996, 2000, 2006, 2012)..

Лема 1. У $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G з $\mathscr{k}$-початком $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ не існує локалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюга $c'_{l_{\tau_1},l_{\tau_2}} = c'\left(a_{l_{\tau_1}}, a_{l_{\tau_2}}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1} = \left\{a_{l_{\tau_t}}\right\}_{t=1}^{\mathscr{k}+2}$, який з'єднує довільні вершини $a_{l_{\tau_1}}$, $a_{l_{\tau_2}}$ $\mathscr{k}$-початку $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ графа G.

Твердження 2. Якщо в $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G порядку n, $n \geq \mathscr{k} + 4$ з $\mathscr{k}$-початком $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ існує напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюг парної довжини $c'_{l_t,l_{\zeta_t}} = c'\left(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $a_{l_t} \in \mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$, $\left|c'^{1}_{l_t,l_{\zeta_t}}\right| \geq 0$, $t \in \mathbb{N}_{\mathscr{k}+2}$, то $\rho\left(a_{l_{\zeta_t}}, G\right) \leq n - \mathscr{k} - 2$.

Твердження 3. Якщо в $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G з $\mathscr{k}$-початком $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюги парної довжини $c'_{l_t,l_{\zeta_t}} = c'\left(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_t,l_{\zeta_t}}\right| \geq 0$, $t = 1(1)(\mathscr{k} + 2)$, то $\left\{a_{l_{\zeta_t}}\right\}_{t=1}^{\mathscr{k}+2}$ — також $\mathscr{k}$-початок графа G.

Лема 2. Якщо $\left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{\mathscr{k}+2}$ — $\mathscr{k}$-початок $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графа G, то $\left\{a_{l_{\zeta_t}}\right\}_{t=1}^{\mathscr{k}+2}$ також буде його $\mathscr{k}$ -початком $\mathscr{B}'^{*}_{\mathscr{k},1}$ тоді й лише тоді, коли в графі G існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюги парної довжини $c'_{l_t,l_{\zeta_t}} = c'\left(a_{l_t}, a_{l_{\zeta_t}}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_t,l_{\zeta_t}}\right| \geq 0$, $t = 1(1)\left(\mathscr{k}+2\right)$.

Наслідок. Вершина a_{ι_i} $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графа G разом з довільними іншими $\mathscr{k}-1$ його вершинами складає $\mathscr{S}$ - $\mathscr{k}$ -ку графа $G+u$ при довільному u, $u \in \hat{G}^1$ тоді й лише тоді, коли a_{ι_i} знаходиться на непарній віддалі на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюгу

$$c'_{l_t,\iota_i} = c'\left(a_{l_t}, a_{\iota_i}; G, f_{\mathscr{k},1}\right),\ a_{l_t} \in \mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1},\ c'^{0}_{l_t,\iota_i} \cap \overline{u} = \varnothing .$$

Сформульованому твердженню 2 можна надати наступну форму.

Твердження 4. Якщо в $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G порядку n, $n \geq \mathscr{k}+4$ з $\mathscr{k}$ -початком $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ для вершини a_{ι_i} має місце рівність $\rho\left(a_{\iota_i}, G\right) = n-1$, то вершина a_{ι_i} знаходиться на непарній віддалі на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюгу $c'_{l_t,\iota_i} = c'\left(a_{l_t}, a_{\iota_i}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $a_{l_t} \in \mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$.

Лема 3. Якщо G — $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-граф порядку n, $n \geq \mathscr{k}+4$, $n-\mathscr{k} \equiv 0 \pmod 2$ з $\mathscr{k}$ -початком $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ і $a_{\iota_i} \in G^0$, то $\rho\left(a_{\iota_i}, G\right) = n-1$ тоді й лише тоді, коли вершина a_{ι_i} знаходиться на непарній віддалі на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюгу

$$c'_{l_t,\iota_i} = c'\left(a_{l_t}, a_{\iota_i}; G, f_{\mathscr{k},1}\right),\ a_{l_t} \in \mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}.$$

Твердження 5. Довільна $\mathscr{k}$ -тка $\left\{a_{\iota_{j_r}}\right\}_{r=1}^{\mathscr{k}}$, $\left\{a_{\iota_{j_r}}\right\}_{r=1}^{\mathscr{k}} \subset \mathscr{B}_{\mathscr{k},1}$, $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графа G є $\mathscr{K}$ - $\mathscr{k}$ -ою графа $G+u$ при деякому u, $u \in \hat{G}^1$, $\partial u \cap \left\{a_{\iota_{j_r}}\right\}_{r=1}^{\mathscr{k}} = \varnothing$.

Твердження 6. У $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графі G не існує напівлокалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюга

$c'_{\iota_{j_r},\iota_{j_s}} = c'\left(a_{\iota_{j_r}}, a_{l_{p_r}}, \ldots, a_{l_{p_s}}, a_{\iota_{j_s}}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{\iota_{j_r},\iota_{j_s}}\right| \geq 1$, $a_{\iota_{j\theta}} \in \mathscr{B}_{\mathscr{k},1}$, $\left(a_{\iota_{j\theta}}, a_{l_{p\theta}}\right) \notin f^{1}_{\mathscr{k},1}$, $\theta = r, s$.

Наслідок. Множина $\mathscr{B}_{\mathscr{k},1}$ вершин $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графа G незалежна в G.

Лема 4. Якщо в $\mathscr{S}_{\mathscr{k}}1$-графі G з $\mathscr{k}$ -початком $\mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$ існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюги непарної і парної довжини $c'_{l_{t'},l_p} = c'\left(a_{l_{t'}}, a_{l_p}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_{t'},l_p}\right| \geq 1$, $c'_{l_{t''},l_p} = c'\left(a_{l_{t''}}, a_{l_p}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_{t''},l_p}\right| \geq 0$, $a_{l_{t'}}, a_{l_{t''}} \in \mathscr{B}^{*}_{\mathscr{k},1}$, то в графі G існує вершина a_{l_λ}, $a_{l_\lambda} \in \mathscr{B}_{\mathscr{k},1}$, через яку проходить довільний напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюг

$c'_{l_t,l_p} = c'\left(a_{l_t}, a_{l_p}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $a_{l_t} \in \mathscr{B}^*_{\mathscr{k},1}$, а ребро $\left(a_{l_p}, a_{l_\lambda}\right)$ або $\in G^1$, або $\in \hat{G}^1$ і не є $\mathscr{k}$-факторизуючим ребром графа G.

Лема 5. Якщо в $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графі G існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{\mathscr{k},1}$ ланцюги непарної і парної довжини $c'_{l_{t'},l_p} = c'\left(a_{l_{t'}}, a_{l_p}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_{t'},l_p}\right| \geq 1$, $c'_{l_{t''},l_p} = c'\left(a_{l_{t''}}, a_{l_p}; G, f_{\mathscr{k},1}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_{t''},l_p}\right| \geq 0$, $a_{l_{t'}}, a_{l_{t''}} \in \mathscr{B}^*_{\mathscr{k},1}$, то існує і суміжна з вершиною a_{l_p} відповідна їй вершина a_{l_λ}, $a_{l_\lambda} \in \mathscr{B}_{\mathscr{k},1}$, $a_{l_p} \sim a_{l_\lambda}$, і якщо $a_{l_{p'}} \sim a_{l_{\lambda'}}$, $a_{l_{p''}} \sim a_{l_{\lambda''}}$, то ребро $\left(a_{l_{p'}}, a_{l_{p''}}\right)$ або $\in G^1$, або $\in \hat{G}^1$ в залежності від того, чи $l_{\lambda''} = l_{\lambda'}$, чи $l_{\lambda''} \neq l_{\lambda'}$.

Теорема 1. Граф порядку n, $n \geq \mathscr{k} + 2$, є $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графом тоді й лише тоді, коли він є або $\mathscr{N}$-графом $\mathscr{N}_{n,k,2+\mathscr{k}}\left(\left\{n_r\right\}_{r=1}^{k+\mathscr{k}+2}\right)$, $n_r \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 2\right)$, $r = 1(1)\left(k + \mathscr{k} + 2\right)$, $0 \leq k \leq \left(n - \mathscr{k} - 2\right)/2$, $n - \mathscr{k} \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, 2\right)$, або $\mathscr{N}$-графом $\mathscr{N}_{n,n-1,2-n}$, $n - \mathscr{k} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 2\right)$.

Теорема 1 дає можливість побудувати всі $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графи порядку n, $n \geq \mathscr{k} + 2$. З цієї теореми, яка описує структуру всіх $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графів порядку n, $n \geq \mathscr{k} + 2$ випливає наступний критерій належності графа до класу $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графів.

Теорема 2. Граф порядку n, $n \geq \mathscr{k} + 2$, є $\mathscr{HS}_{\mathscr{k}}$-графом тоді і лише тоді, коли існує така підмножина S множини його вершин G^0, що $p_0^{н}\left(G \setminus (\mathrm{S})\right) = |\mathrm{S}| + \mathscr{k} + 2$.

Множиною S при $\left|G^0\right| - \mathscr{k} \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, 2\right)$ є множина A центральних вершин $\mathscr{N}$-графа $\mathscr{N}_{n,k,2+\mathscr{k}}$, $n - \mathscr{k} \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, 2\right)$, а при $\left|G^0\right| - \mathscr{k} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 2\right)$ множиною S є порожня множина $\varnothing$.

Наслідок (теорема IV (Tutte, 1947)). Граф G є примітивним графом тоді і лише тоді, коли існує така підмножина S множини його вершин G^0, що $p_0^{н}\left(G \setminus (\mathrm{S})\right) > |\mathrm{S}|$.

Список літератури

Tutte, W. T. (1947). The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, *22*, 107–111.

Хоменко М. П., Виврот Т. М. (1996, 2000, 2006, 2012). *Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука: Матеріали конференції*: П'ята, (с. 464); Восьма (с. 382-384); Одинадцята (с. 636); Чотирнадцята (с. 252—254). Київ: НТУУ «КПІ».

ЕКВІВАЛЕНТНІ ЕПІМОРФІЗМИ ВІЛЬНИХ ГРУП

С. Й. Цешковський
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
tsesh@ukr.net

У роботі розглянуто адитивні вільні абелеві групи та їх епіморфізми у скінчено породжену групу.

Нехай F_0, F_1 — вільні групи, G — скінчено породжена група, а $\varphi_0 : F_0 \to G$; $\varphi_1 : F_0 \to G$ — епіморфізми.

Означення 1 (Шарко, 1979). Епіморфізми φ_0, φ_1 називаються *еквівалентними*, якщо існує такий ізоморфізм $a : G \to G$, що $\varphi_0 = \varphi_1 \circ a$.

Означення 2. Епіморфізм $\varphi : F \to G$ називається *мінімальним*, якщо $\operatorname{rank} F = \mu\left(G\right)$ — мінімальна кількість твірних групи G.

Лема 1. *Нехай F — вільна група, $\varphi : F \to G$ — епіморфізм. Тоді F можна представити у вигляді*

$$F = F_0 \oplus F_1$$

так, що

$$\varphi\Big|_{0 \oplus F_1} \equiv 0;\ \varphi\Big|_{F_0 \oplus 0} : F_0 \oplus 0 \to G$$

— *мінімальний епімофізм.*

Нехай

$$0 \leftarrow G \overset{\alpha_0}{\leftarrow} F_0 \overset{\alpha_1}{\leftarrow} F_1 \leftarrow 0$$

— мінімальна резольвента групи G як $\mathbb{Z}$-модуля (Ленг, 1965), де F_0, F_1 — вільні абелеві групи, α_0 — мінімальний епіморфізм. Нехай $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^k$ та $x_1^1, x_2^2, \ldots, x_1^l$ — базиси в F_0 та F_1 Загальновідомо (Ленг, 1965), що в цих базисах епіморфізм α_1 представляється деякою матрицею $G\left(\alpha_0, \alpha_1\right)$.

Означення 3 (Ленг, 1965). Найбільший спільний дільник елементів матриці $G\left(\alpha_0, \alpha_1\right)$ називається *першим детермінантним ідеалом* групи G (позначається (m)).

Нехай $torsG \subset G$ — періодична підгрупа. За теоремою про структуру скінчено породженої абелевої групи

$$torsG = \bigoplus_{j=1}^{q} \left\langle g_j \right\rangle$$

— її мінімальний розклад за твірними $g_1, g_2, \ldots g_q$, причому

$$\operatorname{ord} g_{j+1} \vdots \operatorname{ord} g_j$$

($\operatorname{ord} g_j$ – порядок елемента g_j), тому $m = \operatorname{ord} g_1$, матриця $G\left(\alpha_0, \alpha_1\right)$має діагональний вид.

Означення 4. Якщо$\varphi, \phi : F \to G$ — мінімальні епіморфізми і в F зафіксовано деякий базис $x_1, x_2, \ldots x_n$, існує

$$\det a = \det G\left(\alpha_0, \alpha_1\right),$$

який називається *визначником ізоморфізму* a.

Лема 2. *Якщо* $\varphi, \phi : F \to G$ *— мінімальні епіморфізми, а*

$$a, \tilde{a} : F \to F; a \neq \tilde{a},$$

тоді в будь якому базисі $x_1, x_2, \ldots x_n$ *групи* F

$$\det a \equiv \det \tilde{a}\left(\operatorname{mod} m\right).$$

Означення 5. З леми 2 випливає, що для будь якої пари мінімальних епіморфізмів $\varphi, \phi : F \to G$ коректно визначено деякий елемент $D\left(\varphi, \phi\right) \in \mathbb{Z}/m$, який називається *взаємним визначником* мінімальних епіморфізмів φ та ϕ. (Якщо епіморфізми φ та ϕне є мінімальними, будемо вважати $D\left(\varphi, \phi\right) = 1$.

Лема 3. *Якщо* $\varphi, \phi, \theta : F \to G$ *— мінімальні епіморфізми, тоді*

$$D\left(\varphi, \theta\right) = D\left(\varphi, \phi\right) \cdot D\left(\phi, \theta\right).$$

Наслідок. Якщо $\varphi, \phi : F \to G$ – мінімальні епіморфізми, тоді

$$D\left(\varphi, \phi\right) = \left(D\left(\phi, \varphi\right)\right)^{-1}.$$

Лема 4. *Нехай* $\varphi : F \to G$ *– мінімальний епіморфізм,* F *— вільна група,* G *— скінчена група і*

$$G = \bigoplus_{j=1}^{q} \left\langle g_j \right\rangle$$

— її мінімальний розклад за твірними $g_1, g_2, \ldots g_q$,

$$\operatorname{ord} g_{j+1} \vdots \operatorname{ord} g_j,$$

тоді в F *існує базис* $x_1, x_2, \ldots x_q$, *у якому* φ *має вигляд*

$$\varphi\left(x_j\right) = u_j g_j,$$

u_j *– оборотний елемент в* $\mathbb{Z}/m_j$, *де* $m_j = \operatorname{ord} g_j$.

Теорема. *Якщо*$\varphi, \phi : F \to G$ *— мінімальні епіморфізми та* $D\left(\varphi, \phi\right) = 1$, *то* φ *та* ϕ *еквівалентні.*

Список літератури

Ленг, С. (1965). *Алгебра*. Москва: Наука.
Шарко, В. В. (1979). *О гладких функціях на многообразиях*. Киев: Институт математики АН УССР (препринт 79.22).

ПРО УЗАГАЛЬНЕНі ЯДРА ТИПУ ТЕПЛІЦА

О. Б. Чернобай

Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь, Україна,
chernobai.olga@gmail.com

В ряді робіт розглядалися деякі узагальнення теорем Бохнера — Крейна про експоненціальне зображення додатно-визначеної функції на деякому інтервалі $I = (-l,l)$, $(0 \prec l \leq \infty)$. Неперервна, додатно визначена функція $k(x)$ на інтервалі I має зображення Бохнера — Крейна

$$k(t) = \int e^{i\lambda t} d\sigma(\lambda), \quad t \in I, \tag{1}$$

тут $d\sigma(\lambda)$ — борелівська скінченна міра.

Разом з тим, ще С. Н. Бернштейном були введені експоненціально опуклі функції (див. [1]). Вони відрізняються тим, що повинне бути додатно визначене ядро

$$K(x,y) = k(x+y), (x,y \in I),$$

а не $k(x-y)$. Для таких функцій відоме інтегральне зображення типу (1)

$$k(t) = \int e^{\lambda t} d\sigma(\lambda), \quad t \in I,$$

де $d\sigma(\lambda)$ — невід'ємна міра. Міра $d\sigma(\lambda)$ завжди визначається по k однозначно (див. [2], р.8, п.3.10).

Розглядувана задача є продовженням робіт [3], [4], в яких побудовано і досліджено інтегральне зображення узагальнених ядер Тепліца на основі теорії узагальнених власних функцій. Такі ядра вивчалися і раніше, до вказаних робіт, але за допомогою класичного аналізу. Згадані дослідження пов'язані з додатно визначеними функціями.

У доповіді вивчаються подібні ядра, але пов'язані з експоненціально випуклими функціями.

Нехай $I = (-l,l)$, де $0 \prec l \leq \infty$. $I_1 = I \cap \left[0,\infty\right), I_2 = I \cap \left(-\infty,0\right)$. Позначимо для довільних $\alpha,\beta = 1,2$

$$I_{\alpha,\beta} = \left\{ t = x + y \middle| x \in I_\alpha, y \in I_\beta \right\}, \tag{2}$$

тобто $I_{11} = [0,2l), I_{12} = (-l,l), I_{21} = (-l,l), I_{22} = (2l,0)$, що є важливою відмінністю від роботи [3].

Розглянемо обмежене додатно визначене ядро

$$I \times I \ni \left\langle x,y \right\rangle \to K(x,y) \in C^1.$$

Ядру K поставимо у відповідність чотири функції $I_{\alpha,\beta} \ni t \mapsto k_{\alpha\beta}(t) \in C^1$ такі, що

$$K(x,y) = k_{\alpha\beta}(x+y), \quad \langle x,y \rangle \in I_\alpha \times I_\beta, \quad \alpha,\beta = 1,2. \tag{3}$$

Усі функції $k_{\alpha\beta}$ вважаємо неперервними на їх областях визначення.

Кожне додатно визначене ядро ермітове, тобто $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

Теорема. *Для кожного ядра типу* (2) *має місце інтегральне зображення*

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda(x+y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} 1_\alpha(x) 1_\beta(y) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \ (x,y) \in I \times I. \tag{4}$$

Тут 1_α *— характеристична функція інтервалу* I_α , $\alpha = 1,2$ *і* $d\sigma(\lambda) = \left(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\right)_{\alpha,\beta=1}^{2}$ *— скінченна, невід'ємна матрична борелівська міра на* $\mathbb{R}^1$ *(*$d\sigma_{11}(\lambda)$ *і* $d\sigma_{22}(\lambda)$ *є невід'ємними скінченними скалярними мірами,* $d\sigma_{12}(\lambda) = \overline{d\sigma_{21}(\lambda)}$ *має скінченну варіацію на* $\mathbb{R}^1$*).*

Навпаки, кожне ядро типу (4) з скінченною невід'ємною матрично значною мірою $d\sigma(\lambda)$ *є узагальненим ядром.*

Міра $d\sigma(\lambda)$ *в зображенні (4) визначається однозначно.*

Доведення теореми базується на теорії розкладів за узагальненими власними векторами самоспряженого оператора, який діє в гільбертовому просторі, побудованому за таким ядром. За ядром K будуємо гільбертовий простір H_K, в якому діятиме наш оператор, та квазіядерне оснащення цього простору з неперервним вкладенням D в $H_{K,+}$:

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+} \supset D.$$

Запровадимо квазіскалярний добуток у просторі H_K:

$$(f,g)_{H_K} = \iint_{I\times I} K(x,y) f(y) \overline{g(x)} dx dy = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint_{I_\alpha \times I_\beta} k_{\alpha\beta}(x+y) f(y) \overline{g(x)} dx dy, \ f,g \in L^2, \tag{5}$$

де L^2 гільбертовий простір L_2 побудований по мірі Лебега dx на I.

У просторі H_K розглянемо оператор

$$\mathrm{Dom}(A') = C_0^\infty(I) \ni u \mapsto A'u = \frac{du}{dx} := (Lu)(x),$$

$C_0^\infty(I)$ – сукупність функцій, які анулюються в околах границі та в околі нуля.

Оператор A' ермітів відносно скалярного добутку (5). У нього рівні дефектні числа, оскільки в цьому просторі діє класична інволюція

$L^2 \ni f(x) \mapsto \overline{f(x)} \in L^2$ і оператор A' дійсний відносно цієї інволюції, тому його дефектні числа рівні і він має самоспряжене розширення в цьому гільбертовому просторі H_K.Потім робимо розклад за узагальненими власними векторами оператора або його самоспряженого розширення в цьому просторі H_K.

Відповідна рівність Парсеваля і дає нам зображення (4).

Список літератури

1. Бернштейн, С. Н. (1952). Об определении и свойствах аналитических функций вещественной переменной. В кн. *Собр. соч.* (Т. 1).
2. Berezansky, Yu. M. (1968). Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoinnt Operators. Providence: Amer. Math. Soc., R.I. AMS, 1968. (Russion edition: Kiev: Naukova Dumka, 1965).
3. Berezansky, Yu. M., & Chernobai, O. B. (2000). On the theory of generalized Toeplitz kernels. *Укр. мат. журн.*, *52* (11), 1458—1472.
4. Чернобай, О. Б. (2005). Спектральне зображення для узагальнених операторнозначних ядер Тепліца. *Укр. мат. журн.*, *57* (12), 1698—1710.

ТОТАЛЬНА МОНОТОННІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ МОМЕНТІВ

М. М. Чип
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
bogdan_markovych@yahoo.com

Послідовність $\left\{c_n\right\}_0^\infty$ дійсних чисел, скінченні різниці якої

$$\Delta^m c_n = \sum_{\nu=0}^{m} \left(-1\right)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} c_{n+\nu}$$

для значень $m = 1, 2, 3, \ldots$ мають однакові знаки, називається тотально монотонною послідовністю.

Класичні моменти на відрізку $\left[a;b\right]$ дійсної осі зображаються у вигляді

$$\sigma_n = \int_a^b x^n d\mu\left(x\right),$$

для значень $n = 0, 1, 2, \ldots$, в якому функція $\mu\left(x\right)$ монотонно неспадна з нескінченною кількістю точок зростання. Скінченні різниці класичних моментів справджують співвідношення

$$\Delta^m \sigma_n = \int_a^b x^n \left(x-1\right)^m d\mu\left(x\right).$$

Знак підінтегральної функції та знаки кінців проміжку інтегрування визначають характер тотальної монотонності послідовності класичних моментів.

Узагальнені моменти на відрізку $\left[a;b\right]$ дійсної осі зображаються у вигляді

$$S_{k+l} = \int_a^b a_k\left(x\right) b_l\left(x\right) d\mu\left(x\right)$$

для значень $\left(k,l\right) = 0, 1, 2, \ldots$, в якому підінтегральна функція інтегрована з мірою $d\mu\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$. Покладемо

$$B_{m,l}\left(x\right) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(-1\right)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} b_{l+\nu}\left(x\right),$$

$$A_{m,k}\left(x\right) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(-1\right)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} a_{k+\nu}\left(x\right).$$

Скінченні різниці узагальнених моментів справджують співвідношення

$$\Delta^m S_{k+l} = \int_a^b a_k\left(x\right) B_{m,l}\left(x\right) d\mu\left(x\right),$$

$$\Delta^m S_{k+l} = \int_a^b b_l(x) A_{m,k}(x) d\mu(x).$$

Знаки підінтегральних виразів та знаки кінців проміжку інтегрування визначають характер тотальної монотонності послідовності узагальнених моментів.

Список літератури

Дзядик, В. К. (1981). Про узагальнення проблеми моментів. *ДАН УРСР, Серія А*, *6*, 8–12.

Чип, М. М. (2013). Зображення узагальнених моментів на відрізку дійсної осі. *Вісник НУ «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки*, *768*, 71—75.

ІНТЭГРАЛЬНАЕ ВЫЯЎЛЕННЕ КВАТЭРНІЁННЫХ МАНАГЕННЫХ У СЭНСЕ У. С. ФЁДАРАВА ФУНКЦЫЙ ЧАТЫРОХ РЭЧАІСНЫХ ЗМЕННЫХ

У. А. Шылінец
Філіял БДУІР МРК, Мінск, Рэспубліка Беларусь
shilinets@bspu.by

У. А. Гусеў (1965) вывучаў кватэрніённыя манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенныя) функцыі (Фёдоров, 1958) на плоскасці. У працах (Стэльмашук, Шылінец, 2005; Стэльмашук, Шылінец, Падабед, 2006; Стэльмашук, Шылінец, Андрэева, 2010; Шылінец, Скрабец, 2013) даследаваліся F-манагенныя кватэрніённыя функцыі трох і чатырох рэчаісных зменных.

У дадзенай працы даследуюцца F-манагенныя кватэрніённыя функцыі, адрозныя ад раней разгледжаных. Для гэтых кватэрніённых функцый атрымана інтэгральнае выяўленне і рэшана краявая задача.

Няхай D — аднязвязны абсяг чатырохмернай рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^4(t,x,y,z)$.

Разгледзім кватэрніённыя функцыі выгляду

$$f = f_1(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)i + f_3(t,x,y,z)j + f_4(t,x,y,z)k,$$

$$p = \lambda_1 t + \lambda_2 xi + \lambda_3 yj + \lambda_4 zk,$$

дзе f_1, f_2, f_3, f_4 — рэчаісныя функцыі класа $C^1(D)$, $1, i, j, k$ — базіс алгебры кватэрніёнаў
($i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, \quad ik = -j$), $\lambda_n\,(n = 1,2,3,4)$ — такія рэчаісныя лікі, што $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \lambda_1^2$.

Для любых пунктаў $M(t,x,y,z)$ і $M'(t',x',y',z')$ абсягу D мяркуем

$$\Delta f = f(M') - f(M),\ \Delta p = p(M') - p(M).$$

Азначэнне. Кватэрніённая функцыя f называецца *манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава* (F-манагеннай) (Фёдоров, 1958) па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, калі існуе такая кватэрніённая функцыя

$$\theta = \theta_1(t,x,y,z) + \theta_2(t,x,y,z)i + \theta_3(t,x,y,z)j + \theta_4(t,x,y,z)k$$

($\theta_i(t,x,y,z)(i = 1,2,3,4)$ — аднозначныя рэчаісныя функцыі пункта (t,x,y,z) абсягу D), што для любога фіксаванага пункта $M \in D$ і любога зменнага пункта $M' \in D$ маем

$$\Delta f = \Delta p\theta(M) + \alpha(M,M'),\ \text{дзе}\ \frac{\alpha(M,M')}{\rho} \to 0\ \text{пры}\ \rho \to 0,\ \rho = \left|\overline{MM'}\right|.$$

Лёгка паказаць, што калі функцыя f — F-манагенная па функцыі p у абсягу D, то існуюць частковыя вытворныя $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$, і пры гэтым

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\theta, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\theta, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\theta, \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\theta. \tag{1}$$

Абазначым функцыю θ праз $\frac{\partial f}{\partial p}$. Тады роўнасці (1) можна запісаць у выглядзе

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p}. \tag{1'}$$

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай V — чатырохмерны абмежаваны абсяг з граніцай σ ($\sigma \subset D, V \subset D$). Мяркуем далей, што p і функцыя f, F-манагенная па p, вызначаны на замкнутай трохмернай паверхні σ, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага.

Патрабуецца знайсці ў любым унутраным пункце абсягу V значэнне функцыі f, F-манагеннай па p, калі вядомы яе значэнні на паверхні σ.

Для функцыі $f = f_1(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)i + f_3(t,x,y,z)j + f_4(t,x,y,z)k$ і адвольнага пункта $M(x_0, y_0, z_0) \notin \sigma$ лічым (Фёдоров, 1957):

$$\begin{aligned} I_\sigma = \int_\sigma \{&\alpha_1(\lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda_2 i \frac{\partial \phi}{\partial x} - \lambda_3 j \frac{\partial \phi}{\partial y} - \lambda_4 k \frac{\partial \phi}{\partial z}) + \alpha_2(\lambda_2 i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \\ &+\alpha_3(\lambda_3 j \frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \alpha_4(\lambda_4 k \frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial z})\} f d\sigma, \end{aligned} \tag{2}$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні σ у яе бягучым пункце $P(t,x,y,z)$,

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (t-t_0)^2},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r^4},\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r^4},\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r^4},\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{t-t_0}{r^4}.$$

Няхай M — любы дадзены пункт абсягу D, $M \notin \bar{V}$.

Тэарэма 1. Для любой кватэрніённай функцыі f, F-манагеннай па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, маем $I_\sigma = 0$, дзе I_σ вызначаецца роўнасцю (2).

Доказ. Па формуле Астраградскага атрымоўваем

$$I_\sigma = \int_V \{\frac{\partial}{\partial t}((\lambda_1 \frac{\partial\phi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial z})f) + \frac{\partial}{\partial x}((\lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x})f) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}((\lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial y})f) + \frac{\partial}{\partial z}((\lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial z})f)\}dV =$$

$$= \int_V \{(\lambda_1\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} -\lambda_2 i\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} - \lambda_3 j\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t} - \lambda_4 k\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t})f + (\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial t} +$$

$$+(\lambda_2 i\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} + \lambda_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2})f + (\lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x})\frac{\partial f}{\partial x} + (\lambda_3 j\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial y} + \lambda_1\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})f +$$

$$+(\lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y} + (\lambda_4 k\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial z} + \lambda_1\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2})f + (\lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial z}\}dV =$$

$$= \int_V \{\lambda_1(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2})f + (\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial t} +$$

$$+(\lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x})\frac{\partial f}{\partial x} + (\lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y} + (\lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial z}\}dV.$$

Адсюль і з умоў $(1')$ F-манагеннасці функцыі f па функцыі p у абсягу D, паколькі

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

атрымоўваем

$$I_\sigma = \int_V \{(\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial z})\lambda_1\frac{\partial f}{\partial p} +$$

$$+(\lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x})\lambda_2 i\frac{\partial f}{\partial p} + (\lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial y})\lambda_3 j\frac{\partial f}{\partial p} + (\lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial z})\lambda_4 k\frac{\partial f}{\partial p}\}dV =$$

$$= \int_V \{(\lambda_1^2\frac{\partial\phi}{\partial t} -\lambda_2\lambda_1 i\frac{\partial\phi}{\partial x} - \lambda_3\lambda_1 j\frac{\partial\phi}{\partial y} - \lambda_4\lambda_1 k\frac{\partial\phi}{\partial y} - \lambda_2^2\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\lambda_2 i\frac{\partial\phi}{\partial x} -$$

$$-\lambda_3^2\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\lambda_3 j\frac{\partial\phi}{\partial y} - -\lambda_4^2\frac{\partial\phi}{\partial t} + \lambda_1\lambda_4 k\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial p}\}dV =$$

$$= \int_V \{(\lambda_1^2 -\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2)\frac{\partial\phi}{\partial t}\}dV = 0.$$

Тэарэма 2. Калі кватэрніённая функцыя f з'яўляецца F-манагеннай па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, то для любога пункта M, які ляжыць унутры V, маем

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2\lambda_1}\int_\sigma \{(\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial t} + \alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial x} + \alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial y} + \alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial z})\lambda_1 + (\alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial x})\lambda_2 i +$$

$$+(\alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial y})\lambda_3 j + (\alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial z})\lambda_4 k\}fd\sigma.$$

Доказ. Няхай σ_1 — сфера з цэнтрам у пункце $M(t_0, x_0, y_0, z_0)$, якая размешчана ўнутры σ. Калі l — радыус сферы σ_1, то маем

$$I_{\sigma_1} = \int_{\sigma_1} \{(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 i + \alpha_3\lambda_3 j + \alpha_4\lambda_4 k)\frac{\partial\phi}{\partial t} + (\alpha_2\lambda_1 - \alpha_1\lambda_2 i)\frac{\partial\phi}{\partial x} + (\alpha_3\lambda_1 - \alpha_1\lambda_3 j)\frac{\partial\phi}{\partial y} +$$

$$+(\alpha_4\lambda_1 - \alpha_1\lambda_4 k)\frac{\partial\phi}{\partial z}\} f d\sigma_1 =$$

$$= \int_{\sigma_1} \{(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 i + \alpha_3\lambda_3 j + \alpha_4\lambda_4 k)\frac{t - t_0}{l^4} + (\alpha_2\lambda_1 - \alpha_1\lambda_2 i)\frac{x - x_0}{l^4} +$$

$$+(\alpha_3\lambda_1 - \alpha_1\lambda_3 j)\frac{y - y_0}{l^4} + (\alpha_4\lambda_1 - \alpha_1\lambda_4 k)\frac{z - z_0}{l^4}\} f d\sigma_1 = \qquad (3)$$

$$= \int_{\sigma_1} \{\frac{1}{l^3}(\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_1\alpha_2\lambda_2 i + \alpha_1\alpha_3\lambda_3 j + \alpha_4\alpha_1\lambda_4 k + \alpha_2^2\lambda_1 - \alpha_1\alpha_2\lambda_2 i +$$

$$+\alpha_3^2\lambda_1 - \alpha_1\alpha_3\lambda_3 j + \alpha_4^2\lambda_1 - \alpha_1\alpha_4\lambda_4 k)\} f d\sigma_1 =$$

$$= \int_{\sigma_1} \{\frac{1}{l^3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)\lambda_1\} f d\sigma_1.$$

Вядома, што $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k^2 = 1$, $d\sigma_1 = l^3 d\omega$ ($d\omega$ — элемент адзінкавай сферы).

З роўнасці (3) атрымаем

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2\lambda_1} I_{\sigma_1}. \qquad (4)$$

З тэарэмы 1 вынікае, што $I_{\sigma_1} = I_{\sigma}$.

Тады з роўнасці (4) маем

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2\lambda_1}\int_{\sigma} \{(\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial t} + \alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial x} + \alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial y} + \alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial z})\lambda_1 + (\alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial x})\lambda_2 i +$$

$$+(\alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial y})\lambda_3 j + (\alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial z})\lambda_4 k\} f d\sigma. \qquad (5)$$

Пры дапамозе інтэгральнага выяўлення (5) і рашаецца сфармуляваная краявая задача.

Спіс літаратуры

Гусев, В. А. (1965). О кватернионных функциях, моногенных в смысле В. С. Фёдорова. *Успехи математических наук*, *20* (1), 203—208.

Стэльмашук, М. Т., Шылінец, У. А. (2005). Аб інтэгральным выяўленні кватэрніённых F-манагенных функцый аднаго класа. *Весці БДПУ. Серыя 3*, (2), 8—10.

Стэльмашук, М. Т., Шылінец, У. А., Андрэева, Г. А. (2010). Аб кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцыях. *Весці БДПУ. Серыя 3*, (1), 11—13.

Стэльмашук, М. Т., Шылінец, У. А., Падабед, Г. Ф. (2006). Рашэнне краявой задачы для кватэрніённых функцый чатырох рэчаісных зменных. *Весці БДПУ. Серыя 3*, (1), 12—14.

Фёдоров, В. С. (1957). Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве. *Известия вузов. Математика*, (1), 227—233.

Фёдоров, В. С. (1958). Основные свойства обобщённых моногенных функций. *Известия вузов. Математика*, (6), 257—265.

Шылінец, У. А., Скрабец, Г. А. (2013). Аб інтэгральным выяўленні кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцый трох рэчаісных зменных. *Весці БДПУ. Серыя 3*, (4), 10—12.

МАТЕМАТИЧНІ ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ НЕДЕРЖАВНИХ ПЕНСІЙНИХ ФОНДІВ

С. М. Ярошко
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
sm.jaroshko@gmail.com

Проведено теоретичні дослідження і числові експерименти щодо побудови і порівняння математичних моделей схем пенсійного забезпечення, які передбачають формування пенсійних фондів.

Розглянуто і проаналізовано математичні основи розрахунку виплат для випадку державного пенсійного забезпечення. Для обчислення пенсії, для кожного пенсіонера визначається індивідуальний коефіцієнт страхового стажу (в залежності від місяців страхового стажу) та коефіцієнт заробітної плати, який визначається шляхом ділення фактичної заробітної плати на величину середньої заробітної плати в Україні за відповідний період у розрізі кожного місяця. Отримано результати обчислення виплат для різних груп населення.

Значення державного пенсійного забезпечення для соціального захисту громадян важко переоцінити: пенсійні виплати отримують багато мільйонів осіб, при цьому для більшості з них такі виплати є основними. Проте, за ринкових умов ця пенсійна система не забезпечує громадянам адекватного матеріального забезпечення, що є незадоволення, як платників пенсійних внесків, так і переважної більшість пенсіонерів.

Зміст пенсійного реформування в Україні полягає у переході до трирівневої пенсійної системи: солідарної, обов'язкової накопичувальної та недержавного пенсійного забезпечення. Одним із варіантів недержавного пенсійного забезпечення є створення індивідуальних або корпоративних пенсійних фондів. Принципи створення цих фондів можуть бути різними. Але розрізняють два основних види накопичувальних пенсійних схем: заощаджувальну та страхову. У заощаджувальних схемах не враховуються ймовірності доживання кожного учасника фонду до виходу на пенсію, передбачається успадкуванння накопичених пенсійних заощаджень, відсутня солідарність учасників у забезпеченні виплат, обумовлюється конкретний термін виплат. Така пенсійна схема являє собою покупку індивідуальної фінансової ренти. Страхові пенсійні схеми передбачають солідарність учасників у забезпеченні виплат, враховують імовірність доживання кожного з учасників до певного віку, не передбачають успадкування заощаджень. Змішані схеми поєднують у собі характеристики заощаджувальних та страхових (Фалин, 1996).

Необхідною умовою пенсійного страхування та створення пенсійних фондів є збалансованість внесків та виплат. Це забезпечується застосуванням актуарних моделей та теорії фінансових рент. На практиці для будь-якої із пенсійних схем доводиться розв'язувати такі основні задачі:

1) визначення величини пенсії за величиною пенсійних внесків, або обчислення внесків за величиною пенсійних виплат;

2) розрахунок страхових резервів (Фалин, 1996; Четыркин, 1993).

Позначимо: R — річний розмір пенсії ; P — величина разового (річного) внеску у пенсійний фонд; E —одноразовий внесок для забезпечення пенсійних виплат; A — сума, накопичена на рахунку особи на момент виходу на пенсію (на початок пенсійних виплат); x — вік особи на момент укладання пенсійної угоди; L — вік виходу особи на пенсію; w — вік особи на момент закінчення дії угоди; n — термін накопичень; t — термін пенсійних виплат.

У будь-якому випадку пенсійної схеми весь термін пенсійної угоди поділяється на дві частини: перша довжиною $n = L - x$ — це період накопичення пенсійного фонду; друга довжиною $t = w - L$ — це період пенсійних виплат із накопиченого фонду. У першому періоді сума внесків зростає до деякої величини A, яка забезпечує проведення пенсійних виплат до обумовленого віку (або довічно) у другому періоді. У заощаджувальних схемах пенсійні внески та виплати не пов'язують із імовірностями доживання особи до певного віку, тобто, розрахунки проводяться без застосування таблиць смертності.

Можливі два випадки:

1) пенсійні виплати забезпечуються одноразовим внеском;

2) пенсійні виплати забезпечуються потоком платежів (рентою).

Із принципу фінансової еквівалентності випливає, що нарощена до моменту початку пенсійних виплат сума одноразового внеску повинна дорівнювати початковій вартості потоку пенсійних виплат. Якщо ж пенсійні виплати забезпечуються серією розподілених у часі платежів, то нарощена вартість накопичувального потоку платежів повинна дорівнювати початковій вартості потоку пенсійних виплат на момент початку цих виплат.

Нехай пенсійні виплати у розмірі R повинні проводитись протягом t років після виходу на пенсію на початку кожного року. Ці виплати забезпечуються одноразовим внеском E, який здійснюється за n років до виходу на пенсію. В угоді передбачено, що на кошти нараховуються відсотки за ставкою $i\%$ на рік. У цьому випадку принцип фінансової еквівалентності між величиною внеску і майбутніми виплатами запишеться так:

$$E = A\left(1+i\right)^{-n},$$

тут $A = R \times {}_{n|}\ddot{a}_{t;i}$ — теперішня вартість відтермінованої на n років обмеженої t роками фінансової ренти пренумерандо при ставці відсотків $i\%$ на рік.

Якщо у страховій угоді передбачено, що майбутні пенсійні виплати забезпечуються серією щорічних платежів пренумерандо у розмірі P впродовж m років ($m \leq n$), то рівняння еквівалентності між потоком внесків та потоком пенсійних виплат має вигляд:

$$P \times \ddot{a}_{m;i} = R \times {}_{n|}\ddot{a}_{t:i}.$$

У розрахунках страхових пенсійних схем використовуються страхові аннуїтети (Четыркин, 1993). Розглянемо випадок, коли довічна пенсія забезпечується одноразовим нетто-внеском. Якщо угода передбачає негайний початок пенсійних виплат, тоді:

$$E_x = R \times \ddot{a}_x,$$

тут $\ddot{a}_x$ — початкова вартість довічного одиничного аннуїтету пренумерандо для особи віку x.

Якщо початок пенсійних виплат відтерміновується на n років від віку x, тоді одноразовий нетто-внесок страхувальника у віці x визначають так:

$$E_x = R \times {}_{n|}\ddot{a}_x,$$

тут ${}_{n|}\ddot{a}_x$ — початкова вартість (на момент часу x) відтермінованого довічного одиничного аннуїтету пренумерандо. Аналогічні формули можна отримати для випадків обмежених t роками потоків пенсійних виплат.

Як уже зазначалось, на практиці пенсійні виплати часто забезпечуються не одноразовим нетто-внеском, а розподіленими у часі нетто-внесками (аннуїтетом). З іншого боку, пенсія — це також страховий аннуїтет. На основі принципу фінансової еквівалентності теперішні вартості цих страхових аннуїтетів (на момент часу, що відповідає віку x) повинні бути рівними.

Наприклад, нехай аннуїтет внесків є обмеженим m роками $(m \leq n)$, негайним. А інший аннуїтет — виплати пенсій, відкладеним на n років, необмеженим. В обидвох аннуїтетах передбачено щорічні платежі постнумерандо. Тоді отримаємо рівність:

$$P \times a_{x:\overline{m}|} = R \times {}_{n|}a_x.$$

Можна отримати рівняння еквівалентності і для випадку змішаної схеми. Нехай до пенсійного віку застосовується заощаджувальна схема, а після виходу на пенсію — страхова. Нехай майбутні довічні пенсійні виплати пренумерандо забезпечуються одноразовим внеском страхувальника у віці x. Тоді рівняння еквівалентності буде мати вигляд:

$$E_x = R \times \ddot{a}_L \times \nu^{L-x}.$$

Створено програмне забезпечення для проведення розрахунків пенсійних внесків та виплат для кожного із згаданих видів пенсійних схем. Розглянуто різні можливості внесення коштів у пенсійний фонд (разові внески, періодичні однакові та різні за величиною внески, наявність перерв у внесенні коштів та ін.) Порівняльний аналіз пенсійних схем та результати проведених розрахунків показують, що найдешевшою для страхувальника є страхова пенсійна схема, найдорожчою — заощаджувальна, змішана займає проміжне місце. Але страхова схема не передбачає успадкування внесків.

Список літератури

Фалин, Г. И. (1996). *Математические основы страхования жизни и пенсионных схем.* Москва: Изд-во МГУ.

Четыркин, Е. М. (1993). *Пенсионные фонды.* — Москва: АРГО.

АНАЛІЗ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

О. С. Ярошко

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
oksyanya@gmail.com

У даній роботі здійснено огляд найбільш поширених та цікавих прикладів практичного використання загальної оберненої задачі на власні значення. Крім того, зібрано перелік відомих чисельних методів розв'язання цієї задачі.

1. Практичне застосування обернених задач на власні значення. Обернена спектральна задача (ОСЗ) є предметом досліджень багатьох науковців.

Задача 1 (загальна ОСЗ). *Задано дійсні числа* $\lambda_1^* \le \ldots \le \lambda_n^*$, *знайти* $c \in R^n$ *таке, що власні значення* $\{\lambda_i\}_1^n$, $\lambda_1(c) \le \ldots \le \lambda_n(c)$, *матриці*

$$A(c) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k A_k\,,\ c \in \mathbb{R}^n,\ \{A_k\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

задовольняють умову $\lambda_i(c) = \lambda_i^*,\ i = 1,\ldots,n$.

Частковими випадками Задачі 1 є *адитивна* ($A(c) = A_0 + D$, $D = \mathrm{diag}(c_k)$) та *мультиплікативна* ($A(c) = A_0 \bullet D$, $D = \mathrm{diag}(c_k)$) обернені задачі на власні значення, було сформульовані Даунінгом та Хаусхолдером (1956).

Відомо, що обернені задачі на власні значення виникають у багатьох сферах науки, включаючи системи ідентифікації, сейсмічну томографію, геофізику, молекулярну спектроскопію, фізику часток, структурний аналіз, симуляцію механічних систем та ін. Деякі часткові випадки оберненої спектральної задачі зустрічаються у факторному аналізі, задачі тестування навчання, тощо ([1]).

Класичним прикладом оберненої спектральної задачі є задача відшукання розв'язку оберненої задачі Штурма — Ліувілля. Неперервну задачу

$$-u''(x) + p(x)u(x) = \lambda u(x),\ u(0) = u(\pi) = 0$$

досліджувало багато авторів, зокрема Борг, Гелфанд та Левітан, Хальд. Дискретний аналог знаходимо у роботі [2]:

$$A_0 = \frac{1}{h_2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{pmatrix},\ D = diag(p_k),$$

$$h = \frac{\pi}{n+1},\ u_k = u(kh),\ p_k = p(kh),\ k = 1,\ldots,n.$$

Інший відомий приклад — обернена спектральна задача, що виникає при дослідженні коливань струни. Посилання на неї знаходимо у роботах [1], [2]:

$$Au = \lambda_i^* Du\,,\ i = 1,\ldots,n\,,\ D = diag\Big(p\Big(kh\Big)\Big) > 0$$

Є кілька обернених спектральних задач зі специфічною структурою матриці, які можна розв'язати прямими методами. Наприклад, реконструкція матриці Якобі із заданих спектральних даних, див. Бур та Голуб. Обернена задача на власні значення з матрицею Якобі полягає, у визначенні елементів матриці Якобі з заданих власних даних. Вона важлива в таких прикладних застосунках, як теорія коливань та структурний дизайн [7].

Цікавим частковим випадком загальної оберненої задачі на власні значення є обернена Тепліцева задача (див. [4]).

Спектральні задачі, пов'язані з аналізом коливань деякої інженерної структури, представлено в роботі [3]. Динамічна поведінка інженерної структури визначається узагальненою спектральною задачею $Kx = \lambda Mx$ [3], де K та M є, відповідно, матрицями жорсткості та маси структури.

В роботі [1] коротко згадуються також інші приклади застосування обернених спектральних задач. Зокрема, в дизайні нейронних мереж Гопфілда, моделюванні коливань в задачах механіки, авіації та цивільній інженерії.

2. Чисельні методи розв'язування обернених задач на власні значення. Фрідлянд та ін. [2] розробили чотири квадратично збіжні чисельні методи. Один із них є методом Ньютона для відшукання розв'язку деякої системи нелінійних рівнянь. Кожна ітерація цього методу передбачає розв'язання повної спектральної задачі для матриці $A(c)$. Два інші методи розглядаються як модифікації методу Ньютона, де обчислення власних векторів спрощено. Четвертий метод з [2] оригінально базується на праці Бієглєр — Кьоніга [5] і використовує ідею обчислення детермінанта.

На основі методів, розроблених Фрідляндом та ін. [2], багато інших авторів побудували нові чисельні методи розв'язування деяких ОСЗ. Так, в роботі [4] запропоновано два методи розв'язування оберненої сингулярної задачі: один — неперервний, інший — дискретний. Дискретний метод узагальнює ітераційний процес, оригінально запропонований Фрідляндом та ін. для розв'язування оберненої задачі на власні значення. За умови, що розв'язок задачі існує, розроблений метод збігається локально з квадратичною швидкістю.

Дослідження методів, запропонованих в [2] знаходимо і в інших працях, наприклад [1]. Як стверджує автор [1], коли матриця задачі великих розмірностей, Метод III має очевидний недолік: побудова оберненої матриці на кожному кроці є дорогою операцією. Ці затрати можна зменшити, використавши ітераційні методи (внутрішні ітерації).

Для зменшення перевитрат та збільшення ефективності науковці Chan, Chung та Xu [1] запропонували неточний метод типу Ньютона, який використовують при великих розмірностях матриці задачі — неточний метод перетворень Кейлі для оберненої задачі на власні значення.

Базуючись на теорії диференціювання та *QR*-декомпозиції матриці, Лі (див. [5]) запропонував чисельний метод розв'язання обернених спектральних задач для випадку унікальних власних значень. Як стверджують автори, цей метод застосовний як для випадку унікальних власних значень, так і для кратних власних значень матриці задачі.

Ще інший підхід до побудови чисельного методу розв'язування оберненої спектральної задачі запропоновано в роботі [6] — він базується на вивченні аналітичності власних значень та власних векторів матриці задачі.

Список літератури

1. Bai, Zh. J. (2004). *Numerical Methods for Inverse Eigenvalue Problems. A Thesis Submitted in Particular Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Mathematics*. Hong Kong: The Chinese University of Hong Kong.
2. Friedland, S., Nocedal, J., & Overton, M. L. (1985) The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems, *Technical report*, **179**.
3. Dai, H. (1995). About an inverse eigenvalue problem arising in vibration analysis. *RAIRO Modélisation mathématique et analyse numérique*, *29* (4), 421–434
4. Chu, M. T. (1991). *Numerical Methods for Inverse Singular Value Problems*. North Carolina: Department of Mathematics North Carolina State University.
5. Dai H. (1999) A Numerical Method for Solving Inverse Eigenvalue problems, *M2AN*, *33* (5), 1003–1017.
6. Shalaby, M. A. (1994). On the real symmetric inverse eigenvalue problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *56*, 331–340.
7. Wang, Zh., & Zhong, B. (2001). *An inverse eigenvalue problem for Jacobi Matrices*. Kair: Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engeneering.

ЗМІСТ

Balyas L. V. *Quadratic residues of the norm group in sectorial domains* 11

Desiateryk O. O. *Variants of a semilattice of partitions of a countable set* 14

Hubal H. M. *Mathematical research of the cobweb model in economics* 16

Kadubovskyi O. A., Baliasa N. P. *Enumeration of 2-color chord n diagrams of genus one and two that have one black (or grey) faces under rotation and reflection* 19

Kovalyov I. *Darboux transformation of monic generalized Jacobi matrices associated with P-fractions* 21

Prykhodko A. O., Prykhodko O. P. *The problem of global leaning in artifical neural networks* 26

Sukhorukova O. *Generalized γ-generating matrices and Nehari–Takagi problem* 29

Александрович І. М., Клименко О. Ю., Сидоров М. В.-С. *Наближення узагальнених аналітичних функцій узагальненими поліномами* 33

Алексеєва К. С. *Напівгрупа перетворень нескінченної частково визначеної множини* 38

Барышовец П. П., Раевская И. Ю., Раевская М. Ю. *О бесконечных группах с одним классом сопряжённых недополняемых абелевых подгрупп* 40

Безкрила С. І. *Про оцінки типу Джексона — Стєчкіна для кусково q-опуклого наближення функцій* *42*

Березовский В. Е., Ковалёв Л. Е. *Об условиях сохранения тензора Римана относительно почти геодезических отображений второго типа* 44

Березовский В., Микеш Й. *Об одном классе пространств аффинной связности, которые допускают нетривиальные геодезические отображения* 48

Бігун Р. Р. *Чисельний метод мінорантного типу відшукання абсолютного мінімуму довільних функцій двох дійсних змінних* 51

Бондар О. П. *Техніка застосування ізотопних функцій* 54

Василенко Я. П. *До питання про використання ітераційного процесу Ньютона — Канторовича в апроксимаційно-ітеративному методі* 57

Веригіна І. В., Бузинний О. М. *Конфліктний перерозподіл ресурсного простору: стратегії вирішують все* 62

Веселовська О. В. *Про порядок за Пойа субгармонійної у просторі $\mathbb{R}^m$ функції з радіальним розподілом мас* 66

Войтик Т. Г., Полетаев Г. С. *Уравнения с нижней и верхней неизвестными треугольными матрицами и взаимно обратными коэффициентами* 68
Волков А. В., Солодуха А. Ю. *Про один метод підсумовування числових рядів* 72
Гаврилів О. С. *Про структуру* n*-лінійних відображень* 74
Горбачук В. М. *Про орбіти* C_0*-груп лінійних операторів у банаховому просторі* 76
Горленко С. В. *Про деякі зв'язки між геометрією множин моногенності та властивостями неперервних функцій комплексної змінної* 78
Денисюк В. П., Бабко А. І. *Регуляризація функції як задача апроксимації* 79
Денисюк В. П., Рибачук Л. В. *Деякі методи підсумовування типу Пуасона — Абеля тригонометричних рядів Фур'є* 81
Дирів М. М. *Елементи віківського числення в аналізі білого шуму Леві* 85
Дишліс О. Я., Прохода О. С., Покась С. М. *Афінні групи Вейля системи коренів як кристалографічні групи геометрій* 93
Дмитришин М. І. *Спектральні апроксимації для операторів з мероморфною резольвентою* 95
Дуліна А. П. *Властивості комплексної динаміки породженої відображенням* $z_{n+1} = z_n^2$ *98*
Зеленський О. В., Дармосюк В. М., Новицька О. І. *Жорсткі та майже жорсткі сагайдаки* 101
Зеліско В. Р., Зеліско Г. В. *Про структуру кронекерівських добутку та суми матриць* 104
Зельдіч М. В. *Просунуті розбиття і топ-елементи Ділуорса скінченних частково впорядкованих множин* 105
Калайда О. Ф. *Квадратурний метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь зі змінними межами інтегрування* 107
Калайда О. Ф. *Загальний метод побудови колокант функцій багатьох змінних за простими вузлами* 109
Калайда О. Ф. *Квадратурний метод розв'язування лінійних сингулярних інтегральних рівнянь* 110
Калайда О. Ф. *Про один метод побудови нелокальних сплайнів з кратними вузлами* 111
Калайда О. Ф. *Про один метод побудови комбінованих апроксимант функцій* 112

Калайда О. Ф. *Про умови збіжності простих ітерацій знаходження нулів одновимірних неперервних функцій* 113

Карнаухова Т. В. *Математическое моделирование вынужденных гармонических колебаний и диссипативного разогрева неупругих физически нелинейных тонкостенных элементов с пьезоэлектрическими сенсорами* 114

Кільчинський О. О., Крижановська Т. В., Семененко Т. Н. *Про двобічне оцінювання при розв'язуванні алгебраїчних і трансцендентних рівнянь*...118

Козеренко С. О. *Про абстрактні властивості графів Маркова відображень дерев у себе* 122

Комарницький М. Я., Малоїд-Глєбова М. О. *Двосторонні підмодулі та їх властивості*..124

Кудзіновська І. П., Трофименко В. І. *Властивість виродженості матриці пріоритетів у випадку ідеальної узгодженості* 125

Лісикевич В. А. *Про p-визначальні поліноми для несерійних діаграм Динкіна*............129

Мазяева Е. С. *Эндоспектр прямоугольных отношений* 131

Махней О. В. *Розвинення за власними функціями сингулярного диференціального оператора* 134

Мельничук В. М. *Диференціальне числення функцій тернарної змінної* 136

Михайловський А. А. *Класифікація графів відношення порядку за їх ендотипом* 141

Нейман Є. В. *Функціональна модель в узагальнених класах Неванлінни*......................143

Погребний В. Д. *Одна теорема про топологічне вкладення*...147

Подлевський Б. М., Коваль Т. В. *Чисельний алгоритм знаходження точок галуження розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь* 151

Приймак М. В., Дмитроца Л. П., Олійник М. З. *Про наближення функцій зі змінним періодом* 155

Приходько А. О., Приходько О. П. *Принцип динамічного вибору* 160

Синюкова О. М. *Про окремий випадок геометрії дотичного розшарування, яка індукована інваріантними наближеннями базового Ріманова простору* 163

Скочко В. М. *Про деякі властивості функції росту петлевих автоматів* 165

Тадеєв П. О. *Основна система диференціальних рівнянь подвійного поля в n-вимірному афінному просторі* 167

Тимофієва Н. К. *Використання фрактальної природи комбінаторних множин для знаходження формул комбінаторних чисел* 171

Турбин А. Ф. *Геосуперaлгебра Гамильтона — Фрхимеда (геосуперaлгебра гамильтонионов)* 176

Фундак Л. І., Цегелик Г. Г. *Чисельний метод відшукання екстремуму довільних негладких угнутих функцій*..........180

Хоменко М. П., Виврот Т. М. *Структурні характеристики* HS_k *-графів*..........183

Цешковський С. Й. *Еквівалентні епіморфізми вільних груп*..........187

Чернобай О. Б. *Про узагальнені ядра типу Тепліца*..........189

Чип М. М. *Тотальна монотонність послідовності моментів*..........192

Шылінец У. А. *Інтэгральнае выяўленне кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцый чатырох рэчаісных зменных*..........194

Ярошко С. М. *Математичні підходи до моделювання недержавних пенсійних фондів*..........198

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

СІМНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

19–20 травня 2016 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

II

Алгебра. Геометрія.
Математичний аналіз

Підписано до друку 13.05.2016.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк.

Зам. № . Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б