Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

СІМНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА

НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

19–20 травня 2016 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

III

Теорія ймовірностей та математична статистика.
Історія та методика математики

Київ — 2016

Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Drahomanov University
National Technical University of Ukraine «KPI»

SEVENTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE

19–20 May, 2016, Kyiv

CONFERENCE MATERIALS

III

Probability theory and mathematical statistics.
History and methods of teaching mathematics

Kyiv — 2016

Институт математики НАН Украины
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
Национальный педагогический университет им. М. Драгоманова
Национальный технический университет Украины «КПИ»

СЕМНАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ИМЕНИ АКАДЕМИКА МИХАИЛА КРАВЧУКА

19–20 мая 2016 г., Киев

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ
III

Теория вероятностей и математическая статистика.
История и методика математики

Киев — 2016

УДК 519.2(06)+37.016:51(091)(06)
ББК 22.17я43+74.262.21г.я43

Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19—20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. — К.: НТУУ «КПІ», 2016. — 358 с. — Укр., англ., рос.

Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, May 19–20, 2016, Kyiv: Conference materials. Vol. 3. Probability theory and mathematical statistics. History and methods of teaching mathematics. — К.: NTUU «KPI», 2016. — 358 p.

Семнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука, 19–20 мая, 2016 г., Киев: Материалы конф. Т. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. История и методика математики. — К.: НТУУ «КПИ», 2016. — 358 с.

ISBN 978-617-7021-44-4

ISBN 978-617-7021-44-4

©Автори
©НТУУ «КПІ», 2016

Академік Всеукраїнської академії наук
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences
Академик Всеукраинской академии наук
Михайло Кравчук
Mychailo Kravchuk
Михаил Кравчук
1892–1942

XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука

Програмний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Ільченко* (Україна)
Проф. *В. Ванін* (Україна)
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)
Проф. *М. Городній* (Україна)
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)
Проф. *І. Парасюк* (Україна)
Чл.-кор. НАН України *М. Горбачук* (Україна)
Проф. *Р. Андрушків* (США)

Організаційний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна)
Проф. *Н. Вірченко* (Україна)
(співголови)
Доц. *В. Гайдей* (Україна)
(заступник голови)
Проф. *О. Клесов* (Україна)
Проф. *С. Івасишен* (Україна)
Проф. *М. Дудкін* (Україна)
Проф. *О. Іванов* (Україна)
Доц. *І. Алєксєєва* (Україна)
Доц. *О. Диховичний* (Україна)
Доц. *Г. Нефьодова* (Україна)
Доц. *Л. Федорова* (Україна)

Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

Programme Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)
Corr. Member NASU *M. Horbachuk* (Ukraine)
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)

Organizing Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine)
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine)
(Co-Chairs)
Ass. Prof. *V. Haidey* (Ukraine) (Deputy Chair)
Prof. *O. Klesov* (Ukraine)
Prof. *S. Ivashyshen* (Ukraine)
Prof. *M. Dudkin* (Ukraine)
Prof. *O. Ivanov* (Ukraine)
Ass. Prof. *I. Alyeksyeyeva* (Ukraine)
Ass. Prof. *O. Dykhovychnyi* (Ukraine)
Ass. Prof. *H. Nefiodova* (Ukraine)
Ass. Prof. *L. Fedorova* (Ukraine)

XVII Международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука

Программный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Акад. НАН Украины *Ю. Якименко* (Украина)
Акад. НАН Украины *М. Ильченко* (Украина)
Проф. В. Ванин (Украина)
Акад. НАН Украины *А. Самойленко* (Украина)
Акад. НАН Украины *Я. Яцкив* (Украина)
Акад. НАН Украины *Н. Перестюк* (Украина)
Проф. *Н. Городний* (Украина)
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)
Проф. *И. Парасюк* (Украина)
Чл.-кор. НАН Украины *М. Горбачук* (Украина)
Проф. *Р. Андрушкив* (США)

Организационный комитет

Акад. НАН Украины *М. Згуровский* (Украина)
Проф. *Н. Вирченко* (Украина)
(сопредседатели)
Доц. *В. Гайдей* (Украина)
(заместитель председателя)
Проф. *О. Клесов* (Украина)
Проф. *С. Ивасишен* (Украина)
Проф. *Н. Дудкин* (Украина)
Проф. *А. Иванов* (Украина)
Доц. *И. Алексеева* (Украина)
Доц. *А. Дыховичный* (Украина)
Доц. *Г. Нефедова* (Украина)
Доц. *Л. Федорова* (Украина)

УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — найвизначніший український математик XX сторіччя, всесвітньо відомий вчений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

*«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися **перші** українські школи в місті і по селах, **перші** курси, **перші українські університети** (народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без **найактивнішої участі Михайла Кравчука**» (так писалося в характеристиці на нього, надісланої до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).*

*Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці **світової Науки.** За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.*

*Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і **многочлени Кравчука,** і **моменти Кравчука**, і **формули Кравчука**, і осцилятори **Кравчука**, а завдяки пошукам І. Качановського виявилося, що М. Кравчук стояв біля витоків **винаходу першого у світі електронного комп'ютера!***

*Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо **Науки**, на благо **Освіти рідного народу.***

***«Моя любов — Україна і математика»** — таким було його життєве кредо.*

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочінь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

*М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам **Сергію Корольову** і **Архипу Люльці**.*

*Пам'ять про М. Кравчука живе у **серцях київських політехніків**, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934–1938 рр). КПІ від 1992 р. вже провів 13 Міжнародних наукових конференцій ім. акад. М. Кравчука. Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито **пам'ятник** М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських **вулиць** (2009 р.)*

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

*Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в **Україні й далеко поза Україною.***

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892–1942)

Mykhailo Kravchuk *made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of* ***mathematical education****. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.*

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as ***Kravchuk's polynomials;***

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist ***John Atanasoff*** *(1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of* ***making electronic computer****.*

His selfness efforts for the sake of the ***development of science*** *in* ***Ukraine****, extraordinary* ***talent*** *as* ***teacher*** *and* ***reputation among students*** *and* ***scientific community*** *could not go unnoticed by authority.*

In 1938 *Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in* ***Kolyma****. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he* ***was died in March 9, 1942.***

He was ***rehabilitated*** *be soviet regime only* ***in 1956****. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in* ***the National Academy of Sciences of Ukraine****. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The* ***First Kravchuk International Conference*** *was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992. Since that time there were 13 such* ***conferences, three books*** *of M. Kravhuk's works were* ***published*** *in Kyiv:*

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20th of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled ***a statue of M. Kravchuk****.*

III

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF LOCAL PROBABILITIES OF NONLINEAR BOUNDARY CROSSING BY A RANDOM WALK

S. A. Aliyev, F. H. Ragimov, T. E. Hashimova, V. S. Khalilov
Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,
Baku State University,
Baku, Azerbaijan
soltanaliyev@yahoo.com, ragimovf@rambler.ru, xelilov67@mail.ru

Let $\xi_n, n \geq 1$ be the sequence of independent identically distributed random variables determined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Let

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n \geq 1,$$

and consider the first passage time

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : S_n \geq f_a(n)\}$$

of the random walk $S_n, n \geq 1$ for the nonlinear boundary $f_a(t), t > 0$ dependent on some growing parameter $a > 0$. As always, we assume $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

The family of the first passage times $\tau_a; a \geq 0$ was the object of study of a lot of papers (Aliev & Hashimova, 2010).

In the present paper we prove a theorem on asymptotic behavior of the density of joint distribution τ_a and χ_a as $a \to \infty$. By means of this theorem we study the limit behavior of the marginal and conditional density of the overshoot χ_a, and also of the probability $P(\tau_a = n)$ as $a \to \infty$.

Note that the proof of the mentioned theorem is based on the result of the paper Aliev and Hashimova (2010) in which the limit behavior of the conditional probability of nonlinear boundary crossing $P(\tau_a \geq n \mid S_n = x)$ as $x = x(a) \to \infty$ and $a \to \infty$ was studied.

We'll assume that $\mu = E\xi_1 > 0, \sigma^2 = D\xi_1 < \infty$ and the boundary $f_a(t)$ satisfies the following regularity conditions:

1. For any a the function $f_a(t)$ monotonically increases, is continuously differentiable for $t > 0$, moreover $f_a(1) \uparrow \infty$ as $a \to \infty$;

2. For rather large a the function $\dfrac{f_a(t)}{t}$ monotonically decreases to zero as $t \to \infty$;

3. For each function $n = n(a)$ from a such that $n = n(a) \to \infty$ and

$\frac{1}{n} f_a(n) \to \mu$ as $a \to \infty$, it is fulfilled $f_a'(n) \to \theta \in [0,\mu), a \to \infty$;

4. The function $f_a'(t)$ weakly oscillates at infinity, i.e. for any functions $n = n(a) \to \infty$ and $m = m(a) \to \infty$ as $a \to \infty$ such that $\frac{n}{m} \to 1$, it is fulfilled $\frac{f_a(n)}{f_a(m)} \to 1$ as $a \to \infty$.

Note that from conditions 1) and 2) it follows that the condition $f_a(n) = n\mu$ with respect to n has a unique solution $N_a = N_a(\mu)$. We also note that the family of functions $f_a(t) = at^\beta, 0 \le \beta < 1$ satisfies conditions 1)–4).

In what follows, we assume that for some $m \ge 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^m \, dt < \infty,$$

where $u(t) = Me^{it\xi}, t \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty), i^2 = -1$.

It follows from that the sum $S_n, n \ge m$ has the continuous and bounded density $P_n(x)$.

Assume that

$$w_a(n,r) = \frac{d}{dr} P(\tau_a = n, \chi_a \le r)$$

is the density of the joint distribution τ_a and χ_a:

$$h(r) = \frac{P\left(S'_{\tau_+} > r\right)}{ES'_{\tau_+}}$$

is the density of limit distribution of the overshoot of the random walk $S'_n = S_n - n\theta$, $n \ge 1$ for aninfinitely distant barrier, where

$$\tau_+ = \inf\{n \ge 1 : S'_n > 0\}.$$

Theorem 1. *Let all the listed above conditions be fulfilled with regard to the boundary* $f_a(t)$ *and distribution of the random variable* ξ_1, *and let*

$$n = n(a) = N_a + \upsilon_a \sqrt{N_a},$$

where $\upsilon_a \to \upsilon \in \mathbb{R}$ as $a \to \infty$.

Then

$$w_a(n,r) \sim \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{\upsilon\lambda}{\sigma}\right) h(r) \text{ as } a \to \infty$$

uniformly with respect to υ from the bounded set in $\mathbb{R}$, where $\lambda = \mu - \theta$, and

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Corollary 1. Let the conditions of the theorem be fulfilled. Then

$$\int_0^{\infty} \left| h_a(r) - h(r) \right| dr \to 0$$

as $a \to \infty$, where $h_a(r)$ is the marginal density of the overshoot $\chi_a, a > 0$.

Corollary 2. Let the conditions of the theorem be fulfilled. Then

$$P(\tau_a = n) \sim \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{\upsilon\lambda}{\sigma} \right) \text{ as } a \to \infty.$$

Corollary 3. If the assumptions of theorem are satisfied, then

$$h_a\left(\frac{r}{n} \right) \to h(r), r > 0,$$

where $h_a(r / n)$ is the conditional density of the overshoot χ_a provided that $\tau_a = n$.

Note that the statement of corollary 2 is called a local limit theorem for the first exit time τ_a.

References

Aliev, S., & Hashimova, T. (2010). Asymptotic behavior of the conditional probability of the nonlinear boundary crossing by a random walk. *Theory of Stochastic processes*, *16* (1), 12–16.

A NON-LOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR AN EQUATION OF MOTION OF A HOMOGENEOUS BAR WITH NEUMANN CONDITIONS

E. I. Azizbayov, Y. T. Mehraliyev
Baku State University, Baku, Azerbaijan
eazizbayov@mail.ru, yashar_aze@mail.ru

Introduction. Recently, non-classical problems for partial differential equations have been widely used for a description a number of phenomena in modern physics and technology. Non-classical problems with nonlocal conditions include relations between boundary values of an unknown solution and its derivatives and their values at internal points of a domain. Theory of non-local boundary value problems is important in itself as a section of general theory of boundary value problems for partial equations and it is important as a section of mathematics that has numerous applications in mechanics, physics, biology and other natural science disciplines.

The more general time non-local conditions were considered were considered on the papers of Kerefov and Chabrowsky (1979), Kozhanov (2004), Azizbayov and Mehraliyev (2012) and others.

Kostin (2008), Mitropolsky and Moiseenkov (1961) and others have situated oscillation and wave motions of an elastic bar on an elastic foundation.

The simplest non-linear model of motion of a homogeneous bar is described by the equation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

where w is bar's deflection (after displacement of the middle line points of an elastic bar along the axis x). Note that the similar equation arises in the theory of crystals.

Let

$$D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}.$$

Consider the equation (Kostin, 2008)

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \beta u_{xx}(x,t) + \alpha u(x,t) + u^3(x,t) = 0 \qquad (1)$$

and set a problem: determine a solution $u(x,t)$ of the equation (1) in D_T satisfying the ordinary Neumann boundary conditions

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T) \qquad (2)$$

and the non-local boundary conditions

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x),\ u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1) \qquad (3)$$

where $\beta > 0$, $\alpha > 0$, δ are the given numbers, moreover $\beta < 4\alpha$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ are the given functions.

Definition 1. *Under the classical solution of problem* (1)–(3) *we understand the function* $u(x,t)$, *continuous in the closed domain* D_T *together with all its derivatives involved in equation (1), and satisfying all the conditions* (1)–(3) *in the ordinary sense.*

Then it is obvious that each classical solution $u(x,t)$ of problem (1)–(3) has the form:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \tag{4}$$

where

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x \, dx \ \ (k = 0,1,2,\ldots), \tag{5}$$

and moreover,

$$m_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k = 1,2,\ldots \,. \end{cases}$$

Then, applying the formal scheme of the Fourier method, from (1) и (3) we have:

$$u_k''(t) + (\lambda_k^4 - \beta\lambda_k^2 + \alpha) u_k(t) = F_k(t;u) \ \ (0 \le t \le T\,;\, k = 0,1,2,\ldots) \tag{6}$$

$$u_k(0) + \delta u_k(T) = \phi_k,\ u_k'(0) + \delta u_k'(T) = \psi_k,\ (k = 1,2,\ldots) \tag{7}$$

where

$$F_{1k}(t;u) = -m_k \int_0^1 u^3(x,t) \cos \lambda_k x \, dx\,,$$

$$\phi_{1k} = m_k \int_0^1 \phi(x) \cos \lambda_k x \, dx\,,\ \ \psi_{1k} = m_k \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x \, dx\,.$$

It is obvious that

$$\lambda_k^4 - \beta\lambda_k^2 + \alpha = \left(\lambda_k^2 - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{4}\,.$$

Let assume $\beta^2 < 4\alpha$. Then, by solving problem (6)–(7) we find:

$$u_0(t) = \frac{1}{\beta_0 \rho_0(T)} \{\beta_0 (\cos\beta_0 t + \delta \cos\beta_0 (T-t))\phi_0 + (\sin\beta_0 t - \delta \sin\beta_0 (T-t))\psi_0 -$$

$$\left. -\delta \int_0^T F_0(\tau;u)(\sin\beta_0(T+t-\tau) + \delta \sin\beta_0(t-\tau))d\tau \right\} + \frac{1}{\beta_0} \int_0^t F_0(\tau;u) \sin\beta_0(t-\tau) d\tau, \tag{8}$$

$$u_k(t)=\frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\{\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\phi_k+(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_k-$$

$$\left.-\delta\int_0^T F_k(\tau;u)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \quad (i=1,2;\ k=1,2,\ldots), \tag{9}$$

where

$$\beta_k=\sqrt{\lambda_k^4-\beta\lambda_k^2+\alpha},\ \rho_k(T)=1+2\delta\cos\beta_k T+\delta^2,\ k=0,1,2,\ldots.$$

After substituting the expressions $u_k(t)\ (k=0,1,2,\ldots)$ into (4), we get:

$$u(x,t)=\frac{1}{\beta_0\rho_0(T)}\{\beta_0(\cos\beta_0 t+\delta\cos\beta_0(T-t))\phi_0+$$

$$\left.+(\sin\beta_0 t-\delta\sin\beta_0(T-t))\psi_0-\delta\int_0^T F_0(\tau;u)(\sin\beta_0(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_0(t-\tau))d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta_0}\int_0^t F_0(\tau;u)\sin\beta_0(t-\tau)d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\left[\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\phi_k+\right.\right.$$

$$\left.+(\sin\beta_k t+\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_{1k}-\delta\int_0^T F_k(\tau;u)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x. \tag{10}$$

Thus, the solution of problems (1)–(3) is reduced to the solution of integral equation (11) with respect to the unknown function $u(x,t)$.

Similarly to Azizbayov and Mehraliyev (2012), it is possible to prove the following

Lemma 1. *If* $u(x,t)$ *is any classical solution of problem* (1)–(3)*, the functions*

$$u_k(t)=m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x\,dx \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

satisfy the systems (8), (9) *in* $[0,T]$.

From the lemma indicated above it follows that if

$$u_k(t)=m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\ (k=0,\ 1,2,\ldots),$$

is the solution of systems (8), (9) then the function

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi)$$

is the solution of (10).

The following corollary follows from this lemma

Remark. Suppose that equation (10) has a unique solution. Then problem (1)–(3) may have at most one solution, i.e. of the solution of problem (1)–(3) exists it is unique.

Now, assume that the data of problem (1)–(3) satisfy the following conditions:

a) $\phi(x)\in C^4[0,1]$, $\phi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$, $\phi'(0)=\phi'(1)=\phi^{(3)}(0)=\phi^{(3)}(1)=0$;

b) $\psi(x)\in C^2[0,1]$, $\psi'''(x)\in L_2(0,1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$.

Then due to Azizbayov and Mehraliyev (2012), it is possible to prove the following

Theorem 1. *Let conditions a), b) and* $\delta\neq\pm 1$, $\beta<4\alpha$ *be fulfilled. Then for rather small values of* T, *problem* (1)–(3) *has a unique classical solution.*

References

Azizbayov, E. I., & Mehraliyev, Y. T. (2012). A time-nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous bar. *Bulletin of the Kyiv National University, Series: Mathematics and Mechanics*, *27*, 114–121.

Kerefov, A. A. (1979). Non-local boundary value problems for parabolic equations. *Different. Uravneniya*, *5* (1), 78–78. (in Russian)

Kostin, D. V. (2008). On one scheme of analysis of two-mode deflections of weakly inhomogeneous elastic bar. *Doklady Akademii Nauk*, *418* (3), 295–299. (in Russian)

Kozhanov, A. I. (2004). A time non-local boundary value problem for linear parabolic equations. *Sibirskiy Zhurnal Industrialnoy Matematiki*, *7* (1), 51–60. (in Russian)

Mitropolsky, Yu. O., & Moseenkov, B. I. (1961). *Doslidzhennia kolyvan v synstemakh z rozpodilenymy parametramy (asymptotychni metody).* Kyiv: Vydavnytstvo Kyivskoho universytetu. (in Ukraine).

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE MATHEMATICAL EXPECTATION OF THE RENEWAL-REWARD PROCESS

Veli Bayramov, Rovshan Aliyev
Baku State University, Baku, Azerbaijan
veli_bayramov@yahoo.com, aliyevrovshan@yahoo.com

In this paper a renewal-reward process is studied (Borovkov, 1976; Brown & Solomon, 1975).

Consider a sequence of independent random vectors

$$\{(X_i, Y_i), i = 1, 2, ...\},$$

where (X_i, Y_i), $i \geq 1$, are identically distributed. Assume that $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ is a renewal sequence. Define

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

so that $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ are the renewal times and let

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}.$$

The renewal-reward process

$$\{C(t) : t \geq 0\}$$

is defined as follows:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i. \tag{1}$$

One of the trajectories of the renewal-reward process $C(t)$ is given by Fig. 1:

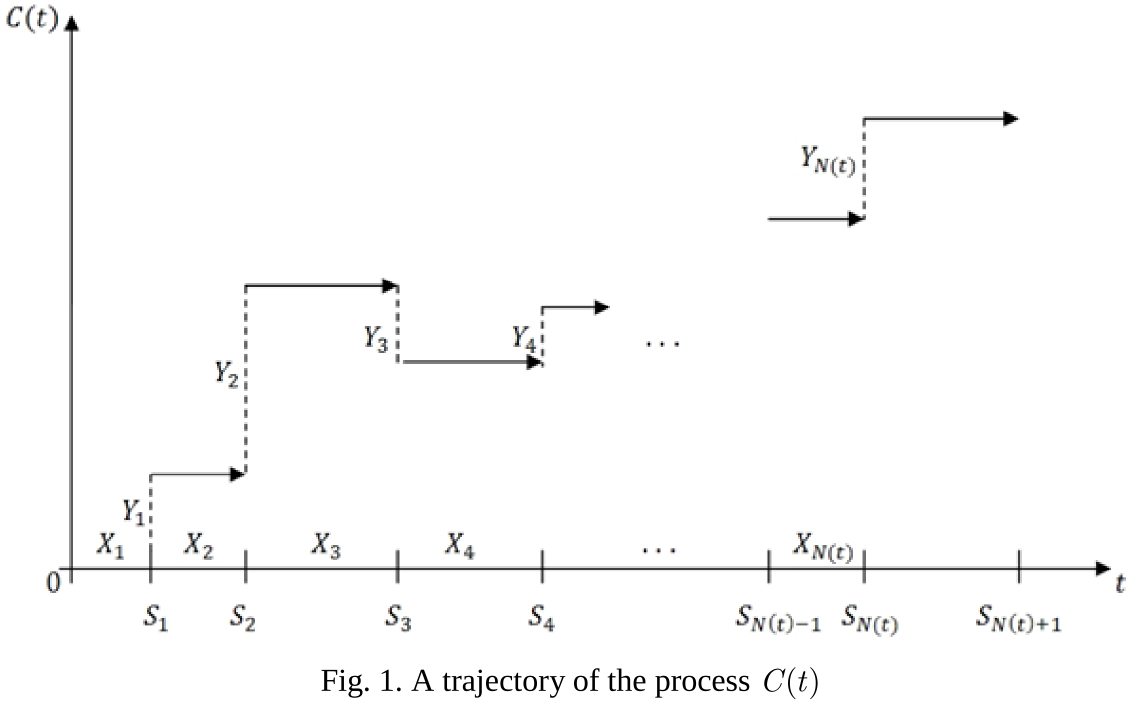


Fig. 1. A trajectory of the process $C(t)$

Since $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of independent and identically distributed random variables, we will denote each of them as X and the distribution of X by F.

Definition 1 (Stone, 1965). *We call F a non-lattice distribution function if and only if $f(\theta) \neq 1$ for $\theta \neq 0$, and as a special case, we call F strongly non-lattice if*

$$\lim_{|\theta| \to \infty} \inf \left|1 - f(\theta)\right| > 0,$$

where $f(\theta)$ is the characteristic function of F defined by

$$f(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dF(x).$$

A second-order approximations for the renewal function

$$H(t) \equiv E(N(t))$$

have been derived in Stone (1965) and Smith (1960). It is known that (Smith, 1960), if F is non-lattice distribution function, $\mu_2 < \infty$ and $\mu_1 > 0$, then the following asymptotic expansion can be written for the renewal function as $t \to \infty$:

$$H(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + o(1), \tag{2}$$

where

$$\mu_k \equiv E(X^k) = \int_0^{\infty} x^k dF(x),\ k = 1,2.$$

In Stone (1965), under the assumptions that F is strongly non-lattice and $\mu_{k+2} < \infty$, $k \geq 0$, asymptotic expansion (2) has been improved to

$$H(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_1^2}\int_t^{\infty} R(x)dx + o\left(\frac{\ln t}{t^{k+1}}\right), \tag{3}$$

where

$$R(x) = \int_x^{\infty} (1 - F(z))dz$$

is the "double tail" of the distribution.

As the special case

$$H(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + o(t^{-k}). \tag{4}$$

Definition 2. *A distribution function F is said to belong to the class ϑ if some convolution of F has an absolutely continuous component.*

Definition 3. *If for some* $\tau > 0$

$$E\left(e^{\tau X}\right) = \int_0^\infty e^{\tau x} dF(x) < \infty,$$

then it is said that the Cramer condition is satisfied.

In Borovkov (1976), under the assumptions that F belongs to the class ϑ and satisfies Cramer condition for some $\tau > 0$, asymptotic expansion (2) has been improved to

$$H(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + O\left(e^{-\varepsilon t}\right), \tag{5}$$

for some $\varepsilon > 0$. For ε we can choose any number from the interval

$$\left(0, \sup\left(\tau : E\left(e^{\tau X}\right) < \infty\right)\right).$$

In Brown and Solomon (1975) an asymptotic expansion as $t \to \infty$ for the mathematical expectation

$$D(t) \equiv E(C(t))$$

of the renewal-reward process has been derived:

$$D(t) = at + b + o(1), \tag{6}$$

where $a = \mu_1^{-1}\lambda_1$ and $b = \frac{1}{2}\mu_1^{-2}\mu_2\lambda_1 - \mu_1^{-1}n_{1,1}$, $\lambda_1 = EY$, $n_{1,1} = E(XY)$.

It is not difficult to see that, (6) is a generalization of (2), however, (2) can be obtained from (6) by considering that $Y \equiv 1$. Then, taking $\lambda_1 = 1$ and $n_{1,1} = \mu_1$ in (6), we obtain (2).

In this study we obtain an asymptotic expansion with the remainder term $O\left(e^{-\varepsilon t}\right)$ for the mathematical expectation of the renewal-reward process (1).

Let us introduce some notations and an auxiliary lemma.

$$\lambda_s = E\left(Y^s\right) = \int_0^\infty E\left(Y^s \middle| X = x\right) dF(x),$$

$$n_{k,s} = E\left(X^k Y^s\right) = \int_0^\infty x^k E\left(Y^s \middle| X = x\right) dF(x),$$

$$m_{k,s} = E\left(X^k e^{\varepsilon X} Y^s\right) = \int_0^\infty x^k e^{\varepsilon x} E\left(Y^s \middle| X = x\right) dF(x).$$

where

$$E\left(Y^s \middle| X = x\right)$$

is a conditional mathematical expectation of Y^s given $X = x$.

Lemma 1. *Let* F *belong to the class* ϑ, *the Cramer condition for some* $\tau > 0$ *is satisfied and* $m_{1,s}$, $s \geq 1$ *exists. Then as* $t \to \infty$*:*

$$E\left(Y_{N(t)+1}^{s}\right) = \frac{n_{1,s}}{\mu_1} + O\left(e^{-\varepsilon t}\right).$$

The main result of this study can be formulated as the following theorem.

Theorem 1. *Let* F *belong to the class* ϑ, *the Cramer condition for some* $\tau > 0$ *is satisfied and* $m_{1,1}$ *exists. Then the asymptotic expansion for the mathematical expectation of the renewal-reward process as* $t \to \infty$ *can be written in the following form:*

$$D(t) = at + b + O\left(e^{-\varepsilon t}\right),$$

where $a = \mu_1^{-1}\lambda_1$ *and* $b = \frac{1}{2}\mu_1^{-2}\mu_2\lambda_1 - \mu_1^{-1}n_{1,1}$.

References

Borovkov, A. A. (1976). *Stochastic Processes in Queuing Theory*. New York: Springer-Verlag.

Brown, M., & Solomon, H. A. (1975). Second-order approximation for the variance of a renewal reward process. *Stochastic Processes and their Applications*, *3*, 301–314.

Ross, S. M. (1996). *Stochastic Processes* (2nd ed.). New York: John Wiley and sons.

Smith, W. L. (1960). Infinitesimal renewal processes. In *Contribution to Prob. and Stat.* Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 396–413.

Stone, C. (1965). On characteristic function and renewal theory. *Trans. Amer. Math. Soc. 120*, 327–342.

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE FAMILY OF THE FIRST PASSAGE TIME OF THE LEVEL BY MARKOV'S RANDOM WALK DESCRIBED BY THE FIRST ORDER AUTOREGRESSION PROCESS $(AR(1))$

H. A. Jafarova, F. H. Ragimov, I. A. Ibadova, A. D. Farhadova
Institute Control Systems of NAS of Azerbaijan,
Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,
Baku State University, Baku, Azerbaijan
hilalajafarova@gmail.com, ragimovf@rambler.ru, ibadovairade@yandex.ru

It is known (Melfi, 1992) that under the Markov random walk we understand the sequence of the sums

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k, \quad n \geq 1,$$

of random variables X_k, $n \geq 1$ connected with some Markov chain Y_k, $n \geq 1$ such that conditional distribution of the random variable X_k with respect to $\{Y_k, k \geq 0\}$ and $\{X_i,\ i \neq k\}$ depends only on random variables Y_{k-1} and Y_k for every $k \geq 1$.

The sequence

$$T_n = S_n + \varepsilon_n, \ n \geq 1$$

is called a perturbed Markov chain where the sequence of random variables $\varepsilon_n, n \geq 1$ is subjected to some regularity conditions (Woodroofe, 1982).

In theory of Markov's nonlinear renewal, a great attention is given to study of boundary value problems connected with the family of the first passage time

$$t_a = \inf\{n \geq 1 : T_n \geq a\}$$

of the level $a > 0$ by the perturbed Markov walk T_n, $n \geq 1$.

In the papers Melfi (1992) important problems of theory of Markov nonlinear renewal connected with the family of moments t_a are studied. In particular, a perturbed Markov chain is constructed by means of the first order autoregression process $(AR(1))$. More exactly, in the paper Melfi (1992), the sequence Y_n, $n \geq 1$ of the first order autoregression process

$$Y_n = \beta_0 Y_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1,$$

where ξ_n, $n \geq 1$ is the sequence of independent identically distributed random variables (innovation) with $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$ and β_0 is some fixed number, $|\beta_0| < 1$ where the initial value of the process Y_0 is independent of the innovation $\{\xi_n\}$, is considered as an example.

As in the paper Melfi (1992), we assume

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k Y_{k-1}, \quad D_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}^2, \quad Z_n = \frac{C_n^2}{2D_n}.$$

It is clear that

$$Z_n = ng\left(\frac{C_n}{n}, \frac{D_n}{n}\right),$$

where $g(x,y) = \frac{x^2}{2y}$.

In the paper Melfi (1992) it is shown that as $n \to \infty$

$$\frac{C_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{\beta_0}{1-\beta_0^2} = \lambda_1,$$

$$\frac{D_n}{n} \to \frac{1}{1-\beta_0^2} = \lambda_2.$$

Taylor's expansion of the function $g(x,y)$ at the point (λ_1, λ_2) gives

$$Z_n = S_n + \varepsilon_n$$

where

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad X_k = \beta_0 Y_{k-1} Y_k - \frac{\beta_0^2}{2} Y_{k-1}^2$$

and

$$\varepsilon_n = n\left[\frac{1}{2} g''_{xx}\left(c_n^*, d_n^*\right)\left(\frac{C_n}{n} - \lambda_1\right)^2 + g''_{xy}\left(c_n^*, d_n^*\right)\left(\frac{C_n}{n} - \lambda_1\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{D_n}{n} - \lambda_2\right) + \frac{1}{2} g''_{yy}\left(c_n^*, d_n^*\right)\left(\frac{D_n}{n} - \lambda_2\right)^2\right],$$

c_n^* is an intermediate point between λ_1 and $\frac{c_n}{n}$, d_n^* is an intermediate point between λ_2 and $\frac{D_n}{n}$.

In this way the sequence $Z_n, n \geq 1$ is a perturbed Markov walk.

In the present paper, we prove the central limit theorem (CLT) for the family of the first passage time

$$\tau_a = \inf\left\{n \geq 1 : Z_n \geq a\right\}$$

of the perturbed Markov random walk

$$Z_n = \frac{C_n^2}{2D_n}, \quad n \geq 1.$$

It is clear that

$$Z_n \xrightarrow{a.s.} \frac{\beta_0^2}{2\left(1-\beta_0^2\right)} = \lambda_3 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Denote

$$N_a = \frac{a}{\lambda_3}$$

and

$$\tau_a^* = \frac{\tau_a - N_a}{\frac{1}{\lambda_3}\sqrt{N_a}}.$$

The following CLT holds for τ_a.

Theorem 1. *Let* $0 < \left|\beta_0\right| < 1$, $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$ *and* $EY_0^2 < \infty$. *Then*

$$\lim_{a\to\infty} P\left(\tau_a^* \leq x\right) = \Phi\left(cx\right), \quad x \in \mathbb{R}, c = \frac{1}{\left|\lambda_1\right|\sqrt{\lambda_2}}.$$

This work was supported by the science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan — Grant № EIF-2013-9 (15)-46/13/1.

References

Melfi, V. F. (1992). Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications. *The Annals of Probability*, *20* (2), 753–771.

Woodroofe, M. (1982). *Nonlinear renewal theory in sequential analysis*. Philadelphia: SIAM.

GENERATOR OF RANDOM EVOLUTION IN THE ASYMPTOTIC SMALL DIFFUSION SCHEME

U. T. Khimka[1], Ya. M. Chabanyuk[2]
[1]*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
[2] *Lublin Technology university, Poland*
yaroslav.chab@gmail.com

Consider random evolution with diffusion perturbation defined by stochastic differential equation (Kiykovska & Chabanyuk, 2013; Koroliuk & Limnios, 2005).

$$du^{\varepsilon,\delta}(t) = C(u^{\varepsilon,\delta}(t), x(t/\varepsilon^3))dt + (\varepsilon^{-1} + \delta^{-1})C_0(x(t/\varepsilon^3))dt, \tag{1}$$

where $u(t) \in \mathbb{R}^d$ — random evolution, $t \geq 0$; $C_0(x)$ — singular perturbation of regression function $C(u,x) \in C^2(\mathbb{R}^d)$; $x(t)$ — Markov process in phase space of states $(X, \boldsymbol{X})$ with stationary distribution $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ (Koroliuk & Limnios, 2005).

Generator of the Markov process $x(t)$ is given by relation

$$\boldsymbol{Q}(x)\varphi = q(x)\int_X Q(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \varphi \in \boldsymbol{B},$$

where $\boldsymbol{B}$ — Banach space of real bounded functions $\varphi(x)$ with supremum norm.

For the generator $\boldsymbol{Q}$ potential

$$\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1}$$

is determined, where

$$\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$$

— projector on the space of zeroes of the operator $\boldsymbol{Q}$

$$N_{\boldsymbol{Q}} = \{\varphi : \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}.$$

Limited evolution has a representation

$$du(t) = C(u(t))dt + \sqrt{\delta}\sigma\, dw(t),$$

where

$$C(u) = \int_X C(u,x)\pi(dx)$$

and

$$B = 2\int_X \boldsymbol{C}_0(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)\pi(dx).$$

For limited diffusion σ relation

$$B = \sigma^*\sigma.$$

Balance condition holds

$$\int_X \boldsymbol{C}_0(x)\pi(dx) \equiv 0.$$

The random evolution (1) is defined by the generator

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = [\varepsilon^{-3}\boldsymbol{Q} + (\varepsilon^{-1} + \delta^{-1})\boldsymbol{C}_0(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi(u,x).$$

Lemma. Solution of singular perturbation problem (Koroliuk & Limnios, 2005) for generator $\boldsymbol{L}^{\varepsilon,\delta}$ on perturbed test-function

$$\varphi^{\varepsilon,\delta}(u,x) = \varphi(u) + (\varepsilon + \delta)\varphi_1(u,x) + \varepsilon^3\varphi_2(u,x),$$

where $\varepsilon / \delta \to 1$, $\varepsilon \to 0$, has form

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon,\delta}(u,x) = \boldsymbol{L}^{\delta}\varphi(u) + \theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(u)\ ,$$

where limited generator $\boldsymbol{L}^{\delta}$ is determined from relation

$$\boldsymbol{L}^{\delta} = \Pi\boldsymbol{C}(x)\Pi + \delta\Pi\boldsymbol{C}_0(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)\Pi$$

and residual term $\theta_L^{\varepsilon}(x)$ is defined by the ratio

$$\sup_{x\in X}\theta_L^{\varepsilon}(x)\phi(u) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

The result got in the article allows to consider asymptotic presentation of exponential generator

$$\boldsymbol{H}^{\delta}\varphi^{\delta}(u) \to \boldsymbol{H}\varphi(u),\ \varphi^{\delta}(u) \to \varphi(u),$$

in the chart of cerouss with a small parameter $\delta \to 0$, namely

$$\boldsymbol{H}^{\delta}\varphi^{\delta}(u) \to \boldsymbol{H}\varphi(u),\ \varphi^{\delta}(u) \to \varphi(u), \delta \to 0.$$

References

Kiykovska, O. I., & Chabanyuk Ya. M. (2013). Random evolution in a scheme of asymptotically small diffusion with markov switchings. *Cybernetics and Systems Analysis*, *49* (2), 303–308.

Koroliuk, V., & Limnios, N. (2005). *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. World Scientific Publishing.

ONE APPLICATION OF THE LORENZ MODEL WITH MARKOV SWITCHING

A. V. Kinash
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
anastasiiakinash@gmail.com

City system is described by the generalized Lorenz model as follows (Белявский, Орлянин, 2012)

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = c_1XY - (c_2 + x(t)c_2)Z + \sigma(X,Y,Z)dw(t), \end{cases}$$

where X — the number of products produced in the city; Y — the proportion of indigenous people in the city; Z — land rent; $x(t), t \geq 0$ — Markov process; $\sigma(X,Y,Z)$ — diffusion; $w(t)$ — Wiener process (Korolyuk & Limnios, 2005).

The asymptotic dissipativity conditions for the diffusion process have representation (Кінаш, Чабанюк, Хімка, 2014).

$$C(u)V'(u) < -A_1V(u), \tag{1}$$

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^d} \left\| \sigma(u) \right\| < A_2, \tag{2}$$

where $A_1 > 0, A_2 > 0$ and $V(X,Y,Z) \in C^3(\mathbb{R}^d)$ Lyapunov function.

Considering the specific model of the city system

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = Y - 6X, \\ \dfrac{dY}{dt} = 3X - 3Y - 7XZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = 6XY - 4(1 + x(t))Z + dw(t). \end{cases} \tag{3}$$

Asymptotic dissipativity for the system (3) follows from the dissipativity of average system, which in this case has the form

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = Y - 6X, \\ \dfrac{dY}{dt} = 3X - 3Y - 7XZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = 6XY - 4Z + dw(t). \end{cases} \tag{4}$$

Let us check the fulfillment of conditions (1) and (2) for the system (4) provided $A_1 = 1$. As $\sigma(X,Y,Z) = 1$ than condition (2) is satisfied.

Considering Lyapunov function in the form

$$V(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Therefore

$$V'(X,Y,Z) = (2X,2Y,2Z)^T.$$

From (4) for $C(X,Y,Z)$ get

$$C(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} Y - 6X \\ 3X - 3Y - 7XZ \\ 6XY - 4Z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Here from, for condition (1) have

$$C(X,Y,Z)V'(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} Y - 6X \\ 3X - 3Y - 7XZ \\ 6XY - 4Z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2X \\ 2Y \\ 2Z \end{pmatrix} =$$

$$= 2XY - 12X^2 + 6XY - 6Y^2 - 14XYZ + 12XYZ - 8Z^2 =$$

$$= -12X^2 + 8XY - 6Y^2 - 8Z^2 - 2XYZ.$$

Thus condition (1) takes the form

$$-12X^2 + 8XY - 6Y^2 - 8Z^2 - 2XYZ < -X^2 - Y^2 - Z^2$$

$$-11X^2 + 8XY - 5Y^2 - 7Z^2 - 2XYZ < 0$$

$$-\left(\sqrt{11}X - \frac{4}{\sqrt{11}}Y\right)^2 - \frac{39}{11}Y^2 - 7Z^2 - 2XYZ < 0.$$

Finally, system (4) is dissipative. Therefore, initial system (3) is asymptotically dissipative.

References

Korolyuk, V. S., & Limnios, N. (2005). *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. World Scientific Publishing.

Белявский, С. С., Орлянин, Т. А. (2012). Обобщенная модель городской системы (обобщенная система Лоренца). *«Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: сборник статей Третьей международной научной конференции. Брест, 17–22 сентября 2012 г.* (с. 70—78).

Кінаш, А. В., Чабанюк, Я. М., Хімка, У. Т. (2014). Асимптотична дисипативність дифузійного процесу. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фізико-математичні науки. Збірник наук. праць. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 11*, 77—87.

OPTIMIZATION OF NONLINEAR TWO-SEGMENTED REGRESSION UNDER CONDITIONS OF HETEROSCEDASTICITY

V. N. Kuzmin
NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

In the area of model building a phantom is walking —
this is the phantom of heteroscedasticity.

The basic idea of the methodology proposed is optimization of two parameters of approximating regression. The first parameter is abscissa of switching point $\overline{x}$, the second parameter is a power of heteroscedasticity β. In this case under optimization we mean reaching minimum value by the sum of squared deviations when each deviation has its own weight (weighted least squares method) w_i. The system of weights is determined according to the formula (Кузьмин и др., 1986).

$$w_i = \left(\frac{\overline{y}}{\hat{y}_i}\right)^{\beta}, \tag{1}$$

where $\overline{y} = \sum y_i / n$, $\hat{y}$ is current value of approximating function estimated by ordinary least squares method (OLSM) with the same (equal) weights $w_i = 1$.

As an approximating function we have selected two-segmented regression of the type

$$\hat{y} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 - 2A_2 (x - \overline{x})_+^2, \tag{2}$$

where the term $(x - \overline{x})_+^2$ means that

$$(x - \overline{x})_+^2 = \begin{cases} (x - \overline{x})^2, \text{when } x > \overline{x} \\ 0, \text{ when } x \le \overline{x} \end{cases} \tag{3}$$

This regression has a switching point with abscissa $x = \overline{x}$.

Now show that application of the methodology proposed to the specific example touching upon dependence of the cotton yield capacity from irrigation (Езекиэл, Фокс, 1966).

Table 1. Dependence of the cotton yield capacity y on irrigation x.

x	1.2	1.3	1.3	1.4	1.5	1.5	1.8	1.8	1.9	2.1	2.3	2.5	3.5	3.5
y	18	22	9	16	23	28	26	18	37	44	38	45	40	65

To perform approximation for this example we use the method of weighted least squares to equation (2). To find optimal equation (2) it is necessary to use the methodology of constructing optimization paraboloid of the kind (Kuzmin, 2015).

$$z = a + b\beta + c\beta^2 + d\overline{x} + e\overline{x}^2 + f\beta\overline{x}. \tag{4}$$

To perform this task it is necessary to compute 25 variants for equation (2) using WLSM for parameter $\overline{x}_i$, that accepts the values 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 and parameter β_i with the following values: $\beta_i = 0;\ 0,5;\ 1;\ 1,5;\ 2$.

For each variant it is necessary to compute sum of weighted squared deviations that are given in table 2.

Table 2.

β \ $\overline{x}$	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
0	703,026	700,414	695,215	686,877	680,765
0,5	718,798	677,546	665,908	683,156	710,101
1,0	719,154	677,362	666,699	679,473	700,518
1,5	751,152	710,825	700,707	709,255	724,618
2,0	818,925	781,649	771,381	775,66	784,785

Using table 2 we constructed optimized paraboloid $z = f(\overline{x}, \beta)$ using ordinary least squares method. For our example it takes the form:

$$z = 2972 - 29.649\overline{x} + 49.085\overline{x}^2 - 2662\beta + 773.669\beta^2 - 15.056\overline{x}\beta. \qquad (5)$$

Determining partial derivatives of the function $z = f(\overline{x}, \beta)$ and equating them to zero $\partial z / \partial \overline{x} = 0$ and $\partial z / \partial \beta = 0$ we got the system of equations a solution of which provides optimal parameters values $\overline{x}_{opt} = 1,726$ and $\beta_{opt} = 0,567$.

After substitution of the parameters $\overline{x} = 1,726$ and $\beta = 0,567$ into equations of (1), (2) and solving equation (2) using weighted least squares method we will get equation that is close to the optimal two – segmented regression providing for the minimum of weighted least squares $\sum e^2 = 660,359$.

$$y = 0,013 + 4,476x + 6,469x^2 - 12,938(x - 1,726)_+^2 \qquad (6)$$

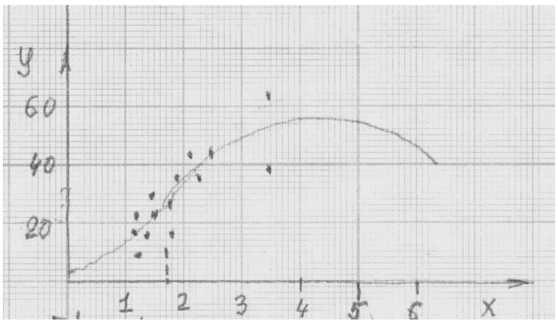


Fig. 1. Optimal regression

In spite of the fact that building of optimal equation leads to substantial complications with computing but due to modern computerization of calculation this is not a problem anymore. At the same time the optimization proposed provides a possibility to build correct mathematical models.

The methodology proposed allows to find and take into consideration the heteroscedasticity power when other approaches are unable to do this because of lack of empirical data.

References

Kuzmin, V. (2015). One method for approximation of the time series using three segmented linear regression. У *Математика в сучасному технічному університеті: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції, 24—25 грудня*, Київ (с. 5—6).

Езекиэл М., Фокс, К. А. (1966). *Методы анализа корреляций и регрессий*. (Пер. с англ.). Москва: Статистика.

Кузьмин В. Н. и др. (1986). Математическая модель скорости питания дафний при разной температуре и концентрации пищи. *Доклады Академии наук БССР, 30* (4), 376—379.

LIMIT THEOREMS FOR THE VALUE OF A RANDOM WALK IN MOMENT OF THE FIRST PASSAGE TIME BEYOND THE LEVEL BY THE PROCESS DESCRIBED BY A NONLINEAR FUNCTION OF AUTOREGRESSION PROCESS OF ORDER ONE ($AR(1)$)

F. H. Rahimov, I. A. Ibadova, A. D. Farkhadova
Baku State University, Baku, Azerbaijan
ragimovf@rambler.ru

Let $\xi_n,\ n \geq 1$ be a sequence of independent and identically distributed random variables determined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. As is known the auto-regression scheme or autoregression process of order one $AR(1)$ is determined by a recurrent relation of the form

$$X_n = \beta_0 X_{n-1} + \xi_n,, n \geq 1$$

where β_0 is some fixed number, and the initial value of the process X_0 is independent of innovation $\{\xi_n\}$.

Assume

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 \text{ and } Z_n = \frac{T_n^2}{2S_n}.$$

Let us consider the family of the first passage time

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : Z_n \geq a\} \tag{1}$$

by the process $Z_n,\ n \geq 1$ of the level $a \geq 0$.

Note that the family of stopping moments τ_a of the form (1) was studied in the paper Melfi (1992), where limit distribution of the overshoot $Z_{\tau_a} - a$ as $a \to \infty$ was found.

In the present paper we prove a central limit theorem for the processes Z_n as $n \to \infty$ and Z_{τ_a} as $a \to \infty$.

Note that such theorems are widely used in theory of random walks with random indices, also in renewal theory and in statistical sequential analysis (Woodroofe, 1982).

In the paper Melfi (1992) it is shown that for $|\beta_0| < 1$

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{a.s} \frac{\beta_0}{1-\beta_0^2} = \lambda_1,\ n \to \infty$$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s} \frac{1}{1-\beta_0^2} = \lambda_2,\ n \to \infty$$

and

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{a.s} \frac{\beta_0^2}{2\left(1-\beta_0^2\right)} = \lambda_3,\ n \to \infty$$

In Pollard (1984) it was proved that under conditions $\left|\beta_0\right| < 1$ and $EX_0^2 < \infty$ it holds the central limit theorem for the process $\beta_n = \frac{T_n}{S_n}$, $n \geq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\left(\beta_n - \beta_0\right) \leq x\right) = \Phi\left(x\sqrt{\lambda_2}\right),$$

where

$$\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy,\ x \in R.$$

To formulate the main results, we denote

$$Z_n^* = \frac{Z_n - n\lambda_3}{\sqrt{n}}, Z_{\tau_a}^* = \frac{Z_{\tau_a} - \tau_a\lambda_3}{\sqrt{\tau_a}}.$$

It holds

Theorem 1. *Let* $E\xi_1 = 0,\ D\xi_1 = 1,\ 0 < \left|\beta_0\right| < 1$ *and* $EX_0^2 < \infty$. *Then*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n^* \leq x\right) = \Phi\left(cx\right),\ x \in \mathbb{R}$$

where $c = \frac{1}{\left|\lambda_1\right|\sqrt{\lambda_2}}$.

Theorem 2. *Let the conditions of theorem 1 be fulfilled. Then*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_{\tau_a}^* \leq x\right) = \lim_{a\to\infty} P\left(Z_a^* \leq x\right) = \Phi\left(cx\right).$$

This work was supported by the science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan — Grant № EIF-2013-9 (15)-46/13/1.

References

Melfi, V. F. (1992). Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications. *The Annals of Probability*, *20* (2), 753–771.

Pollard, D. (1984). *Convergence of Stochastic Processes*. New-York: Springer.

Woodroofe, M. (1982). *Nonlinear renewal theory in sequential analysis*. Philadelphia: SIAM.

MARKOV CHAINS. HEALTH CONTROL

R. K. Shakenova, A. N. Shakenova
Kazakh national research technical university named after K. I. Satpaev, Almaty, Kazakhstan
rshaken@mail.ru

Let's consider the system C — the individual from a certain ecological, economic sphere. He can be in the following stages (Шакенова & Шакенова, 2013):

c_1 — healthy and works;

c_2 — ill, the disease is not detected;

c_3 — ill, light treatment;

c_4 — does not work, under medical observation;

c_5 — ill, under serious observation.

The surrounding environment of individual, roughly speaking, may be in two states, for instance, ecological:

a) polluted, increased radiation background — b_1;

b) normal — b_2;

Economic state of environment can be in two conditions:

a) critical, high unemployment — g_1;

b) normal — g_2.

As a result we'll get next states as the functions embedded into each other:

$S_1(c_1, b_2, g_2)$ — excellent state;

$S_2(c_2, b_2, g_2)$ — average state;

$S_3(c_3, b_1, g_1)$ — bad state.

Next, we'll introduce the strategies of governing administration in the specific region in the following way:

a) strategy, supporting the health of individual, which does not permit radioactive explosions in this area, the pieces of rockets, nuclear fuel bank and so on — u_1;

b) Strategy that does not support the citizen's health, permitting nuclear explosions in the area, rocket splinters, chemical laboratories, laboratories, which gather dangerous chemical, bacterial substances and so on. — u_2;

It is possible to compare two strategies — u_1 and u_2. Suppose that $P_2\left(P_1\right)$ is matrix of transitional probabilities of health that corresponds to strategy u_2 (u_1).

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}; \; P_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

The wealth of local population health is the initial capital associated with strategy u_1. It is expressed in the tenge and equal to:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 150 \\ 90 \\ 50 \end{pmatrix},$$

the initial capital associated with strategy u_2 is equal to

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

The local population's health will be described in this parametric form at u_1:

$$z_1 = q_{11} + \beta(p_{11}z_1 + p_{12}z_2 + p_{13}z_3),$$
$$z_2 = q_{21} + \beta(p_{21}z_1 + p_{22}z_2 + p_{23}z_3),$$
$$z_3 = q_{31} + \beta(p_{31}z_1 + p_{32}z_2 + p_{33}z_3),$$

where $Z = (z_1, z_2, z_3)$ is gained capital of a local population's health at u_1, $Q_1 = (q_{11}, q_{21}, q_{31})$ is initial capital, the coefficient β is the error coefficient as a result of overestimation , noise or other disturbances in the implementation of project. Substituting probabilities in the system of equations and taking the error coefficient as $\beta = 0.5$ we'll obtain the following:

$$.\begin{cases} z_1 = 150 + 0.5 \cdot (0.4 \cdot z_1 + 0.3 \cdot z_2 + 0.3 \cdot z_3), \\ z_2 = 90 + 0.5 \cdot (0.5 \cdot z_1 + 0.4 \cdot z_2 + 0.1 \cdot z_3), \\ z_3 = 50 + 0.5 \cdot (0.4 \cdot z_1 + 0.3 \cdot z_2 + 0.3 \cdot z_3). \end{cases} \quad (1)$$

Let's solve the system of equations (1).

$$\begin{cases} 0.8 \cdot z_1 - 0.15 \cdot z_2 - 0.15 \cdot z_3 = 150, \\ -0.25 \cdot z_1 + 0.8 \cdot z_2 - 0.95 \cdot z_3 = 90, \\ -0.2 \cdot z_1 - 0.15 \cdot z_2 + 0.85 \cdot z_3 = 50. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80 \cdot z_1 - 15 \cdot z_2 - 15 \cdot z_3 = 15000, \\ -25 \cdot z_1 + 80 \cdot z_2 - 95 \cdot z_3 = 9000, \\ -20 \cdot z_1 - 15 \cdot z_2 + 85 \cdot z_3 = 5000. \end{cases}$$

The final solution of the system is

$$z_1 = 315.44, z_2 = 466.91, z_3 = 215.44.$$

Hence, $Z = (z_1, z_2, z_3)$ is $Z = (315.44; 466.91; 215.44)$.

At u_2,we'll obtain the following system of equations (2):

$$\begin{cases} z_1 = 90 + 0.5 \cdot (0.3 \cdot z_1 + 0.3 \cdot z_2 + 0.4 \cdot z_3), \\ z_2 = 60 + 0.5 \cdot (0.4 \cdot z_1 + 0.3 \cdot z_2 + 0.3 \cdot z_3), \\ z_3 = 30 + 0.5 \cdot (0.2 \cdot z_1 + 0.3 \cdot z_2 + 0.5 \cdot z_3). \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0.85 \cdot z_1 - 0.15 \cdot z_2 - 0.2 \cdot z_3 = 90, \\ -0.2 \cdot z_1 + 0.85 \cdot z_2 - 0.15 \cdot z_3 = 60, \\ -0.1 \cdot z_1 - 0.15 \cdot z_2 + 0.75 \cdot z_3 = 30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 85 \cdot z_1 - 15 \cdot z_2 - 20 \cdot z_3 = 9000, \\ -20 \cdot z_1 + 85 \cdot z_2 - 15 \cdot z_3 = 6000, \\ -10 \cdot z_1 - 15 \cdot z_2 + 75 \cdot z_3 = 3000. \end{cases}$$

Solving the system of equations we'll get the unknown values:

$$z_1 = 146.68, \; z_2 = 119.84, \; z_3 = 83.53.$$

Thus, $Z = (z_1, z_2, z_3)$ is $Z = (146.68; 119.84; 83.53)$.

Comparing two values of accumulated capital of local population's health we may conclude that the best control strategy is u_1. Limiting probabilities were considered in Shakenova (2012).

References

Shakenova, R. (2012). The Limiting Probabilities in the Process of Servicing. *Applied Mathematics*, *2* (6), 184–186. DOI: 10.5923/j.am.20120206.01 US.

Шакенова, А. Н., Шакенова Р. К. (2013). Цепи Маркова и состояние здоровья. *Поиск*, 2013 (1). 49—57.

ASYMPTOTIC NORMALITY OF TOTAL LEAST SQUARES ESTIMATOR IN A MULTIVARIATE MEASUREMENT ERROR MODEL

Ya. Tsaregorodtsev, A. Kukush
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
777Tsar777@mail.ru, alexander_kukush@univ.kiev.ua

We deal with overdetermined system of linear equations $AX \approx B$. If the data matrix A and observation matrix B are contaminated with errors, and all the errors are uncorrelated and have equal variances, then the total least squares (TLS) technique is appropriate for solving this system (Van Huffel & Vandewalle, 1991). In Kukush and Van Huffel (2004) the statistical consistency of the TLS estimator $\hat{X}_{tls}$ was shown, as the number m of rows in A grows, provided the errors in $[A,B]$ are row-wise i.i.d. with zero mean and covariance matrix proportional to a unit matrix; the covariance matrix was assumed known up to a factor of proportionality; the true input matrix A_0 was supposed to be nonrandom. Actually in Kukush and Van Huffel (2004) a more general, element-wise weighted TLS estimator was studied, where the errors in $[A,B]$ were row-wise independent, but within each row the entries could be observed without errors, and addition the error covariance matrix could differ from row to row. In Markovsky et al. (2006) an iterative numerical procedure was developed to compute the elementwise-weighted TLS estimator, and the rate of convergence of the procedure was established.

In a univariate case where B and X are column vectors, the asymptotic normality of $\hat{X}_{tls}$ was shown by Gallo (1982), as m grows. In Pešta (2013) that result was extended to mixing error sequences. Both Gallo (1982) and Pešta (2013) utilized an explicit form of the TLS solution.

In our work we generalize the Gallo's asymptotic normality result to a multivariate case, where A, X, and B are matrices. An extended version of this paper is published in Kukush and Tsaregorodtsev (2016).

Now, a closed form solution is unavailable, and we work instead with the cost function. More precisely we deal with the estimating function, which is a matrix derivative of the cost function. In fact we show that under mild conditions, the normalized estimator converges in distribution to a Gaussian random matrix with nonsingular covariance structure. For normal errors, the latter structure can be estimated consistently based on the observed matrix $[A,B]$. The results can be used to construct the asymptotic confidence ellipsoid for a vector Xu, where u is a column vector of corresponding dimension.

We use the next denotations: $\mathbf{E}$ stands for expectation and acts as an operator on the total product, $\mathbf{cov}(x)$ denotes the covariance matrix of a random vector x, and for a sequence of random matrices $\{X_m, m \geq 1\}$ of the same size, notation

$X_m = O_p(1)$ means that the sequence $\{\|X_m\|\}$ is stochastically bounded, and $X_m = o_p(1)$ means that $\|X_m\| \xrightarrow{P} 0$. I_p denotes a unit matrix of size p.

The TLS problem

Consider the model $AX \approx B$. Here $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{m\times d}$ are observations, and $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$ is a parameter of interest. Assume that

$$A = A_0 + \tilde{A},\ \ B = B_0 + \tilde{B}, \tag{1}$$

and that there exists $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ such that

$$A_0X_0 = B_0, \tag{2}$$

where A_0 is nonrandom true input matrix, B_0 is true output matrix, and $\tilde{A},\ \tilde{B}$ are error matrices. The matrix X_0 is the true value of the parameter.

Model (1) and (2) is equivalent to the following EIV model:

$$a_i = a_{0i} + \tilde{a}_i,\ \ b_i = b_{0i} + \tilde{b}_i,\ \ b_{oi} = X_0^{\mathrm{T}} a_{0i}, i = 1,\ \ldots, m, \tag{3}$$

where $a_i^{\mathrm{T}},\ a_{0i}^{\mathrm{T}},\ \tilde{a}_i^{\mathrm{T}},\ b_i^{\mathrm{T}},\ b_{0i}^{\mathrm{T}}$ and $\tilde{b}_i^{\mathrm{T}}$ the rows of $A,\ A_0,\ \tilde{A},\ B,\ B_0$ and $\tilde{B}$, respectively, $i = 1,\ldots,m$. Based on observations $a_i,\ b_i,\ i = 1,\ldots,m$, one has to estimate X_0. The vectors a_{0i} are nonrandom and unknown, and the vectors $\tilde{a}_i,\ \tilde{b}_i$ are random errors.

State a global assumption.

(i). Vectors $\tilde{z}_i$ with $\tilde{z}_i^{\mathrm{T}} = [\tilde{a}_i^{\mathrm{T}}, \tilde{b}_i^{\mathrm{T}}],\ i = 1,2,\ldots,$ are i.i.d., with zero mean and variance-covariance matrix

$$S_{\tilde{z}} := \mathbf{cov}(\tilde{z}_1) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_{n+d}, \tag{4}$$

where a factor of proportionality σ^2 is positive and unknown.

The TLS problem consists in finding values of disturbances $\Delta\hat{A},\ \ \Delta\hat{B}$ minimizing the sum of squared corrections

$$\min_{(X\in\mathbb{R}^{n\times d}, \Delta A, \Delta B)} \left(\|\Delta A\|_F^2 + \|\Delta B\|_F^2 \right) \tag{5}$$

subject to the constraints:

$$(A - \Delta A)X = B - \Delta B. \tag{6}$$

Here in (5), for a matrix $C = (c_{ij}),\ \|C\|_F$ denotes the Frobenius norm,

$$\|C\|_F^2 = \sum\nolimits_{i,j} c_{ij}^2.$$

Later on we will use the operator norm as well,

$$\|C\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Cx\|}{\|x\|}.$$

TLS estimator and its consistency

Definition 1. *The TLS estimator* $\hat{X}_{tls}$ *of* X_0 *in the model (1), (2) is a measurable mapping of the underlying probability space into* $\mathbb{R}^{n\times d} \cup \{\infty\}$, *which solves the problem (5), (6) if there exists a solution, and* $\hat{X}_{tls} = \infty$ *otherwise.*

We need the following conditions for the consistency of $\hat{X}_{tls}$.

(ii). $\mathbf{E} \| \tilde{z}_1 \|^4 < \infty$, where $\tilde{z}_1$ enters condition (i).

(iii). $\frac{1}{m} A_0^T A_0 \to V_A$, as $m \to \infty$, where V_A is nonsingular matrix.

The next consistency result is contained in Theorem 4a) (Kukush & Van Huffel, 2004).

Theorem 1. *Assume condition* (i) *to* (iii). *Then* $\hat{X}_{tls}$ *is finite with probability tending to one, and* $\hat{X}_{tls}$ *tends to* X_0 *in probability, as* $m \to \infty$.

The objective and estimating functions

Denote

$$q(a,b;X) = (a^{\mathrm{T}}X - b^{\mathrm{T}})(I_d + X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(X^{\mathrm{T}}a - b), \tag{7}$$

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{m} q(a_i, b_i; X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times d}. \tag{8}$$

The TLS estimator is known to minimize the objective function (8), see (Sprent, 1966) or formula (24) in (Kukush & Van Huffel, 2004).

Lemma 1. *The TLS estimator* $\hat{X}_{tls}$ *is finite iff there exists an unconstrained minimum of the function (8), and then* $\hat{X}_{tls}$ *is a minimum point of that function.*

Introduce an estimating function related to the loss function (8):

$$s(a,b;X) := a(a^{\mathrm{T}}X - b^{\mathrm{T}}) - X(I_d + X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(X^{\mathrm{T}}a - b)(a^{\mathrm{T}}X - b^{\mathrm{T}}). \tag{9}$$

Corollary. A. Under conditions (i) to (iii), with probability tending to one $\hat{X}_{tls}$ is a solution to the equation

$$\sum_{i=1}^{m} s(a_i, b_i; X) = 0, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times d}. \tag{10}$$

B. Under assumption (i), the function $s\left(a,b;X\right)$ is unbiased estimating function, i.e., for each $i \geq 1$, $\mathbf{E}_{X_0} s(a_i, b_i; X_0) = 0$.

Expression (9) as a function of X is a mapping in $\mathbb{R}^{n\times d}$. Its derivative s'_X is a linear operator in this space.

Lemma 2. *Under condition* (i)*, for each* $H \in \mathbb{R}^{n\times d}$ *and* $i \geq 1$ *it holds*

$$\mathbf{E}_{X_0}[s'_X(a_i, b_i; X_0)\cdot H] = a_{0i}a_{0i}^{\mathrm{T}}H. \tag{11}$$

Therefore, we can identify $\mathbf{E}_{X_0} s'_X(a_i, b_i; X_0)$ with the matrix $a_{0i}a_{0i}^{\mathrm{T}}$.

Asymptotic normality

Introduce further assumptions to state the asymptotic normality of $\hat{X}_{tls}$. We need a bit higher moments compared with conditions (ii) and (iii) in order to use Lyapunov CLT.

(iv). For some $\delta > 0$, $\mathbf{E} \| \tilde{z}_1 \|^{4+2\delta} < \infty$.

(v). For some $\delta > 0$,

$$\frac{1}{m^{1+\delta/2}}\sum_{i=1}^{m} \| a_{0i} \|^{2+\delta} \to 0, \quad \text{as } m \to \infty. \tag{12}$$

(vi). $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_{0i} \to \mu_a$, as $m \to \infty$, where $\mu_a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

(vii). Distribution of $\tilde{z}_1$ is symmetric around the origin.

Introduce a random element in the space of systems consisting of 5 matrices:

$$W_i = (a_{0i}\tilde{a}_i^{\mathrm{T}}, a_{0i}\tilde{b}_i^{\mathrm{T}}, \tilde{a}_i\tilde{a}_i^{\mathrm{T}} - \sigma^2 \boldsymbol{I}_n, \tilde{a}_i\tilde{b}_i^{\mathrm{T}}, \tilde{b}_i\tilde{b}_i^{\mathrm{T}} - \sigma^2 \boldsymbol{I}_d). \tag{13}$$

Hereafter $\xrightarrow{d}$ stands for the convergence in distribution.

Lemma 3. *Assume conditions* (i) *and* (iii)–(vi). *Then*

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m} W_i \xrightarrow{d} \Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5), \text{ as } m \to \infty, \tag{14}$$

where Γ is a Gaussian centered random element with matrix components.

Lemma 4. *In assumptions of Lemma 3, replace condition* (vi) *with condition* (vii). *Then the convergence (14) still holds true, with independent components* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$.

Now, we state the asymptotic normality of $\hat{X}_{tls}$.

Theorem 2. A. *Assume conditions* (i) *and* (iii)–(vi). *Then*

$$\sqrt{m}(\hat{X}_{tls} - X_0) \xrightarrow{d} V_A^{-1}\Gamma(X_0), \quad \text{as } m \to \infty, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\Gamma(X) := \Gamma_1 X - \Gamma_2 + \Gamma_3 X - \Gamma_4 - \\ -X(\boldsymbol{I}_d + X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(X^{\mathrm{T}}\Gamma_3 X - X^{\mathrm{T}}\Gamma_4 - \Gamma_4^{\mathrm{T}}X + \Gamma_5),\end{gathered} \tag{16}$$

where V_A enters condition (iii), and Γ_i's enter relation (14).

B. In the assumption of part **A**, replace condition (vi) with condition (vii). Then the convergence (15) still holds true, and moreover the limit random matrix $X_\infty := V_A^{-1}\Gamma(X_0)$ has nonsingular covariance structure, i.e., for each nonzero vector $u \in \mathbb{R}^{d\times 1}$, $\mathbf{cov}(X_\infty u)$ is nonsingular matrix.

Remark 1. *Conditions of Theorem 2A are similar to Gallo's conditions (*Gallo, *1982) for the asymptotic normality in the univariate case, see also,* (Van Huffel & Vandewalle, *1991, pp. 240–243). Compared with Theorems 2.3 and 2.4 (*Gallo, *1982) stated for univariate case with mixing errors, we need not the requirement for entries of the true input* A_0 *to be totally bounded.*

Lemma 5. *Assume conditions of Theorem 2. Define*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{d}\operatorname{tr}\left[(\overline{bb^{\mathrm{T}}} - 2\hat{X}_{tls}^{\mathrm{T}}\overline{ab^{\mathrm{T}}} + \hat{X}_{tls}^{\mathrm{T}}\overline{aa^{\mathrm{T}}}\hat{X}_{tls})(\boldsymbol{I}_d + \hat{X}_{tls}^{\mathrm{T}}\hat{X}_{tls})^{-1}\right], \tag{17}$$

$$\hat{V}_A = \overline{aa^{\mathrm{T}}} - \hat{\sigma}^2\boldsymbol{I}_n. \tag{18}$$

Then

$$\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad \hat{V}_A \xrightarrow{P} V_A. \tag{19}$$

Remark 2. *The estimator (17) is a multivariate analogue of the maximum likelihood estimator (1.53),* (Cheng & Van Ness, 1999), *in the functional scalar EIV model.*

For the case $\tilde{z}_1 \sim N(0, \sigma^2\boldsymbol{I}_{n+d})$, based on Lemma 5 and relations

$$\sqrt{m}(\hat{X}_{tls}u - X_0u) \xrightarrow{d} N(0, S_u), \quad S_u > 0, \quad \hat{S}_u \xrightarrow{P} S_u,$$

in a standard way one can construct the asymptotic confidence ellipsoid for the vector X_0u.

Remark 3. *In a similar way a confidence ellipsoid can be constructed for any finite set of linear combinations of* X_0 *entries with fixed known coefficients.*

Conclusion

We extended the result of Gallo (1982) and proved the asymptotic normality of the TLS estimator in a multivariate model $AX \approx B$. The normalized estimator converges in distributin to a random matrix with quite complicated covariance structure. If the error distribution is symmetric around the origin, the latter covariance structure is nonsingular. For the case of normal errors, this makes it possible to construct the asymptotic confidence region for a vector X_0u, $u \in \mathbb{R}^{d\times 1}$, where X_0 is the true value of X.

In future papers, we will extend the result for the element-wise weighted TLS estimator (Kukush & Van Huffel, 2004) in the model $AX \approx B,$ where some columns of $[A,B]$ matrix may be observed without errors and in addition the error covariance matrix may differ from row to row.

References

Cheng, C.-L., & Van Ness, J. W. (1999). *Statistical regression with measurement error.* London: Arnold and New York: Oxford University Press. Kendall's Library of Statistics 6. MR1719513

Gallo, P. P. (1982). *Properties of estimators errors-in-variables models*. (PhD thesis). The University of North Carolina at Chapel Hill. MR2632121

Kukush A., & Tsaregorodtsev, Ya. (2016). Asymptotic normality of total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model $AX = B$. *Modern Stochastics: Theory and Applications, 3* (1), 47–57. http://arxiv.org/abs/1604.01591

Kukush, A., & Van Huffel, S. (2004). Consistency of elementwise-weighted total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model $AX = B$. *Metrika*, 59 (1), 75–97. MR2043433

Markovsky, I., Rastello, M. L., Premoli, A., Kukush, A., & Van Huffel, S. (2006). The element-wise weighted total least-squares problem. *Comput. Statist. Data Anal.*, *50* (1), 181–209.

Pešta, M. (2013). Asymptotics for weakly dependent errors-in-variables. *Kybernetika (Prague), 49* (5), 692–704. MR3182634

Sprent, P. (1966). A generalized least-squares approach to linear functional relationships. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 28, 278–297. MR0230432

Van Huffel, S. & Vandewalle, J. (1991). *The total least squares problem*. Philadelphia: SIAM. *Frontiers in Applied Mathematics 9*. MR1118607.

THE INTERPOLATION REPRESENTATION OF RANDOM PROCESSES WITH NON EQUIDISTANCE INTERPOLATIONS KNOTS

G. V. Verovkina
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
ganna.verov@gmail.com

Paper deals with some interpolation representations of random processes with non-equidistance interpolations knots.

Interpolation representations of a class of random process with non-equidistance interpolation knots are investigated. Obtained interpolation formula that uses the value of the process and its derivatives at the knots of interpolation. The convergence with probability 1 of the corresponding interpolation series to a random process is proved.

Consider the interpolation representation of random processes (Yaglom, 1963) on non-equidistance interpolation knots of the type

$$t_{n0} = n\frac{7\pi}{\alpha}, t_{n1} = n\frac{7\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}, n \in \mathbb{Z},$$

based on observations of the process and its derivatives of the first, second and third orders at knots $t_{n0}, n \in \mathrm{Z}$ and observations of the process and its derivatives of the first and second orders at knots $t_{n1}, n \in \mathbb{Z}$.

Let us formulate the necessary results from the theory of entire functions of complex variable.

Lemma 1. *Let $f(z)$ be an entire bounded on the real axis function of exponential type with indicator σ. Then for any α, $\alpha > \sigma$, the representation holds true*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{f(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z - t_{n0})^4} \times \frac{1}{2\sin^3\frac{\pi}{7}} - \frac{f'(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z - t_{n0})^3} \times \frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{7}} + \right.$$

$$+ \frac{f''(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z - t_{n0})^2} \times \frac{1}{2\sin^3\frac{\pi}{7}} - \frac{f'''(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z - t_{n0})} \times \frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{7}} -$$

$$- \frac{f(t_{n0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z - t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha})^2} \times \frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{7}} + \frac{f'(t_{n0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z - t_{n0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{7}} +$$

$$+\frac{f''(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^3(z-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})}\times\frac{1}{2\sin^4\frac{\pi}{7}}\Bigg)\times$$

$$\times\sin^4\frac{\alpha}{7}(z-t_{n0})\sin^3\frac{\alpha}{7}(z-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha}),$$

where $t_{n0}=n\frac{7\pi}{\alpha},\ n\in\mathbb{Z}$*, provided that the interpolation series (1) converges uniformly in any bounded region of the complex plane.*

Proving Lemma, as in Верьовкіна, Нагорний (2005), Verovkina (2015) we obtain estimate of the residual of the interpolation series (1), which has the following form

$$\left|R_n(z)\right|\leq LG(z)C_f\frac{\alpha}{\alpha-\sigma}\frac{1}{n},\tag{2}$$

where L is a constant,

$$C_f=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f(t)\right|,$$

$$G(z)=\left|\sin^4\frac{\alpha}{7}z\times\sin^3\frac{\alpha}{7}(z-\frac{\pi}{\alpha})\right|$$

is a function bounded on any bounded region of the complex plane.

Consider a random $\xi(t),\ t\in\mathbb{R}$ with $M\xi(t)=0$ and covariance function which the representation is

$$B(t,s)=\int_{\Lambda\times\Lambda}f(t,\lambda)\overline{f(s,\mu)}F(d\lambda,d\mu),\tag{3}$$

where Λ is a set of parameters, $F(.,.)$ is a positive definite additive complex function on $\Lambda\times\Lambda$ such that

$$\int_{\Lambda\times\Lambda}\left|F(d\lambda,d\mu)\right|<+\infty.\tag{4}$$

The function $f\left(t,\lambda\right)$ with respect to t is an entire function of exponential type with indicator $\sigma(\lambda)$ such that

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{-\infty<t<+\infty}\left|f(t,\lambda)\right|=C_f<+\infty,\tag{5}$$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(\lambda)=\sigma<+\infty.\tag{6}$$

The following theorem holds true.

Theorem. *Let* $\xi(t)$ *be a separable random process that satisfies conditions (3)-(6). Then for any* $\alpha,\ \alpha > \sigma$ *with probability 1 the following representation holds true*

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\xi(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n0})^4} \times \frac{1}{2\sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi'(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n0})^3} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} + \right.$$

$$+ \frac{\xi''(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n0})^2} \times \frac{1}{2\sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi'''(t_{n0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n0})} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} -$$

$$-\frac{\xi(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})^2} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{\xi'(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} +$$

$$\left. + \frac{\xi''(t_{n0}+\frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^3 (t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2\sin^4 \frac{\pi}{7}} \right) \times$$

$$\times \sin^4 \frac{\alpha}{7}(t-t_{n0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7}(t-t_{n0}-\frac{\pi}{\alpha}). \tag{7}$$

We obtain that the interpolation series (7) converges with probability 1 to a random process $\xi(t)$ in any bounded domain of changes of parameter t.

The work is devoted to investigation of interpolation representations of a class of random process. The main result is a theorem on the convergence of interpolating series to a random process with probability 1.

References

Verovkina, G. V. (2015). The interpolation representation of some classes of random fields. У кн. *Шістнадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука: Матеріали конференції*. (Т. 3, с.14—16). Київ: НТУУ «КПІ».

Yaglom, A. M. (1963). Spectral representations for various classes of random functions. In *Trudy 4 Vsesouzn. Mat. Congr. (Proc. 4th USSR Math. Congr.),* (Vol. 1), (pp.250–273). Leningrad: Izd. Akad. Nauk SSSR,.

Верьовкіна, Г. В., Нагорний, В. Н. (2005). Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, (1), 31—34.

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ СТАНУ СИСТЕМИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ІЗ НЕСКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ КАНАЛІВ

Т. В. Авдєєва, Л. М. Іллічева
НТУУ «Київський політехнічний інститут»,
Київська державна академія водного транспорту, Київ, Україна
avdeeva_t1@rambler.ru, m_ilicheva@ukr.net

Припустимо, що СМО має необмежену кількість каналів обслуговування. Поняття втрати заявки для такої системи втрачає смисл, система в будь-який момент часу може прийняти чергову заявку на обслуговування. Зберігає смисл поняття ймовірності стану, зокрема ймовірності $P_n(t)$ того, що на момент часу t в СМО знаходиться на обслуговування n каналів.

Нехай у СМО надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування однієї заявки кожним каналом є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом з параметром μ. Тоді, як відомо, стан СМО описується системою лінійних диференційних рівнянь:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_n'(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t), n \ge 1$$

Метою розв'язку є знаходження ймовірностей $P_n(t), n \ge 0$. Як показано в Розенберг, Прохоров (1962), Медведев, Колодінська (2006), розв'язок цієї системи можна одержати за допомогою твірної функції (Скрипка, Чабак, 2014), використовуючи спрощену процедуру одержання цього розв'язку. Перше рівняння системи множиться на x^0, а кожне з наступних — на x^n, потім одержані результати додаються. Тоді отримаємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)x^n = \lambda(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n - \mu(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t)x^{n-1}$$

Введемо твірну функцію

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n$$

Розглянемо її частинні похідні:

$$\Phi_x' = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t)x^{n-1}, \Phi_t' = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)x^n$$

Усі ряди для твірної функції та її частинних похідних збігаються в сегменті $[-1;1]$, оскільки при $x = 1$ відповідні ряди збігаються. Тоді одержимо рівняння:

$$\Phi_t' = (x-1)[\lambda\Phi - \mu\Phi_x'] \tag{1}$$

Розв’язок (1) шукаємо у вигляді:

$$\Phi = F\left(x,t\right)e^{\alpha\left(x-1\right)},$$

де $\alpha = \lambda/\mu$ — відносна інтенсивність потоку заявок, $F\left(x,t\right)$ — шукана функція.

Підставляючи даний вид твірної функції у рівняння (1), одержимо:

$$F_t' + \mu\left(x-1\right)F_x' = 0\,.$$

У статті Скрипка, Чабак (2014) показано, що шукана функція $F\left(u\right)$ є показниковою, твірна функція остаточно записується таким чином:

$$\Phi = e^{\alpha\left(x-1\right)\left(1-e^{-\mu t}\right)}$$

Розв’язок задачі одержують, розклавши праву частину останнього співвідношення за степенями x, користуючись означенням твірної функції. Тоді запишемо:

$$P_n\left(t\right) = \frac{\alpha^n}{n!}\left(1-e^{-\mu t}\right)^n e^{-\alpha\left(1-e^{-\mu t}\right)}, n \geq 0 \tag{2}$$

Цікаво розглянути випадки, які характерні при визначенні ймовірностей $P_n\left(t\right)$. Якщо

$$t = \frac{1}{\mu},\ P_n\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\alpha^n}{n!}\left(1-e^{-1}\right)^n e^{-\alpha\left(1-e^{-1}\right)} \approx \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{-2\alpha/3}$$

і при $n = 0$ знаходимо ймовірність того, що усі канали вільні:

$$P_0\left(t\right) \approx e^{-2\alpha/3}.$$

Якщо у формулі (2) перейти до наближення

$$e^{-\mu t} \approx 1 - \mu t,$$

одержимо:

$$P_n\left(t\right) \approx \frac{\alpha^n\left(\mu t\right)^n}{n!}e^{-\alpha\mu t}$$

При

$$t = \frac{1}{\mu}, P_n\left(\frac{1}{\mu}\right) \approx \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha},$$

тобто кількість зайнятих каналів розподілена за законом Пуассона. Також, як відомо, при $t \to \infty$ з (2) можна теж одержати стаціонарний розв’язок:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}, n \geq 0,$$

де

$$P_n = \lim_{n\to\infty} P_n\left(t\right).$$

Бачимо, що кількість зайнятих каналів у стаціонарному режимі, а також при деяких значеннях часу, розподілена за законом Пуассона. Оскільки розглядається пуассонівский потік заявок при негайному поданні на обслуговування кожної заявки, цей висновок не є несподіваним.

Список літератури

Медведев, М. Г., Колодінська, О. В. (2006). *Дослідження операцій*. Київ: Вид-во Європ. ун-ту.

Розенберг, В. Я., Прохоров, А. И.(1962). *Что такое теория массового обслуживания*. Москва: Советское радио.

Скрипка, В. І., Чабак, Л. М. (2014). Про моделювання систем масового обслуговування, *Водний транспорт,* (1), 196—200.

ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

І. М. Боднарчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
robeiko_i@ukr.net

Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}(X)$ — борельова σ-алгебра підмножин X; $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Означення 1.1 *Довільне σ-адитивне відображення*

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

називається стохастичною мірою.

Розглядаємо наступні дві задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

Тут $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0, a > 0$, та μ — стохастична міра, визначена на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ та $\mathcal{B}([0,T])$ у рівняннях (1) та (2) відповідно.

За певних умов щодо функцій f, σ, u_0, v_0 та міри μ, для кожної з даних задач доведено існування та єдиність м'якого розв'язку. Встановлено, що розв'язки задовольняють умову Гельдера за сукупністю змінних (t,x). Результат для випадку рівняння (1) представлено в Боднарчук (2010).

Аналогічні задачі для стохастичних рівнянь теплопровідності досліджено в роботах (Боднарчук, Шевченко, 2015; Radchenko, 2009; 2014).

Список літератури

Radchenko, V. (2009). Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. *Studia Math., 194* (3), 231–251.

Radchenko, V. (2014). Heat equation with general stochastic measure colored in time. *Modern Stochastics: Theory and Applications, 1* (2), 129–138.

Боднарчук, І. (2010). М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою. *Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка, 24*, 28—33.

Боднарчук, І. М., Шевченко, Г. М. (2015). Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із загальною стохастичною мірою. *Теорія ймовір. та матем. статист., 93*, 7—21.

МЕТОДИКА ПІДВИЩЕННЯ ВІРОГІДНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ДІАГНОСТИКИ СТАНУ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
armchairdoc@yandex.ua, sergeant@aprodos.kpi.ua

Однією з найважливіших характеристик автоматизованих систем контролю є вірогідність результатів контролю — ступінь об'єктивності відображення результатами контролю дійсного стану контрольованого об'єкта. Зокрема, забезпечення вірогідності одержуваної інформації має виняткове значення для ефективної роботи складних технічних систем, у яких вимір деякої величини може здійснюватися з використанням декількох датчиків, заснованих на різних принципах і рознесених територіально. У заданих контрольних точках необхідно приймати рішення про вибір одного результату з декількох, отриманих функціонально ідентичними, але максимально відмінними у всьому іншому резервними модулями. Для вирішення цієї проблеми добре зарекомендували себе алгоритми голосування (Барзилович, 1982).

Необхідність використання ускладнених процедур голосування обумовлена наступними причинами (Дедков, 1976):

— похибки вимірювань;
— вихід з ладу датчиків з технічних причин;
— сторонній вплив;
— збурення середовища;
— завади в каналах зв'язку.

При аналізі структури та закономірностей функціонування складної технічної системи перш за все визначають зв'язки між їх елементами та їхній вплив на показники роботи системи (Панкратова, 2008). Зазначимо, що найважливішим тут є «групування» взаємозалежних елементів системи у кластери, функціонування яких є відносно незалежним. Слід зазначити також, що склад кластерів та їх перелік не є постійними. Вони визначаються режимами роботи системи (енергопостачанням, наявністю сировини та комплектуючих, природними умовами, рівнями працездатності елементів, номенклатурою продукції тощо).

Отже, якщо $R = \left\{r_i\right\}, i = 1..n$ — множина режимів роботи системи, то $C_j = \left\{c_{ij}\right\}, j = 1..m_i$ — множина кластерів системи у випадку її функціонування в i-му режимі, відповідно

$$C = \bigcup_{i,j} c_{ij}$$

— множина всіх можливих кластерів системи при всіх допустимих режимах функціонування. Справність системи в кожному з режимів її роботи, в свою чергу, може бути описана булевою функцією

$$f_i = f_i\left(x_{i1}, ..., x_{ij}, ..., x_{im_i}\right),$$

де x_{ij} — булеві змінні, що свідчать про стан кластера c_{ij}. Будемо вважати, що при керуванні системою та її діагностуванні режим роботи визначений однозначно та адекватно на основі наявної інформації.

При визначенні стану кластера реалізується процедура голосування його елементів щодо його перебування в i-му стані (Latif-Shabgahi, 2001). При цьому вага $w_{ij}^{(l)}$ кожного елемента j-го кластера, де $l = 1..s_{ij}$ — відповідна нумерація елемента, що визначається за передісторією адекватності його голосувань:

$$w_{ij}^{(l)} = \frac{p_{ij}^{(l)}}{\sum_{l=1}^{s_{ij}} p_{ij}^{(l)}}$$

де

$$p_{ij}^{(l)} = \sum_t A_{ij}^{(l)}(t),$$

$A_{ij}^{(l)}(t)$ — показник адекватності голосування елемента в t-му циклі (дорівнює $+1$, якщо голосування відповідає реальній ситуації, -1 — у протилежному випадку, 0 — якщо елемент не брав участі в голосуванні). Результати голосування елементів з від'ємною вагою не беруться до уваги.

Залежно від наявних технологічних можливостей такі датчики відключаються від системи або підлягають заміні. Такий алгоритм підвищення вірогідності результатів голосування має наступні особливості. По-перше, його використання вимагає проведення статистичних досліджень для відновлення адекватності обраної математичної моделі та визначення її параметрів. По-друге, вказана процедура зваженого голосування адаптована до такої системи, що функціонує, еволюціонуючи, протягом тривалого часу, оскільки саме в такому випадку виникає спричинена технологічними обставинами та різницями у термінах функціонування неоднорідність елементів системи.

Список літератури

Latif-Shabgahi, G., Bass, J. M., & Bennett, S. (2001). History-based weighted average voter: A novel software voting algorithm for fault-tolerant computer systems. In *Proc. of the 9th IEEE Euromicro Workshop on Parallel and Distributed Processing,* Mantova, Italy, (p. 402–409).

Барзилович, Е. Ю. (1982). *Модели технического обслуживания сложных систем*. Москва: Высшая школа.

Дедков, В. К., Северцев, Н. А. (1976). *Основные вопросы эксплуатации сложных систем.* Москва: Высшая школа.

Панкратова, Н. Д., Радюк, А. М. (2008). Розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»,* (3), 43—52.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ

Ю. П. Буценко, Ю. Г. Савченко, С. В. Семенов
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
ssaavvaa@ukr.net

Алгоритми та процедури, які застосовуються для генерації послідовностей псевдовипадкових чисел (ППВЧ), у значній мірі визначаються програмними чи апаратними засобами, що для цього використовуються. Такі послідовності повинні створюватись за допомогою *детермінованих* процедур, оскільки їх використання в криптографічному захисті на основі потокових шифрів класу скремблерів та сигнатурному діагностуванні потребує створення дублікату конкретної ППВЧ як ключа шифрування у відправника повідомлення та ключа дешифрування у його отримувача. Аналогічна вимога чинна і при застосуванні сигнатурних методів при діагностуванні цифрової апаратури. Із цих міркувань застосування засобів формування *справжніх випадкових* (наприклад, на основі оцифровування аналогових шумових сигналів) послідовностей є неприйнятним.

Очевидними вихідними вимогами при створенні будь-якої процедури генерації ППВЧ є фіксація діапазону чисел, з якого формується послідовність. Нехай це будуть натуральні цілі числа $0,1,2,\ldots,Q_i,\ldots,\ N-1$. Процедуру формування ППВЧ будемо шукати у вигляді таблиці, що задає перехід від деякого поточного числа в послідовності до наступного. (Звичайно, бажано такий перехід задати функцією, але це кінцева мета пошуку, а поки приймемо табличне представлення як вимушене. Крім того, впорядкуємо поточні числа в порядку зростання, а саму процедуру формування ППВЧ зобразимо у вигляді такої таблиці (Табл.1)

0	1	2	$\ldots$	Q_i	$\ldots$	$N-1$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Q_0	Q_1	Q_2	$\ldots$	Q_j	$\ldots$	Q_{N-1}

де Q_j — число, яке «з'явиться» у ППВЧ зразу після числа Q_i.

Розглянемо, які можуть бути варіанти (різновиди) таких таблиць.

Варіант перший (і основний). Нижній рядок містить всі числа від 0 до $N-1$ у довільному порядку. Тоді кількість можливих варіантів різних таблиць буде $N!$, але довжина до повторення чисел формованих за допомогою таблиць послідовностей виявиться теж різною. Легко показати, що для отримання послідовності максимальної довжини $L_{\max} = N$ необхідно, щоб граф переходів від числа до числа був однозв'язаним (не містив циклів). Таку послідовність чисел формує, наприклад, звичайний лічильник (Табл. 2)

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots, N-1$$
$$N-1, 0,1,2,3\ldots, N$$

Але навряд хто-небудь наважиться цю послідовність назвати схожою на випадкову.

Інший приклад — це послідовності, що формуються регістрами зсуву зі зворотними зв'язками по модулю 2. У таких випадках наступне двійкове число послідовності утворюється з поточного шляхом зсуву всіх розрядів на один біт праворуч, а на місце молодшого розряду записується сума по модулю 2 фіксованої сукупності розрядів поточного числа. Якщо така сукупність обрана у відповідності до коефіцієнтів примітивного полінома степені $N-1$, який до того ж є дільником бінома $2^{N-1}\oplus 1$, то формована послідовність має довжину $L_{\max}-1$, де 1 записана в рахунок числа $0,0,\ldots,0$, яке за визначенням не повинна містити ППВЧ.

У другому варіанті нижній рядок таблиці переходів містить числа, які повторюються. У цьому випадку при генерації ППВЧ виникають «зациклювання» можливо ще до вичерпання всіх чисел заданого діапазону, тобто деякі вершини графу переходів виявляться недосяжними, а сформована послідовність — укороченою. Добре це, чи погано? Відповідь на питання залежить від зовнішніх вимог до довжини ППВЧ. Якщо сформована послідовність використовується як ключ для шифрування, то в цьому випадку її довжина може бути порівняно невеликою (наприклад, для більшості поширених на практиці блокових шифрів $N \leq 256$ біт. Але для потокових шифрів типу скремблерів бажано, щоб довжина ППВЧ була не меншою, ніж довжина відкритого тексту, що подається на вхід шифратора.

Для узагальнення алгоритму формування ППВЧ із урахуванням, що мова йде про бінарні числа, трансформуємо табл.1 у розгорнутий («побітовий») вигляд (Табл.2)

00…0	$q_{11}\left(t+1\right)q_{12}\left(t+1\right),\ldots,q_{1n}\left(t+1\right)$
00…1	$q_{21}\left(t+1\right)q_{22}\left(t+1\right),\ldots,q_{2n}\left(t+1\right)$
……..	………………………………………..
11…0	$q_{N-21}\left(t+1\right)q_{N-22}\left(t+1\right),\ldots,q_{N-2n}\left(t+1\right)$
11…1	$q_{N-11}\left(t+1\right)q_{N-12}\left(t+1\right),\ldots,q_{N-1n}\left(t+1\right)$

Очевидно, що така таблиця не що інше, як таблиця істинності для n булевих функцій, які задають правила утворення для кожного біта наступного двійкового числа у ППВЧ. Очевидно також, що таких таблиць для кожної сукупності функцій може бути теоретично багато (тут вже починаються комбінаторні числа). Так, лише для однієї з n функцій це число $M = 2^{2^n}$. Не менш очевидно, що для криптоаналітика знайти простим перебором («грубою силою») функції, що були використані при формуванні ППВЧ задача непід'ємна навіть при залученні до її розв'язання суперкомп'ютерів. Вже при зовсім «дитячому» значенні $n = 8$ обсяг перебору $M. > 10^{80}$.

Детальний аналіз показує, що далеко не всі з цих функцій є придатними (точніше, перспективними) для практичного використання. Саме тут виникає кардинальне питання: як вибір функцій переходів впливає на якість ППВЧ? І що є критерієм якості ? На сьогодні існує досить велика кількість програмних засобів тестування ППВЧ, наприклад (Потий, Орлова, 2001; Soto, 1999, October). Але практично всі ці засоби орієнтовані на оцінку, умовно кажучи, «кінцевого продукту», тобто вже сформованої послідовності, і тому для отримання коректної оцінки якості необхідно протестувати достатньо велику з точки зору статистичних критеріїв кількість ППВЧ, отриманих за однаковим алгоритмом. До того ж тестування в більшості випадків не дає кількісної оцінки якості послідовності.

Кількісну апріорну оцінку може дати використання фундаментального критерію Колмогорова (1965), відповідно до якого якість ППВЧ визначається довжиною опису процедури її формування. Цей критерій дозволяє зробити, принаймні, прогнозну оцінку якості до тестування послідовності вже на етапі створення програмного або апаратного генератора ППВЧ. У першому наближенні кількісну оцінку якості дає обсяг таблиці переходів для двійкових чисел, а це, фактично, n таблиць істинності булевих функцій від n змінних. У загальному випадку цей обсяг без врахування можливостей мінімізації функцій складає $S \leq n2^n$ біт. Зазначимо для порівняння, що при традиційній реалізації на основі лінійних двійкових фільтрів із зворотними зв'язками по модулю 2 цей обсяг складає n біт.

Розглянемо декілька прикладів, які ілюструють пропонований підхід. Для спрощення обмежимо розрядність генерованих чисел невеликими значеннями. Таблиця 3 задає деякі конкретні функції переходів для $n = 3$

$Q_i(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$	$q_3(t)$	$Q_j(t+1)$	$q_1(t+1)$	$q_2(t+1)$	$q_3(t+1)$
0	0	0	0	4	1	0	0
1	0	0	1	5	1	0	1
2	0	1	0	6	1	1	0
3	0	1	1	7	1	1	1
4	1	0	0	3	0	1	1
5	1	0	1	2	0	1	0
6	1	1	0	7	1	1	1
7	1	1	1	1	0	1	1

Відповідні логічні функції мають такий вигляд:

$$q_1(t+1) = \overline{q_1}(t),\ \ q_2(t+1) = q_1(t) \oplus q_2(t),$$
$$q_3(t+1) = q_1(t)q_2(t) \vee (q_1(t) \oplus q_3(t)).$$

Програмний або апаратний генератор, у який «закладені» ці функції, буде створювати послідовність чисел

$$0, 4, 3, 7, 1, 5, 2, 6, 7, 1, 5, 2, 6, 7, \ldots,$$

або відповідну бітову послідовність

$$000100011111001101010101111001101010110111\ldots$$

Якщо ж послідовність розбити на *пари* сусідніх бітів, отримаємо такий ряд чисел

$$0, 1, 2, 1, 3, 3, 0, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 1, \ldots$$

Із цього простого прикладу видно, що вид і довжина послідовності можуть залежати від того «стартового» слова, з якого починається генерація. Крім того, можуть виникати зациклювання генератора, коли в таблиці переходів права частина містить не всі числа з вихідного діапазону.

Слід зауважити, що наведений приклад носить чисто ілюстративний характер і не відображує багатьох особливостей використання автоматного підходу до генерації бінарних послідовностей. Зокрема, як свідчать результати моделювання, далеко не всі сукупності булевих функцій дають послідовності задовільної довжини через зациклювання. Тому в загальному випадку необхідно проводити попередній відбір функцій.

Список літератури

Потий, А., Орлова, С. (2001). Статистическое тестирование генераторов случайных и псевдослучайных чисел с использованием набора статистических тестов NIST STS. *Правове, нормативне та метрологічне забезпечення систем захисту інформації в Україні*, (2), 206—214.

Колмогоров, А. Н. (1965). Три подхода к определению понятия «количество информации». *Проблемы передачи информации*, *1* (1), 3—11.

Soto, J. (1999, October). Statistical testing of random number generators. *In Proceedings of the 22nd National Information Systems Security Conference* (Vol. 10, No. 99, p. 12). Gaithersburg, MD: NIST.

МЕТОД СЦЕНАРІЇВ І ЗАПАСИ БЕЗЗБИТКОВОСТІ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПРОЕКТУ

О. Б. Васильєв, Н. С. Васильєва, Н. П. Тупко
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса,
Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса,
Національний Авіаційний Університет, Київ, Україна
natupko@rambler.ru

Нехай потік чистих доходів від експлуатації інвестиційного проекту (скорочено — ІП) утворює просту постійну ренту постнумерандо (якщо не враховувати отримання ліквідаційної вартості обладнання в кінці строку життя ІП) з елементами:

$$CF_t = \left(Q\left(c-\nu\right) - FC - dep\right)\left(1-\tau\right) + dep, \tag{1}$$

де $t \in \overline{1,n}$ — номер періоду ІП, Q — об'єм виробництва (продаж) продукції за 1 період ІП, c — ціна одиниці продукції ІП, ν — питомі змінні видатки, FC — постійні видатки за 1 період ІП, dep — сума відрахувань на амортизацію обладнання за 1 період ІП, τ — ставка податку на прибуток, n — кількість періодів ІП.

Будемо виміряти ефективність (прибутковість) ІП за допомогою показника чистої сучасної вартості — NPV (Net Present Value), значення якого знаходимо за формулою з Лукасевич (1998, с. 181), уважаючи ліквідаційну вартість обладнання ІП S рівною нулю:

$$NPV = -I_0 + \left(\left(Q\left(c-\nu\right) - FC - dep\right)\left(1-\tau\right) + dep\right)a\left(n;i\right) \tag{2}$$

де I_0 — початкові інвестиції в проект; $a\left(n;i\right) = \left(1-\left(1+i\right)^{-n}\right)/\,i$ — коефіцієнт дисконтування одиничної ренти за n періодів по ставці i; i — вартість капіталу ІП.

Нижня границя беззбитковості ІП визначається рівнянням:

$$NPV = 0, \tag{3}$$

де значення NPV знаходимо за формулою (2).

Для k-го ймовірного сценарію проекту рівняння (3) має вигляд:

$$NPV_k = -I_0^{\,k} + \left(\left(Q_k\left(c_k-\nu_k\right) - FC_k - dep_k\right)\left(1-\tau_k\right) + dep_k\right)a\left(n_k;i_k\right) = 0, \tag{4}$$

де $k = \overline{1,m}; m$ — кількість ймовірних сценаріїв ІП.

Розв'язуючи рівняння (4) відносно змінної Q_k, знаходимо об'єм Q_k^0 виробництва продукції ІП за 1 період проекту, який носить назву динамічної точки беззбитковості проекту. Формулу для знаходження цього критичного об'єму виробництва для k-го ймовірного сценарію проекту знайдемо за аналогією з Васильев, Тупко (2014, с. 21):

$$Q_k^{\,0} = \frac{1}{c_k-\nu_k}\left(\frac{1}{1-\tau_k}\left(\frac{I_0^{\,k}}{a\left(n_k;i_k\right)} - dep_k\right) + FC_k + dep_k\right), k = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Тоді очікуване значення динамічної точки беззбитковості проекту в методі сценаріїв знайдемо за формулою:

$$M\left(Q^0\right) = \sum_{k=1}^{m} Q_k^0 p_k \ , \tag{6}$$

де m — кількість розглянутих сценаріїв ІП, а p_k — ймовірність реалізації k-го сценарію проекту.

Абсолютний запас інвестиційної беззбитковості на 1 період проекту визначимо для його k-го ймовірного сценарію за аналогією з Васильев, Васильева, Тупко (2014, с. 58):

$$\chi_k = Q_k - Q_k^0, k = \overline{1,m}, \tag{7}$$

а відносний:

$$\eta_k = \frac{Q_k - Q_k^0}{Q_k} = 1 - \frac{Q_k^0}{Q_k},\ k = \overline{1,m}, \tag{8}$$

де значення Q_k для k-го сценарію проекту задано за умовою, а Q_k^0 знаходимо з (5).

Тоді відповідні математичні сподівання цих запасів дорівнюють:

$$M\left(\chi\right) = M\left(Q\right) - M\left(Q^0\right), \tag{9}$$

$$M\left(\eta\right) = 1 - M\left(Q^0 / Q\right), \tag{10}$$

де

$$M\left(Q\right) = \sum_{k=1}^{m} Q_k p_k; \quad M\left(Q^0 / Q\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{Q_k^{\ 0}}{Q_k} p_k. \tag{11}$$

Якщо величини (9), (10) додатні, то ІП має деякий «запас міцності». Причому, чим більше значення величин (9), (10), тим стійкіше ІП з фінансової точки зору, тобто є менш ризикованим.

Зауваження.

1. Аналогічні результати можна отримати у випадку виробництва декількох видів продукції ІП. Тільки формула для динамічної точки беззбитковості проекту в цьому випадку виглядає трохи інакше Васильев, Тупко (2014, с. 22).

2. Якщо потік платежів ІП — довільний (тобто не є постійною рентою), то в цьому випадку для знаходження очікуваних значень запасів фінансової стійкості ІП треба використовувати підхід, викладений авторами у Васильев, Васильева (2015).

3. Використовуючи поняття динамічної точки прийнятності ІП і запасів прийнятності, які були запроваджено в роботах Васильев та ін. (2014) і Васильев, Васильева (2015), можна по аналогії з вище викладеним знайти очікувані значення запасів прийнятності проекту для методу сценаріїв.

4. Можна також знайти очікувані значення границь беззбитковості і прийнятності проекту, які розглянуті у Васильев, Васильева (2015).

Список літератури

Васильев, А. Б., Васильева, Н. С. (2015). Запасы и пределы инвестиционной безубыточности и приемлемости проекта по значениям показателей эффективности. *Економіка та держава*, (4), 28—32.

Васильев, А. Б., Васильева, Н. С., Тупко, Н. П. (2014). Уровни доходности и запасы инвестиционной безубыточности и приемлемости проекта. *Науковий вісник ОНЕУ*, (10), 51—63.

Васильев, А. Б., Тупко, О. С. (2014). Динамический анализ безубыточности инвестиционного проекта. *Науковий вісник ОНЕУ*, (7), 16—23.

Лукасевич, И. Я. (1998). *Анализ финансовых операций*. Москва: ЮНИТИ.

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ВЕКТОРІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ СИМВОЛАМИ W-ЗОБРАЖЕННЯ

Вікторія Волошина

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

wictorria@gmail.com

Вступна частина. Однією із важливих проблем теорії ймовірності сьогодні є дослідження розподілів випадкових величин типу Джессена — Вінтнера (Jessen & Wintner, 1935), зокрема випадкових величин з незалежними символами Q- та Q^* розбиття. Узагальнення отриманих результатів для багатовимірного випадку проводилися у роботах Школьного (1998, 2000), однак із суттєвими обмежуючими умовами, накладеними на символьне розбиття одиничного квадрата $(N$-властивість). У нашому дослідженні умова не більш ніж зчисленної кількості представлень для точки одиничного квадрата знята, внаслідок введення W-зображення, а також отримано ряд нових загальних результатів для випадкових векторів із незалежними його символами.

W**-зображення.** Розглянемо побудову W-розбиття та W-зображення точок одиничного квадрата. Виконаємо його поділ на $n, n \geq 2)$ замкнених у цьому просторі множин $\Delta_0^W, \Delta_1^W, ..., \Delta_{n-1}^W$ (ці множини називаються циліндрами W-зображення першого рангу). При цьому мають виконуватися умови

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta_i^W = E, \lambda\left(\Delta_i^W \cap \Delta_j^W\right) = 0, i \neq j, i, j \in \overline{0, n-1},$$

$$\lambda\left(\Delta_0^W\right) : \lambda\left(\Delta_1^W\right) : ... : \lambda\left(\Delta_{n-1}^W\right) = q_0 : q_1 : ... : q_{n-1},$$

причому $q_i > 0, \sum_{i=0}^{n-1} q_i = 1.$

На k-му кроці кожна множина

$$\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}}, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, n-1}$$

знову ділиться на n частин

$$\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}0}, \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}1}, ..., \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[n-1]}$$

(ці множини називаються циліндрами $(k+1)$-го рангу), кожна з яких має бути замкненою в $\mathbb{R}^2$. При цьому для довільного фіксованого набору $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, n-1}$ мають виконуватися умови:

1) $\bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}i} = \Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}};$

2) $\lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}i} \cap \Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}j}\right) = 0, i \neq j;$

3) $\lambda\left(\Delta^{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}0}\right):\lambda\left(\Delta^{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1}\right):\ldots:\lambda\left(\Delta^{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[n-1]}\right)=q_0:q_1:\ldots:q_{n-1}$;

4) $\operatorname{diam}\left(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right)\to 0, k\to\infty$.

Задане таким чином розбиття визначає зображення точок одиничного квадрата, оскільки для довільної послідовності символів з алфавіту існує послідовність вкладених циліндрів, які стягуються в єдину точку, а також для кожного фіксованого x із квадрата E існує хоча б одне W-представлення.

Дослідження випадкових векторів, які породжуються W-зображенням. Розлянемо клас випадкових векторів, які породжуються незалежними символами W-зображення, тобто:

$$\xi=\Delta^{W}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}, \qquad (*)$$

де ξ_k розподілені за законом:

$$\begin{array}{cccccc} \xi_k & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ p_{ik} & p_{0k} & p_{1k} & p_{2k} & \cdots & p_{[n-1]k} \end{array}$$

Для вказаних випадкових векторів виконується

Теорема. *Якщо*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_i p_{ik}>0,$$

то розподіл випадкового вектора ξ *є дискретним.*

Аналогічно до одновимірного випадку можна припустити, що для даних випадкових векторів справджуються узагальнення теорем Джессена — Вінтнера та Леві.

Гіпотеза 1 (узагальнення теореми Джессена — Вінтнера). *Випадковий вектор*

$$\xi=\Delta^{W}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

породжений незалежними символами W*-зображення має чистий розподіл.*

Гіпотеза 2 (Узагальнення теореми Леві). *Випадковий вектор*

$$\xi=\Delta^{W}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

породжений незалежними символами W*-зображення має чисто неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max p_{ik}=0$.

Основним отриманим результатом є спростування гіпотез 1 і 2.

Список літератури

Jessen B., & Wintner A. (1935). Distribution functions and the Riemann Zeta function. *Trans. Amer. Math. Soc., 38,* 48–88.

Школьний, О. В. (1998). Випадкові величини, задані розподілами своїх цифр в системі числення з комплексною основою. *Укр. мат. журн, 50* (12), 1715—1720.

Школьний, О. В. (2000). *Комплекснозначні випадкові величини типу Джессена — Вінтнера*. Дис. на здоб. ступ. канд. фіз.-мат. наук., Інститут математики НАН України, Київ.

λ-РОЗПОДІЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Л. А. Вотякова, Н. М. Кобець
Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського, Вінниця, Україна
kobets.94yandex.ru@mail.ru

Для розподілу, побудованого на основі моделі зміни інтенсивності відмов з подальшим граничним переходом, знайдено випадкову величину з таким розподілом. Причому така випадкова величина подається спеціальним чином через випадкові величини з вейбулівським розподілом.

Виходячи з певної фізичної моделі зміни інтенсивності відмов, нами побудовано однопараметричний розподіл

$$\bar{F}(t,\lambda) = (1+\lambda^2 t^2)e^{-\lambda^2 t^2},$$

який ми назвали λ-розподілом.

Такий розподіл може слугувати характеристикою надійності елементів системи, або деяких систем у цілому.

λ-розподіл має цілий ряд специфічних властивостей, які можуть слугувати орієнтиром для побудови відповідних статистик, які у свою чергу, можуть бути покладені в основу критерія згоди.

Розглянемо ці властивості.

1. λ-розподіл є унімодальний розподіл, його мода

$$m = \frac{\sqrt{1,5}}{\lambda} \approx 1,22\frac{1}{\lambda}$$

менше математичного сподівання

$$a = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda} \approx 1,31\frac{1}{\lambda}.$$

2. Відносно параметра λ значення функції $\bar{F}(t,\lambda)$ розподіляються таким чином, що $t = k\lambda^{-1}$, де $k > 0$, то

$$P(\xi > k\lambda^{-1}) = \bar{F}(k\lambda^{-1},\lambda) = (1+k^2)e^{-k^2},$$

зокрема маємо наступну таблицю

t	$0,1\lambda^{-1}$	$0,2\lambda^{-1}$	$0,3\lambda^{-1}$	$0,4\lambda^{-1}$	$0,5\lambda^{-1}$	$0,6\lambda^{-1}$	$0,7\lambda^{-1}$
$\bar{F}(t,\lambda)$	$0,999$	$0,9984$	$0,9919$	$0,9860$	$0,9750$	$0,9520$	$0,9089$

t	$0,8\lambda^{-1}$	$0,9\lambda^{-1}$	λ^{-1}	$\sqrt{1,5}\lambda^{-1}$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\lambda^{-1}$	$2\lambda^{-1}$	$3\lambda^{-1}$
$\bar{F}(t,\lambda)$	$0,8692$	$0,7964$	$0,7148$	$0,5500$	$0,4968$	$0,0915$	$0,001$

При достатньо малих λ цей розподіл можна застосувати як модель відмов довговічних пристроїв (матеріалів), які після середнього часу життя інтенсивно старіють.

3. Середнє квадратичне відхилення близьке до $\dfrac{1}{\lambda}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{32-9\pi}{16\lambda^2}} \approx 0,97\frac{1}{\lambda}.$$

4. Коефіцієнт асиметрії є характеристикою класу λ розподілів

$$\gamma = \frac{(27\pi - 84)2\pi}{\sqrt{(32-9\pi)^2}} \approx 0,4\,.$$

5. Квадрат випадкової величини з λ-розподілом є сума двох незалежних однаково розподілених випадкових величин, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ^2.

6. Якщо $t_1, t_2, ..., t_n$ – вибірка об'єму n з λ-розподілу, тобто $t_1, t_2, ..., t_n$ є значеннями, яких набрали відповідно незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, кожна з яких має λ-розподіл (з невідомим нам λ), то статистичною оцінкою невідомого параметра λ^2 є

$$\lambda^{2*} = \frac{2n}{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2},$$

а оскільки така оцінка зміщена (асимптотично незміщена), то її підправляють і беруть за оцінку

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{2n-1}{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}.$$

Така оцінка спроможна і майже ефективна.

Список літератури

Базовский, И. (1995). *Надежность. Теория и практика*. Москва: Мир.

Барлоу, Р., Прошан, Ф. (1965). *Математическая теория надежности*. Москва: Мир.

Гнеденко, Б. В., Рыжик, И. М. (1962). *Математические методы в теории надежности*. Москва: ГИЗФМЛ.

Кендалл, М., Стюарт, А. (1966). *Теория распределений*. Москва: Наука.

Королюк, В. С., Турбин, А. Ф. (1975). *Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем*. Москва: Наука.

ПРО G-ІЗОМОРФІЗМ ЙМОВІРНІСНИХ ТЕОРІЙ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ ТА ФРАКТАЛЬНУ ДОВІРЧІСТЬ СІМЕЙСТВ ПОКРИТТІВ

І. І. Гарко, Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна,
garko.iryna@gmail.com, rnikiforov@gmail.com, torbin@npu.edu.ua

Доповідь присвячена новому методу побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій для $I-Q_\infty$-зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень, які символи вибраного зображення переводять в ті ж символи іншого зображення з досліджуваного сімейства, і при цьому зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа — Безиковича (хоча при цьому можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Такі відображення називатимемо G-відображеннями (G-ізоморфізмами систем числення) і вважатимемо системи числення, між якими існує G-відображення, тотожними (з точністю до G-ізоморфізму). У доповіді буде показано глибокий зв'язок між фрактальною довірчістю систем покриттів, породжених різними системами числення, та DP-властивостями вказаних вище відображень.

Нами було запропоновано (Garko, 2014, конкурс А. В. Скорохода студентських наукових робіт з теорії ймовірностей) наступний підхід до дослідження ймовірнісних мір з незалежними $I-Q_\infty$-символами: для фіксованого стохастичного вектора Q_∞ та фіксованого дійсного числа $I\in[0,1]$ пропонується ввести в розгляд відображення

$$\phi\left(\Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right)=\Delta^{I-Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

і дослідити умови, при виконанні яких дане відображення зберігає міру Лебега та розмірність Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку.

Зокрема, були отримані наступні результати:

Лема 1. *При довільному виборі стохастичного вектора Q_∞ та дійсного числа $I\in[0,1]$ відображення ϕ зберігає міру Лебега на $[0,1]$.*

З метою дослідження DP-властивостей введеного вище відображення ϕ, розглядалось питання довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича спеціальних сімейств покриттів, пов'язаних з вищезгаданими розкладами. Зокрема, було запропоновано розглядати сімейство покриттів $\hat{\Phi}=\hat{\Phi}(Q_\infty)$, яке складається з циліндрів та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу.

Теорема 1. *Якщо системи $\hat{\Phi}$ і $\hat{\Phi}'$ є довірчими, то відображення ϕ зберігає розмірність Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку.*

З цієї теореми випливає, що для доведення того, що ϕ зберігає розмірність Хаусдорфа — Безиковича, досить довести довірчість сімейств $\hat{\Phi}\left(Q_\infty\right)$ та $\hat{\Phi}'\left(Q_\infty\right) = \hat{\Phi}\left(I - Q_\infty\right)$.

Проблема довірчості аналогічних сімейств $\hat{\Phi}\left(F\right)$ досліджувалася М. В. Працьовитим, О. М. Барановським, Ю. Хворостіною та ін. для розкладів Люрота, поворотних розкладів Люрота, розкладів Остроградського — Серпінського — Пірса, розкладів Енгеля. Для всіх вказаних вище розкладів виконується наступна умова:

$$\frac{1}{c} \le \frac{\left|\Delta^F_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k m}\right|}{\left|\Delta^F_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k (m+1)}\right|} \le c, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in A, \left(m+1\right) \in A.$$

Наступна теорема є узагальненням вказаних вище результатів стосовно довірчості $\hat{\Phi}\left(F\right)$ і застосовна до широкого класу узагальнених F-розкладів дійсних чисел (цей клас включає, зокрема, розклади Люрота, Остроградського — Серпінського — Пірса, розклади Остроградського 2-го роду, розклади Енгеля, розклади Сільвестера, розклади дійсних чисел у ланцюгові дроби).

Теорема 2. *Нехай* $x = \Delta^F_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ *– деякий узагальнений* F*-розклад дійсних чисел з* $\left[0,1\right]$ *над алфавітом* A *(скінченним чи нескінченним).*

Якщо існує константа $c \ge 1$ *така, що*

$$\frac{1}{c} \le \frac{\left|\Delta^F_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k m}\right|}{\left|\Delta^F_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k (m+1)}\right|} \le c, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in A, \left(m+1\right) \in A,$$

то сімейство $\hat{\Phi}\left(F\right)$ *— довірче. Більше того* $\hat{\Phi}\left(F\right)$ *є порівнянним, тобто існує константа* k_0 *така, що*

$$H^\alpha\left(E\right) \le H^\alpha\left(E, \hat{\Phi}\left(F\right)\right) \le k_0 \cdot H^\alpha\left(E\right), \forall E.$$

Наступна теорема присвячена Q_∞- та $I - Q_\infty$-розкладам дійсних чисел.

Теорема 3. (Garko, 2014, конкурс А.В. Скорохода студентських наукових робіт з теорії ймовірностей). *Якщо виконується умова*

$$\frac{q_i}{\sum\limits_{k=i+1}^{\infty} q_k} < c, \forall i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

то сімейство $\hat{\Phi}$ *є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку.*

Зауважимо, що теорема 3 не може бути отримана як наслідок теореми 2.

Таким чином, при виконанні умови (1) відображення ϕ зберігає розмірність Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку. Теорема 4 встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}\left(Q_\infty\right)$ без додаткових обмежень на стохастичний вектор Q_∞.

Теорема 4 (Гарко, Нікіфоров, Торбін, 2014). *Нехай* $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}\left(Q_\infty\right)$ *— сімейство, яке складається з циліндрів* Q_∞*-розкладу та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу й належать до одного циліндра попереднього рангу. Тоді сімейство* $\hat{\Phi}\left(Q_\infty\right)$ *є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку при довільному виборі стохастичного вектора* Q_∞.

Наступна теорема встановлює довірчість сімейства $\hat{\Phi}'\left(Q_\infty\right) = \hat{\Phi}\left(I - Q_\infty\right)$ при довільному виборі дійсного числа $I \in \left[0,1\right]$ та стохастичного вектора Q_∞.

Теорема 5 (Гарко, Нікіфоров, Торбін, 2014). *Нехай* $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}\left(I - Q_\infty\right)$ *— сімейство, яке складається з циліндрів* $I - Q_\infty$*-розкладу та множин, які є об'єднаннями суміжних циліндрів одного рангу і належать до одного циліндра попереднього рангу. Нехай* B *— множина точок одиничного відрізка, які мають* $I - Q_\infty$*-зображення. Тоді сімейство* $\hat{\Phi}\left(I - Q_\infty\right)$ *є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича на множині* B *при довільному виборі стохастичного вектора* Q_∞ *та дійсного числа* $I \in \left[0,1\right]$.

Ураховуючи результати теорем 1,4 та 5, отримуємо наступну теорему.

Теорема 6 (Гарко, Нікіфоров, Торбін, 2014). *При довільному виборі дійсного числа* $I \in \left[0,1\right]$ *та стохастичного вектора* Q_∞ *відображення* ϕ *зберігає розмірність Хаусдорфа — Безиковича на одиничному відрізку.*

З леми 1 та сформульованої щойно теореми випливає, що відображення ϕ є G-ізоморфізмом. Як наслідок, отримуємо наступну серію результатів.

Теорема 7. *Якщо стохастичний вектор* $Q_\infty = \left(q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots\right)$ *має скінченну ентропію*

$$H = -\sum_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i < \infty,$$

то для довільного дійсного числа $I \in \left[0,1\right]$ *та* λ*-майже всіх* $x \in \left[0,1\right)$ *виконується умова*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\Delta^{I-Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right|} = e^{-H}.$$

Теорема 8. *Для* λ*-майже всіх* $x \in [0,1)$ *виконується*

$$\nu_i^{I-Q_\infty}(x) = q_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Теорема 9. *Нехай*

$$C[I-Q_\infty, \{V_k\}] = \left\{x : x = \Delta^{I-Q_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in V_k, V_k \subset N_0\right\}.$$

Тоді

$$\lambda(C[I-Q_\infty, \{V_k\}]) = 0$$

тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i \notin V_k} q_i\right) = +\infty.$$

Нехай $\{\xi_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geq 0,$$

де

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$та $I-Q_\infty$-розклад, розглянемо наступну випадкову величину:

$$\xi = \Delta^{I-Q_\infty}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

яку називають випадковою величиною з незалежними $I-Q_\infty$-символами. Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними $I-Q_\infty$-символами.

Теорема 10. *Випадкова величина* ξ *має розподіл чистого типу, причому*

1) μ_ξ *є чисто абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли*

$$\rho := \prod_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{p_{ik} \cdot q_i}\right\} > 0;$$

2) μ_ξ *є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли*

$$P_{\max} := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

3) μ_ξ *є чисто сингулярно неперервною у всіх інших випадках, тобто тоді й тільки тоді, коли* $\rho = 0 = P_{\max}$.

Теорема 11. *Нехай* $\{\xi_k\}$ *— послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0,1,2,... з ймовірностями* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *відповідно. Нехай*

$$V := \{i : p_i > 0\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}.$$

Якщо для фіксованого дійсного числа $I \in [0,1]$ *і для фіксованого стохастичного вектора* Q_∞ *рівняння*

$$\sum_{i \in V} q_i^{\,x} = 1$$

має корінь α_0 *на* $[0,1]$, *то розмірність Хаусдорфа — Безиковича спектра випадкової величини з незалежними* $I - Q_\infty$*-символами дорівнює* $\dim_H S_{\mu_\xi} = \alpha_0$.

Якщо ж рівняння $\sum_{i \in V} q_i^{\,x} = 1$ *не має коренів на* $[0,1]$, *то*

$$\dim_H S_{\mu_\xi} = \dim_H \left(C[I - Q_\infty, V]\right) = \lim_{k \to \infty} \dim_H \left(C[I - Q_\infty, V_k]\right),$$

де

$$V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Список літератури

Garko I. (2016). On new approach to the study of fractal properties of probability measures with independent $I - Q_\infty$-digits. Submitted to *Theory of Stochastic Processes*.

Гарко, І. І., Нікіфоров, Р. О., Торбін, Г. М. (2014). G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. I. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки, 16* (1), 120—134.

Гарко, І. І., Нікіфоров, Р. О., Торбін, Г. М. (2014). G-ізоморфізм систем числення та довірчість систем покриттів. II. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки, 16* (2), 88—99.

Гарко, І. І., Торбін, Г. М. (2012). Про $x - Q_\infty$-зображення дійсних чисел та проблеми, з ним пов’язані. У кн. *Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю Шкіля М. І. (13—14 грудня 2012 р.)*, (с. 48).

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ БІПОЛЯРНОГО ВИБОРУ

О. О. Дмитренко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

dmytrenko.o@gmail.com

Питання щодо важливості людської інтуїції в наукових дослідженнях, є актуальним для багатьох галузях науки, таких як: психологія, фізіологія, соціологія, фізико-математична, військова та політична галузі. Ще в дев'ятнадцятому столітті широко застосовувався аналіз, заснований на інтуїції. Але відсутність хоча б якоїсь теоретичної моделі суб'єкта призводило до неефективності інтуїтивних методів. Цей недолік вперше був подоланий завдяки математичній моделі індивіда запропонованої в 1991 році відомим російсько-американським психологом і математиком Володимиром Лефевром. У своїй роботі «Алгебра совісті» Лефевр (2003) використовує інтуїцію для побудови формальної моделі індивіда, яка могла б передбачати майбутню поведінку суб'єкта.

Мета статті — використовуючи модель біполярного рефлексивного вибору, на основі результатів психологічних експериментів, відновити значення об'єктивного впливу на суб'єкта.

В. Лефевром було запропоновано трьохрівневу модель рефлексії (Лефевр, 2003). Під рефлексією розуміється здатність суб'єкта займати місце спостерігача по відношенню до своїх думок та почуттів. Також, вважається, що суб'єкт завчасно формулює програми своєї майбутньої поведінки, до яких намагатиметься прагнути в майбутньому, здійснюючи вибір (Лефевр, 2003). Набір завчасно сформованих програм може містити такі, що можуть бути реалізовані і такі — що не можуть бути реалізовані при жодній умові. Вважається, що когнітивна система суб'єкта продукує лише дві програми, що можуть бути реалізовані. Потім, суб'єкт вибирає одну із двох отриманих програм своєї майбутньої поведінки. Такий метавибір називається інтенціональним і при здійснені його суб'єкт вільний.

Розглянемо неперервну модель, введену Володимиром Лефевром

$$\begin{cases} X = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2 - x_1 x_2} \text{ при } x_1 + x_2 > 0 \\ X = \forall \text{ значення на } \left[0{,}1\right], \text{ при } x_1 = 0,\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Змінна X являє собою ймовірність, з якою суб'єкт готовий вибрати позитивний полюс. Змінна x_1 — це ймовірність того, що зовнішній світ схиляє суб'єкта до позитивного полюсу; x_2 — ймовірність з якою суб'єкт бачить вплив зовнішнього середовища, як позитивний і визначається досвідом суб'єкта.

Умова $x_1 = 0, x_2 = 0$ відповідає вільному вибору суб'єкта. Величина X, що відповідає ймовірності, в околі точки ($x_1 = 0, x_2 = 0$) змінюється хаотично.

Експерименти в області психології, в результаті яких люди здійснюють моральний вибір, неможливі через етичні причини. Та існують аргументи, що дають змогу робити припущення, що співвідношення

$$X = \frac{x_1}{x_1 + x_2 - x_1 x_2} \tag{1}$$

повинно проявляти себе не тільки в моральному виборі, а й в оцінювальній діяльності людини. x_1 — це об'єктивне значення, тобто ймовірність, з якою зовнішнє середовище схиляє суб'єкта до позитивного полюсу; а x_2 — величина, що характеризує суб'єктивну оцінку впливу середовища й заснована на різносторонньому досвіді суб'єкта в минулому й теперішньому. Це ступінь позитивності світу в уявленні суб'єкта (Лефевр, 2013). Значення змінних $x_1, x_2, X_1 \in [0,1]$.

Уважається, що модель (1) передбачає вибір суб'єкта в експериментах, де потрібно здійснити оцінку міри насиченості об'єкта даною якістю. Якщо розглянути такий експеримент, де його учасникам потрібно оцінити ступінь світлості сірого аркуша паперу, розміщеного між чорним та білим аркушем, та зробити відмітку на багатобальній шкалі, то модель передбачає, що оцінки будуть групуватись біля двох значень. Якщо провести цей експеримент з аркушем паперу, тональність якого лежатиме рівно по середині між тональністю чорного та білого аркушів ($x_1 = \frac{1}{2}$), то отримаємо розподіл оцінок навколо точки $\frac{2}{3}$. Оцінки групи учасників, для яких позитивною якістю є чорний, групуватимуться в точці, що знаходиться на відстані $\frac{2}{3}$, тобто — навколо точки $\frac{1}{3}$.

Спробуємо розв'язати обернену задачу: маючи результати експерименту, отримати початкові значення об'єктивної інтенсивності в оцінюваному об'єкті. Тобто, знаючи розподіл оцінок, на основі двох відомих нам максимумів цього розподілу, оцінити значення об'єктивної міри x_1 в об'єкті, що був пред'явлений суб'єкту.

Розглянемо можливий розв'язок цієї задачі. Нехай в результаті експерименту його учасникам були пред'явлені для оцінювання об'єкти, середня міра насиченості яких даною якістю практично не змінювалась і була рівна x_2. Візьмемо значення, відомого нам, правого максимуму x_1. Знаючи, що учасникам був пред'явлений об'єкт, об'єктивна міра насиченості якого даною якістю рівна середній мірі цієї якості у об'єктах, що були пред'явлені раніше (тобто, $x_2 = x_1$), маємо:

$$X = \frac{1}{2 - x_1} \qquad (2)$$

Розв'язуючи (3), отримуємо для однієї групи учасників експерименту об'єктивну міру насиченості об'єкта даною якістю

$$x_1 = \frac{2X - 1}{X}$$

Для іншої групи, для якої позитивною являється якість, що протилежна даній

$$x_1^* = \frac{X^*}{1 - X^*}$$

Розв'яжемо конкретну задачу. Нехай, в результаті проведення експерименту $X^* = 0,2$, було отримано значення двох максимумів та $X = 0,6$. Унаслідок того, що експеримент містить похибки, отримуємо два різні значення x_1^* та x_1. Отже, оцінюване значення належить проміжку $[x_1, x_1^*]$.

Оцінимо, при якому значенні з проміжку $[x_1, x_1^*]$, сума квадратів різниць між значеннями максимумів X^* та X, взятих з експерименту, та отриманими за формулою (2), буде мінімальною.

Побудувавши нескладну комп'ютерну програму, отримуємо оцінюване значення x_1. Поставлена задача розв'язана.

В результаті, для значень $X^* = 0,45$ та $X = 0,6$, взятих з експерименту, отримуємо x_1 рівне приблизно $0,542$.

Отже, незважаючи на простоту запропонованої Володимиром Лефевром, неперервної моделі прийняття рішень, можна зробити висновок, що подальше застосування її в оцінювальній діяльності є дуже перспективним. Також, дана модель може бути використана при побудові систем підтримки прийняття рішень у воєнній, політичній, соціально-економічній та інших галузях. Також, враховуючи актуальність і перспективність отриманих результатів, планується продовжити дослідження в цьому напрямку.

Список літератури

Лефевр, В. (2003). *Алгебра совести*. Москва: Когито-центр.

Лефевр, В. (2013). *Что такое одушевленность?* Москва: Когито-центр.

ЙМОВІРНІСНИЙ МЕТОД ПРИ РОЗГЛЯДАННІ ПИТАННЯ ПРО ЕФЕКТИВНІСТЬ ВИРОБНИЦТВА З РІЗНИМ РІВНЕМ ТЕХНІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ ТА КВАЛІФІКАЦІЇ ПЕРСОНАЛУ

О. Є. Запорожченко, М.С. Сазонова, О.С. Лавриненко

НМетАУ, Дніпропетровськ, Україна

kmatem.393@gmasl.com

В основу сучасного промислового виробництва покладено масове виготовлення стандартних виробів із строго визначеними властивостями. До таких галузей, без сумніву, відноситься металургія. Проведення контролю якості одержаних виробів за допомогою серії випробувань пов'язано з дослідженням або кількісною оцінкою явищ. Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності масових випадкових явищ і є найбільш «експериментальною» з усіх математичних наук.

Теорія ймовірностей є методологічною основою таких наукових напрямків, як теорія випадкових процесів, економетричне моделювання, теорія планування експерименту, які інтенсивно розвиваються у останні десятиріччя. В цих дисциплінах, якщо абстрагуватися від конкретних прикладів, розглядаються теоретичні моделі, застосовані до будь-яких масових явищ у природі, суспільстві і техніці. В той же час знання загальних законів дає змогу зробити висновки про закономірності, що мають місце у кожному конкретному випадку. Уміння передбачати хід виробничого процесу або досліду, в яких присутні елементи випадковості, дає змогу впливати на його результати.

Використаємо ймовірнісні методи при розгляданні питання про ефективність виробництва з різним рівнем технічного обладнання та кваліфікації персоналу.

Розглянемо два підприємства, що виробляють однотипні деталі. Підприємство I має високотехнологічне обладнання, але на ньому працює лише 30% робітників високої кваліфікації та 70% робітників середньої кваліфікації. Як відомо з статистичних даних, ймовірність виробити високоякісну деталь для робітника високої кваліфікації цього підприємства $0,97$, для робітника середньої кваліфікації $0,83$.

На підприємстві II, яке має технологічне обладнання середнього рівня, також працюють робітники як високої, так і середньої кваліфікації. При цьому відомо, що ймовірність отримання високоякісної деталі для робітника високої кваліфікації цього підприємства дорівнює $0,93$, а для робітника середньої кваліфікації $0,72$.

Виникає питання про те, яким має бути процентне співвідношення робітників високої та середньої кваліфікації на підприємстві II, щоб якщо деталь, що була відправлена на вибірковий контроль і виявилась високої якості, то більш ймовірним було б, що вона вироблена на підприємстві II з технологічним обладнанням середньої якості, але з більш кваліфікованим персоналом. Для розв'язання цього питання використаємо формулу Баєса.

Розглянемо дві гіпотези що до того, де вироблена деталь, яка була взята на вибірковий контроль

H_1 – деталь вироблена на підприємстві I,

H_2 – деталь вироблена на підприємстві II.

Якщо підприємства виробляють однакову кількість деталей, то

$$P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5.$$

Будемо вважати, що узята на вибірковий контроль деталь виявилася високої якості. Це, згідно з формулою Баєса, веде до переоцінки гіпотез H_1 та H_2.

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}, \qquad (1)$$

де $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A)$ — умовні ймовірності того, що деталь високої якості (A) вироблена на підприємстві I (H_1), або на підприємстві II (H_2).

Обчислимо ймовірність $P_{H_1}(A)$ за формулою повної ймовірності. Для цього розглянемо гіпотези:

B_1 – деталь вироблена висококваліфікованим робітником I підприємства,

B_2 – деталь вироблена робітником середньої кваліфікації I підприємства.

$$\begin{aligned} P_{H_1}(A) &= P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) = \\ &= \frac{30}{100}\cdot 0{,}97 + \frac{70}{100}\cdot 0{,}83 = 0{,}872 \end{aligned}. \qquad (2)$$

Обчислення ймовірності $P_{H_2}(A)$ також відбувається за формулою повної ймовірності, але на відміну від попереднього, процент робітників високої кваліфікації на II підприємстві $(m\%)$ є невідомим.

Розглядуємо гіпотези:

C_1 — деталь вироблена робітником високої кваліфікації II підприємства,

C_2 — деталь вироблена робітником середньої кваліфікації II підприємства.

$$P(C_1) = \frac{m}{100}; \quad P(C_2) = \frac{100-m}{100}.$$

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P_{H_2}(A) &= P(C_1)\cdot P_{C_1}(A) + P(C_2)\cdot P_{C_2}(A) = \\ &= \frac{m}{100}\cdot 0{,}93 + \frac{100-m}{100}\cdot 0{,}72 \end{aligned} \qquad (3)$$

Повертаючись до формули Баєса (1), маємо

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}5\cdot P_{H_2}(A)}{0{,}5\cdot 0{,}872 + 0{,}5\cdot P_{H_2}(A)} = \frac{P_{H_2}(A)}{0{,}872 + P_{H_2}(A)}.$$

Неважко зрозуміти, що для того, щоб більш ймовірним було, щоб високоякісна деталь була вироблена на підприємстві II, треба, щоб нова ймовірність гіпотези H_2

$$P_A(H_2) > P(H_2) = 0{,}5;$$

$$\frac{P_{H_2}(A)}{0{,}872 + P_{H_2}(A)} > 0{,}5.$$

Розв'язав нерівність, отримуємо, що ймовірність $P_{H_2}(A)$ повинна бути більшою за $0{,}872$. Тоді з формули (3) випливає умова

$$\frac{m}{100}\cdot 0{,}93 + \frac{100-m}{100}\cdot 0{,}72 > 0{,}872.$$

Звідки

$$m > 72\frac{8}{21}\%.$$

Таким чином, якщо процент кваліфікованих робітників II підприємства буде вищим за 72,4%, то більш ймовірним буде, що деталь, яка була узята на вибірковий контроль і виявилась високої якості, вироблена на підприємстві II (за рахунок високої кваліфікації персоналу цього підприємства).

Розглянемо задачу у загальному вигляді. Позначимо процент робітників високої кваліфікації підприємства I $m_1\%$, тоді процент робітників середньої кваліфікації $(100 - m_1)\%$. На підприємстві II ці проценти позначимо $m_2\%$ та $(100 - m_2)\%$.

Тоді ймовірності того, що деталь високої якості для підприємств I , II:

$$P_{H_1}(A) = \frac{m_1}{100}\cdot 0{,}97 + \frac{100-m_1}{100}\cdot 0{,}83;$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{m_2}{100}\cdot 0{,}93 + \frac{100-m_2}{100}\cdot 0{,}72.$$

Отримання на вибірковому контролі деталі високої якості впливає на ймовірності гіпотез (які раніше були рівними $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$):

$$P(H_1) = \frac{0{,}97m_1 + 0{,}83(100-m_1)}{0{,}97m_1 + 0{,}83(100-m_1) + 0{,}93m_2 0{,}72(100-m_2)};$$
$$P(H_2) = \frac{0{,}93m_2 + 0{,}72(100-m_2)}{0{,}97m_1 + 0{,}83(100-m_1) + 0{,}93m_2 + 0{,}72(100-m_2)}. \quad (4)$$

Обчислимо, при якому співвідношенні процентів висококваліфікованих робітників підприємств I та II (m_1, m_2) більш ймовірним буде, що високоякісна деталь вироблена на менш технологічному підприємстві II (за рахунок достатньо високого проценту робітників високої кваліфікації). Для цього треба, щоб

$P_A(H_2) > P_A(H_1)$. З урахуванням формул (4) маємо, що повинна виконуватися нерівність

$$0,93m_2 + 0,72(100 - m_2) > 0,97m_1 + 0,83(10 - m_1) \tag{5}$$

Звідки $m_2 > \frac{2}{3}m_1 + 52\frac{8}{21}$.

Зрозуміло, що нерівність буде вірною, якщо $m_2 \geq m_1 + 53$. Зауважимо, що оскільки $m_2 \leq 100\%$, то m_1 повинно бути не більш 47%.

Таким чином, якщо процент висококваліфікованих робітників високотехнологічного підприємства I не перевищує 47%, то з ним може успішно конкурувати низко технологічне підприємство II с процентом висококваліфікованих робітників $m_2 \geq m_1 + 53$.

Отримані дані можна узагальнити, позначив ймовірності отримання високоякісної деталі робітником високої кваліфікації P_{11}, робітником середньої кваліфікації P_{12} (для I підприємства) та P_{21}, P_{22} (для підприємства II). У цих позначках нерівність (5) має вигляд

$$P_{21}m_2 + P_{22}(100 - m_2) > P_{11}m_1 + P_{12}(100 - m_1). \tag{6}$$

Звідки

$$m_2 > \frac{P_{11} - P_{12}}{P_{21} - P_{22}}m_1 + \frac{P_{12} - P_{22}}{P_{21} - P_{22}} \cdot 100.$$

Список літератури

Вентцель, Е. С., Овчаров, Л. А. (1998). *Теория вероятногстей и ее инженерные приложения*. Москва: Наука.

Зайцев, Е. П. (2008). *Теория вероятностей и математическая статистика*. Кременчуг.

Запорожченко, Е. Е., Сазонова, М. С., Лавриненко, С. Н. (2013). Оперирование вероятностными характеристиками повышения качественных показателей процесса производства биоинженерных изделий. *Високі технології в машинобудуванні,* (1 (23)), 61—67. Харків. НТУ «ХПІ»

Каніовська, І. Ю. (2001). *Теорія ймовірностей у прикладах і задачах*. Київ: ІВЦ «Видавництво «Політехніка».

Турчин, В. М. (2004). *Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі*. Київ: А.С.К.

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МІР РИЗИКУ VaR І $CVaR$ ДЛЯ ЧАСОВОГО РЯДУ ФОНДОВОГО ІНДЕКСУ Nikkei 225

Н. Г. Зражевська

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

natasha.zrazhevska@gmail.com

Метою роботи є побудова оцінок мір ризику VaR і $CVaR$ для часового ряду логарифмічною доходності фондового індексу Nikkei 225. Індекс обчислюється як середнє зважене значення цін акцій 225 компаній, які торгуються на Токійській фондовій біржі. Nikkei 225 характеризується відносно низькою гомогенною волатильністю. і був обраний для оцінювання мір ризику при регулярній поведінці ринку. Були проаналізовані 1686 даних за 2005—2015 роки без значень, що відповідають трьом часовим інтервалам з високою волатильністю світової фінансової системи: 01.07.2008—01.07.2009, 01.01.2011—01.07.2011,01.02.2013—01.12.2013 (часовий ряд даних $N225\_RED$). При виборі методу оцінювання були проаналізовані найбільш популярні підходи (Nadarajah, Bo Zhang & Chan, 2014), сформульована класифікаційна схема (рис. 1), що полегшує вибір оптимального методу оцінювання мір ризику VaR і $CVaR$ для часових рядів в залежності від типу даних (Зражевская, Зражевский, 2016).

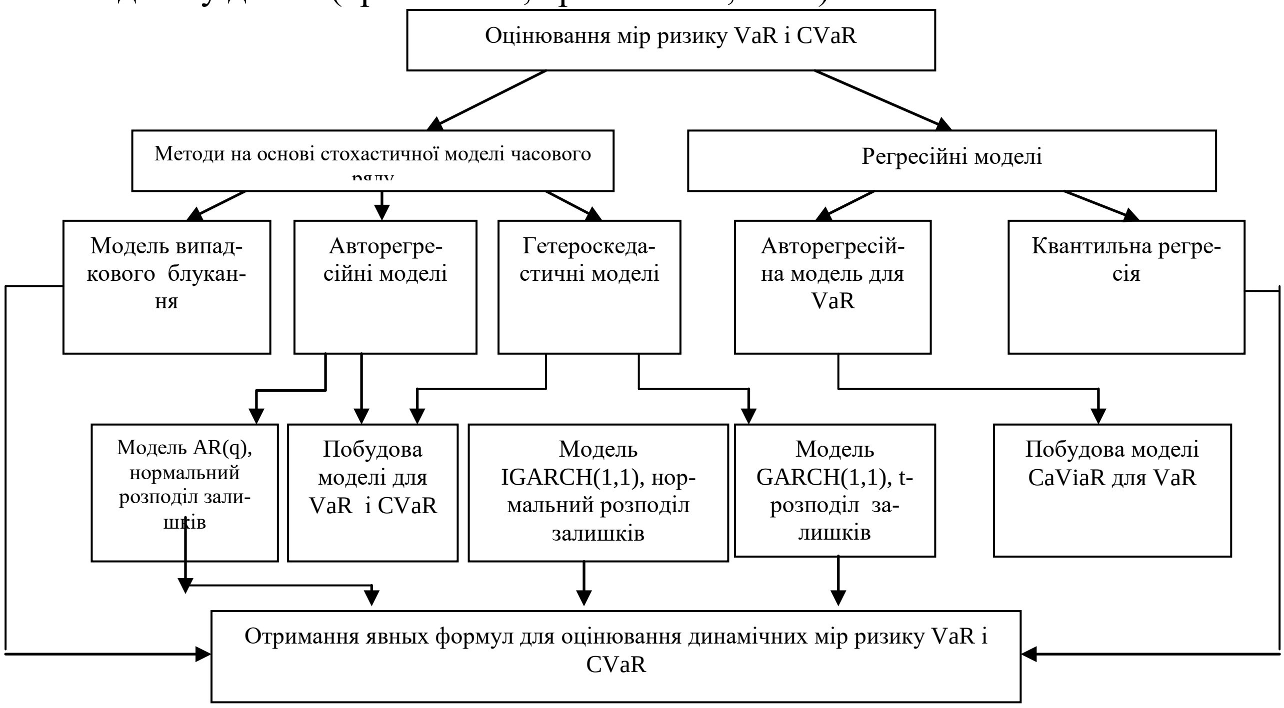


Рис. 1. Класифікаційна схема оцінювання динамічних VaR і $CVaR$

Для часового ряду $N225\_RED$ було проведено попередній аналіз самого часового ряду і ряду квадратів. Значення коефіцієнтів асиметрії рядів (Skewness) 0.055 і 1.557 відповідно, а значення куртозисів (Kurtosis) 3.268 та 4.372, отже, розподіл близький до нормального. Проведений тест Льюнга — Бокса (Tsay, 2010) показав залежність квадратів членів ряду від своїх попередніх

ніх значень (для $m = 7$ значення статистики 470.667 перевищує критичне значення 12.017).

Для моделювання динамічних мір ризику був обраний підхід на основі гетероскедастичної моделі часового ряду у вигляді:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (1)$$

де μ_t и σ_t умовні середнє і варіація, що визначені на інформаційному просторі Ψ_t, $\{Z_t\} \overset{iid}{\sim} F_t(0,1)$. Тоді (Tsay, 2010):

$$VaR^t_{\alpha,k} = \mu_{t+k} + F^{-1}(\alpha)\sigma_{t+k} = \mu_{t+k} + VaR_\alpha(Z)\sigma_{t+k}, \quad (2)$$
$$CVaR^t_{\alpha,k} = \mu_{t+k} + CVaR_\alpha(Z)\sigma_{t+k}.$$

Для даних, які розглянуті тренд μ_t, відсутній (близький до нуля).

Для моделювання волатильності ряду використовувалась модель $GARCH(3,3)$ з параметрами: $a_0 = 0,\ a_1 = 0.06,\ a_2 = 0.08,\ a_3 = 0.03,\ b_1 = 0,$ $b_2 = 0.48,\quad b_3 = 0.26$. Результати BDS-тесту для параметра $m = 4$ $\left(0.558 < 0.5767\right)$ та критерія відношення дисперсій (0.7477<1.96) показали, що залишки $GARCH$ моделі належать до класу iid (Brock, Scheinkman, Dechert & LeBaron, 1996).

Для підтверждження гіпотези про можливість використання значень статичних мір ризику при обчисленні динамічних, була побудована лінійна регресія $VaR^t_\alpha = a_1 + a_2\sigma_t + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim iid.$ з оцінкою коефіцієнтів по МНК. Результати F-теста (Tsay, 2010) ($F = 18324.548, a_2 = 0.956$) підтвердили значимість лінійної регресії.

Для аналізу залишків моделі (1) побудовані реалізації $\widehat{Z_t} = X_t \big/ \widehat{\sigma_t}$, які представляють собою реалізацію випадкової величини $\{Z_t\}$. Результати BDS-тесту та критерія відношення дисперсій показали, що залишки моделі iid. Тест Харке —Бера (Tsay, 2010) $\left(5.624 < 5.649\right)$ підтвердив гіпотезу про нормальність розподілу. У відповідності з цим, для оцінювання мір ризику $VaR_\alpha(Z)$ і $CVaR_\alpha(Z)$ були обрані явні формули в припущенні нормального розподілу з оцінками параметрів, отриманих по методу максимальної правдоподібності.

З врахуванням отриманих результатів по формулам (2) були знайдені оцінки динамічних мір ризику $VaR^t_{0.95}$ і $CVaR^t_{0.95}$ (рис.2).

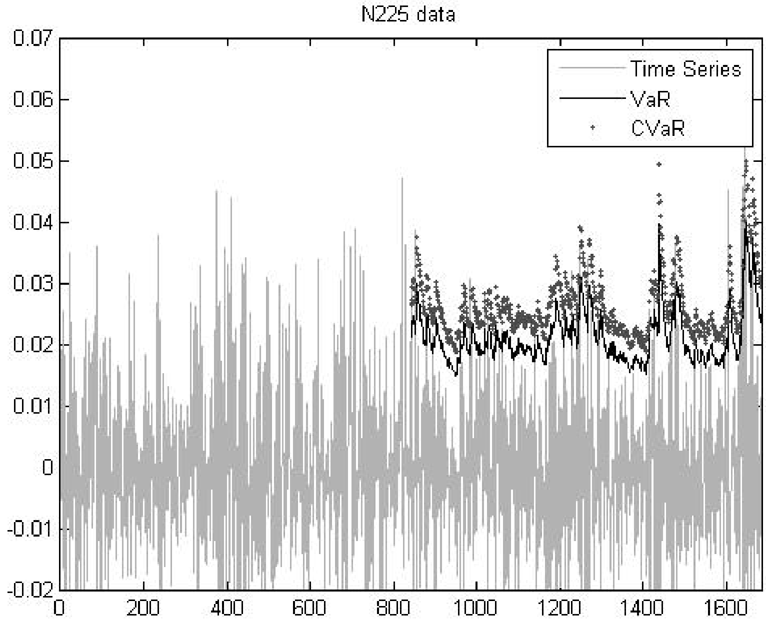


Рис.2. Змодельовані по гетероскедастичній моделі $VaR^t_{0,95}$ і $CVaR^t_{0,95}$ для часового ряду $N225\_RED$

Для аналізу якості отриманих оцінок для $VaR^t_{0.95}$ були використані тести Купеця (статистика $LRpof$) і Кристофферсена (статистики $LRind$ і $LRcc$), для анализу $CVaR^t_{0.95}$ оцінок — V тест зі статистиками V_1, V_2, V (Kjellson, 2013). Результати тестів наведені в таблиці 1 і підтвердили високу якість отриманих оцінок.

Таблиця 1. Результати тестів якості оцінок для $VaR^t_{0.95}$ і $CVaR^t_{0.95}$.

$LRpof$ (pvalue)	$LRind$ (pvalue)	$LRcc$ (pvalue)	V_1	V_2	V
0.186	0.053	0.064	0.0166	0.0007	0.0087

Таким чином, у роботі на конкретному прикладі продемонстрована методика побудови оцінок для динамічних мір ризику VaR і $CVaR$ на основі гетероскедастичної моделі часового ряду. Запропонована методика може бути корисною для оцінювання можливих ризиків при регулярній поведінці фондових ринків.

Список літератури

Nadarajah, S., Bo Zhang, Chan S. (2014). Estimation methods for expected shortfall, *Quantitative Finance*, 14 (2), 271-291.

Зражевская, Н. Г, Зражевский А. Г. (2016). Классификация мер риска для одной случайной величины. *Системні дослідження та інформаційні технології*, 2.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3d edition). Hoboken: John Wiley & Sons.

Brock, W. A., Scheinkman, J. A., Dechert, W. D., & LeBaron, B. (1996). A test of independence based on the correlation dimension. *Econometric Review*, *15* (3), 197–235.

Kjellson, B. (2013). *Forecasting Expected Shortfall. An Extreme Value Approach*. Bachelor’s thesis in Mathematical Sciences.

ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЯХ РЕГРЕСІЇ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ ТА ВИПАДКОВИМИ ПОМИЛКАМИ У РЕГРЕСОРАХ

О. В. Іванов, І. В. Орловський
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
alexntuu@gmail.com, i.v.orlovsky@gmail.com

Розглянемо лінійну модель регресії

$$X_j = \sum_{i=1}^{q} \theta_i z_{ij} + \varepsilon_j,\ j = \overline{1,N}, \tag{1}$$

де $z_{ij} = a_{ij} + y_{ij},\ i = \overline{1,q}$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_q) \in \mathbb{R}^q$,— вектор невідомих параметрів, $a_{ij},\ j \in \mathbb{N},\ i = \overline{1,q}$,— задані дійснозначні послідовності, $y_{ij},\ j \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,q}$, та $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, є незалежними стаціонарними гауссівськими послідовностями з $Ey_{i0} = 0$, $E\varepsilon_0 = 0$ та коваріаційними функціями $B_i(n),\ n \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,q}$, та $B(n),\ n \in \mathbb{Z}$, відповідно.

Відносно помилок у регресорах $y_{ij},\ j \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,q}$, та випадкового шуму $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, припустимо, що вони задовольняють наступним умовам:

1. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |B_i(n)| < \infty,\ i = \overline{1,q}$;

2. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |B(n)| < \infty$;

3. $B_i(n) = \cos \varkappa_i n \cdot L_i(|n|)\,|n|^{-\alpha_i},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $B_i(0) = \sigma_i^2$, де $L_i(t),\ t > 0$, є повільно змінними на нескінченності функціями, які обмежені на кожному скінченному проміжку з $(0,\infty)$, $\alpha_i \in (0,1)$, $\varkappa_i \in [0,\pi)$, $i = \overline{1,q}$;

4. $B(n) = \cos \varkappa n \cdot L(|n|)\,|n|^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $B(0) = \sigma^2$, де $L(t)$, $t > 0$, така ж сама, як в умові **3**, $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, $\varkappa \in (0,\pi)$.

Означення. *Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра* θ, одержаною за спостереженнями

$$\left\{X_j, z_{ij},\ i = \overline{1,q},\ j = \overline{1,N}\right\}$$

вигляду (1), називається будь який випадковий вектор

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N\left(X_j, z_{ij},\ i = \overline{1,q},\ j = \overline{1,N}\right),$$

для якого

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}^q} Q_N(\tau), Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \left[X_j - \sum_{i=1}^{q} \tau_i z_{ij} \right]^2.$$

У доповіді наведено достатні умови асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів лінійних моделей регресії (1) з помилками в регресорах, що задовольняють **1)** або **2)**, та випадковим шумом, який задовольняє **3)** або **4)**. Отримані результати узагальнюють результати Дороговцев (1982) та продовжують дослідження, які проводились у роботах Голубовська, Іванов, Орловський (2012), Іванов, Орловський (2014а, 2014б) та Орловський (2014).

Список літератури

Ivanov, A. V., & Orlovsky, I. V. (2014a). Asymptotic Properties of Linear Regression Parameter Estimator in the Case of Long-Range Dependent Regressors and Noise. *Theory of Stochastic Processes*, *19* (1), 1–10.

Голубовська, Л. П., Іванов, О. В., Орловський, І. В. (2012). Асимптотичні властивості оцінки параметрів лінійної регресії у випадку сильнозалежних регресорів. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 26—33.

Дороговцев, А. Я. (1982). *Теория оценок параметров случайных процессов*. Киев: Вища школа.

Іванов, О. В., Орловський, І. В. (2014б). Асимптотичні властивості оцінки параметрів лінійної регресії у випадку слабко залежних регресорів. *Доповіді НАН України*, (5), 24—28.

Орловський, І. В. (2014). Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів лінійної регресії у випадку дискретного часу та сильно- або слабкозалежних регресорів. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»,* (4), 81—87.

АСИМПТОТИЧНЕ ВИРОДЖЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. В. Ільченко, Т. В. Шовкопляс
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
from_Tatyana@ukr.net

З теорії детермінованих систем відомо, що розв'язки лінійної неоднорідної системи, за умови експоненціальної стійкості однорідної частини, прямують до нуля, якщо неоднорідності збігаються до нуля з часом. Розглядається аналогічна ситуація для стохастичного випадку, наводяться достатні умови збіжності до нуля за ймовірністю та з ймовірністю 1 розв'язків лінійної неоднорідної системи стохастичних диференціальних рівнянь, якщо стохастична напівгрупа, породжена лінійною однорідною частиною, стійка з ймовірністю 1.

Розглядається система стохастичних диференціальних рівнянь

$$dx(t) = \left(A_0 x(t) + f_0(t)\right)dt + \sum_{k=1}^{m}\left(A_k x(t) + f_k(t)\right)dw_k(t), \qquad (1)$$

де A_k — $(n \times n)$-матриці; $f_k(t) = \left(f_{k1}(t), \ldots, f_{kn}(t)\right), t \geq 0$ — стовпці вектор-функцій; $w_k(t), t \geq 0$ — одновимірні незалежні вінерівські процеси; $x(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right), t \geq 0$ — стовпець-розв'язок.

Через $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{n}$ позначено ортонормований базис в $\mathbb{R}^n$.

Нехай H_s^t — стохастична напівгрупа невироджених операторів, $H_s^t = H_r^t H_s^t$, $0 \leq s \leq r \leq t$, яка задовольняє однорідній системі (Скороход, 1987)

$$dH_s^t = A_0 H_s^t dt + \sum_{k=1}^{m} A_k H_s^t dw_k(t), \qquad H_s^s = I,\ s \leq t.$$

Припускається, що напівгрупа H_s^t стійка з ймовірністю 1, тобто

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t \to +\infty} H_0^t x = 0\right\} = 1 \text{ для довільного } x \in \mathbb{R}^n.$$

З Хасьминский (1969), Дорогвцев (1987) відомо, що стійкість з ймовірністю 1 напівгрупи H_s^t еквівалентна експоненціальній p-стійкості H_s^t для малих додатніх значень $p > 0$, тобто, існують такі сталі $D = D(p) > 0$ і $\lambda = \lambda(p) > 0$, що

$$\sup_{\|x\|=1} E\left\|H_s^t x\right\|^p \leq D e^{-\lambda p (t-s)}, \qquad p \in \left(0,\ p_0\right). \qquad (2)$$

Розв’язок $x\left(t\right)$, $t \geq 0$, системи (1) зображується у вигляді (Ilchenko, 2016; Sadoviak & Tsarkov, 1973):

$$x\left(t\right) = H_0^t x + \int_0^t \left(H_t^u\right)\left(f_0\left(u\right) - \sum_{k=1}^{m} A_k f_k\left(u\right)\right) du +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} H_0^t \int_0^t \left(H_0^u\right)^{-1} f_k\left(u\right) dw_k\left(u\right). \tag{3}$$

Для з’ясування поведінки $x\left(t\right)$, $t \to +\infty$, необхідно провести оцінку розподілу доданків в правій частині (3), що можна зробити за допомогою лем:

Лема 1. *Нехай виконується умова (2). Якщо* $\varphi\left(t\right)$, $t \geq 0$, *неперервна вектор-функція, то для довільних* $\varepsilon, \theta > 0$ *існує така стала* $L < +\infty$, *що для довільного* $k \in \mathbb{Z}_+$ *справедлива нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{k \leq t \leq k+1}\left\|\int_0^t H_u^t \varphi\left(u\right) du\right\| > \varepsilon\right\} \leq L\sum_{i=0}^{k} e^{-\left(\lambda-\theta\right)\left(k-i\right)p}\left(\sup_{i \leq u \leq i+1}\left\|\varphi\left(u\right)\right\|\right)^p.$$

Лема 2. *Нехай виконується умова (2). Якщо* $\varphi\left(t\right)$, $t \geq 0$, *неперервна вектор-функція, то для довільних* $\varepsilon, \theta > 0$ *існує така стала* $K < +\infty$, *що для довільного* $k \in \mathbb{Z}_+$ *справедлива нерівність*

$$P\left\{\sup_{k \leq t \leq k+1}\left\|H_0^t \int_0^t \left(H_0^u\right)^{-1} \varphi\left(u\right) dw_r\left(u\right)\right\| > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq K\sum_{i=0}^{k} e^{-\left(\lambda-\theta\right)\left(k-i\right)p}\left(\sup_{i \leq u \leq i+1}\left\|\varphi\left(u\right)\right\|\right)^p.$$

Позначимо

$$g_0\left(t\right) = f_0\left(t\right) - \sum_{k=1}^{m} A_k f_k\left(t\right),\ g_i\left(t\right) = f_i\left(t\right),\ i = \overline{1,m}.$$

Основні результати сформульовані у вигляді теорем:

Теорема 1. *Нехай виконується умова (2) і* $g_i\left(t\right)$, $\mathrm{t} \geq 0$, $i = \overline{0,m}$, *такі неперервні функції, що* $\lim_{t \to +\infty} g_i\left(t\right) = 0$.

Тоді для довільного $\varepsilon > 0:\quad \lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\left\{\left\|x\left(t\right)\right\| > \varepsilon\right\} = 0.$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (2) і* $g_i\left(t\right)$, $t \geq 0$, $i = \overline{0,m}$, *такі неперервні функції, що для деяких* $p, \gamma : 0 < p < p_0$, $0 < \gamma < \lambda$ *виконується умова:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} e^{-\gamma(k-i)p}\left(\sup_{i\le u\le i+1}\left\|g_j(u)\right\|\right)^p < +\infty,\ j=\overline{0,m}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\ (\mathrm{P}=1).$$

Розглядається одновимірний випадок. З'ясовується, який порядок збіжності до нуля повинні мати степеневі функції, щоб умови теореми 2 виконувалися.

Розглянемо рівняння

$$dy(t) = \left(by(t) + (1+t)^{-l_0}\right)dt + \sum_{k=1}^{m}\left(\sigma_k y(t) + (1+t)^{-l_k}\right)dw_k(t).$$

Маємо

$$H_s^t = \exp\left\{-\gamma_0(t-s) + \sum_{k=1}^{m}\sigma_k\left[w_k(t) - w_k(s)\right]\right\},$$

$$-\gamma_0 = b - 2^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2;$$

$$\mathrm{E}\left|H_s^t x\right|^p = \exp\left\{\left(-\gamma_0 + p\,2^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\right)(t-s)\,p\right\}\left|x\right|^p;$$

$$p_0 = \gamma_0\left(2^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2\right)^{-1}.$$

Умова (2) виконується, якщо $\gamma_0 > 0$.

Теорема 3. *Нехай* $\gamma_0 > 0$ *і* $l_i > \mathrm{p}_0^{-1},\ \ i=\overline{0,m}.$

Тоді

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\ (\mathrm{P}=1).$$

Список літератури

Ilchenko, A. V. (2016). Stochastically bounded solutions of the linear nonhomogeneous stochastic differential equation system. *Theory of Stochastic Processes*, *9(25)* (1–2), 65–72.

Sadoviak, A. M., & Tsarkov, E. F. (1973). Cauchy formula analogue for stochastic differential equations. *Probability theory and applications*, *18* (2), 415–417.

Скороход, А. В. (1987). *Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений*. Киев: Наукова думка.

Хасьминский, Р. З. (1969). *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*. Москва: Наука.

ІМОВІРНОСТІ ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ГАУССІВСЬКІЙ РЕГРЕСІЇ

Б. В. Кароль
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
karolbohdana@gmail.com

Розглянемо випадковий процес
$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), \quad t \in [0,T],$$

де $g(t,\theta)\colon [0,T] \times \Theta^c \to \mathbb{R}^1$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta \in \Theta$, Θ^c — замикання відкритої множини Θ, $\{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ — неперервний у середньому квадратичному та майже напевно гауссівський стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім і спектральною щільністю $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, яка задовольняє наступній умові:

I. $f(\lambda) > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad f_1 = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) < \infty$.

Означення.1 *Оцінкою найменших квадратів параметра* $\theta \in \Theta$ *називається випадковий вектор* $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \hat{\theta}_{2T}, \ldots, \hat{\theta}_{qT})$, *для якого*

$$L_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau\in\Theta^c} L_T(\tau), \quad L_T(\tau) = \int_0^T (X(t) - g(t,\tau))^2 dt.$$

Вважатимемо, що похідні

$$g_i(t,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_i} g(t,\theta), i = \overline{1,q},$$

локально інтегровні з квадратом за t при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$. Позначимо

$$d_{jT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t,\theta)dt,\ d_T = d_T(\theta) = \mathrm{diag}(d_{iT}(\theta))_{i=1,\ldots,q}, \theta \in \Theta,$$

$$\Delta(t,u) = g(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u) - g(t,\theta),\ t \in [0,T],\ \theta \in \Theta,\ u \in U_{T,\theta} := d_T(\theta)(\Theta^c - \theta).$$

Означимо клас **F** усіх функцій f_T, які мають наступні властивості:

1) для фіксованого T f_T є монотонно зростаючою до нескінченності на $[0,\infty)$ функцією;

2) для будь-якого $N > 0$

$$\lim_{R\to\infty,\ T\to\infty} R^N \exp\{-f_T(R)\} = 0.$$

Нехай $\gamma(R)$ — поліном, не обов'язково один і той самий, коефіцієнти якого можуть залежати від m, α, q, але не від T, θ, R, u, v.

Припустимо, що існують функція $f_T \in F$, константи $\delta \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\kappa > 0$, $\rho \in (0,1]$, поліном $\gamma(R)$ такі, що для $T > T_0$, $R > R_0$ виконуються наступні умови.

II. Для будь-яких

$$u, v \in \Gamma_{T,\theta,R} := U_{T,\theta} \cap \{u : R \le \left|u\right| \le R+1\},$$

таких що $\left|u-v\right| \le \kappa$,

$$\int_0^T (\Delta(t,u) - \Delta(t,v))^2 dt \le \left|u-v\right|^{2\rho} \gamma(R),$$

$$\int_0^T \Delta^2(t,u) dt \le \gamma(R).$$

III. Для будь-якого $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\int_0^T \Delta^2(t,u) dt \ge 4\pi f_1 \delta^{-2} f_T(R).$$

Позначимо

$$\left\langle B\Delta, \Delta \right\rangle = \int_0^T \int_0^T B(t-s)\Delta(t)\Delta(s) dt ds,$$

де

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda$$

— коваріаційна функція процесу ε.

Лема.2 *Нехай виконується умова* ***I*** *і* $S_T = \int_0^T \Delta(t)\varepsilon(t) dt$, *тоді для всіх* $x > 0$ *справедливі нерівності*

$$\mathbb{P}(S_T \ge x) \le D_T(x), \qquad \mathbb{P}(S_T \le -x) \le D_T(x),$$

$$\mathbb{P}(\left|S_T\right| \ge x) \le 2D_T(x),$$

де

$$D_T(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left\langle B\Delta, \Delta \right\rangle}\right\}.$$

Використовуючи підхід роботи Sieders, Dzhaparidze (1987) та лему, ми доводимо наступне твердження.

Теорема.3 *Нехай виконуються умови* ***I***, ***II***, *та* ***III***. *Тоді для* $T > T_0$, $H > H_0$ *існують такі константи* B_0, $b_0 > 0$, *що*

$$\mathbb{P}_\theta^T(\left|d_T(\theta)(\hat{\theta} - \theta)\right| \ge H) \le B_0 \exp\{-b_0 f_T(H)\},$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати таке B_0, що виконуватиметься нерівність

$$b_0 \geq \frac{\rho}{\rho + q} - \beta.$$

Зауважимо, що результат роботи Sieders., Dzhaparidze (1987), який ми використовуємо для доведення теореми, є зручним для нас варіантом загального результату Ибрагимов, Хасьминский (1979).

Список літератури

Sieders, A., & Dzhaparidze, K. (1987). A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis. *The Annals of Statistics*, *15* (3), 1031—1049.

Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З. (1979). *Асимптотическая теория оценивания*. Москва: Наука.

ІМОВІРНІСНА ОЦІНКА МІЦНОСТІ ТА НАДІЙНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

Р. І. Квіт
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
kvit_rom@ukr.net

При розв'язанні задач прогнозування граничного стану конструкційних матеріалів, зокрема композитів, важливим є застосування ймовірнісно-статистичних методів (Wetherhold, 1994; Strnadel & Yausild, 2008).

Розглянуто математичну модель елемента конструкції з композитного матеріалу за умов складного напруженого стану. Цей елемент (плоска пластина) є однорідною матрицею, у якій рівномірно розподілені n еліптичних включень (їх взаємодією нехтуємо) з іншого пружного матеріалу. Пластина перебуває у плоскому двовісному полі однорідних сил p та q, які можна трактувати як головні напруження за плоского напруженого стану (Квіт, 2008). Пружні властивості включень та матриці є заданими, крім того, усі включення мають однакові властивості і за формою є тонкими сплющеними еліпсами. Орієнтація (кут нахилу відносно напрямку дії сили p, який змінюється на інтервалі $[-\pi/2; \pi/2]$) та розміри включень (a і b — півосі еліпса) є випадковими величинами. Будемо вважати всі можливі орієнтації включень рівноймовірними. Враховуючи симетричність навантаження p щодо кута орієнтації α, застосовуємо рівномірний закон:

$$f_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}, \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Уважаємо, що диференційна функція розподілу ймовірностей параметра включень a (товщину включень $2b$ приймаємо фіксованою), який змінюється в межах $0 \le a \le a_1$ (a_1 — структурна константа матеріалу) має бета-розподіл (Хан, Шапиро, 1969)

$$f_2(a) = \frac{r+1}{a_1}\left(1 - \frac{a}{a_1}\right)^r \quad (0 \le a \le a_1), \tag{2}$$

де $r \ge 0$ — характеристика однорідності матеріалу (зі збільшенням r збільшується ймовірність присутності малих включень).

Інтегральна функція розподілу ймовірностей параметра a

$$F_2(a) = 1 - \left(1 - \frac{a}{a_1}\right)^{r+1}. \tag{3}$$

Частковими випадками бета-розподілу є трикутний розподіл, щільність якого

$$f_2(a) = \frac{2}{a_1}\left(1 - \frac{a}{a_1}\right),$$

та параболічний розподіл, щільність якого

$$f_2(a) = \frac{6a}{a_1^2}\left(1 - \frac{a}{a_1}\right).$$

Трикутний та параболічний розподіли деколи застосовуються як прості апроксимації складніших симетричних і асиметричних розподілів. Зокрема, трикутний розподіл дозволяє досить наближено описати деякі випадкові величини, що мають гамма-розподіл, а параболічний розподіл можна використати як дуже просту апроксимацію нормального розподілу.

Неоднорідність структури характеризує щільність сумісного розподілу ймовірностей незалежних випадкових величин a та α : $f(\alpha, a) = f_1(\alpha) f_2(a)$.

Аналогічно до ізотропних матеріалів (Витвицкий, Попина, 1980), інтегральна функція розподілу ймовірностей руйнівного (граничного) навантаження, яке є також випадковою величиною, для елемента пластини з одним включенням запишеться так:

$$F_1(p, \eta) = \iint\limits_{p(\alpha, a, \eta) \le p} f_1(\alpha) f_2(a)\, d\alpha\, da, \quad p_{\min} \le p < \infty \ (p_{\min} > 0). \tag{4}$$

Розглядаємо механізм руйнування композитного матеріалу (Черепанов 1983). Отримано (Квіт, 2008) значення руйнівного навантаження

$$p = \frac{T}{B\,\varphi(\alpha, \eta) + C\,\psi(\alpha, \eta)}, \quad q = \eta p, \tag{5}$$

де $$\varphi(\alpha, \eta) = \eta + 1 + (\eta - 1)\cos 2\alpha, \quad \psi(\alpha, \eta) = (\eta - 1)\sin 2\alpha,$$

$$B = (1 + \varpi_1)\, tg\, \rho_1, \quad C = \varpi_1 - 1, \quad T = N(D + \delta M),$$

$$N = \frac{4K^1}{1 + \varpi_2}, \quad D = \varpi_1 (1 + \varpi_2), \quad M = \frac{G_2(\varpi_1 - 1)}{G_1}.$$

Тут індексами 1 та 2 позначені величини, що відносяться відповідно до включення і матриці; ϖ_1, ϖ_2 — пружні константи, що виражаються через коефіцієнт Пуассона ν ($\varpi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ за плоского напруженого стану $\varpi = 3 - 4\nu$ за плоскої деформації); $\delta = 2b / (a + b) \approx 2b / a$ $(b \ll a)$; G_1, G_2 — модулі зсуву $(G_1 / G_2 < 1)$; K^1 — коефіцієнт зчеплення; $\mathrm{tg}\, \rho_1$ — коефіцієнт внутрішнього тертя матеріалу включення.

Відповідно до співвідношень (1)—(5) отримано (Квіт, 2008) функцію розподілу руйнівного навантаження для елемента пластини з одним включенням

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{S_\alpha} [1 - F_2(a(\alpha, p, \eta))]^{r+1} d\alpha\,.$$

де $a(\alpha, p, \eta)$ — параметр включення, що відповідає заданому руйнівному навантаженню p і визначається з формули (5). Область інтегрування S_α визначається відповідно до співвідношення головних напружень (Квіт, 2008).

Тоді ймовірність зруйнування композита за фіксованого навантаження

$$P_f = 1 - \left(1 - F_1(p, \eta)\right)^n. \tag{6}$$

Зокрема, за одновісного розтягу $(\eta = 0, p > 0, q = 0)$

$$F_1(p,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha_1^{(2)}} [1 - F_2(a(\alpha, p, 0))]^{r+1} d\alpha + \alpha_2^{(2)} - \alpha_1^{(2)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_2^{(2)}}^{\pi/2} [1 - F_2(a(\alpha, p, 0))d\alpha]^{r+1}\,. \qquad (7)$$

За двовісного симетричного розтягу $(\eta = 1, p = q > 0)$

$$F_1(p,1) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1^{(1)}}^{\pi/2} [1 - F_2(a(\alpha, p, 1))]^{r+1} d\alpha\,. \qquad (8)$$

За двовісного симетричного розтягу-стиску $(\eta = -1, p > 0, q = -p)$

$$F_1(p,-1) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1^{(2)}-\alpha_{**}}^{\alpha_1^{(2)}} [1 - F_2(a(\alpha, p, -1))]^{r+1} d\alpha + \alpha_2^{(2)} - \alpha_1^{(2)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_2^{(2)}}^{\pi/2} [1 - F_2(a(\alpha, p, -1))d\alpha]^{r+1}\,, \qquad (9)$$

де вирази $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_{**}$ подані в роботі Квіт (2008).

Відповідно до співвідношень (6)—(9) на рис. 1—3 побудовано графіки ймовірності зруйнування P_f за різних видів навантаження. Існує певний рівень навантаження, якому відповідає дуже мала ймовірність зруйнування. Імовірність зруйнування стрімко зростає на певному діапазоні розмірів пластини для кожного виду і рівня навантаження. У випадку збільшення величини r за однакового навантаження, зменшується значення P_f.

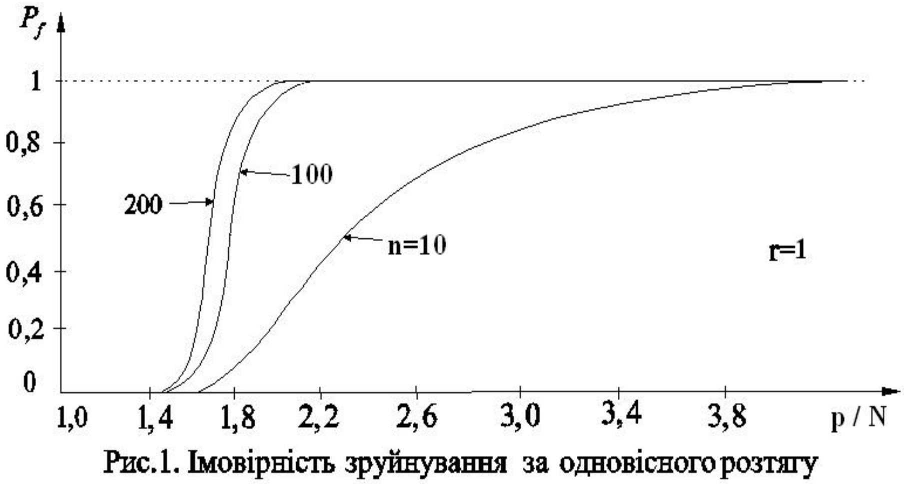


Рис.1. Імовірність зруйнування за одновісного розтягу

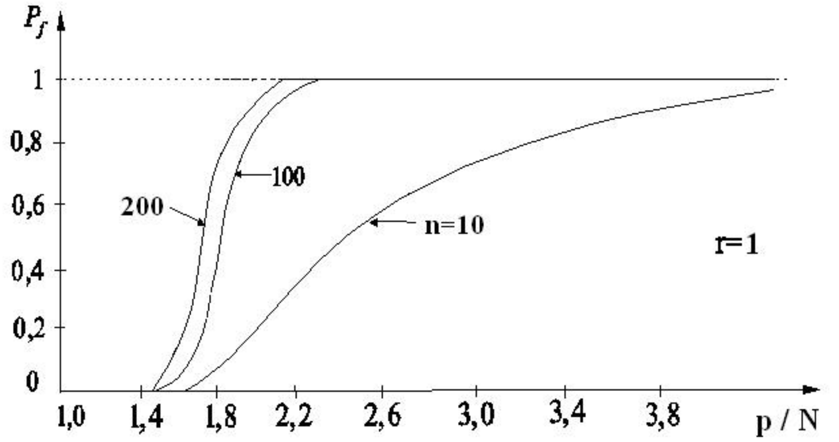


Рис.2. Імовірність зруйнування за двовісного симетричного розтягу-стиску

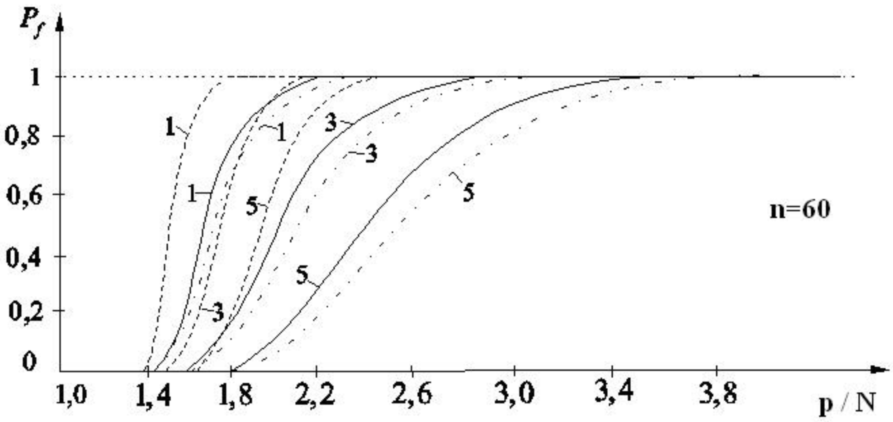


Рис.3. Імовірність зруйнування для матеріалів різної неоднорідності

На рис. 3 суцільні лінії відповідають випадку одновісного розтягу, штрихові — двовісного симетричного розтягу, штрихпунктирні — двовісного симетричного розтягу-стиску.

Список літератури

Wetherhold, R. C., & Ucci, A. M. (1994). Probability methods for the fracture of composite materials. *Composite Structures*, *28* (15), 113–119.

Strnadel, B., Hausild, P. (2008). Statistical scatter in the fracture toughness and charpy impact energy of pearlitic steel. *Materials Science and Engineering*, *486* (1), 208–214.

Квіт, Р. І. (2008) Статистичні характеристики міцності композитних матеріалів за складного напруженого стану. *Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки*, *601*, 59—64.

Хан, Г., Шапиро, С. (1969). *Статистические модели в инженерных задачах*. Москва: Мир.

Витвицкий, П. М., Попина, С. Ю. (1980). *Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел*. Киев: Наукова думка.

Черепанов, Г. П. (1983). *Механика разрушения композиционных материалов*. Москва: Наука.

РОЗПОДІЛ ЧАСУ ПЕРШОГО ДОСЯГНЕННЯ ТА ОЦІНКА ЧИСЛА ПЕРЕТИНІВ РІВНЯ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНИХ ПРОЦЕСІВ У $\mathbb{R}^1$

Т. Ю. Коломієць
Європейський університет, Житомирська філія, Житомир, Україна
tamila.kolomiiets@mail.ru

Відомо, що вінерівський процес $w(t)$ нескінченно багато разів перетинає довільний рівень $x \in \mathbb{R}$ за як завгодно малий час $\delta > 0$. Наша мета знайти розподіл для оцінки цієї (нормованої) кількості перетинів. Для отримання результату досліджується телеграфний процес, а далі використовується властивість, що за умови Каца телеграфний процес слабко збігається до вінерівського процесу. В доповіді представлена оцінка числа перетинів рівня телеграфним процесом на прямій та при переході до границі за умови Каца отримано оцінку перетинів рівня для вінерівського процесу.

На фазовому просторі $\mathbb{T} = \{0,1\}$ розглянемо марковський процес
$$\{\xi(t), t \geq 0\},$$
інфінітезимальна матриця якого має вигляд:
$$Q = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda > 0.$$

Позначимо через $\{x(t), t \geq 0\}$ телеграфний процес, який описується рівнянням
$$\frac{d}{dt} x(t) = v(-1)^{\xi(t)},$$
де $v = const > 0$ і $x(0) = x_0$.

Представимо точний математичний вираз для розподілу часу першого досягнення деякого рівня $\mathbb{L}$ телеграфним процесом на дійсній прямій $\mathbb{R}^1$.

Позначимо $\Delta(t) = \mathbb{L} - x(t)$. Більше того, припустимо, що $z = \mathbb{L} - x_0 > 0$. Нехай $\xi(0) = k$. Позначимо
$$T_k(z) = \inf\{t \geq 0\colon \Delta(t) = 0\}, \qquad k \in \{0, 1\}.$$

Тобто $T_k(z)$ є часом першого проходження рівня $\mathbb{L}$ телеграфним процесом $\{x(t)\}$ при $\xi(0) = k$.

Позначимо через
$$f_k(t,z)dt = P(T_k(z) \in dt)$$
щільність розподілу випадкової величини $T_k(z)$. Має місце:

Теорема 1. *Для* $t \geq \frac{z}{v}$
$$f_0(t,z) = e^{-\lambda t}\left[\delta(z - vt) + \frac{\lambda z}{v^2}\frac{I_1\left(\frac{\lambda}{v}\sqrt{v^2t^2 - z^2}\right)}{\sqrt{v^2t^2 - z^2}}\right],$$
$$f_1(t,z) = e^{-\lambda t}\left[\frac{I_1\left(\lambda\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)}{\left(t - \frac{z}{v}\right)} + \lambda z \int_{z/v}^{t} \frac{I_1(\lambda(t-u)) I_1\left(\frac{\lambda}{v}\sqrt{v^2u^2 - z^2}\right)}{(t-u)\sqrt{v^2u^2 - z^2}}\, du\right],$$
де $I_1(\cdot)$ — *модифікована функція Бесселя першого роду.*

Наведемо оцінку числа перетинів певного рівня телеграфним процесом в $\mathbb{R}^1$. Позначимо через $C_k(t,z)$ кількість перетинів рівня z частинкою з траєкторією $x(t)$ протягом часового інтервалу $(0,t),\ t>0$, припускаючи, що

$$\xi(0)=k\in\{0,1\}.$$

Розглядаємо функцію відновлення

$$H_k(t,z)=\mathbf{E}[C_k(t,z)].$$

Тепер розглянемо так звану умову Каца (або гідродинамічну границю), коли $\lambda=\varepsilon^{-2},\ \upsilon=c\varepsilon^{-1}$, і, отже, при $\varepsilon\to 0$ (або $\lambda\to\infty$ і $\upsilon\to\infty$) маємо $\frac{\upsilon^2}{\lambda}\to c^2$.

Відомо, що за умови Каца телеграфний процес слабко збігається до вінерівського процесу $w(t)$, який має нормальний розподіл $N\big(0,\ ct\big)$ (Kac (1974)).

Теорема 2. *За умови Каца маємо*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{H_k(t,0)}{\sqrt{\lambda}}=\lim_{\upsilon\to\infty}\frac{cH_k(t,0)}{\upsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon cH_k(t,0)=c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}.$$

Враховуючи, що $\lambda=\varepsilon^{-2},\ \upsilon=c\varepsilon^{-1}$, ми маємо

$$H_1(t,0)=\sqrt{\lambda}\frac{2}{\pi}\sqrt{t}=c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\upsilon,\quad \upsilon\to\infty.$$

Таким чином, для фіксованого $t>0$ число перетинів довільного рівня $x\in\mathbb{R}$ за як завгодно малий час $\delta>0$ телеграфним процесом за умови Каца прямує до ∞, як і швидкість υ.

Тепер позначимо

$$F_1(x)=\int_0^x f_1(t,0)dt=\int_0^x\frac{e^{-\lambda t}}{t}I_1(\lambda t)dt.$$

Теорема 3. *При* $\lambda\to\infty$

$$P\left\{\left(1-\int_0^{\lambda x}\frac{e^{-u}}{u}I_1(u)du\right)C_1(x,0)\geq\frac{3}{\sqrt{y}}\right\}\to G_{1/2}(y),$$

де функція $G_{1/2}(y)$ є односторонньою стійкою функцією розподілу, яка задовольняє умову $y^{1/2}\big[1-G_{1/2}(y)\big]\to 3$ при $y\to\infty$ (Feller, 1971).

Таким чином, за умови Каца середнє число перетинів рівня телеграфним процесом, тобто $EC_1(x,0)$, є величиною порядку $\sqrt{\lambda}=\upsilon$.

Доведення теорем, отримання математичних формул та їх обґрунтування можна знайти в роботі Pogorui, Rodríguez-Dagnino, Kolomiiets (2015).

Список літератури

Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications.* (2nd ed.) (Vol. 2). John Wiley & Sons.

Kac, M. (1974). A stochastic model related to the telegrapher's equation. *Rocky Mountain J. Math., 4,* 497–509.

Pogorui, A. A., Rodríguez-Dagnino, R. M., & Kolomiiets, T. (2015). The first passage time and an estimate of the number of level-crossings for a telegraph process. *Український математичний журнал, 67* (7), 882–889.

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ ИННОВАЦИОННОЙ СФЕРЫ

И. Ф. Курбыко, А. С. Левизов

Владимирский государственный университет, Владимир, Россия

levizov@yandex.ru

В данной работе на основе многомерных методов математической статистики изучается вариация в многофакторной системе показателей инновационного развития российских регионов. В результате исследования выявлены главные факторы в плане их влияния на суммарную дисперсию объектов-регионов. Построены кластеры регионов, близких по уровню инновационного потенциала, дана оценка зависимости результативного показателя от факторных переменных системы.

Авторы предполагают, что инновационная деятельность регионов проявляется в вариации огромного множества переменных, среди которых можно наблюдать существенную взаимную корреляцию или значимую связь. Однако, глубинных (скрытых, латентных) факторов может быть существенно меньше, чем регистрируемых переменных. Степень влияния фактора на некоторую переменную (в данном случае показатель инновационного развития) проявляется в величине дисперсии, в разбросе или диапазоне изменения этого показателя при изменении значений фактора. При этом изменение более мощного фактора будет приводить к большей вариации показателя, на который этот фактор оказывает значимое влияние. Поэтому в качестве основного инструмента исследования авторами данной работы выбран факторный анализ.

Первый этап работы начался со сбора и систематизации сведений об инновационной деятельности регионов. Эти сведения были представлены в виде многофакторной системы $\left(X_1, X_2, \ldots, X_9\right)$ показателей на основе информации Федеральной службы государственной статистики за 2014 год. Предметом исследования стали следующие показатели: X_1 — выпуск из аспирантуры и докторантуры (человек); X_2 — численность исследователей с учеными степенями (количество кандидатов наук и докторов наук); X_3 — численность персонала, занятого научными исследованиями и разработками; X_4 — внутренние затраты на фундаментальные исследования (млн. руб.); X_5 — внутренние затраты на прикладные исследования (млн. руб.); X_6 — внутренние затраты на разработки (млн. руб.); X_7 — число используемых передовых производственных технологий; X_8 — число выданных патентов на изобретения и полезные модели; X_9 — объем инновационных товаров, работ и услуг (млн. руб.). Переменная X_9 принята за результативный показатель системы и в дальнейшем обозначается через Y. В качестве объектов исследования были взяты 18 регионов Центрального федерального округа. В целях их сравнения по уровню инновационного развития абсолютное значение каждого показателя было представлено в расчете на 10 тысяч человек населения, занятого в экономике. Так был построен двумерный массив $X(18,9)$ исходных данных, на основе которого рассчитана матрица $R=(r_{ij})$ парных коэффициентов корреляции $r_{ij}=r(X_i,Xj)$. Затем выделены факторы (X_2,X_3,X_4,X_5,X_6), связанные значимой корреляцией с Y. При этом наибольшей с Y связан фактор X_5. Процедурой простой регрессии построены следующие модели (адекватные экспериментальным данным по F-критерию, описывающие зависимость Y от факторных переменных):

$$Y = 257{,}7 + 33{,}80X_2;\ Y = 209{,}2 + 1{,}56X_3;\ Y = 241{,}9 + 7{,}82X_4;$$
$$Y = 245{,}6 + 6{,}08X_5;\ Y = -3{,}85 + 0{,}66X_6.$$

Расчет коэффициентов эластичности $E_j = a_j\overline{X}_j \,/\, \overline{Y}_j$ $(j=2,3,4,5,6)$ для каждого коэффициента регрессии a_j построенных линейных моделей показал, что увеличение показателей (X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) на 1% приводит к росту результативного показателя Y, соответственно, на 0,14%, 0,38%, 0,29%, 0,28%, 0,10%. Многие факторные переменные оказались также связаны значимой корреляцией между собой. Коэффициенты корреляции Пирсона составили:

$$r(X_2,X_5)=0{,}94;\ r(X_2,X_8)=0{,}88;\ r(X_3,X_4)=0{,}95;$$
$$r(X_3,X_5)=0{,}94;\ r(X_3,X_6)=0{,}98.$$

Построены модели, достаточно точно описывающие зависимость этих переменных. В частности, модель-парабола

$$X_6 = 2{,}742 + 0{,}465X_3 + 0{,}001X_3^2$$

объясняет около 97% вариации показателя X_6 за счёт влияния на него фактора X_3. По причине высокой корреляции факторных переменных не удалось построить адекватной модели множественной регрессии, связывающей показатель Y одновременно со всеми факторами (X_2,X_3,X_4,X_5,X_6).

Следующий этап работы посвящен процедурам факторного анализа (Кулаичев, 2006, с. 321—338), основой которого явилась оценка модели главных компонент:

$$X_j = \sum_{i=1}^{k} b_{ij}F_i + e_j,\ j=1,\ldots,m.$$

Здесь X_j — исходные переменные; $e_j = \sum_{i=k+1}^{m} a_{ij}F_i$ — оценки специфических факторов; $F_i(i=1,\ldots,k,k+1,\ldots,m)$ — главные компоненты; a_{ij} — составляющие матрицы A собственных векторов корреляционной матрицы R

так, что $R \cdot A = \lambda \cdot A$, где λ — вектор собственных значений; $b_{ij} = a_{ij}\sqrt{\lambda_j}$ — оценки факторных нагрузок; у нас $m = 9; k = 4$. Таким образом, матрицу R представляем в виде: $R = B \cdot B^T$, где $B = (b_{ij})$ — матрица факторных нагрузок. В факторной модели главные компоненты не коррелированы, дисперсия $D(F_i)$ равна собственному значению λ_i матрицы R. В качестве k первых главных факторов (по-другому, значимых или общих факторов) выбирают компоненты, обладающие наибольшими дисперсиями. Наши расчеты показали, что можно выделить четыре главных фактора (F_1, F_2, F_3, F_4), которые являются линейным преобразованием переменных $(X_1, X_2, ..., X_9)$ и отвечают примерно за 97% дисперсии показателей объектов. Остальные компоненты $(F_5, F_6, F_7, F_8, F_9)$, суммарно отражают менее 4% общей дисперсии и исключены из дальнейшего исследования.

Таблица 1

Собственные значения и процент объясняемой дисперсии факторов

Фактор	F_1	F_2	F_3	F_4
Собст.значения	6,044	1,581	0,572	0,503
Дисперсия, %	67,15	17,56	6,355	5,584
Накоп.дисп., %	67,15	84,72	91,07	96,65

Анализ матрицы факторных нагрузок b_{ij}(характеризующих степень выраженности исходных переменных в главных факторах) показал, что переменные $(X_1, X_2, ..., X_9)$ преимущественно проектируются на первые четыре главных фактора. При этом на фактор F_1 с высокими нагрузками проектируются показатели $(X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$, на фактор F_2 — X_7. Результативный показатель $Y = X_9$ достаточно равномерно представлен в факторах(F_1, F_2, F_3); переменная X_1 в факторах (F_1, F_2, F_4); X_7 в (F_2, F_4); X_8 в (F_1, F_2). Связь переменных с остальными факторами незначительная. Таким образом, была построена сокращенная система (F_1, F_2, F_3, F_4) значимых факторов в пространстве регистрируемых переменных. Проекции объектов на плоскости главных компонент (F_i, F_j) показали 4—5 плотных группировок регионов, причем, наиболее удаленными от всех регионов оказались г. Москва и Московская область.

На следующем этапе проведен кластерный анализ. Исходя из результатов факторного анализа каждый объект-регион представлен точкой (f_1, f_2, f_3, f_4) в четырехмерном пространстве (см. табл. 2). Здесь оценка близости регионов выполнена на основе расчета нормированного евклидова расстояния (Кулаичев, 2006, с. 357) между I-м и J-м объектами:

$$\rho_N\left(I,J\right)=\sqrt{\sum_{p=1}^{k}\frac{\left(x_{ip}-x_{jp}\right)^2}{S_p^2}},$$

где S_p^2 — несмещенная оценка дисперсии главного фактора с номером p; x_{ip} и x_{jp} — координаты I-го и J-го объектов. В метрическом факторном пространстве на близком расстоянии друг от друга оказались следующие пары объектов:

$$(1,12);(2,13);(3,17);(11,14),$$

$$\rho_N\left(1,12\right)=0,774;\rho_N\left(2,13\right)=0,817;\rho_N\left(3,17\right)=0,926;\rho_N\left(11,14\right)=0,982.$$

С помощью дивизивной стратегии построено разбиение объектов на кластеры:

$$I(1;4;5;8^*;11;14);II(2^*;12;13;16);III(3^*;6;7;9;15;17);IV(10^*;18),$$

что послужило основой для классификации регионов Центра России по уровню инновационного потенциала. Здесь звездочкой отмечены номера объектов, соответствующие геометрическим центрам кластеров. Среднее внутрикластерное расстояние составило 1,458. Методом дискриминантного анализа установлено, что данное разбиение на четыре кластера статистически достоверно. Однофакторный дисперсионный анализ показал, что средние значения Y в кластерах значимо отличаются от нуля. Обработка данных выполнена на основе прикладных программ STADIA.

Таблица 2

Координаты объектов в системе главных факторов

N объекта	Объект-регион	f_1	f_2	f_3	f_4
1	Белгородская обл.	-0,961	-0,670	-0,514	0,182
2	Брянская обл.	-1,634	-0,576	0,012	0,779
3	Владимирская обл.	-0,719	0,819	0,234	-0,170
4	Воронежская обл.	-0,076	-1,230	-0,150	0,552
5	Ивановская обл.	-0,456	-2,098	-0,020	0,140
6	Калужская обл.	1,305	1,039	1,195	0,755
7	Костромская обл.	-1,777	0,520	0,586	-0,852
8	Курская обл.	-0,579	-1,022	-0,191	0,167
9	Липецкая обл.	-0,999	1,179	-2,233	-0,627
10	Московская обл.	3,861	2,619	0,396	0,833
11	Орловская обл.	-1,022	-0,981	0,294	-1,250
12	Рязанская обл.	-1,077	-0,681	0,139	0,422
13	Смоленская обл.	-1,490	-0,170	0,072	0,977
14	Тамбовская обл.	-0,976	-0,343	0,310	-0,726
15	Тверская обл.	-0,898	1,243	1,178	-0,961
16	Тульская обл.	-0,840	0,221	-0,806	0,710
17	Ярославская обл.	-0,058	0,560	-0,087	-0,314
18	г. Москва	8,395	-1,429	-0,416	-0,617

Изложенная методика исследования может послужить инструментом для анализа других сложных многофакторных систем (Курбыко, Левизов, 2013). Статистический анализ, выполненный в данной работе и дополненный экономическим содержанием, позволил сформулировать гипотезу: инновационное развитие регионов должно быть основано не на концепции индивидуального развития, а на концепции пространственного взаимодействия территорий.

Список литературы

Кулаичев, А. П. (2006). *Методы и средства комплексного анализа данных*. Москва: Форум.

Курбыко, И. Ф., Левизов, А. С. (2013). Факторный анализ системы социально-экономических показателей регионов Центра России. *Материалы 13-й Межд. науч.-практич.конф. «Современные проблемы науки и образования»*. Харьков: Харьковский национальный университет, 178—179.

ВИЗНАЧЕННЯ КІЛЬКОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТІВ У ПЛАНІ ДЛЯ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

С. М. Лапач

НТУУ «Київський політехнічний інститут, Київ, Україна

lapach@ukr.net

Проблема. Відсутність методів визначення обґрунтованого числа дослідів для плану експерименту.

Стан питання. Питанню встановлення кількості дослідів у плані приділяється недостатня увага. Це пов'язано з передумовою класичного регресійного аналізу про a priori відому структуру (специфікацію) рівняння регресії, яка не відповідає реальності, про що свідчить численна література по визначенню цієї самої специфікації. Традиційно (якщо не розглядати випадок повного факторного експерименту) число дослідів просто відповідає вибраному підходящому по числу факторів і їх рівнях плану з каталогу, тобто план виду $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \ldots f_m^{k_m} \; / \, / N$, в якому підмножина $f_{i_1}^{j_1} f_{i_2}^{j_2} \ldots f_K^{j_K}$ буде відповідати вимогам дослідника. Значення ж N виходить як наслідок вибору конкретного плану. Разом з тим число дослідів важливе з точки зору обмежених ресурсів на проведення експериментів. Занадто мале не дає можливості побудувати адекватну й інформативну модель, а занадто велике (і гарантовано надійне) як правило неможливе з точки зору обмеження ресурсів. При класичному плануванні помилка в будь-яку сторону приводить до збільшення затрат. Це пов'язано з тим, що при занадто малій кількості дослідів необхідно використовувати новий план. При цьому використання дослідів зі старого, як правило неможливе. Спеціальними методами розрахунку кількості експериментів практично ніхто не займався. Винятком є пропозиції розраховувати число дослідів, виходячи з довірчого інтервалу для відгуку (Колемаев, 1991; Лапач, 1999), де формула встановлена евристично, виходячи з принципу висуненому в Satterthwaite (1959) про експоненціальний характер розподілу впливу значущих факторів і емпіричних спостережень.

Мета. Провести аналіз кількості дослідів у плані експерименту, виходячи з накопичених спостережень.

Аналіз висунутих припущень, покладених в основу формул.

Довірчий інтервал для відгуку, по-перше, вимагає відомої структури моделі, по-друге, в реальних задачах не розраховується у зв'язку з відсутністю такої необхідності. У зв'язку з цим дана пропозиція не має практичної цінності.

Допущення Саттерзвайта (в технічних галузях) і аналогічне Парето (в економічних і соціальних) підтверджено практикою. На ньому ґрунтувалося застосування методу випадкового балансу, наприклад, Барский (1971). Установлено, що при збільшенні усталеності/організованості/завершеності процесу частка суттєвих ефектів зменшується і крива стає крутішої. Винятки: недосконалий процес, у якому може бути багато ефектів приблизно однакового приблизно й можливо, навіть не значимого взятим одним окремим ефектом впливу (Pardoux, 1982). Проміжним варіантом може бути лінійний розподіл впливу ефектів. Єдине, що не підтверджується припущення про відсутність взаємодій складніших, ніж подвійні. У складних процесах при наявності великої кількості факторів ймовірність складних взаємодій зростає, що розглядається в Лапач, Чубенко (2002), Дудін, Лапач (2008).

Використання формули почалося в середині 80-х, задовго до першої публікації. Кількість дослідів $N_{\text{розр}}$ для плану експерименту для побудови моделі розраховується за наступною формулою

$$N_{\text{розр}} = (1,5...2)(1 + \sum_{i=1}^{k} s_i),$$

де k — кількість незалежних змінних (факторів), s_i — максимальна очікувана степінь поліному для кожної незалежної змінної. Число

$$M_{\text{ге}} = (1 + \sum_{i=1}^{k} s_i)$$

називається числом головних ефектів для конкретного плану.

Аналіз статистичного матеріалу. Для аналізу були взяті моделі, отримані в роботах автора за останні 20 років. Не брались до уваги моделі з числом факторів менше 3, а також такі, в яких кількість членів моделі була менше числа факторів. Загалом для аналізу лишилось біля 200 моделей (рис. 1).

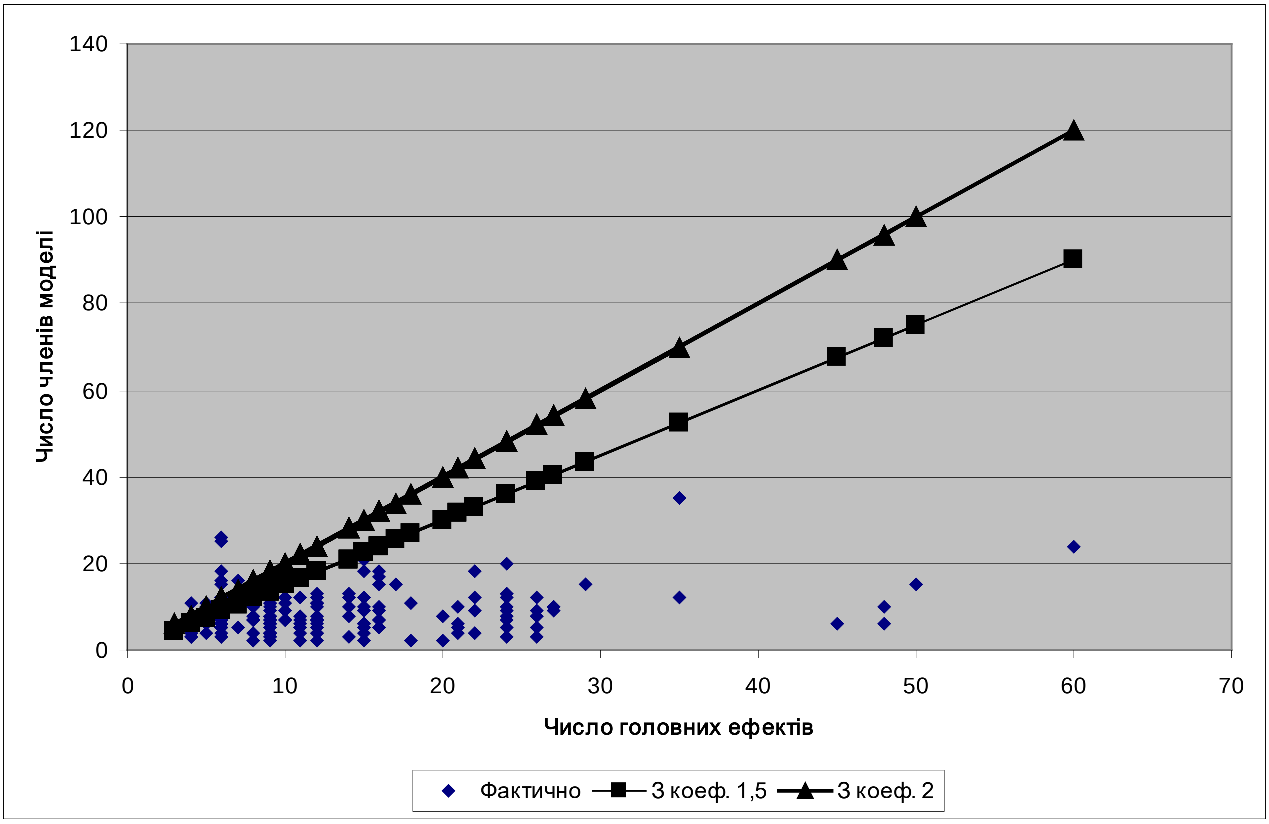


Рис. 1. Прогнозована і фактична кількість членів моделі

Число незалежних змінних в моделях варіювалось від 3 до 20; число головних ефектів досягало в максимумі до 60; а максимальна кількість ефектів, які аналізувалась в окремій задачі — до 1788. Перевищення коефіцієнта 2 формули спостерігається в 4% випадків при значеннях $M_{\text{ге}}$ від 4 до 7. З перевищенням 1,5 було 12% моделей при значеннях $M_{\text{ге}}$ від 4 до 7 аналогічно. Моделей, в яких кількість членів перевищує 10 (найбільше 35), нараховується до 30% від загальної кількості. При цьому тільки в 11,7% з них перевищується коефіцієнт 2, а з перевищенням коефіцієнту 1,5 налічується 20%.

Формула, яка забезпечує гарантовано більшу експериментів, ніж кількість членів моделі має наступний вид

$$\hat{N} = 24 + 0,3(1 + \sum_{i=1}^{k} s_i).$$

Якщо ж обмежитись випадком, коли число головних ефектів $M_{\text{ге}} \geq 7$, то

$$\hat{N} = 20 + 0,4(1 + \sum_{i=1}^{k} s_i).$$

Приведені формули дають більшу кількість очікуваних членів моделі, ніж аналізована, на малих кількостях головних ефектів і меншу — на великих. Слід пам’ятати, що кількість дослідів повинна не просто бути більше числа членів моделі, а ще й забезпечувати певні властивості матриці експерименту відповідно до критерію якості плану. В нашому випадку це ортогональність, або низька закорельованість.

Разом з тим, слід зауважити, що при використанні робастних планів на основі рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел $ЛП_\tau$ проблема неправильного вибору числа членів експерименту знімається. Це викликано тим, що ці плани можна добудовувати, детальніше див. Лапач (1999). Тобто взявши, наприклад, план експерименту з кількістю дослідів 16, і після обробки встановивши, що ця кількість недостатня, можливо збільшити його до 24 чи 32 і після додаткових експериментів, побудувати нову модель.

Розглянемо характер фактичної кількості членів моделі від загальної кількості ефектів, які аналізувались при їх побудові (рис. 2).

Рис. 2. Залежність відношення К/$М_{ге}$ від кількості ефектів для аналізу

Можна вважати, що кількість ефектів, які аналізуються, пропорційна очікуваній дослідником складності процесу. Видно, що чим складніший процес, тим менша частка значимих ефектів в загальній кількості. На рис. 3. представлені характерні розподіли сили впливу значущих факторів.

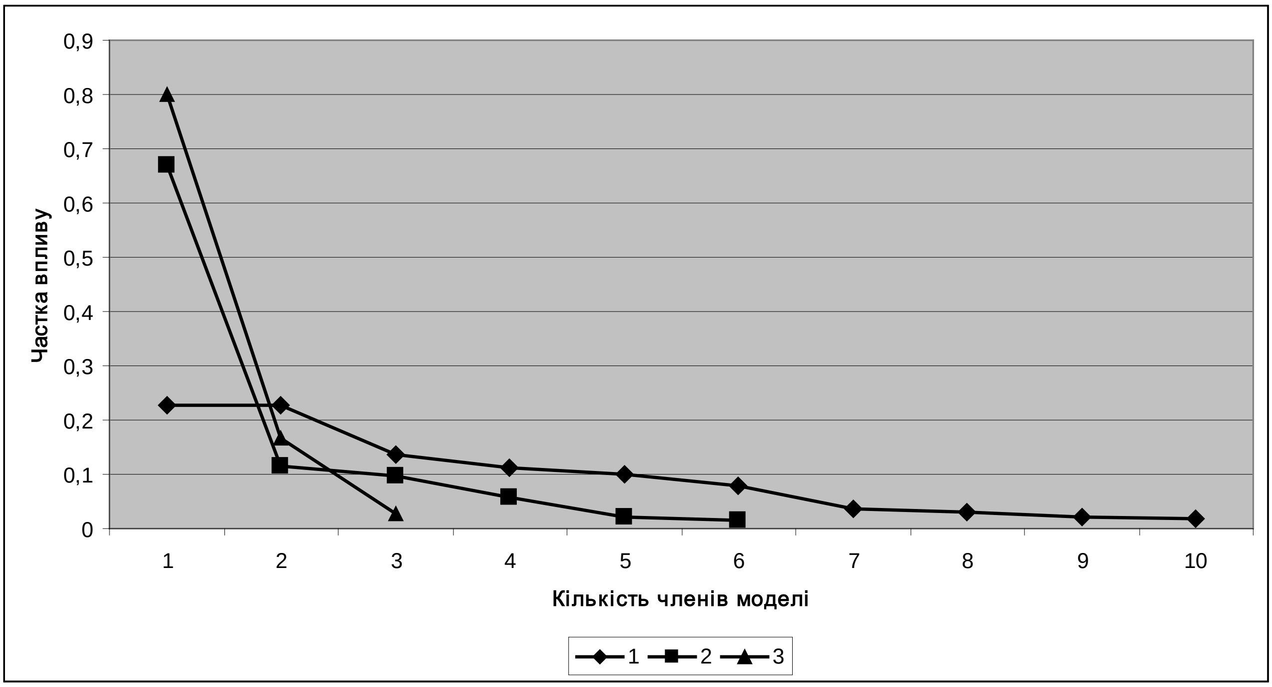


Рис. 3. Види залежностей розподілу сили впливу ефектів

Висновки і рекомендації. Запропоновані уточнені формули для розрахунку розміру плану. Рекомендовані робастні ЛП$_\tau$ плани для повного зняття висуненої проблеми.

Список літератури

Pardoux, C. (1982). Sur la selection de variables en regression multiple. *Cah. Bur. Univ. rech. Oper, 39–40,* 101–133.

Satterthwaite, F. E. (1959). Random Balance Experimentation. *Technometrics*, *1* (2), 111–137.

Барский, В. Д., Забенко, Л. А., Аксенина, А. А., Беднов, В. М. (1971). К вопросу о построении матрицы планирования отсеивающего эксперимента. *Заводская лаборатория, 37* (7), 721—825.

Дудін, О. В., Лапач, С. М. (2008). Складні взаємодії в економетричних моделях. *Тези доповідей загально університетської науково-технічної конференції молодих вчених та студентів: Секція машинобудування* (Ч. 2). Київ: НТУУ «КПІ», 16—17.

Колемаев, В. А., Староверов, О. В., Турундаевский, В. Б. (1991). *Теория вероятностей и математическая статистика.* Москва: Высшая школа.

Лапач, С. Н., Пасечник, М. Ф., Чубенко, А. В. (1999). *Статистические методы в фармакологии и маркетинге фармацевтического рынка*. Киев: ЗАТ «Укрспецмонтаж».

Лапач, С. Н., Чубенко, А. В. (2002). Влияние заболеваемости и уровня платежеспособности населения на розничную реализацию лекарств. *Провизор*, *23,* 14–16.

ПРО НОВІ ФРАКТАЛЬНІ ФЕНОМЕНИ, ПОВ'ЯЗАНІ З РОЗПОДІЛАМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З НЕЗАЛЕЖНИМИ GLS-СИМВОЛАМИ

М. Л. Лупаїн, Г.М. Торбін

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

marinalupain@npu.edu.ua, torbin@npu.edu.ua

Нехай $x = \Delta^{GLS}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — GLS-розклад дійсного числа x з одиничного відрізка. Детальніше про GLS-розклади в Dajani, Kraaikamp (2002).

Основним об'єктом у доповіді є властивості розподілів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами, тобто розподілів випадкових величин виду

$$\xi = \Delta^{GLS}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність випадкових величин, які набувають значень $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$ відповідно.

Як відомо, GLS-розклад дійсних чисел визначається нескінченним стохастичними вектором $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, $q_i > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ та законом взаємного розташування циліндрів першого рангу на одиничному відрізку (циліндри першого рангу Δ^{GLS}_{i} та Δ^{GLS}_{j} не повинні мати внутрішніх спільних точок і $\left|\Delta^{GLS}_{i}\right| = q_i$). Зауважимо, що коли

$$\left|\Delta^{GLS}_{i}\right| = \frac{1}{(i+1)(i+2)}, \sup \Delta^{GLS}_{0} = 1 \text{ і } \inf \Delta^{GLS}_{i} = \sup \Delta^{GLS}_{i+1},$$

GLS- розклад збігається з класичним розкладом Люрота. Якщо

$$\inf \Delta^{GLS}_{i} = 0 \text{ і } \sup \Delta^{GLS}_{i} = \inf \Delta^{GLS}_{i+1},$$

то GLS-розклад співпадає з Q_∞-розкладом.

Позначимо через

$$\Delta^{GLS}_{\infty} := [0;1] \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^{GLS}_{i}.$$

У тому випадку, коли множина Δ^{GLS}_{∞} є не більш як зчисленною, фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними однаково розподіленими GLS-символами вивчалися в роботі Lupain (n. d.). Зокрема, доведена

Теорема 1. *Якщо множина Δ^{GLS}_{∞} не більш як зчисленна, то для довільного GLS-розкладу, породженого стохастичним вектором $Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, розмірність Хаусдорфа — Безиковича спектра розподілу випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими GLS-символами обчислюється наступним чином.*

1. Якщо рівняння

$$\sum_{i\in V} q^{x} = 1 \tag{1}$$

має корінь α_0 *на [0,1], то* $\dim_H S_\xi = \alpha_0$, *де* $V := \{i : p_i > 0\}$.

2. Якщо рівняння $\sum\limits_{i\in V} q^{x} = 1$ *не має коренів на* $[0{,}1]$, *то*

$$\dim_H S_\xi = \lim_{k\to\infty} \alpha_k,$$

де α_k *корінь рівняння* $\sum\limits_{i\in V_k} q^{x} = 1$, $V_k = V \bigcap \{1,2,3,\ldots k\}$.

Чи залишається правильною остання теорема при *довільному* взаємному розташування циліндрів першого рангу?

Покажемо, що у випадку континуальності множини Δ_∞^{GLS} теорема 1 може не мати місця. З цією метою побудуємо спеціальний GLS-розклад за наступним алгоритмом.

Розглянемо допоміжну множину

$$A = \left\{x : x = \Delta^{Q}_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_k(x)\ldots}\right\},\ \beta_k(x) \in \{0;2\}$$

де $Q = \left(\dfrac{1-a}{2}; a; \dfrac{1-a}{2}\right)$, $a \in (0;1)$. Зрозуміло, що A — ніде не щільна самоподібна множина, розмірність Хаусдорфа — Безиковича якої дорівнює $\log_{\frac{1-a}{2}} \dfrac{1}{2}$.

Позначимо через $\{(a_n, b_n)\}$ послідовність інтервалів, суміжних до множини A.

Множину $N_0 := \{0,1,2,3\ldots\}$ розіб'ємо на зчисленне об'єднання зчисленних множин за принципом, який отримується з класичного порядку О. М. Шарковського:

$$N_0 = \{\begin{array}{cccccccc}
0, & 1, & 2, & 4, & 8, & \ldots, & 2^n, & \ldots, \\
 & 3\cdot 1, & 3\cdot 2, & 3\cdot 4, & 3\cdot 8, & \ldots, & 3\cdot 2^n, & \ldots, \\
 & 5\cdot 1, & 5\cdot 2, & 5\cdot 4, & 5\cdot 8, & \ldots, & 5\cdot 2^n, & \ldots, \\
 & 7\cdot 1, & 7\cdot 2, & 7\cdot 4, & 7\cdot 8, & \ldots, & 7\cdot 2^n, & \ldots, \\
 & 9\cdot 1, & 9\cdot 2, & 9\cdot 4, & 9\cdot 8, & \ldots, & 9\cdot 2^n, & \ldots, \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & (2n+1)\cdot 1, & (2n+1)\cdot 2, & (2n+1)\cdot 4, & (2n+1)\cdot 8, & \ldots, & (2n+1)\cdot 2^n, & \ldots\}
\end{array} \tag{2}$$

Використовуючи перший рядок (1), здійснимо розбиття $\left(a_1,b_1\right)$ на циліндри першого рангу GLS-розладу. Нехай Δ_0^{GLS} — відрізок, який є центральним для $\left(a_1,b_1\right)$ і $q_0=\left|\Delta_0^{GLS}\right|=\frac{1}{3}(b_1-a_1)$.

$$\sup\Delta_1^{GLS}=\inf\Delta_0^{GLS},\left|\Delta_1^{GLS}\right|=\frac{1}{2}\left|\Delta_0^{GLS}\right|,$$

$$\inf\Delta_2^{GLS}=\sup\Delta_0^{GLS},\left|\Delta_2^{GLS}\right|=\frac{1}{2}\left|\Delta_0^{GLS}\right|,$$

$$\sup\Delta_4^{GLS}=\inf\Delta_1^{GLS},\inf\Delta_8^{GLS}=\sup\Delta_2^{GLS},\left|\Delta_4^{GLS}\right|=\left|\Delta_8^{GLS}\right|=\frac{1}{4}\left|\Delta_0^{GLS}\right|.$$

Аналогічно

$$\sup\Delta_{2^{2k}}^{GLS}=\inf\Delta_{2^{2k-2}}^{GLS},\inf\Delta_{2^{2k+1}}^{GLS}=\sup\Delta_{2^{2n-1}}^{GLS},\left|\Delta_{2^{2k}}^{GLS}\right|=\left|\Delta_{2^{2k+1}}^{GLS}\right|=\frac{1}{2^{k+1}}\left|\Delta_0^{GLS}\right|,\dots$$

Позначимо через C_n множину тих чисел, які належать n-му рядку таблиці (1). Зрозуміло, що

$$\bigcup_{i\in C_1}\Delta_i^{GLS}=(a_1;b_1).$$

Використовуючи множину $C_n,(n>1)$, здійснимо розбиття $(a_n;b_n)$ на циліндри першого рангу.

$$\Delta_{2n-1}^{GLS}=[\frac{7a_n-b_n}{6};\frac{5a_n+b_n}{6}].$$

$$\sup\Delta_{(2n-1)2}^{GLS}=\inf\Delta_{(2n-1)}^{GLS},\inf\Delta_{(2n-1)4}^{GLS}=\sup\Delta_{(2n-1)}^{GLS}$$

$$\left|\Delta_{(2n-1)2}^{GLS}\right|=\left|\Delta_{(2n-1)4}^{GLS}\right|=\frac{1}{2}\left|\Delta_{2n-1}^{GLS}\right|.$$

$$\sup\Delta_{(2n-1)2^{2k-1}}^{GLS}=\inf\Delta_{(2n-1)2^{2k-3}}^{GLS},\inf\Delta_{(2n-1)2^{2k}}^{GLS}=\sup\Delta_{(2n-1)2^{2k-2}}^{GLS},$$

$$\left|\Delta_{(2n-1)2^{2k-1}}^{GLS}\right|=\left|\Delta_{(2n-1)2^{2k}}^{GLS}\right|=\frac{1}{2^k}\left|\Delta_{2n-1}^{GLS}\right|.$$

За побудовою

$$\bigcup_{i\in C_n}\Delta_i^{GLS}=(a_n;b_n).$$

Для вказаного GLS-розкладу множина Δ_∞^{GLS} збігається з множиною A.

Нехай D_m — множина тих натуральних чисел, які стоять в m-му стовпчику таблиці (1) (зауважимо, що в нульовому стовпчику стоїть лише число 0).

Нехай

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{4k-2}.$$

Для даного GLS-розкладу розглянемо послідовність незалежних випадкових величин ξ_k так, щоб $p_k = 0$ якщо $k \notin V$ і $p_k > 0$ якщо $k \in V$ і при цьому

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Нехай

$$C[GLS,V] := \left\{x : x = \Delta^{GLS}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_j \in \mathrm{V}\right\}.$$

Лема 1. *Спектр випадкової величини* ξ *має вигляд*

$$\xi = A\bigcup C[GLS,V].$$

Як відомо Lupain (n. d.), розмірність Хаусдорфа — Безиковича множини $C[GLS,V]$ обчислюється за формулою

$$\dim_H C[GLS,V] = \sup\left\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\right\},$$

а у випадку, коли рівняння (1) має корінь, розмірність Хаусдорфа — Безиковича множини $C[GLS,V]$ збігається з ним.

Для вказаної випадкової величини ξ відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{(2a)^x}{3^x(4^x-1)(1-a^x)} = 1 \tag{3}$$

При $a = \dfrac{1}{3}$ множина A збігається з класичною множиною Кантора, розмірність якої дорівнює $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} > 0,63$. При цьому корінь рівняння (3) не перевищує числа $0,52$.

Отже, взагалі кажучи,

$$\dim_H S_\xi \neq \sup\left\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\right\}$$

навіть для випадку однакової розподіленості випадкових величин ξ.

Теорема 2. *При довільному GLS-розкладі розмірність Хаусдорфа — Безиковича спектра випадкової величини* ξ *з незалежними однаково розподіленими GLS-символами дорівнює*

$$\dim_H S_\xi = \max\left\{\dim_H \Delta^{GLS}_{\infty}, \sup\left\{x : \sum_{i\in V} q_i^x \geq 1\right\}\right\}.$$

Список літератури

Dajani, K., & Kraaikamp, C. (2002). .*Ergodic theory of numbers.* Washington: The Mathematic Association of America.

Lupain, M. L. (n. d.). Generalized Lüroth expansions and related probability measures. submitted to *Modern Stochastics: Theory and Applications.*

Torbin, G. (2007) Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension. *Theory of Stochastic Processes*, *13* (1–2), 281–293.

Нікіфоров, Р. О., Торбін, Г. М. (2012). Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки, 13* (1), 151—163.

Нікіфоров, Р. О., Торбін, Г. М. (2012). Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами. *Теорія ймовір. та матем. статист.*, *86,* 150—162.

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. Л. Мельнікова, О. А. Тимошенко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

ann.melnykova@yahoo.com, zorot@ukr.net

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь посідають одне з чільних місць у сучасній теорії випадкових процесів. Й. І Гіхман та А. В. Скороход (Gihman, Skorohod, 1972) одні з перших почали вивчати задачу про асимптотичну поведінку розв'язку автономного диференціального рівняння, збуреного за допомогою вінерівського процесу. Аналогічні задачі, але для, так званого, стохастичного диференціального рівняння з відокремлювальними змінними досліджувались у роботах (Buldygin, Tymoshenko, 2010; Klesov, Tymoshenko, 2013).

У Appleby, Cheng (2011), Appleby, Cheng, Rodkina (2011) розглядалось стохастичне диференціальне рівняння з фазовими незалежними збуреннями, тобто

$$d\eta(t) = a(\eta(t))dt + \theta(t)dW_t.$$

Було знайдено умови, за яких

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \text{ м. н. або } \lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0 \text{ м. н.}$$

Зауважимо, що в усіх вище згаданих роботах властивості стохастичного диференціального рівняння визначалися властивостями розв'язку детермінованої задачі.

У даній доповіді розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння наступного вигляду:

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + \sigma(t)dW_t, \tag{1}$$

де σ — додатня та неперервна функція, α, β — неперервні функції визначені при $t \in [0;\infty)$; η — розв'язок рівняння (1), W_t — стандартний вінерів процес.

Варто відмітимо, що рівняння типу (1) часто мають економічну інтерпретацію. Найпростішим прикладом може бути модель Васічека (Short Rate Interest Model), що описує еволюцію відсоткової ставки

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma dW_t,$$

де β — середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, α — параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, а σ — параметр волотільності (α, β, σ — додатні сталі).

Наша мета полягає в отриманні умов необмеженості розв'язку лінійного рівняння (1) та отриманні умов, за яких поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння визначається поведінкою розв'язку звичайного диференціального рівняння.

Нами були отримані наступні результати.

Теорема 1. *Нехай* α, β *— неперервні функції визначені при* $t \in [0;\infty)$, σ *— додатна та неперервна функція, такі, що стохастичне диференціальне рівняння (1) має неперервний м. н. розв'язок* η. *Функція* σ *є неперервно диференційовною та* $\beta = \frac{\sigma_t'}{\sigma}$.

Якщо

$$\lim_{T\to\infty} \inf \frac{\int_0^T \frac{\alpha(t)}{\sigma(t)} dt}{\sqrt{2T \ln\ln T}} > 1,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\sigma(t)} = \infty \text{ м.н.}$$

Теорема 2. *Нехай* α, β *— неперервні функції,* σ *— неперервна додатна функція, такі, що стохастичне диференціальне рівняння (1) має неперервний м.н. розв'язок* η. *Функція* σ *є неперервно диференційовною та*

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\int_0^x 2\inf\limits_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz} dx = +\infty \text{ і } \quad \int_0^\infty e^{-\int_0^x 2\inf\limits_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz} dx < +\infty.$$

де

$$\tilde{a}(t,x) = x\left(\beta(t) - \frac{\sigma_t'(t)}{\sigma(t)}\right) + \frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\sigma(t)} = \infty \text{ м. н.}$$

Список літератури

Appleby, J. A. D., & Cheng, J. (2011). On the asymptotic stability of a class of perturbed ordinary differential equations with weak asymptotic mean reversion. *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll.*, (1), 1–36.

Appleby, J. A. D., Cheng, J., & Rodkina, A. (2011). Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation. *Discrete. Contin. Dynam. Syst., Suppl.*, 79–90.

Buldygin, V. V., & Tymoshenko, O. A. (2010). On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equastions with time-dependent coefficients. *Theory of stochastic processes*, *2*, 12–22

Gihman, I. I., & Skorohod, A. V. (1972). *Stochastic Differential Equations*. Berlin—Heidelberg—New York: SpringerVerlag.

Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2013). Unbounded solutions of stochastic di- fferential equations with time-dependent coefficients. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, *41*, 25–35.

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ОБ'ЄКТИВНИХ ЦІН ОПЦІОНІВ У СХЕМІ БЕРНУЛЛІ

Ю. С. Мішура, Є. Ю. Мунчак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

myus@univ.kiev.ua, yevheniamunchak@gmail.com

Розглядається дискретна апроксимаційна схема цін акцій, змодельованих геометричним процесом Орнштейна — Уленбека. Апроксимаційна схема є схемою Ейлера, у якій прирости вінерівського процесу замінено на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Оцінюється швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів з використанням класичних результатів про швидкість збіжності до нормального закону функцій розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Нехай $T > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$ і

$$\Omega_{\mathcal{F}} = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}), \mathsf{P}\right)$$

— повний стандартний стохастичний базис. Нехай

$$W = \left\{W_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\right\}$$

— адаптований вінерівський процес. Розглянемо адаптований процес Орнштейна — Уленбека

$$X = \left\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\right\}$$

зі сталими параметрами на цьому стохастичному базисі. Такий процес Орнштейна — Уленбека є єдиним розв'язком наступного стохастичного диференціального рівняння.

$$dX_t = (\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{T},$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$. Припустимо, що ціна активу S_t задовольняє рівність

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}, t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

де невипадкова величина $-\frac{\sigma^2}{2}t$ додається з огляду на технічну простоту.

Побудуємо дискретну схему, яка слабко збігається до геометричного процесу Орнштейна — Уленбека (1). Припустимо, що ми маємо послідовність ймовірнісних просторів $\left(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n\right)$, $n \geq 1$ і нехай

$$\left\{q_k^{(n)}, n \geq 1, 0 \leq k \leq n\right\}$$

— послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$.

Нехай $n > T$. Введемо рекурентну схему:

$$x_0^{(n)} \in \mathbb{R},\, R_k^{(n)} := x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)},\, 1 \le k \le n.$$

Побудуємо відповідну мультиплікативну схему для дограничного цінового процесу наступним чином

$$S_t^n = \exp\left\{x_0^{(n)}\right\} \prod_{1 \le k \le \left[\frac{tn}{T}\right]} \left(1 + R_k^{(n)}\right),\, t \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

У статті Mishura (2015) було показано, що у випадку, коли $q_k^{(n)}$ має розподіл Бернуллі, ринок з облігацією

$$B_t^n = \prod_{1 \le k \le \left[\frac{nt}{T}\right]} \left(1 + r_k^{(n)}\right),$$

і акцією S_t^n з (2) є безарбітражним і повним за додаткового припущення

$$r_k^{(n)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ і } |\, x_0^{(n)} \,| \le C.$$

Позначимо через $\mathbf{C}_n$ і $\mathbf{C}$ стандартний опціон купівлі, $\mathbf{P}_n$ і $\mathbf{P}$ — стандартний опціон продажу з ціною погашення $K \ge 0$ і датою погашення T, на дограничних і граничних активах, відповідно. Позначимо відповідні дисконтовані об'єктивні ціни через $\pi(\mathbf{C}_n)$, $\pi(\mathbf{C})$, $\pi(\mathbf{P}_n)$ і $\pi(\mathbf{P})$. Для технічної простоти, припустимо, що ціна облігації для дограничної моделі дорівнює

$$B_t^{(n)} = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{\left[\frac{tn}{T}\right]}$$

і гранична ціна облігації дорівнює $B_t = e^{rt}$. Маємо наступні відношення:

$$\pi(\mathbf{C}_n) = \mathsf{E}\Big(\prod_{1 \le k \le n} \left(1 + R_k^{(n)}\right) - K\Big)^{+}\Big(1 + \frac{rT}{n}\Big)^{-n}, n \ge 1,$$

$$\pi(\mathbf{C}) = \mathsf{E}\Big(\exp\Big\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\Big\} - K\Big)^{+} e^{-rT},$$

$$\pi(\mathbf{P}_n) = \mathsf{E}\Big((K - \prod_{1 \le k \le n} \left(1 + R_k^{(n)}\right)\Big)^{+}\Big(1 + \frac{rT}{n}\Big)^{-n}, n \ge 1,$$

$$\pi(\mathbf{P}) = \mathsf{E}\Big((K - \exp\Big\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\Big\}\Big)^{+} e^{-rT}.$$

Сформулюємо отриманий результат в роботі Мішура, Мунчак (2015).

Теорема. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $\left|x_0^{(n)} - x_0\right| \le \dfrac{C_0}{n^{1/2}}$ *з деякою сталою* $C_0 > 0$*;*

2) незалежні однаково розподілені випадкові величини $q_k^{(n)}$ *приймають значення* $\pm\sqrt{\dfrac{T}{n}}$ *з імовірністю* $\dfrac{1}{2}$.

Тоді, починаючи з деякого $n_0 \in \mathbb{N}$*, має місце наступна оцінка*

$$\left|\pi(\mathbf{D}) - \pi(\mathbf{D}_n)\right| \le \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ *і* $\mathbf{D} = \mathbf{C}, \mathbf{P}$.

Список літератури

Mishura, Yu. (2015). Diffusion approximation of recurrent schemes for financial markets, with application to the Ornstein—Uhlenbeck process. *Opuscula Mathematica*, *35* (1), 99–116.

Мішура, Ю. С., Мунчак, Є. Ю. (2015). Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна — Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій. *Теорія ймовір. та матем. статист.*, *93*, 127—141.

ОЦІНЮВАННЯ НЕВІДОМИХ ЗНАЧЕНЬ СТОХАСТИЧНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ ІЗ ПРОПУСКАМИ

М. П. Моклячук, М. І. Сідей
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
mmp@univ.kiev.ua, marysidei4@gmail.com

Досліджується задача середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\{\xi(j), j \in \mathbb{Z}\}$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}_- \setminus S$, де

$$S = \bigcup_{l=1}^{s} \{-M_l - N_l, \dots, -M_l\}.$$

Використовуючи спектральний розклад стаціонарної послідовності $\xi(j)$, функціонал $A\xi$ можна представити у вигляді

$$A\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\lambda}) Z_{\xi}(d\lambda),\ A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda}.$$

Позначимо через $\hat{A}\xi$ оптимальну лінійну оцінку функціонала $A\xi$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j) + \eta(j)$. Нехай

$$\Delta(f, g) = E\left|A\xi - \hat{A}\xi\right|^2$$

— середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}\xi$. Якщо спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі, то для відшукання оцінки $\hat{A}\xi$ використаємо метод ортогональних проекцій у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ випадкових величин ξ, що мають нульове математичне сподівання, $E\xi = 0$, скінченний другий момент $E\left|\xi\right|^2 < \infty$, та скалярний добуток $(\xi, \eta) = E\xi\overline{\eta}$ (Kolmogorov, 1992).

Позначимо через $H^s(\xi + \eta)$ замкнутий лінійний підпростір, породжений величинами

$$\{\xi(j) + \eta(j) : j \in \mathbb{Z}_- \setminus S\}$$

у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Через $L_2(f+g)$ позначимо гільбертовий простір комплекснозначних функцій на $[-\pi,\pi]$, інтегровних у квадраті за мірою, що має щільність $f(\lambda)+g(\lambda)$. Розглянемо підпростір $L_2^s(f+g)$ простору $L_2(f+g)$, що породжений функціями $\{e^{ij\lambda}, j \in \mathbb{Z}_- \setminus S\}$.

Лінійну оцінку $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ шукатимемо у вигляді

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda})(Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)),$$

де $h(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f+g)$ — спектральна характеристика оцінки.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h;f)$ оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h;f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})\right|^2 f(\lambda)d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(e^{i\lambda})\right|^2 g(\lambda)d\lambda.$$

За методом ортогональних проекцій у гільбертовому просторі оптимальною оцінкою функціонала $A\xi$ буде проекція елемента $A\xi$ на підпростір $H^s(\xi+\eta)$, яка визначається з умов:

1) $\hat{A}\xi \in H^s(\xi+\eta)$,

2) $A\xi - \hat{A}\xi \perp H^s(\xi+\eta)$.

Звідси знаходимо спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}\xi$, яка обчислюється за формулою

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda})\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} - \frac{\sum_{k\in T}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda)+g(\lambda)}. \tag{1}$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}\xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h;f,g) = \langle \mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}\rangle + \langle \mathbf{Q}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}\rangle, \tag{2}$$

де $\left\langle a,c \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{c}_k$ — скалярний добуток у просторі l_2, $\vec{\mathbf{a}} = (0,0,\ldots,0,\vec{a})$ — вектор у якого перші $\left|S\right| = \sum_{k=1}^{s}(N_k+1)$ елементів рівні нулю, а останній елемент $\vec{a} = (a(0), a(1),\ \ldots)$ побудований з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$. $\mathbf{B}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ — лінійні оператори у просторі l_2, що визначаються матрицями B, R,

Q, побудованими з коефіцієнтів розкладу функцій $\dfrac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}$, $\dfrac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$ та $\dfrac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}$ відповідно в ряд Фур'є. Матриці B, R, Q мають вигляд

$$B=\begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n} \\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n} \\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n} \end{pmatrix},$$

$B_{l,n}(k,j)=b_{k-j}$, $l=1,2,\dots,s$, $k=-M_l-N_l,\dots,-M_l$, $j\geq 0$,

$B_{n,m}(k,j)=b_{k-j}$, $m=1,2,\dots,s$, $k\geq 0$, $j=-M_m-N_m,\dots,-M_m$,

$B_{n,n}(k,j)=b_{k-j}$,$k,j\geq 0$,

$B_{l,m}(k,j)=b_{k-j}$, $l,m=1,2,\dots,s$,

$k=-M_l-N_l,\dots,-M_l$, $j=-M_m-N_m,\dots,-M_m$,

$$b_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$

$$R=\begin{pmatrix} R_{s,s} & R_{s,s-1} & \dots & R_{s,1} & R_{s,n} \\ R_{s-1,s} & R_{s-1,s-1} & \dots & R_{s-1,1} & R_{s-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{1,s} & R_{1,s-1} & \dots & R_{1,1} & R_{1,n} \\ R_{n,s} & R_{n,s-1} & \dots & R_{n,1} & R_{n,n} \end{pmatrix},$$

$R_{l,n}(k,j)=r_{k-j}$, $l=1,2,\dots,s$, $k=-M_l-N_l,\dots,-M_l$, $j\geq 0$,

$R_{n,m}(k,j)=r_{k-j}$, $m=1,2,\dots,s$, $k\geq 0$, $j=-M_m-N_m,\dots,-M_m$,

$R_{n,n}(k,j)=r_{k-j}$, $k,j\geq 0$,

$R_{l,m}(k,j)=r_{k-j}$, $l,m=1,2,\dots,s$,

$k=-M_l-N_l,\dots,-M_l$, $j=-M_m-N_m,\dots,-M_m$,

$$r_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{s,s} & Q_{s,s-1} & \cdots & Q_{s,1} & Q_{s,n} \\ Q_{s-1,s} & Q_{s-1,s-1} & \cdots & Q_{s-1,1} & Q_{s-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{1,s} & Q_{1,s-1} & \cdots & Q_{1,1} & Q_{1,n} \\ Q_{n,s} & Q_{n,s-1} & \cdots & Q_{n,1} & Q_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$Q_{l,n}(k,j)=q_{k-j},\ l=1,2,\dots,s,\ k=-M_l-N_l,\dots,-M_l,\ j\geq 0,$$

$$Q_{n,m}(k,j)=q_{k-j},\ m=1,2,\dots,s,\ k\geq 0,\ j=-M_m-N_m,\dots,-M_m,$$

$$Q_{n,n}(k,j)=q_{k-j},\ k,j\geq 0,$$

$$Q_{l,m}(k,j)=q_{k-j},\ l,m=1,2,\dots,s,$$

$$k=-M_l-N_l,\dots,-M_l,\ j=-M_m-N_m,\dots,-M_m,$$

$$q_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\,\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda\,.$$

Справедлива

Теорема 1. *Нехай* $\xi(j)$, $\eta(j)$ *— некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності* $f(\lambda)$ *і* $g(\lambda)$, *для яких виконується умова мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}d\lambda<\infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ *та величину середньоквадратичної похибки* $\Delta(h;f,g)$ *оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\xi$ *від невідомих значень послідовності* $\xi(j)$ *за даними спостережень послідовності* $\xi(j)+\eta(j)$, *у моменти часу* $j\in\mathbb{Z}_-\setminus S$ *можна обчислити за формулами (1), (2).*

Теорему 1 можна застосувати лише до тих випадків, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$. Якщо спектральні щільності точно не відомі, але задані множини допустимих щільностей, то до задачі оцінювання функціонала можна застосувати мінімаксний підхід (Моклячук, 2008). Він полягає у відшуканні такої оцінки, яка б мінімізувала величину середньо-квадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Для множин спектральних щільностей $D=D_W\times D_0$,

$$D_W=\left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\cos(w\lambda)d\lambda=r_w, w=0,1,\dots,W\right.\right\},$$

$$D_0 = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \le P_2 \right. \right\},$$

знайдені співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та формули для обчислення мінімаксної спектральної характеристики оцінки функціонала $A\xi$.

Список літератури

Kolmogorov, A. N. (1992). *Selected works by A. N. Kolmogorov* (Vol. II: Probability theory and mathematical statistics). Ed. by A. N. Shiryayev. Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers. (Mathematics and Its Applications. Soviet Series, 26).

Моклячук, М. П. (2008). *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ

К. К. Москвичова
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
kamok@ua.fm

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t,\theta) + \xi(t), \;\; t \in [0,\infty),$$

де $g : [0,+\infty) \times \Theta^c \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta = (\theta_1,...,\theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ — обмежена відкрита опукла множина, Θ^c — замикання Θ; $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — випадковий шум, відносно якого припустимо, що

N.1. $\xi = \left\{\xi(t), \;\; t \in \mathbb{R}\right\}$ — дійсний, неперервний у середньому квадратичному та майже напевно стаціонарний гаусівський процес з нульовим середнім та додатною обмеженою спектральною щільністю $f = f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Оцінкою найменших квадратів (ОНК) невідомого параметра $\theta \in \Theta$ на інтервалі спостережень [0,T] називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T},\ldots\hat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau\in\Theta^c} L_T(\tau), Q_T(\tau) = \int_0^T [X(t) - g(t,\tau)]^2 dt.$$

Позначимо

$$\mathrm{B}_T(z,\hat{\theta}_T) = T^{-1}\int_0^T \hat{X}(t+z)\hat{X}(t)dt, \;\; z \in [0,H],$$

— корелограмну оцінку, побудовану за відхиленнями спостережень

$$\hat{X}(t) = X(t) - g(t,\hat{\theta}_T), \; t \in [0,T+H],$$

де $H > 0$ — фіксоване число. Зауважимо, що

$$\mathrm{B}_T(0,\hat{\theta}_T) = T^{-1}Q_T(\hat{\theta}_T)$$

є ОНК дисперсії $\mathrm{B}(0)$ випадкового процесу ξ.

Запровадимо псевдометрики (Булдыгин, Козаченко, 1998))

$$\rho(z_1,z_2) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(z_1-z_2)}{2}d\lambda\right)^{1/2},$$

$$\sqrt{\rho}(z_1,z_2) = \sqrt{\rho(z_1,z_2)},\; z_1,z_2 \in \mathbb{R}.$$

Нехай $H_{\sqrt{\rho}}([0,a],\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$,— метрична ентропія множини $[0,a]$, $a > 0$, відносно псевдометрики $\sqrt{\rho}$.

N.2. $\int\limits_{0+} H_{\sqrt{\rho}}([0,1],\varepsilon)d\varepsilon < \infty.$

F.1. (i) Функції $g(t,\theta)$ при кожному $t \geq 0$ неперервно диференційовні за $\theta \in \Theta$ та при кожному $\theta \in \Theta$ частинні похідні $\frac{\partial}{\partial\theta_i} g(t,\theta)$ інтегровні за t з квадратом на кожному проміжку $[0,T]$, $T > 0$.

(ii) Для будь-якого фіксованого $H > 0$

$$\lim_{T\to\infty} d_{i,T+H}(\theta)d_{it}^{-1}(\theta) = 1, \;\; i = \overline{1,q},$$

де

$$d_T(\theta) = \operatorname{diag}\left(d_{iT}(\theta), i = \overline{1,q}\right), \;\; d_{iT}^2(\theta) = \int\limits_0^T \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} g(t,\theta)\right)^2 dt.$$

F.2. Існують додатні числа $c_0(\theta)$ і $c_1(\theta)$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$ та достатньо великих T $(T > T_0)$

$$c_0(\theta)\left\|u - v\right\|^2 \leq \Phi_T\left(\theta + d_T^{-1}(\theta)u, \theta + d_T^{-1}(\theta)v\right) \leq c_1(\theta)\left\|u - v\right\|^2,$$

де

$$\Phi_T(\theta_1,\theta_2) = \int\limits_0^T \left(g(t,\theta_1) - g(t,\theta_2)\right)^2 dt, \; \theta_1,\theta_2 \in \Theta^c.$$

Запровадимо константу

$$a_0 = \min\left(\frac{1}{D_0}, \frac{1}{\left\|B\right\|_2}, \frac{1}{16\pi f_0(1+q)} \cdot \frac{c_0(\theta)}{c_1(\theta)} \cdot \min\left(1, \frac{1}{B(0)}\right)\right),$$

де

$$D_0 = 72.32\|f\|_2 + 44.49\|f\|_2^{1/2} \int\limits_0^{\varepsilon_0} H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)d\varepsilon, \;\; \varepsilon_0 = \sup_{z_1,z_2\in[0,H]} \sqrt{\rho}(z_1,z_2) \leq \|f\|_2^{1/2};$$

$$\left\|\mathrm{B}\right\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{B}^2(t)dt\right)^{1/2}; \; f_0 = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) < \infty.$$

Теорема. *Нехай виконано умови* ***N.1, N.2, F.1, F.2****. Тоді існують такі константи* A_0 *та* b_0*, що для* $T > T_0$, $R > R_0$

$$P\left\{T^{1/2} \sup_{z\in[0,H]} \left|B_T(z,\hat{\theta}_T) - B(z)\right| \geq R\right\} \leq A_0 \exp\{-b_0 R\}\left(1 + \gamma(T,R)\right),$$

причому

$$\lim_{T\to\infty, R\to\infty} \gamma(T,R) = 0,$$

та для будь-якого $\beta > 0$ *можна обрати* A_0 *таким, щоб виконувалась нерівність* $b_0 \geq a_0 - \beta$*, де* a_0 *наведено вище.*

Наслідок. В умовах теореми для будь-якого $\rho > 0, T > T_0$

$$P\left\{\sup_{z\in[0,H]}\left|B_T(z,\hat{\theta}_T) - B(z)\right| \geq \rho\right\} \leq A_0 \exp\{-b_0\rho T^{1/2}\}\left(1 + \gamma(T, T^{1/2})\right),$$

де константи A_0 та b_0 такі як в теоремі, а

$$\lim_{T\to\infty} \gamma(T, T^{1/2}) = 0.$$

Отримані результати значно посилюють аналогічні, які опубліковані в статті Іванов, Москвичова (2015).

Список літератури

Булдыгин, В. В., Козаченко, Ю. В.(1998) *Метрические характеристики случайных величин и процессов*. Київ: ТВ і МС.

Іванов, О. В., Москвичова, К. К. (2015) Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»,* (4), 57—62.

ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ УЗАГАЛЬНЮЮТЬ ПРАВИЛЬНО ЗМІННІ

В. В. Павленков

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

smallstar_84@mail.ru

Поняття *правильно змінна* (RV) функція вперше було запропоновано Йованом Караматою (Karamata, 1930). Правильно змінні функції узагальнюють клас степеневих функцій, а точніше повторюють асимптотичну поведінку степеневих функцій на нескінченності.

Нагадаємо, що вимірна (у сенсі Лебега) функція $\left(f(x),\, x>0\right)$ називається *правильно змінною на нескінченності з показником* $\rho \in \mathbb{R}$, якщо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho} \text{ для кожного } \lambda > 0.$$

Правильно змінні функції з показником $\rho = 0$ називаються *повільно змінними* (SV) функціями.

У своїх роботах Карамата отримав відоме інтегральне представлення правильно змінних функцій. Вимірна функція $\left(f(x),\, x>0\right)$ є правильно змінною на нескінченності тоді і тільки тоді, коли для деякого $x_0 > 0$ та всіх $x \ge x_0$

$$f(x) = \exp\left\{\alpha(x) + \int_{x_0}^{x}\beta(s)\frac{ds}{s}\right\}, \tag{1}$$

де α та β — обмежені вимірні функції, у яких існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x),$$
$$\lim_{x\to\infty}\beta(x) = \rho.$$

На сьогодні відомо багато узагальнень правильно змінних функцій. У роботі Avakumovic (1936) розглядається клас ORV функцій. Це такі вимірні функції $\left(f(x),\, x>0\right)$ для яких гранична функція

$$f^*(\lambda) = \limsup_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)} < \infty, \quad \lambda > 0.$$

Відомо (див., наприклад Aljancic, Arandelovic (1977)), що вимірна функція $\left(f(x),\, x>0\right)$ належить до класу ORV функцій тоді й тільки тоді, коли справедливе представлення (1), в якому α та β — обмежені вимірні функції. Зауважимо, що умови на функції α та β в інтегральному зображенні ORV функції є загальнішими, ніж відповідні умови у випадку RV функції, а тому клас RV міститься в класі ORV (це також зрозуміло і з означення цих класів функцій).

У доповіді будуть розглянуті ще два класи функцій, які є ширшими, аніж клас RV функцій. Це клас ORV функцій з невиродженими групами регулярних точок та клас $\mathfrak{M}_\rho$ функцій.

Клас ORV функцій з невиродженими групами регулярних точок був означений в роботі Buldygin, Klesov, Steinebach (2004).

Означення 1. *ORV функція* $\left(f(x),\, x > 0\right)$ *називається ORV функцією з невиродженою групою регулярних точок* $G_r(f) \neq \left\{1\right\}$*, якщо для кожного* $\lambda \in G_r(f)$ *існує скінченна границя*

$$\kappa_f(\lambda) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}.$$

Клас $\mathfrak{M}_\rho$ функцій розглядався в роботі Cadena, Kratz (2015).

Означення 2. $\mathfrak{M}_\rho$ — це клас додатних та вимірних функцій $\left(f(x),\, x > 0\right)$ з носієм $\mathbb{R}_+$, які обмежені на скінченних інтервалах та такі, що

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho+\varepsilon}} = 0 \ \ \textit{та} \ \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho-\varepsilon}} = \infty.$$

Число $\rho \in \mathbb{R}$ – індекс класу $\mathfrak{M}_\rho$.

Для функцій з означених вище класів не розглядалися інтегральні зображення типу (1). У доповіді формулюються та доводяться твердження, які встановлюють такі представлення.

Теорема 1. *Вимірна функція* $\left(f(x),\, x > 0\right)$ *є ORV функцією з невиродженою групою регулярних точок* $G_r(f) \neq \left\{1\right\}$ *тоді і тільки тоді, коли для деякого* $x_0 > 0$ *та всіх* $x \geq x_0$ *справедливе представлення (1) в якому* α *та* β *— обмежені вимірні функції, такі, що*

(A1) $\lim\limits_{x\to\infty} \beta(x) = \rho;$

(A2) *для всіх* $u \in \mathbb{R}$,

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\alpha(ux) - \alpha(x)\right) = p(u), \qquad \liminf_{x\to\infty}\left(\alpha(ux) - \alpha(x)\right) = -p(-u);$$

(A3) $\left(p(u),\, u \in \mathbb{R}\right)$ *– періодична функція, така, що* $p(0) = 0$ *та*

$$-\infty < \inf_{u\in\mathbb{R}} p(u) \leq \sup_{u\in\mathbb{R}} p(u) < +\infty.$$

Теорема 2. *Вимірна функція* $\Big(f(x),\, x > 0\Big)$ *є функцією з класу* $\mathfrak{M}_\rho$ *тоді і тільки тоді, коли для деякого* $x_0 > 0$ *та всіх* $x \geq x_0$ *справедливе зображення (1) у якому*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\log x} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} \beta(x) = \rho\,.$$

Список літератури

Aljancic, S., Arandelovic, D. (1977). O-regularly varying functions, *Publ. de l'Institute Math Nouvelle Serie, 22*, 5–22.

Avakumovic, V. G. (1936). Über einer O-Inversionssatz. *Bull. Int. Acad. Youg. Sci., 29–30*, 107–117.

Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2004). On factorization representation for Avakumovic′ — Karamata functions with nondegenerate groups of regular points. *Analysis Mathematica*, *30*, 161–192.

Cadena, M., & Kratz, M. (2015). A new extension of the class of regularly varying functions. *HAL OCSD*, **HAL Id: hal-01181346**, 1–35.

Karamata, J. (1930). Sur un mode de croissance reguliere. *Mathematica (Cluj)*, *4*, 38–53.

Булдигін, В. В., Індлекофер, К.-Х., Клесов, О. І., Штайнебах, Й. Г. (2012). *Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення.* Київ: ТВІМС.

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ОЦІНКИ ІНТЕНСИВНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ПОТОКІВ

М. В. Приймак, О. В. Маєвський, О. В. Мацюк, Г. В. Шимчук
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, Україна
kaf_kn@tu.edu.te.ua, alexmajevskiy@gmail.com

Теорія потоків та методи їх статистичного аналізу мають порівняно довгу історію. Вважається, що вона бере свій початок із робіт датського інженера А. Ерланга, зокрема з опублікованої в 1909 році його роботи «Теорія ймовірностей і телефонні переговори». Проте, якщо звернутися до одного із прикладів потоків — моментів появи сонячних плям, то виявляється, що вивчення потоків має набагато глибшу історію. Аналізуючи сонячні плями, к 1843 році Г. Швабе відкрив, що для інтенсивності їх появи характерна періодичність із середнім періодом 10 років. Пізніше Р. Вольф отримав більш точне значення цього періоду — приблизно 11 років. Заслуговують уваги дослідження А. Шустера, який для аналізу результатів сонячних спостережень використав метод періодограманалізу. Виходячи із наглядної «періодичності» послідовності чисел (ряду) сонячних плям, він виконав обробку середньомісячних значень числа сонячних плям за період з 1749 до 1894 р., і при цьому отримав оцінку періоду, рівну 11.125 року. Ще один підхід до дослідження потоку сонячних плям запропонував Дж. Юл у1928 р., для цього за модель потоку він використав процес авторегресії і всі подальші дослідження здійснював на базі цієї моделі.

Новий етап в дослідженні потоків з використанням ймовірнісних методів розпочався з робіт А. Ерланга. Хоча основною причиною появи його робіт, а пізніше робіт К. Пальма, Ф. Плачека, В. Феллера, О. Хінчина, було дослідження систем масового обслуговування, значна увага приділялася також потокам, як однієї із складових цих систем. Особливої уваги заслуговує робота О. Хінчина (1955), у якій закладені основи теорії потоків.

Інтерес до потоків неухильно зростає. Про це свідчить збільшення статей математичного і прикладного характеру, дисертацій, міжнародних конференцій, у яких безпосередньо розглядаються потоки, або розглядаються як складова систем масового обслуговування. Проте, незважаючи на певні успіхи в дослідженні потоків, існує ряд задач щодо теорії потоків, інформаційних технологій їх аналізу та імітаційного моделювання, які ще далекі від достатньо повного вирішення.

По-перше, це задачі обґрунтування моделей стохастично періодичних потоків. По-друге, розробка статистичних методів дослідження таких потоків та використання результатів аналізу в задачах оптимізації систем масового обслуговування, що функціонують в умовах ритміки. Щоб перейти до розгляду основного питання цієї роботи, спочатку нагадаємо деякі поняття, пов’язані з потоками.

Потік будемо розглядати як випадковий процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, що визначає число подій, які відбулися за проміжок часу $[0, t]$. Добре вивченими є найпростіші потоки, тобто потоки, що задовольняють умовам стаціонарності, відсутності післядії та ординарності. Їх моделлю є стаціонарний пуассонівський потік (процес), основною ймовірнісною характеристикою якого є параметр λ — інтенсивність потоку. Для цих потоків розроблені методи оцінки їх інтенсивності.

Хоча стаціонарні пуассонівські потоки зручні в користуванні, проте для більшості реальних потоків умова стаціонарності не виконується. Нестаціонарність потоку проявляється в тому, що його інтенсивність вже є деякою функцією часу $\lambda(t)$ і визначається за формулою

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M\xi(t, \Delta t)}{\Delta t},$$

де $\xi(t, \Delta t) = \xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ — приріст потоку на інтервалі $[t, t + \Delta t]$.

Серед нестаціонарних потоків увагу спеціалістів, особливо інженерного спрямування, привертають стохастично періодичні потоки. У роботі О. Хінчина (1955) наведено, що для таких потоків інтенсивність $\lambda(t)$, $t \geq 0$, змінюється періодично, тобто існує таке число T, що $\lambda(t) = \lambda(t + T)$. Заслуговує уваги робота Красильников, Марченко, Приймак (1996), у якій запроваджено клас випадкових процесів з незалежними періодичними приростами. Їх частинним випадком є клас пуассонівських періодичних потоків (процесів). Що стосується чи не основного питання таких потоків — оцінки їх інтенсивності, то ця задача залишається нерозв'язаною.

Зауважимо, що для оцінки інтенсивності потоку на певному інтервалі (чи сукупності інтервалів) використовується приріст потоку на цьому інтервалі. Оскільки приріст потоку на певному інтервалі — це інтегральна характеристика потоку на цьому інтервалі, тим самим усі локальні особливості потоку в усіх внутрішніх точках інтервалу втрачаються. Ураховуючи таку ситуацію, можна показати, що незміщену, слушну та ефективну оцінку інтенсивності ми можемо отримати лише для стаціонарного потоку. Це у свою чергу дозволяє стверджувати, що побудова однозначної оцінки періодичної інтенсивності можлива не для всіх загалом періодичних пуассонівських потоків, а лише для потоків, що задовольняють певним умовам. Ця умова полягає в тому, що інтенсивність потоку на інтервалі $[0, T]$ повинна бути кусково постійною. Ураховуючи розглянуті зауваження, виділимо із множини періодичних пуассонівських потоків окремий клас потоків.

Означення. *Періодичний пуассонівський потік $\xi(t)$ називається кусково стаціонарним (однорідним), якщо його параметр $\lambda(t)$ є періодичною кусково постійною функцією з періодом T.*

При використанні періодичних пуассонівських кусково стаціонарних потоків можуть бути певні уточнення. Одне з них полягає в тому, що на періоді $\left[0,T\right)$ вказуються інтервали стаціонарності

$$\left[t_0,t_1\right),\cdots,\left[t_{j-1},t_j\right),\cdots,\left[t_{n-1},t_n\right),\quad t_0=0,\, t_n=T\,.$$

Якщо $\tau_j=t_j-t_{j-1}$ — довжини інтервалів $\left[t_{j-1},t_j\right)$, $j=1,...,n$, то в сукупності вони утворюють вектор $\overline{\tau}=\left(\tau_1,\cdots,\tau_j,\cdots,\tau_n\right)$, для якого $\sum_{j=1}^{n}\tau_j=T$, самі ж інтервали $\left[t_{j-1},t_j\right)$, ще можна записати у вигляді $\left[t_{j-1},t_{j-1}+\tau_j\right)$.

Оскільки інтенсивність потоку є періодичною функцією, то очевидно, що інтервали стаціонарності

$$\left[t_0,t_1\right),\cdots,\left[t_{j-1},t_j\right),\cdots,\left[t_{n-1},t_n\right),$$

розміщені на періоді $\left[0,T\right)$, періодично продовжуються на весь інтервал $\left[0,\infty\right)$, причому на довільному періоді $\left[iT,\left(i+1\right)T\right)$ вони мають вигляд

$$\left[t_{j-1}+iT,t_j+iT\right),\; j=1,...,n;\; i=0,1....$$

Якщо λ_j, $j=1,...,n...$ — інтенсивність потоку на інтервалі $\left[t_{j-1},t_j\right)$, а значить і на інтервалах $\left[t_{j-1}+iT,t_j+iT\right)$, $i=0,1...$, то в сукупності ці інтенсивності утворюють вектор

$$\overline{\lambda}=\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n\right) \tag{1}$$

Оцінка інтенсивності періодичного пуассонівського кусково-стаціонарного потоку. Нехай спостереження за потоком здійснювалися на інтервалі

$$\left[0,T'\right],\; T'>>T\,,\; \left[{T_0}\big/{T}\right]\overset{df}{=}m\,.$$

Весь інтервал спостереження $\left[0,T'\right]$ розіб’ємо на окремі T_i-інтервали $\left[\left(i-1\right)T,iT\right)$, $i=1,...,m$, довжина кожного з яких рівна періоду T.

Для побудови оцінки вектора інтенсивностей

$$\overline{\lambda}=\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n\right)$$

утворимо матрицю $m\times n$, зображену у вигляді таблиці 1, у якій m — число T_i-інтервалів $\left[\left(i-1\right)T,iT\right)$, n — кількість інтервалів стаціонарності потоку на кожному з T_i-інтервалів. Елементи $s\left(i,j\right)$ матриці — це кількість подій, які були зафіксовані на j-му інтервалі стаціонарності i-го T_i-інтервалу, тобто $s\left(i,j\right)$ — це приріст потоку $\xi\left(t\right)$ на інтервалі

$$\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+\tau_j\right):$$
$$s(i,j)=\xi\left(t_{j-1}+(i-1)T,\tau_j\right)=$$
$$=\xi\left(t_{j-1}+(i-1)T+\tau_j\right)-\xi\left(t_{j-1}+(i-1)T\right).$$

В останньому рядку матриці розміщені суми

$$S(j)=\sum_{i=1}^{m}s(i,j),\ j=1,...,n,$$

кожна з яких рівна сумі подій, що відбулися на всіх інтервалах стаціонарності

$$\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+\tau_j\right),\ i=1,...,m,$$

і на яких одна і та ж інтенсивність λ_j, оцінку якої і потрібно знайти.

Табл. 1. Результати спостережень за пуассонівським періодичним кусково стаціонарним потоком

Номер інтервалу на T-періоді / Номер T-періоду	1	...	j	...	n
1	$s(1,1)$	...	$s(1,j)$	...	$s(1,n)$
...	...	...	…	...	...
i	$s(i,1)$	...	$s(i,j)$	...	$s(i,n)$
...	...	...	...	...	...
m	$s(m,1)$	...	$s(m,j)$	...	$s(m,n)$
	$S(1)$	...	$S(j)$	...	$S(n)$

Оскільки при фіксованому j на кожному з інтервалів

$$\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+\tau_j\right),\ i=1,\ ...,m,$$

потік є стаціонарним з поки що невідомою інтенсивністю λ_j, то беручи до уваги метод оцінки інтенсивності стаціонарного потоку, оцінкою інтенсивності λ_j, $j=1,...,n...$ буде статистика

$$\tilde{\lambda}_j=\frac{S(j)}{m\tau_j},\ \ j=1,...,n.$$

Вектор $\bar{\tilde{\lambda}}=\left(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_j,\cdots,\tilde{\lambda}_n\right)$ буде оцінкою вектора інтенсивностей (1).

Побудована оцінка періодичної інтенсивності крім самостійного інтересу матиме прикладне застосування, особливо при розробці інформаційних технологій дослідження періодичних пуассонівських потоків та використання результатів дослідження для задач оптимізації систем масового обслуговування, що функціонують в умовах ритміки.

Список літератури

Красильников, О. І., Марченко, Б. Г., Приймак, М. В. (1996). Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми. *Відбір і обробка інформації*, *10*, 22—27.

Хинчин, А. Я. (1955). Математические методы теории массового обслуживания. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, *49*(0), 3—122.

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ТА АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОЦІНКИ ІБРАГІМОВА ПАРАМЕТРА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

В. В. Приходько
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
vikaprihodko@ukr.net

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \alpha_0) + \varepsilon(t), t \in [0, T].$$

де $g : [-\Delta, \infty) \times A_\gamma \to \mathbb{R}$,— неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^q$,— обмежена відкрита опукла множина, $A_\gamma = \bigcup_{\|e\|\le 1}(\mathrm{A} + \gamma e)$, γ та Δ — деякі додатні числа, $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$,— дійсний вимірний стаціонарний гаусівський процес з нульовим середнім і спектральною щільністю $f(\lambda, \theta_0), \lambda \in \mathbb{R}, \theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, де Θ — обмежена відкрита опукла множина, а функція $f(\lambda, \theta) > 0$ означена на множині $\mathbb{R} \times \Theta_\tau, \Theta_\tau = \bigcup_{\|e\|\le 1}(\Theta + \tau e), \tau > 0$ — деяке число.

Означення 1. *Оцінкою найменших квадратів* параметра $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, отриманою за спостереженням процесу $\{X(t), t \in [0, T]\}$, називається будь-який випадковий вектор $\hat{\alpha}_T = (\hat{\alpha}_{1T}, \dots \hat{\alpha}_{qT}) \in A^c$, A^c — замикання A, для якого

$$L_T(\hat{\alpha}_T) = \min_{\alpha \in \mathrm{A}^c} L_T(\alpha), L_T(\alpha) = \int_0^T \big(X(t) - g(t, \alpha)\big)^2 dt.$$

Розглянемо зображення спектральної щільності

$$f(\lambda, \theta) = \sigma^2(\theta)\psi(\lambda, \theta), \lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta,$$

де $\sigma^2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta) w(\lambda) d\lambda$, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda, \theta) w(\lambda) d\lambda = 1$,

а $w(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$,—деяка парна додатна обмежена інтегрована за Лебегом вагова функція.

Введемо періодограму залишків

$$I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T \big(X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T)\big)e^{-i\lambda t} dt\right|^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

і розглянемо поле контрасту (див., наприклад, Anh et all (2004))

$$U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) = -\int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) w(\lambda) \ln\psi(\lambda, \theta) d\lambda, \theta \in \Theta^c.$$

Означення 2. *Оцінкою мінімального контрасту* невідомого параметра $\theta_0 \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \dots \hat{\theta}_{mT})$, для якого

$$U_T(\hat{\theta}_T, \hat{\alpha}_T) = \min_{\theta \in \Theta^c} U_T(\theta, \hat{\alpha}_T).$$

При розгляді деякої сукупності умов на функцію регресії g, функцію ψ, їх похідних та вагову функцію w, нами доведено, що оцінка мінімального контрасту $\hat{\theta}_T$ є слабко консистентною оцінкою параметра θ_0, а нормована оцінка мінімального контрасту $T^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\theta}_T - \theta_0\right)$ асимптотично при $T \to \infty$ нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$S(\theta) = S_1^{-1}(\theta_0)S_2(\theta_0)S_1^{-1}(\theta_0),$$

де

$$S_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_\theta \nabla'_\theta \ln\psi(\lambda,\theta)\right) f(\lambda,\theta) w(\lambda) d\lambda,$$

$$S_2(\theta) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\theta \ln\psi(\lambda,\theta) \nabla'_\theta \ln\psi(\lambda,\theta)\, f^2(\lambda,\theta) w^2(\lambda) d\lambda.$$

Ми також отримали еквівалентні формулювання вказаних результатів з використанням умов на вихідну спектральну щільність f.

Відповідно, матриці $S_1(\theta)$ та $S_2(\theta)$ було переписано в термінах спектральної щільності $f(\lambda,\theta)$ (Іванов, Приходько, 2015).

Приклад. Нехай $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$,— дробовий рух Рісса — Бесселя (Anh, Leonenko, Sakhno, 2004), тобто гаусівський стаціонарний процес зі спектральною щільністю

$$f(\lambda,\theta_0) = \frac{1}{\lambda^{2\beta_0(1+\lambda^2)^{\alpha_0}}}, \theta_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \Theta,$$

де Θ — обмежена відкрита опукла множина, Θ^c — компактна підмножина множини $\left(\frac{1}{2},\infty\right) \times \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Якщо ми оберемо вагову функцію

$$w(\lambda) = \frac{\lambda^{2b}}{(1+\lambda^2)^a}, a > b > 0,$$

то можна довести, що оцінка мінімального контрасту параметра $\theta_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ цієї спектральної щільності є слабко консистентною та асимптотично нормальною і записати відповідну граничну коваріаційну матрицю $S(\theta)$.

Список літератури

Anh, V. V., Leonenko, N. N., & Sakhno, L. M. (2004). On a class of minimum contract estimators for fractional stochastic processes and fields. *J. Statist. Planning and Inference, 123*, 161–185.

Іванов, О. В., Приходько, В. В. (2015). Асимптотичні властивості оцінки Ібрагімова параметра спектральної щільності випадкового шуму в нелінійній моделі регресії. *Теорія ймовір. і матем. статист.*, *93*, 50—66.

ОБЧИСЛЕННЯ МАКСИМУМУ ПОЛЯ ЧЕНЦОВА ПО КРИВИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТІВ WOLFRAM MATHEMATICA 10.3, MATLAB

Н. В. Прохоренко, О. Є. Лагодзінський
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
natahak@ukr.net, lagodzinskyi@gmail.com

У теорії турбулентності важливим інструментом дослідження систем являються гауссівські процеси і поля. За молекулярну складову поля швидкості часто приймають вінерівський процес з певним зсувом. Знаходження розподілу максимуму поля Ченцова на кривих є важливим етапом при розв'язанні задач турбулентності, оскільки в Прохоренко (2015), було показано зв'язок між розподілом максимуму поля Ченцова на кривих і ймовірністю перетину вінерівським процесом певного рівня. У даній роботі ми будемо розглядати задачу знаходження розподілу максиму поля Ченцова $X(s,t)$ по частині одиничного кола. Необхідно для $\lambda > 0$ знайти розподіл:

$$F\left(\lambda, K\right) = P\left\{\sup_{(s,t)\in L} X(s,t) < \lambda\right\}, \qquad (1)$$

де

$$L = \left\{\left(x,y\right)\middle| x^2 + y^2 = 1, x, y > 0\right\}.$$

Оскільки точний розподіл для задачі (1) невідомий, то криву будемо наближати ламаними з n точками злому. Для цього ми розглянемо ламану L, яка починається в точці $\left(0,1\right)$ і закінчується в точці $\left(1,0\right)$ і має наступні координати точок злому:

$$Q_i\left(\frac{i}{n+1}, \sqrt{1-\frac{i^2}{\left(n+1\right)^2}}\right), i = \overline{1,n}.$$

За допомогою результатів, наведених у Klesov, Kruglova (2011), знаходимо наближений розв'язок задачі (1) при фіксованих значеннях λ, n.

Таблицю розподілу (1) було одержано методами пакету Wolfram Mathematica 10.3.

Список літератури

Klesov, O. I., & Kruglova, N. V. (2011). The distribution of a functional of the Wiener process and its application to the Brownian sheet. *Statistics*, *45* (1), 19–26.

Прохоренко, Н. В. (2015). Зв'язок розподілу максимуму вінерівського процесу з лінійним зсувом із розподілом поля Ченцова по ламаних. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (4), 69—75.

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЙМОВІРНІСТЮ ПЕРЕТИНУ ВІНЕРІВСЬКИМ ПРОЦЕСОМ ПЕВНОГО РІВНЯ І ЙМОВІРНІСТЮ ПЕРЕТИНУ ПОЛЕМ ЧЕНЦОВА З ЛІНІЙНИМ ЗСУВОМ НУЛЬОВОГО РІВНЯ

Н. В. Прохоренко, К. Р. Острійчук
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
natahak@ukr.net

Розглянемо ймовірність вигляду:

$$P\left\{\sup_{s\in[0,t]}(w(s)-as-b)>0\right\}=F(t), \tag{1}$$

де $w(t)$ — вінерівський процес, $a,b>0$.

Ми будемо досліджувати зв'язок між ймовірністю (1) і такою ймовірністю:

$$P\left\{\sup_{(s,t)\in L}(X(s,t)-Es-Ft-G)>0\right\}, \tag{2}$$

де $X(s,t)$ — поле Ченцова, L — певна крива.

У даній роботі доведено, що параметри a,b в (1) однозначно визначають вигляд L в ймовірності (2) і L буде прямою, коефіцієнти якої виражаються через параметри a,b і E,F,G.

При дослідженні даного питання ми одержали досі невідоме зображення для оригіналу

$$\Phi\left(a\sqrt{t}-\frac{b}{\sqrt{t}}\right),$$

де $\Phi(t)$–гауссівська функція розподілу.

Лема 1. *Нехай f,g — неперервні функції. Якщо*

$$f(t)-f(s)=g(t-s),$$

то f — лінійна функція.

Список літератури

Klesov, O. I., & Kruglova, N. V. (2011). The distribution of a functional of the Wiener process and its application to the Brownian sheet. *Statistics, 45* (1), 19–26.

Kruglova, N. V. (2008). Distribution of the maximum of the Chentsov random field. *Theory of Stochastic Processes, 14* (1), 76–81.

Park, C., & Paranjape, S. R. (1974). Probabilities of Wiener paths crossing differentiable curves. *Pacific Journal of Mathematics, 53* (2), 579–583.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є СТОХАСТИЧНИХ МІР

В. М. Радченко, Н. О. Стефанська
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
vradchenko@univ.kiev.ua, valentinasavych@mail.ru

Розглядається перетворення і обернення перетворення Фур'є стохастичних мір, наводиться теорема про зв'язок збіжності відповідних характеристичних функцій та збіжності стохастичних мір. Отримані результати застосовуються для дослідження рівняння теплопровідності.

Нехай B — борельова σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}^d$, $L_0 = L_0(\Omega, F, \mathrm{P})$ — простір дійснозначних випадкових величин, заданих на довільному повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $D(\mathbb{R}^d)$ — множина всіх нескінченно диференційованих функцій $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ з компактним носієм. Нехай μ — стохастична міра на B, тобто σ-адитивне відображення $\mu : \mathrm{B} \to L_0$ (збіжність в L_0 розглядається за ймовірністю). В якості прикладу стохастичної міри можна взяти

$$\mu(A) = \int_{[0,T]} \mathrm{I}_A(s) d\mathrm{X}(s),$$

де $\mathrm{X}(s)$ — квадратично інтегровний мартингал або процес дробового броунівського руху з показником Хюрста $H > 1/2$.

Теорія інтегрування дійсних функцій за стохастичними мірами побудована, наприклад, у Радченко (1999), Kwapień, Woycziński (1992). Розглянуто інтеграл вигляду

$$\int_A h(x) d\mu(x),$$

де h — вимірна невипадкова функція, $A \in \mathrm{B}$. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегровною за будь-якою μ.

Інтеграл від випадкової функції по дійсній мірі нижче розуміється як границя за ймовірністю інтегральних сум Рімана. Основні властивості такого інтеграла вивчені в Radchenko (2012).

У даній роботі розглядається наступне перетворення Фур'є стохастичної міри μ:

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i t x} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos 2\pi t x d\mu(x) + i \int_{\mathbb{R}^d} \sin 2\pi t x d\mu(x),\ t \in \mathbb{R}^d,$$

де $tx = \sum_{1 \le k \le d} t_k x_k$.

Для обернення даного перетворення маємо наступне твердження.

Теорема 1. *Для кожної функції* $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ *має місце рівність*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x) = \lim_{\alpha \to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2 \alpha |t|^2} e^{-2\pi i t x} \hat{\mu}(t) dt.$$

Зв'язок зі збіжністю стохастичних мір отримано в наступному вигляді.

Теорема 2. *Нехай* μ, μ_n *— стохастичні міри на* B, *значення* $\mu_n(A)$, $A \in \mathrm{B}$, $n \geq 1$, *обмежені за ймовірністю,*

$$\hat{\mu}_n(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi itx} d\mu_n(x),\ \hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi itx} d\mu(x),\ t \in \mathbb{R}^d.$$

Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. Для кожної неперервної $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\sup_{|x| \geq K} |f(x)| \to 0$, $K \to \infty$, *виконується:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu,\ n \to \infty;$$

2. Для кожної неперервної $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, g \in L_1(\mathbb{R}^d, dt)$, $\sup_{|x| \geq K} |g(x)| \to 0$, $K \to \infty$, *виконується:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t)\hat{\mu}_n(t)dt \xrightarrow{P} \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\hat{\mu}(t)dt, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Як приклад застосування теореми 2, розглянемо наступний м'який розв'язок стохастичного рівняння теплопровідності:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x-y)u_0(y)dy + \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(y) \int_0^t p(t-s, x-y)\sigma(s,y)ds, \tag{2}$$

де $p(t,x) = (4a^2\pi t)^{-d/2} e^{-|x|^2/4a^2t}$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності, функції u_0, σ вимірні і обмежені. Докладно властивості розв'язку (2) розглянуто в Radchenko (2009).

Теорема 3. *Нехай* u *— розв'язок (2),*

$$u_n(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x-y)u_0(y)dy + \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_n(y) \int_0^t p(t-s, x-y)\sigma(s,y)ds,$$

значення $\mu_n(A)$, $A \in \mathrm{B}$, $n \geq 1$, *обмежені за ймовірністю, і виконується (1).*

Тоді $u_n(t,x) \xrightarrow{\mathrm{P}} u(t,x)$, $n \to \infty$.

Список літератури

Kwapień, S., & Woycziński, W. A. (1992). *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*. Boston: Birkhäuser.

Radchenko, V. M. (2009). Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. *Studia Math.*, *194* (3), 231–251.

Radchenko, V. M. (2012). Riemann integral of a random function and parabolic equation with a general stochastic measure. *Теор. ймовірн. та матем. статист.*, *87*, 163–175.

Радченко, В. Н. (1999). *Интегралы по общим случайным мерам: Труды института математики НАН Украины.* Киев: Институт математики НАН Украины.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

С. Г. Радченко

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

lapach@ukr.net

При создании и совершенствовании сложных систем и процессов широко используются статистические модели, полученные по результатам экспериментов, которые отражают суммарное влияние управляемых, неуправляемых и неконтролируемых факторов на критерии качества. Необходимо по полученным результатам $\mathbf{Y}$ восстановить математическую модель

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \varepsilon,$$

где $\mathbf{XB}$ — математическая модель, ε — случайные ошибки. Задача является обратной и в большинстве случаев некорректно поставленной.

Решение реальных прикладных задач часто характеризуется отсутствием необходимой информации о статистически значимом влиянии факторов, структуре определяемой модели, законе распределения результатов наблюдений и других данных

Аппроксимацию исходных данных будем осуществлять с использованием полиномиальных математических моделей. Их применение обосновано теоремами Вейерштрасса, Стоуна, Джексона (Радченко, 2011, с. 87—88).

Элементы структуры определяемой статистической модели выбираются из элементов структуры модели полного факторного эксперимента (Радченко, 2011, с. 92—93)

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + \ldots + x_i^{(s_i-1)}) \to N_{\Pi},$$

где 1 — значение фиктивного фактора $x_0 \equiv 1$;

$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(s_i-1)}$ — ортогональные контрасты факторов X_i;

s_i — число различных уровней фактора X_i;

k — общее число факторов, $1 \le i \le k$;

(1), (2), …, $(s_i - 1)$ — порядок контрастов фактора X_i;

N_{Π} — число структурных элементов полного факторного эксперимента, равное числу опытов эксперимента.

По теореме Бродского В. З. (Радченко, 2011, с. 27) в модели полного факторного эксперимента все эффекты ортогональны друг другу и число эффектов равно числу опытов. Если эффекты выразить в виде ортогональных нормированных контрастов, то матрица дисперсий-ковариаций будет диагональной

$$(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\sigma^2(\varepsilon) = (1 / N)\mathbf{E}\sigma^2(\varepsilon),$$

где $\mathbf{X}$ — матрица эффектов полного факторного эксперимента; $\sigma^2(\varepsilon)$ — теоретическое значение дисперсии воспроизводимости результатов опытов; N — число опытов в плане эксперимента; $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Модель будет соответствовать наилучшим возможным критериям *D*-, *A*-, *E*-, *G*-оптимальности, ортогональности и адекватна результатам экспериментов.

В общем случае полный факторный эксперимент имеет значительное число опытов и при решении реальных прикладных задач не выполним. Необходимо использовать дробный факторный эксперимент, применять многофакторные регулярные планы и планы на основе $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей (Радченко, 2011, с. 93—111), которые являются квазиполными факторными экспериментами.

Помимо строго формализованных решений целесообразно использовать эвристические решения (Радченко, 2015). Полученную модель необходимо проверить на статистическую значимость, адекватность, информативность, устойчивость (Радченко, 2011); провести также проверку свойств остатков и проверить модель по всей области получения модели. При построении модели необходимо использовать программное средство ПРИАМ (Радченко, 2011, с. 84—85).

Методология получения многофакторных статистических моделей с использованием регрессионного анализа должна учитывать неполноту требуемой исходной информаций. Она включает формализованные и эвристические решения в виде рекомендации достаточно близких к формализованным решениям — квазирешениям. Квазирешение рекомендует класс решений, из которого путем проверки выбирается искомое. Примеры успешно решенных реальных задач приведены в (Радченко, 2011, с. 211—290).

С разработанными методами моделирования и полученными результатами можно ознакомиться в [3, 4].

Список литературы

Радченко, С. Г. (2011). *Методология регрессионного анализа*. Киев: «Корнійчук».

Радченко, С. Г. (2015). *Формализованные и эвристические решения в регрессионном анализе*. Киев: «Корнійчук».

Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований (ЛЭСМИ). — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.n-t.org/sp/lesmi

Сайт кафедры «Технология машиностроения» Механико-машиностроительного института Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://tm-mmi.kpi.ua/index.php/ru/1/publications/

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ МОМЕНТУ ПЕРШОГО ПЕРЕВИЩЕННЯ ДЛЯ СУМИ НЕЗАЛЕЖНИХ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИХ НА [0,1] ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

О. В. Рибак
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
semperfi@ukr.net

Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які мають рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$. Розглянемо процес послідовного сумування цих величин. Уважатимемо, що на нульовому кроці їхня сума дорівнювала 0, а для кожного натурального n на n-му кроці накопичилося

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Нехай $T(x)$ — номер кроку, на якому сума величин вперше перевищує x. Через $f(x)$ позначимо математичне сподівання $\mathrm{M}T(x)$.

Для $x < 0$ маємо $f(x) = 0$. У випадку $x \geq 0$, розглянувши ситуацію після вибору ξ_1, отримуємо рівність

$$f(x) = 1 + \int_{x-1}^{x} f(t)dt.$$

Звідси легко вивести, що функція $f(x)$ диференційовна в усіх точках, окрім, можливо, цілих невід'ємних. Також $f(x)$ неперервна скрізь, окрім точки $x = 0$, де вона неперервна лише справа.

Якщо продиференціювати наведене інтегральне співвідношення, то вийде рівність

$$f'(x) = f(x) - f(x-1) \text{ для } x > 0.$$

Також $f(x) = 0$ при $x < 0$ та $f(0) = 1$. Для всіх цілих невід'ємних n та таких t, що $0 \leq t \leq 1$, визначимо $P_n(t)$ рівністю $P_n(t) = f(n+t)$. Тоді при $n \geq 1$ елементи послідовності $\{P_n(t)\}$ задовольняють рівняння

$$P_n'(t) = P_n(t) - P_{n-1}(t)$$

з початковою умовою $P_n(0) = P_{n-1}(1)$. Нульовий елемент має вигляд $P_0(t) = e^t$. Інші знаходяться за формулою

$$P_n(t) = e^t(P_{n-1}(1) - \int_0^t e^{-s} P_{n-1}(s)ds).$$

Методом математичної індукції нескладно отримати, що для $t = 0$ виконана рекурентна умова

$$P_n(0) = e\sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1-k}(0)\frac{(-1)^k}{k!},$$

а для $0 < t \leq 1$ функції $P_n(t)$ задаються рівністю

$$P_n(t) = e^t \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n-k}(0) \cdot \frac{(-1)^k}{k!} \right) t^k .$$

Побудувавши твірну функцію

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) z^n ,$$

можна знайти, що ця функція задовольняє рівність

$$eze^{-z} g(z) + 1 = g(z).$$

Звідси

$$g(z) = \frac{1}{1 - eze^{-z}} = 1 + eze^{-z} + e^2 z^2 e^{-2z} + ... + e^n z^n e^{-nz} + ...$$

Завдяки наведеному вигляду $g(z)$ отримуємо, що

$$P_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-n)^k}{k!} e^{n-k} .$$

Досліджуючи функцію $f(x)$ чисельно, можна помітити, що з ростом x різниця $f(x) - 2x - 2 / 3$ прямує до нуля. Авторові не вдалося вивести цей факт із явного вигляду функції. Однак були помічені інші співвідношення, що привели до підтвердження цього спостереження.

Замінимо функції $P_n(t)$ на $Q_n(t) = P_n(t) - 2(n + t)$. Легко перевірити, що для нових функцій теж справедливі рівняння

$$Q_n'(t) = Q_n(t) - Q_{n-1}(t)$$

з початковими умовами $Q_n(0) = Q_{n-1}(1)$.

Отже, $Q_0(t) = e^t - 2t$ та

$$Q_n(t) = e^t (Q_{n-1}(1) - \int_0^t e^{-s} Q_{n-1}(s) ds).$$

Помітимо, що всі $Q_n(t)$ задовольняють умову

$$Q_n(1) = \int_0^1 Q_n(t) dt$$

— це можна довести за допомогою індукції. Дане співвідношення приводить до того, що величина

$$\int_0^1 tQ_n(t)dt$$

є інваріантом, що не залежить від n.

Розглянемо функцію $h(x) = f(x) - 2x$. Для неї при $x \geq 0$ справедливе інтегральне співвідношення

$$h(x) = \int_{x-1}^{x} h(t)dt,$$

а при $x < 0$ виконується рівність $h(x) = -2x$. Звідси можна вивести, що з наближенням x до нескінченності $h(x)$ прямує до деякої константи b. Для цілих невід'ємних n та таких t, що $0 \leq t \leq 1$, безпосередньо з $P_n(t) = f(n+t)$ виводиться рівність $Q_n(t) = h(n+t)$. Тому послідовність $\{Q_n(t)\}$ рівномірно прямує до функції $R(t) = b$. Оскільки

$$\int_0^1 tQ_n(t)dt$$

є інваріантом, має виконуватися

$$\int_0^1 tR(t)dt = \int_0^1 tQ_0(t)dt.$$

Для $Q_0(t)$ безпосередньо вираховується, що

$$\int_0^1 tQ_0(t)dt = \int_0^1 t(e^t - 2t)dt = \frac{1}{3}.$$

Отже, правильне і співвідношення

$$\int_0^1 btdt = \frac{1}{3},$$

що дає $b = \dfrac{2}{3}$.

ОЦІНКА НАЙМЕНШИХ МОДУЛІВ У МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ЛОКАЛЬНИМ ПЕРЕТВОРЕННЯМ СИЛЬНО ЗАЛЕЖНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

І. М. Савич

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

sim_ka@i.ua

Розглянемо нелінійну модель регресії

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ t \geq 0,$$

де $g(t,\theta)$ — дійсна неперервна за сукупністю змінних $(t,\theta) \in \mathbb{R}^1_+ \times \Theta^c$ функція, $\Theta \subset R^q$ — відкрита обмежена множина параметрів, яка містить θ. Відносно $\varepsilon(t)$ припустимо наступне

А1. $\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}^1$,— локальний функціонал від гауссівського стаціонарного процесу $\xi(t)$, тобто $\varepsilon(t) = G(\xi(t)),\ G(x),\ x \in \mathbb{R}^1$ — борелівська функція, причому

$$\mathrm{E}\varepsilon(0) = 0,\ \mathrm{E}\varepsilon^2(0) < \infty.$$

А2. $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}^1$,— дійсний неперервний в середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес, який визначено на ймовірнісному просторі (Ω, F, P). Коваріаційна функція $\xi(t)$ має вигляд

$$\mathrm{B}(t) = \mathrm{E}\xi(t)\xi(0) = \sum\nolimits_{j=0}^{r} A_j B_{\alpha_j,\chi_j}(t),\ t \in \mathbb{R}^1,\ r > 0,$$

де $\quad A_j \geq 0, \quad \sum\nolimits_{j=0}^{r} A_j = 1, \quad B_{\alpha_j,\chi_j}(t) = \dfrac{\cos(\chi_j t)}{(1+t^2)^{\alpha_j/2}}, \quad j = \overline{0,r},$

$0 \leq \chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_r < +\infty,\ \alpha_j \in (0,1),\ \mathrm{E}\xi(t) = 0,\ \mathrm{E}\xi^2(t) = \mathrm{B}(0) = 1.$

Позначимо через $F(x)$ функцію розподілу $\varepsilon(0)$ та $E\varepsilon^+(0) = \dfrac{1}{2}E\left|\varepsilon(0)\right|$,

А3. $F(0) = \dfrac{1}{2}$.

А4. $p(x) = F'(x)$ — обмежена щільність така, що $\left|p(x) - p(0)\right| \leq H\left|x\right|$, $p(0) > 0,\ H < \infty$, — деяка константа.

Означення 1. Оцінкою найменших модулів параметра $\theta \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t), t \in [0,T]) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left|X(t) - g(t,\tau)\right| dt.$$

Припускаючи, що $g(t,\tau)$ — двічі неперервно диференційовна по $\tau \in \Theta^c$, позначимо

$$d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t,\theta) \right)^2 dt, \qquad d_T^2(\theta) = \mathrm{diag}(d_{iT}^2(\theta))_{i=1}^q,$$

$$h(t,u) = g(t,\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta)u), \qquad \tilde{U}_T(\theta) = T^{-1/2} d_T(\theta)(\Theta - \theta),$$

$$\overline{u}_T(\theta) = T^{-1/2} d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta), \quad V(r) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < r\},$$

$$\Phi_{kT}(u_1,u_2) = \int_0^T \left| h(t,u_1) - h(t,u_2) \right|^k dt, \;\; k = 1,2 \;,$$

B1. Для довільних $\varepsilon > 0$ та $r > 0$ існують $\delta = \delta(r,\varepsilon) > 0$, $\sigma = \sigma(r) < \infty$ такі, що

$$\sup_{u_1,u_2 \in V^c(r) \cap \tilde{U}_T^c(\theta), \|u_1 - u_2\| \le \delta} T^{-1}\Phi_{1T}(u_1,u_2) \le \varepsilon, \qquad \sup_{u \in V^c(r) \cap \tilde{U}_T^c(\theta)} T^{-1}\Phi_{2T}(u,0) \le \sigma$$

.

C1. Для довільного $r > 0$ існує $\Delta(r) > 0$ таке, що

$$\inf_{u \in \tilde{U}_T^c(\theta) \setminus V^c(r)} T^{-1} Q_T(\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta)u) \ge E\varepsilon^+(0) + \Delta(r),$$

причому для деякого $r_0 > 0$ $\Delta(r_0) = a_0 E\varepsilon^+(0) + \Delta_0$, де $a_0 > 2$ та Δ_0 — деякі числа.

Теорема 1. Якщо виконуються умови **A1**, **A2**, **A3**, **B1** та **C1**, то для довільного $r > 0$

$$P\left(\|\overline{u}_T\| \ge r \right) = O(B(T)) \text{ при } T \to \infty .$$

B2. (і) Існує спектральна міра μ функції регресії $g(t,\theta)$ (Ибрагимов, Розанов, 1970);

(ii) спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t)$ є μ-припустимою у сенсі (Ибрагимов, Розанов, 1970) та (Іванов, Савич, 2009).

Позначимо

$$I_T(\theta) = \left(d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T g'_{\theta_i}(t,\theta) g'_{\theta_l}(t,\theta) dt \right)_{i,l=1}^q, \qquad \theta \in \Theta.$$

матрицю, яка має обернену.

B3. $\lambda_{\min}(\mathrm{I}_T(\theta)) \ge \lambda_0 > 0, \;\; T > T_0$.

Нехай виконуються деякі припущення щодо зростання перших та других похідних функції $g(t,\tau)$ по $\tau = (\tau_1,...,\tau_q)$ та

$$f^{*j}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{j-1}} f(\lambda - \lambda_2 - ... - \lambda_j) \prod_{i=2}^j f(\lambda_i) d\lambda_2 ... d\lambda_j, \quad j \ge 2,$$

j-а згортка спектральної щільності $f(\lambda)$ випадкового процесу $\xi(t)$, $f^{*1}(\lambda) \equiv f(\lambda)$.

Означення 2. Нехай $C_1(\Psi) \neq 0$, або $C_1(\Psi) = ... = C_{m-1}(\Psi) = 0$, $C_m(\Psi) \neq 0$ для деякого $m \geq 2$, де

$$C_j(\Psi) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(x) H_j(x) \varphi(x) dx, \quad j \geq 1,$$

$H_j(x)$ — j-й многочлен Ерміттa, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$. Тоді число $m \geq 1$ називається Ермітовим рангом Ψ і позначається $\mathrm{Hrank}(\Psi)$.

Теорема 2. Нехай виконуються вище вказані умови, а також

(i) $\mathrm{Hrank}(\Psi) = 1, \alpha > \dfrac{1}{2}$, або

(ii) $\mathrm{Hrank}(\Psi) = m, \alpha m > 1$, де $\alpha = \min\limits_{0 \leq j \leq r} \alpha_j \in (1/2, 1)$,

матриці

$$M_j = \int_{\mathbb{R}} f^{*j}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta),\ j \geq 1,$$

додатньо визначені.

Тоді нормована оцінка найменших модулів $d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$ асимптотично нормальна $N(0, D)$,

$$D = \frac{2\pi}{p^2(0)} \Lambda \left(\sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(\Psi)}{j!} \int_{\mathbb{R}} f^{*j}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta) \right) \Lambda,$$

де $\Lambda = \left(\int_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta) \right)^{-1}$, $\Psi(x) = \dfrac{1}{2} - \chi\left\{ G(x) < 0 \right\}, x \in \mathbb{R}$.

Для доведення теореми 2 використовуються статті Ivanov et all (2013) та Іванов, Савич (2011).

Список літератури

Ivanov, A. V., Leonenko, N. N., Ruiz-Medina, M. D., Savich, I. N. (2013). Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra. *The Annals of Probability*, *41* (2), 1088--1114.

Ибрагимов, И. А., Розанов, Ю. А. (1970). *Гауссовские случайные процессы*. Москва: Наука.

Іванов, О. В., Савич, І. М. (2009). Припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму у нелінійних моделях регресії. *Наукові вісті НТУУ «КПІ», 2009,* 143—148.

Іванов, О. В., Савич, І. М. (2011). Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера — Бассета параметра нелінійної моделі регресії з сильно залежним шумом. *Український математичний журнал*, *63* (8), 1030—1052.

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ, КОЛИ МАТРИЦЯ ПЛАНУ МАЄ НЕПОВНИЙ РАНГ

М. Ю. Савкіна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

marta@imath.kiev.ua

Розглянемо модель лінійної регресії

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

де $\vec{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)^{\mathrm{T}}$ — відклик,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

— регресійна матриця розміру $n \times m$ $(n \geq m)$, j-й стовпець якої — n спостережень регресора x_j, $\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\right)^{\mathrm{T}}$ — вектор випадкових відхилень, $E\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\vec{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\right)^{\mathrm{T}}$ — вектор невідомих параметрів, який підлягає оцінюванню.

Е класичній регресії передбачається, що $\operatorname{rang} X = m$, тобто стовпці матриці X лінійно незалежні.

Найпоширенішим методом оцінювання невідомих параметрів у регресійному аналізі є метод найменших квадратів (МНК), який полягає в мінімізації суми

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2$$

відносно вектора $\vec{\beta}$. Для знаходження оцінки $\vec{\beta}$ маємо систему нормальних рівнянь (Себер, 1980)

$$X^T X \vec{b} = X^T \vec{y}\ , \tag{1}$$

єдиний розв'язок якої

$$\vec{b} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{y}\ ,$$

а мінімальне значення $\sum \varepsilon_j^2$, яке називається *залишковою сумою квадратів*, дорівнює

$$\vec{y}^T \vec{y} - \vec{b}^T X^T X \vec{b}\ .$$

Вектор $\vec{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)^{\mathrm{T}}$ називається оцінкою МНК вектора $\vec{\beta}$.

Але в деяких випадках буває, що $\operatorname{rang} X = r(r < m)$. Система нормальних рівнянь (1) у цьому випадку має ціле сімейство розв’язків, а величина $\sum \varepsilon_j^2$ досягає мінімума при $\vec{\beta} = \vec{b}$, де $\vec{b}$ — будь-який з розв’язків системи (1), причому для кожного ненульового вектора $\vec{y}$ значення

$$\vec{y}^{\mathrm{T}}\vec{y} - \vec{b}^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\vec{y}$$

єдине (Себер, 1980).

Одним з методів відшукання розв’язку системи у випадку, коли матриця плану має неповний ранг, є метод ідентифікуючих обмежень.

Нехай

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ . & . & . & . \\ h_{m-r,1} & h_{m-r,2} & \dots & h_{m-r,m} \end{pmatrix}$$

матриця розміру $(m-r) \times m$ така, що матриця

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \\ h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ . & . & . & . \\ h_{m-r,1} & h_{m-r,2} & \dots & h_{m-r,m} \end{pmatrix}$$

має ранг m.

Метод ідентифікуючих обмежень полягає в розгляді сукупності обмежень вигляду

$$H\vec{\beta} = \vec{\theta}, \tag{2}$$

яка дозволяє запобігти невизначеності при відшуканні розв’язку системи (1).

Розглянемо випадок, коли $r = m - 1$. Матрицю X без обмеження загальності можна подати у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m-1} & \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_{1i} \\ x_{21} & \dots & x_{2,m-1} & \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_{2i} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & \dots & x_{n,m-1} & \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_{ni} \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ — деякі сталі, а сукупність обмежень (2) перетворюється на

$$h_{11}\beta_1 + \dots + h_{1m}\beta_m = 0. \tag{3}$$

Інший метод відшукання розв’язку системи (1) у випадку, коли матриця плану має неповний ранг, полягає у зведенні вихідної моделі до моделі повного рангу.

Позначимо

$$\vec{b}^{(-)} = \left(\overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{X}\right)^{-1}\overline{X}^{\mathrm{T}}\vec{y},$$

де

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,m-1} \\ x_{21} & \dots & x_{2,m-1} \\ . & . & . \\ x_{n1} & \dots & x_{n,m-1} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$\vec{b}^{(H)} = \left(b_1^{(H)}, b_2^{(H)}, \dots, b_m^{(H)}\right)^{\mathrm{T}}$$

— оцінка МНК вектора $\vec{\beta}$ при наявності обмежень (3). У роботі Савкіної (2014) доведено теорему, яка дає зв'язок між оцінками $\vec{b}^{(-)}$та $\vec{b}^{(H)}$.

Теорема 1. *Нехай*

$$\vec{\alpha}^{(1)} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, -1\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\vec{h}_m = \left(h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1,m-1}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$s = h_{1,m} - \alpha_1 h_{11} - \dots - \alpha_{m-1} h_{1,m-1},$$

$I_{m-1}^{(0)}$ *— матриця порядку* $m \times (m-1)$, *перші* $(m-1)$ *рядків якої утворюють одиничну матрицю, останній рядок — нульовий. Тоді*

$$\vec{b}^{(H)} = \left(I_{m-1}^{(0)} + s^{-1}\vec{\alpha}^{(1)}\vec{h}_m\right)\vec{b}^{(-)}.$$

Список літератури

Савкіна, М. Ю. (2014). Оцінювання параметрів лінійної регресійної моделі неповного рангу. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки,* (3), 172—175.

Себер, Дж. (1980). *Линейный регрессионный анализ*. Москва: Мир.

МОНІТОРИНГ ЯКОСТІ ОСВІТИ
ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ

Н. П. Селезньова, О. В. Українець
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
koniwa@yandex.ua, saharoza48@gmail.com

Для підвищення якості освіти у навчальному закладі було проведено аналіз успішності студентів фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» першого курсу на зимовій сесії (2014—2015 н. р.). З цією метою було взято оцінки студентів напряму «математика» з таких предметів: інформатика, дискретна математика, математичний аналіз, аналітична геометрія, лінійна алгебра, українська мова; а також оцінки цих студентів із Зовнішнього Незалежного Оцінювання з математики та фізики.

На основі отриманих емпіричних даних (оцінок студентів) обчислено елементи кореляційної матриці Спірмена та матриці, складеної з вибіркових коефіцієнтів кореляції. За допомогою цих матриць можна певним чином оцінити узгодженість оцінок, які отримують студенти в результаті складання іспитів. У даному випадку викладачі, які приймають іспити є експертами, а оцінки студентів є експертними оцінками. Досліджуючи узгодженість таких експертних оцінок, загалом, можна робити певні висновки про одностайність вимог викладачів до рівня знань студентів. Рівень узгодженості вимог викладачів до рівня знань студентів певним чином характеризує в цілому якість навчального процесу. При цьому більш доцільним є застосування коефіцієнтів кореляції Спірмена, адже рангова кореляція є аналогом парної кореляції для тих випадків, коли величини, наявність зв’язку між якими потрібно перевірити, представлені не в шкалі відносин, а в який-небудь іншій. Найчастіше така ситуація виникає, якщо ми маємо справу із суб’єктивними оцінками об’єктивних явищ, які не можна виміряти, наприклад, з експертними оцінками. Крім того, рангова кореляція застосовується також у випадках, коли закон розподілу досліджуваних змінних є невідомим (Селезньова та ін., 2012).

При обчислені елементів кореляційної матриці, складеної із коефіцієнтів кореляції Спірмена, як правило, дотримуються таких умов:

— усі спостереження взаємно незалежні;

— усі значення спостережень взяті з однієї і тієї ж двовимірної генеральної сукупності, тобто вважаємо, що випадкові величини X та Y однаково розподілені;

— обчислюється не на основі первинних даних, а на основі рангів, які присвоюються всім значенням досліджуваних ознак, що розміщені у порядку зростання. Якщо значення ознак співпадають, то ранг визначається шляхом ділення суми рангів на число значень.

Коефіцієнт кореляції рангів Спірмена визначається за формулою (Spearman, 1904)

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

де d^2 — квадрат різниці рангів для кожного значення $d = x - y$, n — обсяг сукупності.

При наявності зв'язаних рангів ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена обчислюють за формулою [1]:

$$\rho = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - s_i)^2}{\frac{1}{6}(n^3 - n) - (T_r + T_s)}, \qquad (1)$$

де $T_r = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{m_r}(t_r^3 - t_r); T_s = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{m_s}(t_s^3 - t_s); m_r, m_s$ — число груп однакових рангів у змінних X та Y; t_r, t_s — кількість рангів, які входять у групу однакових рангів змінних X та Y. Так як ми, в нашому випадку, маємо зв'язані ранги, то надалі будемо користуватись для обчислення елементів кореляційної матриці формулою (1).

При застосуванні коефіцієнта рангової кореляції Спірмена умовно оцінюють тісноту зв'язку між ознаками за таким принципом [3]:

$\left|\rho\right| \le 0,3$ — слабкий зв'язок; $\rho \in \left[0,4;0,7\right]$ — помірний зв'язок; $\rho \in \left[0,7;1\right]$ — досить тісний зв'язок.

Потужність коефіцієнта рангової кореляції Спірмена є трохи слабшою ніж у парного коефіцієнта кореляції.

Загалом, чим меншою є різниця між рангами, тим більшим буде «ρ» коефіцієнт рангової кореляції Спірмена — тим менше він буде відрізнятись від «$+1$». Якщо ж кореляція відсутня, то всі ранги будуть перемішані і між ними не буде жодної відповідності. В цьому випадку ρ буде близьким до нуля. У випадку від'ємної кореляції низьким рангам студентів за однією ознакою будуть відповідати високі ранги за іншою ознакою, і навпаки. Чим більшим є неспівпадіння між рангами студентів, тим ближчим є ρ до «-1».

Коефіцієнти вибіркової кореляції обчислимо за такою формулою (Кремер, 2006):

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \qquad (2)$$

Матриця Спірмена

ОМ	Інформатика	Дискретна математика	Українська мова	Математичний аналіз	Аналітична геометрія	Лінійна алгебра	ЗНО (математика)	ЗНО (фізика)
Інформатика	1	0,371	0,534	0,515	0,244	0,479	0,144	0,335
Дискретна математика		1	0,375	0,421	0,294	0,403	0,023	0,088
Українська мова			1	0,455	0,276	0,421	-0,193	-0,123
Математичний аналіз				1	0,183	0,389	0,293	0,275
Аналітична геометрія					1	0,419	0,262	0,342
Лінійна алгебра						1	0,173	0,266
ЗНО (математика)							1	0,403
ЗНО (фізика)								1

Кореляційна матриця

ОМ	Інформатика	Дискретна математика	Українська мова	Математичний аналіз	Аналітична геометрія	Лінійна алгебра	ЗНО (математика)	ЗНО (фізика)
Інформатика	1	0,370	0,603	0,483	0,300	0,478	0,114	0,225
Дискретна математика		1	0,318	0,397	0,338	0,452	0,025	0,052
Українська мова			1	0,440	0,105	0,225	-0,203	-0,209
Математичний аналіз				1	0,310	0,465	0,293	0,223
Аналітична геометрія					1	0,597	0,333	0,360
Лінійна алгебра						1	0,264	0,276
ЗНО (математика)							1	0,462
ЗНО (фізика)								1

Порівнюючи ці дві матриці, можна сказати, що їх відповідні елементи загалом відрізняються несуттєво. При цьому слід зауважити, що гіпотеза про нормальний закон розподілу оцінок студентів з усіх розглянутих предметів за критерієм хі-квадрат не підтверджується при рівні значущості $\alpha \in \left[0,05;0,95\right]$, і кореляційна матриця дає більш грубу оцінку статистичного зв'язку рівня успішності студентів з різних предметів, ніж матриця, складена із коефіцієнтів кореляції Спірмена.

Для перевірки істотності кореляційного зв'язку необхідно порівняти значення $\left|\rho_{емп}\right|$ — обчислене на основі емпіричних даних з $\rho_{кр}$ (критичне), яке залежить від обсягу сукупності n та рівня значущості α

$$\rho_{кр} = t_{кр}(\alpha;k) \cdot \sqrt{\frac{1-\rho_{емп}^2}{k}},$$

де α — рівень значущості; $k = n - 2$ число степенів свободи; $n \geq 9$ $(n = 37)$ — обсяг вибірки; $t_{кр}(\alpha;k)$ — критична точка розподілу Стьюдента для двосторонньої критичної області (Кремер, 2006).

Візьмемо найвищий коефіцієнт кореляції Спірмена (між предметами «українська мова» та «інформатика») $0,534$ ($\rho_{кр} = 0,289$), найменший (між «інформатикою та ЗНО з математики») $0,023$ ($\rho_{кр} = 0,343$), та від'ємний показник (між «українською мовою» та ЗНО з математики) — $0,193$ ($\rho_{кр} = 0,337$). Виберемо рівень значущості $\alpha = 0,05$.

Для кожного із вказаних коефіцієнтів отримали, що лише максимальний показник можна вважати істотним, тому що $\left|\rho_{емп}\right| > \rho_{кр}$, при цьому цей кореляційний зв'язок є помірним. Інші два коефіцієнти кореляції Спірмена не є істотними.

Найвищим є коефіцієнт кореляції між предметами «аналітична геометрія» та «лінійна алгебра», тобто найкраще узгоджені вимоги викладачів з цих предметів. Математичний аналіз та ЗНО з математики слабо корелюють і практично є відсутньою кореляція між предметам «дискретна математика» та ЗНО з математики. Особливу увагу привертають від'ємні коефіцієнти кореляції, наявність яких свідчить про повну неузгодженість експертних оцінок з української мови та ЗНО з математики, української мови та ЗНО з фізики, адже в учбовому процесі взагалі є недопустимою ситуація з від'ємними коефіцієнтами кореляції оцінок. Ці коефіцієнти є від'ємними в обох наведених вище матрицях. Загальний аналіз отриманих значень коефіцієнтів кореляції свідчить про досить високий рівень неузгодженості експертних оцінок, що вказує, що навчальний процес необхідно надалі суттєво вдосконалювати.

Список літератури

Spearman, S. (1904). General intelligence objectwely determined and measured. *Amer. J. Psychob.*, *15*, 201–293.

Кремер, Н. Ш. (2006). *Теория вероятностей и математическая статистика*. Москва: ЮНИТИ.

Селезньова, Н. П., Селезньова, Н. В., Селезньов, С. В. (2012). Кореляційний аналіз навчального процесу на прикладі підсумкових оцінок учнів. *Вісник НТУУ «КПІ». Філософія. Психологія. Педагогіка: Зб. наук.праць*, (1 (34)), 136—138.

ПРО ДВІЙКОВО-ЛАКУНАРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ Й НЕСКІНЧЕННІ ЗГОРТКИ БЕРНУЛЛІ

Л. О. Сидорук
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
sinelnyklilia@ukr.net

Нескінченні згортки Бернуллі, тобто розподіли випадкових величин вигляду

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k ,$$

де послідовність $\{a_k\}$ породжується вибраним числом a, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$, ξ_k є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно, інтенсивно вивчаються протягом останніх 80 років різних точок зору.

Одним з важливих напрямів досліджень полягає у знаходженні умов при яких ймовірнісні міри μ_ξ

1) будуть мірами Райхмана, тобто

$$L_\xi := \limsup_{|t|\to\infty} \left| f_\xi(t) \right| = 0,$$

2) не будуть райхмановими мірами, тобто коли $L_\xi > 0$,

3) будуть суттєво нерайхмановими, тбто коли $L_\xi = 1$.

У роботі Albeverio, Baranovskyi, Pratsiovytyi, Torbin (2009) доведено, зокрема, що нескінченні згортки Бернуллі, що породжені рядами Остроградського — Серпінського — Пірса, завжди будуть суттєво нерайхмановими. Для нескінченних згорток Бернуллі, породжених рядами Остроградського II роду, доведено лише нерайхмановість розподілу (гіпотеза про суттєву нерайхмановість все ще відкрита)

Доповідь присвячена властивостям множини LS двійково-лакунарних чисел одиничного відрізка, тобто множини тих дійсних чисел $a \in [0,1]$, символи $\alpha_k(a)$ мають наступну властивість:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N} \ \exists\, k = k(m,s) > m : \alpha_{k+i}(a) = 0, \forall i \in \{1,2,\ldots,s\}.$$

Будуть представлені результати, що є узагальненням роботи Сінельник, Торбін (2014), де було досліджено властивості нескінченних згорток Бернуллі, що породжені спеціальним континуальним підкласом множини двійково-лакунарних дійсних чисел. Було вивчено асимптотику перетворення Фур'є — Стілтьєса відповідних згорток Бернуллі і доведено, що у випадку неперервності для кожного значення параметра a з досліджуваної континуальної ніде не щільної множини, модуль характеристичної функції $f_{\xi}(t)$ породженої випадковою величиною $\xi = \xi(a)$ дорівнює одиниці. У доповіді мова йтиме про властивості нескінченних згорток Бернуллі.

Основними результатами є доведення того факту, що майже всі дійсні числа (в сенсі міри Лебега) є двійково-лакунарними і що всі нескінченні згортки Бернуллі, що породжуються довільним двійково-лакунарним числом, є суттєво нерайхмановими.

Список літератури

Albeverio, S., Baranovskyi, O., Pratsiovytyi, M., & Torbin, G. (2009). The set of incomplete sums of the firt Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distribution on it. *Rev.Roum. Math. Pures Appl., 54* (2), 85–115.

Сінельник, Л. О., Торбін Г. М. (2014). Про один клас сингулярних розподілів, породжених під сімейством двійково-лакунарних послідовностей. *Науковий часопис НПУ імені П.М. Драгоманова*, *16* (1), 144—152.

ПРО ПАКУВАЛЬНУ ДОВІРЧІСТЬ ТА ПОРІВНЯННІСТЬ МНОЖИН, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ ПРЕДСТАВЛЕННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ РЯДАМИ КАНТОРА

О. В. Слуцький
Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, Київ, Україна
slualexvas@gmail.com

Найбільш відомою фрактальною розмірністю є розмірність Хаусдорфа — Безиковича $\dim_H$. Проте ефективність дослідження множин та мір суттєво збільшується, якщо разом з $\dim_H$ розглядати іншу фрактальну розмірність — пакувальну розмірність $\dim_P$ (Falconer, 2003; Tricot, 1982).

Існує багато підходів до обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича, зокрема підхід, що базується на довірчості сімейств множин (Albeverio et all). Аналогічний підхід можна ввести і для пакувальної розмірності.

Означення 1. *Сімейство множин* Φ *з простору* M *називається довірчим для обчислення* dim_P, *якщо*

$$\dim_P\left(E,\Phi\right) = \dim_P\left(E\right), \forall E \subset M.$$

Частковим випадком довірчості є порівнянність:

Означення 2. *Сімейство множин* Φ *з простору* M *називається порівнянним для обчислення* $\dim_P$, *якщо*

$$\forall\alpha\,\exists C\left(\alpha\right) > 0 : \mathcal{P}^{\alpha}\left(E,\Phi\right) C \cdot \mathcal{P}^{\alpha}\left(E\right).$$

Виникає питання: чи не є рівносильними довірчість та порівнянність множин?

Основним результатом, представленим у доповіді, є така теорема:

Теорема 1 *Нехай* Φ *— сімейство циліндрів представлення чисел рядами Кантора, заданого послідовністю* $\left(n_k\right)$, *де* $n_k = 4^k$. *Тоді* Φ *є довірчим для пакувальної розмірності на* $\left[0;1\right]$, *але не є порівнянним.*

Список літератури

Albeverio, S., Ivanenko, G., Lebid, M, & Torbin, G. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion. http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf.

Falconer, K. (2003). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Chichester: Wiley.

Tricot, C. (1982). Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, *91* (1), 57–74.

ПРО ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ДОВІРЧОСТІ СИСТЕМИ ЦИЛІНДРІВ Q_∞-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

О. В. Сміян
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
VLenaVV@gmail.com

Обчислення розмірності Хаусдорфа — Безиковича деякої даної множини або сімейства множин зазвичай є складною та нетривіальною задачею. Для спрощення обчислень корисно мати можливість звузити клас допустимих покриттів до деякого вужчого сімейства покриттів Φ, яке є довірчим. Тому важливою задачею є дослідження довірчості систем покриттів та знаходження достатніх умов довірчості.

Нехай Φ локально тонка система покриттів одиничного півінтервала, тобто сімейство підмножин з $[0,1)$ таких, що для довільної множини $E \subset [0,1)$ та будь-якого $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття $\{E_j\}$множини E, де $E_j \in \Phi$.

Означення 1. α*-вимірна міра Хаусдорфа множини* $E \subset [0,1)$ *відносно даного сімейства покриттів* Φ *визначається наступним чином:*

$$H^\alpha(E,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E,\Phi)$$

де інфінум береться за всім не більш ніж зліченним ε-покриттям $\{E_j\}$ множини E, де $E_j \in \Phi$.

Означення 2. *Невід'ємне число*

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E,\Phi) = 0\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа — Безиковича множини $E \subset [0,1)$ відносно сімейства Φ.

Якщо Φ є множиною всіх підмножин з $[0,1)$, то $\dim_H(E,\Phi)$ збігається з класичною розмірністю Хаусдорфа — Безиковича $\dim_H E$.

Нехай

$$Q_\infty = (q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \ldots)$$

нескінченний стохастичний вектор зі строго додатними координатами. Надалі в якості Φ розглядаємо систему циліндрів породжену Q_∞-зображенням одиничного відрізка.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1 (Нікіфоров, Торбін, 2012). *Якщо існують дійсні числа q^* і q_* такі, що для довільного $i \in \mathbb{N}$*

$$0 < q_* < \frac{q_i}{q_{i-1}} \leq q^* < 1$$

то $\Phi\left(Q_\infty\right)$ — довірча на $\left[0,1\right)$.

Теорема 2 (Albeverio, Kondratiev, Nikiforov & Torbin). *Якщо $\forall \alpha > 0$ $\exists c = c(\alpha) > 0$ таке, що*

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} q_k^{\alpha} \leq c q_i^{\alpha}$$

для всіх $i \in \mathbb{N} \cup \left\{0\right\}$, то $\Phi\left(Q_\infty\right)$ — довірча на $\left[0,1\right)$.

Приклад. Розглянемо стохастичний вектор Q_∞, заданий наступним чином:

$$q_0 = \frac{A}{2},\ q_i = \frac{A}{2^n}, \text{ при } \left(n-1\right)^2 < i \leq n^2,$$

де $A = \dfrac{2}{7}$.

Можна показати, що система циліндрів, породжена таким Q_∞-зображенням, є довірчою на $\left[0,1\right)$, але при цьому даний стохастичний вектор не задовольняє жодну з наведених вище теорем.

Має місце наступна

Теорема 3. *Нехай існує обмежена послідовність $\left\{n_i\right\}$ така, що $\forall \alpha > 0$ і $\forall \delta \in \left(0,\alpha\right) \exists c = c\left(\alpha,\delta\right) > 0$ для яких*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{i+k}^{\alpha} \leq c q_{i+n_i}^{\alpha-\delta}$$

для всіх $i \in \mathbb{N} \cup \left\{0\right\}$. Тоді $\Phi\left(Q_\infty\right)$ — довірча на $\left[0,1\right)$.

Список літератури

Albeverio, S., Kondratiev, Y., Nikiforov, R., & Torbin, G. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS (submitted to *Acta Mathematica*).

Нікіфоров, Р. О., & Торбін, Г. М. (2012). Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами. *Теорія ймовір. та матем. статист.*, (86), 150—162.

Сміян, О. В. (2014). Про достатні умови довірчості системи циліндрів Q_∞-зображення. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки, 16* (1), 153—163.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ЯК АДЕКВАТНИЙ ІНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Т. В. Соловйова, В. Є. Сновида, О. Г. Тихонова

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ, Україна

internshipwiuu@ukr.net

Прийняття рішень в умовах невизначеності характеризується тим, що неможливо однозначно передбачити наслідки таких рішень. Тобто варіанти будь-якої діяльності, що пов’язана з прийняттям рішень в умовах невизначеності, є варіантами з різним рівнем очікуваної корисності й характеризуються різною ймовірністю того, що ця корисність буде досягнута саме на цьому рівні. Така непевність призводить до того, що корисність стає випадковою величиною, яку можна максимізувати лише за умови прийняття ряду гіпотез. Крім того необхідно враховувати тип невизначеностей з точки зору їх відношення до випадковості.

Теорія ймовірностей й оперує такими поняттями. Застосування теорії ймовірностей та математичної статистики, що базуються на прояві випадку, забезпечує надійний інструмент виміру й контролю різних форм невизначеності в теорії прийняття рішень

Можна розрізняти невизначеність стохастичну (ймовірнісну) у випадках, коли невідомі фактори статистично стійкі й тому є звичайними об’єктами теорії ймовірностей — випадкові величини (або випадкові функції, події). При цьому при постановці задачі визначаються всі необхідні статистичні характеристики (закони розподілу та їх параметри). Типовим прикладом такої задачі може бути система технічного обслуговування та ремонту будь якого виду техніки.

Другим типом невизначеності є нестохастична невизначеність, коли ніяких припущень про стохастичну стійкість не існує. Така ситуація називається умовами повної невизначеності.

Проміжним типом невизначеності вважається ситуація ризику, коли рішення приймається на основі висунутих гіпотез про закони розподілу випадкових величин, яки описують фактори, що діють. При цьому існує небезпека розбіжності наслідків рішення з реальними умовами.

Прийняття рішень в умовах ризику може базуватися на одному з наступних можливих критеріїв:

1) критерій очікуваного значення;

2) комбінації очікуваного значення й дисперсії;

3) найбільш ймовірної події в майбутньому.

Використання критерію очікуваного значення обумовлює забезпечення максимальної корисності при відомих вихідних даних про ймовірності настання наслідків при прийнятті того чи іншого рішення. Тобто критерій очікуваного значення представляє собою вибіркове середнє випадкової величини:

$$E\left(X\right) = E\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — наслідки альтернатив, що розглядаються, кількість яких дорівнює n.

Критерій очікуваного значення застосовується в ситуаціях, коли однотипні рішення в подібних обставинах приймаються велику кількість разів.

Якщо ситуація відрізняється від стандартної й рішення приймається рідко, то застосовується комбінований критерій «очікуваного значення — вибіркової дисперсії»:

$$E(X, \sigma) = E(X) \pm kU(X),$$

де $E(X)$ — критерій очікуваного значення; k — постійний коефіцієнт (дозволяє управляти розміром можливих відхилень за рахунок дисперсії); $U(X) = \frac{m_x}{\sigma}$ — вибірковий коефіцієнт варіації; m_x — оцінка математичного очікування; σ — оцінка середньоквадратичного відхилення; знак «мінус» ставиться у випадку оцінки прибутку, знак «плюс» — у випадку збитків.

При застосуванні критерію найбільш ймовірної події виконується заміна випадкової ситуації на детерміновану шляхом заміни випадкової величини наслідку певним значенням, яке має найбільшу ймовірність реалізації.

Якщо рішення потрібно прийняти в умовах ризику, коли невизначені фактори задаються законом розподілу, то таку ситуацію можна розв’язати двома шляхами.

Зміст першого підходу полягає в тому, що на етапі аналізу закони розподілу окремих параметрів можуть бути визначені з достатнім степенем наближення на основі статистичних даних і прогнозів експертів. Методично врахування випадкових факторів, які задані розподілом, може бути виконано або заміною випадкових параметрів їх математичними сподіваннями (тобто стохастична задача зводиться до детермінованої) або «зважуванням» показника згідно значенням ймовірності.

Другий підхід полягає у визначенні функції ефективності у відповідності з видом закону розподілу випадкової величини. Для дискретних випадкових величин найчастіше використовуються біноміальний розподіл і закон Пуассона, для неперервних — нормальний, рівномірний та експоненціальний розподіли.

Список літератури

Волошин, О. Ф., Мащенко С. О. (2010). *Моделі та методи прийняття рішень*. Київ.

Вітлінський, В. В., Великоіваненко, Г. І. (2004). *Ризикологія в економіці та підприємництві*. Київ: КНЕУ.

Ус, С. А. (2012). *Методи прийняття рішень*. Дніпропетровськ: Національний гірничий університет.

АНАЛОГ РІВНЯННЯ МАККІНА — ВЛАСОВА ЯК ГРАНИЦЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВЗАЄМОДІЄЮ

М. В. Танцюра
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
mtan@meta.ua

Рівняння Маккіна — Власова можна отримати як границю розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією і можна інтерпретувати як рівняння що задає рух системи взаємодіючих частинок з одиничною сукупною масою (McKean, 1966; Gartner, 1988; Sznitman, 1991). Основним результатом доповіді є отримання аналогу рівняння Маккіна — Власова що задає рух системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою.

Розглянемо нескінченну систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dX_k(t) = a(X_k(t),\mu_t)dt + dw_k(t),\ k \in \mathbb{Z}, t \in [0,T], \\ \mu_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{X_k(t)}, \\ X_k(0) = u_k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

де w_k є незалежними вінерівськими процесами, міра μ_n це незалежна від вінерівських процесів пуасонівська точкова міра з інтенсивністю $nm(dx)$. Припустимо, що міра m є локально скінченною і

$$\exists C > 0\ \forall\alpha \in \mathbb{R}\ \forall\beta \ge \alpha : m([\alpha,\beta]) \le C(\beta - \alpha + 1).$$

Позначимо через $\mathfrak{M}$ простір всіх локально скінченних мір на $\mathbb{R}$ з топологією грубої збіжності τ, визначеною наступним чином

$$\nu_n \xrightarrow{\tau} \nu \Leftrightarrow \forall f \in C_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \to \int_{\mathbb{R}} f d\nu, n \to \infty,$$

де $C_c(\mathbb{R})$ є множиною всіх неперервних функції з компактним носієм. Ця топологія є метризовною. Нехай $\{f_n, n \ge 1\}$ щільна множина в $C_c(\mathbb{R})$. Розглянемо метрику

$$\rho(\mu_1,\mu_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu_1(dx) - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu_2(dx)\right| \wedge 1\right)$$

Простір $(\mathfrak{M},\rho)$ є повним сепарабельним метричним простором (Dawson, 1993).

Теорема 1.1 *Нехай a обмежена неперервна функція. Припустимо, що існує константа $L > 0$ така, що*

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_0([-k,k]) \,/\, k^L < \infty.$$

Тоді існує слабкий розв'язок рівняння (1).

Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a(\varphi_t(x),\nu(t))dt + dw(t),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \\ \nu(t) = Em \circ \varphi_t(\cdot)^{-1}, \\ \varphi_0(x) = x,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Дане рівняння можна розглядати як аналог рівняння Маккіна — Власова що задає рух системи взаємодіючих частинок з нескінченною сукупною масою.

Позначимо

$$\mathfrak{M}_C = \{\mu \in \mathfrak{M} : \forall[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R} : m([\alpha,\beta]) \le C(\beta - \alpha + 1)\},\ \mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{C>0}\mathfrak{M}_C,$$

$$Z = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} f \subset [-1,1],\ \|f\|_\infty \le 1, \|f'\|_\infty \le 1, \|f''\|_\infty \le 1 \right\}$$

Запровадимо метрику на $\mathfrak{M}_\infty$:

$$\rho_\infty(\mu,\nu) = \sup_{r\in\mathbb{R}}\sup_{f\in Z}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x+r)(\mu(dx) - \nu(dx))\right|.$$

Теорема 2.2 *Припустимо, що:*

1) функція a неперервна та обмежена;

2) $\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left|a(x_1,\mu) - a(x_2,\mu)\right| \le L_C\left|x_1 - x_2\right|;$$

3) $\exists K > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \mu,\nu \in \mathfrak{M}_\infty\ \left|a(x,\mu) - a(x,\nu)\right| \le K\rho_\infty(\mu,\nu);$

4) $m \in \mathfrak{M}_\infty.$

Тоді існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2).

Основним результатом доповіді є наступна

Теорема 3.3 *Нехай для кожного натурального n випадкові процеси $\{\mu^n(\cdot),\ X_i^n(\cdot),\ i \in \mathbb{Z}\}$ є слабкими розв'язками рівняння*

$$\begin{cases} dX_i^n(t) = a(X_i^n(t),\mu^n(t))dt + dw_i(t),\ t \in [0,T],\ i \in \mathbb{Z}, \\ \mu^n(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{X_i^n(t)}, t \in [0,T], \\ \mu^n(0) = \dfrac{1}{n}\mu^n. \end{cases}$$

Припустимо, що:

1) функція a обмежена та неперервна;

2) функція $a(x,\mu)$ неперервно диференційовна за x та

$$\forall C > 0\ \exists L_C > 0\ \forall \mu \in \mathfrak{M}_C\ \forall x \in \mathbb{R}\left|a'_x(x,\mu)\right| \le L_C;$$

3) $\exists K > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \mu,\nu \in \mathfrak{M}_\infty\ \left|a(x,\mu) - a(x,\nu)\right| \le K\rho_\infty(\mu,\nu);$

4) $m \in \mathfrak{M}_\infty.$

Тоді послідовність мірозначних процесів $\{\mu^n(\cdot),\ n \ge 1\}$ слабко збігається до $\nu(\cdot)$ як послідовність випадкових елементів в $C([0,T],(\mathfrak{M},\rho))$. Тут мірозначний процес $\nu(\cdot)$ однозначно визначається з рівняння (2).

Список літератури

Dawson, D. (1993). *Measure-valued markov processes*. Berlin: Springer.

Gartner, J. (1988). On the McKean—Vlasov limit for interacting diffusions, *Math Nachr.*, *137*, 197–248.

McKean, H. P. (1966). A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, *56*, 1907–1911.

Sznitman, A. S. (1991). Topics in propagation of chaos. *In Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIX—1989* (pp. 165-251). Berlin; Heidelberg: Springer.

АСИМТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ ОРТОГОНАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ У ФУНКЦІОНАЛЬНІЙ ЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

Є. В. Фесик

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

nozdormus@mail.ru

Відомо, що багато наборів даних в економіці містять похибки у змінних. Проблема похибок вимірювання є однією з найбільш фундаментальних проблем в емпіричній економіці. Наявність помилок вимірювання викликає відхилення та несумісність оцінок параметрів, що призводить до, в тій чи іншій мірі, помилкових результатів в економічному аналізі.

Метою даної роботи було проілюструвати асимптотичні властивості при оцінюванні параметрів ортогональної регресії за наявності класичних похибок вимірювання на прикладі найпростішої моделі регресії — лінійної моделі у функціональному випадку з відомим відношенням дисперсій похибок вимірювання (Cheng & Van Ness, 1999). Ця модель описується двома рівняннями:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i \ ,$$
$$x_i = \xi_i + \delta_i \ , \ i = 1,\ldots,n.$$

Усі величини тут скалярні, ξ_i — неспостережувані значення прихованої змінної (регресора), x_i — спостережувані значення сурогатної змінної, y_i — спостережувані значення відгуку, ε_i — похибки спостережень відгуку, δ_i — похибки вимірювання регресора. Оцінюванню підлягають вільний член β_0 та кутовий коефіцієнт β_1. Можливі ситуації, коли виникає потреба оцінити також деякі заважальні параметри моделі.

Типовими є наступні припущення про модель спостережень.

(i) Величини ξ_i , ε_i , δ_i , $i \geq 1$, є стохастично незалежними.

(ii) Похибки ε_i є однаково розподіленими, центрованими, із скінченною та додатною дисперсією σ_ε^2.

(iii) Похибки δ_i є однаково розподіленими, центрованими, із скінченною та додатною дисперсією σ_δ^2.

(iv) Вважаємо, що σ_ε^2 невідоме, але відомо, що $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\delta^2$.

Зауважимо, що за відомого відношення $\lambda = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\delta^2$ дослідження оцінок можна звести до умови (iv).

У *структурному* випадку прихована змінна є випадковою, точніше — вимагають наступне.

(v) Величини ξ_i однаково розподілені, $E\xi_i = \mu_\xi$, $D\xi_i = \sigma_\xi^2 > 0$.

Зауважимо, що за умов (i), (v) величини ξ_i — незалежні та однаково розподілені. У *функціональному* випадку замість (v) виконується таке:

(vi) Величини ξ_i невипадкові.

Далі верхня риска означає вибіркове середнє, наприклад,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Вибіркова дисперсія значень x_i задається виразом

$$S_{xx} = \overline{\left(x - \overline{x}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2.$$

Вибіркова дисперсія значень y_i позначається S_{yy}, а вибіркова коваріація значень x_i та y_i позначається

$$S_{xy} = \overline{\left(x - \overline{x}\right)\left(y - \overline{y}\right)}.$$

Для лінійної моделі у функціональному випадку з умовою (iv) ми доводимо консистентність і строгу консистентність наступних оцінок ортогональної регресії (Масюк та ін., 2015), які задані формулами:

$$\widehat{\beta_1} = \frac{S_{yy} - S_{xx} + \sqrt{\left(S_{yy} - S_{xx}\right)^2 + 4S_{xy}^2}}{2S_{xy}},$$

$$\widehat{\beta_0} = \overline{y} - \widehat{\beta_1}\overline{x},$$

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{S_{yy} - \widehat{\beta_1}^2 S_{xx}}{1 - \widehat{\beta_1}^2}.$$

Наступний результат стверджує асимптотичну нормальність сукупної оцінки $\left(\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1}, \widehat{\sigma_\varepsilon^2}\right)$.

Теорема. *Нехай виконуються умови (i)-(iv), (vi),*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k \to m_k,\ k = 1,2;\ m_2 > m_1^2$$

та

$$\exists > 0 : E\left|\delta\right|^{4+} < \infty,\ E\left|\varepsilon\right|^{4+} < \infty,\ \overline{\left|\xi\right|^{2+}} \le const.$$

Тоді при $\beta_1 \ne \pm 1$ *має місце збіжність*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\beta_0}-\beta_0\\ \widehat{\beta_1}-\beta_1\\ \widehat{\sigma_\varepsilon^2}-\sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}\xrightarrow{d} N\left(0,B\right),$$

де B — додатно визначена матриця.

Список літератури

Cheng, C-L., & Van Ness, J. W. (1999). *Statistical Regression with Measurement Error*. London: Arnold.

Масюк, С. В., Кукуш, О. Г., Шкляр, С. В., Чепурний, М. І., Ліхтарьов, І. А. (2015). *Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків*. Київ: ДІА.

ПОСИЛЕНА ОЗНАКА НЕЕРГОДИЧНОСТІ КРИТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗРОСТАННЯ

Ю. П. Філонов, О. М. Шутовський
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
shutovsk@ukr.net

1. Моделлю зростання тут є система яка керується однорідним марківським ланцюгом (м. л.) (Nummelin, 1984; Kersting, 1986). Основний показник $F(x) \in \left[1,\infty\right)$ є ступенем розвитку системи на просторі E станів $(x \in E)$ незвідного м. л. $\zeta_n, n = 0,1,\dots,$ σ — алгебра сепарабельна, $p(x,dy)$ — перехідне ядро. Функція F суттєво необмежена, тобто не є обмеженою на множинах повної міри незвідності (далі слово «суттєво» в подібних випадках не пишемо), множини $\left\{x \middle| F < c\right\}$ є скінченими сумами минорантних множин при великих C. Неергодичність м. л. дає властивості: $F_n = F(\zeta_n) \to \infty$ за ймовірністю, відносна частота подій $(F_n < C)$ з часом майже напевно прямує до 0 (при $C = \mathrm{const}$).

2. У роботі Mikhaylenko, Filonov (2015). розглянуто схему дослідження неергодичності і тут в п. 4 приведемо результат звідти, а в п. 5—6 сформулюємо та доведемо більш конкретне твердження яке, окрім усього, працює для збурених (неоднорідних за простором) критичних гіллястих процесів, процесів Іржини з дискретним часом (невеликий приклад у п. 7).

3. Позначимо $v = F(y) - F(x)$ — стрибок $(x = \zeta_n, y = \zeta_{n+1})$,

$$a = pv = \int p(x,dy)v$$

— середній $(M^x v)$ стрибок; $f\left(\left[1,\infty\right) \to \left[1,\infty\right)\right)$ — необмежена, зростаюча, опукла догори тест-функція, $v_f = f(F(y)) - f(F(x))$ — її стрибок.

4. **Теорема 1** (див. п. 2). *Нехай виконуються умови:*

4а) $\left|a\right|, F^{-1}p\left(v^2\right)$ *обмежені на* E;

4б) $P\left(v_f < -\varepsilon\right) > \varepsilon$ *коли* $F > C$ $(C,\varepsilon > 0$ *деякі числа);*

4в) $\sum a_m^- < \infty \quad \left(a_m^- = \max\left(a^- \,/\, m < f \le m+1\right), \quad a^- = \max(-a,0)\right)$.

Тоді м. л. ζ_n *неергодичний (непозитивний).*

Зауваження. Теорема допускає необмеженість $M^x\left|v\right|$, $M^x v^2$ на E, що є важливим для моделей зростання.

5. **Теорема 2.** *Позначимо* $\sigma^2 = Dv$, $\tilde{\sigma}(t) = \max(\sigma\left|F \le t\right.)$, $\tilde{a}(t) = \max(a^-\left|F \ge t\right.)$, $v^* = (v-a)\sigma^{-1}$ — *нормований стрибок. Нехай виконуються умови:*

5а) $\left|a\right|, F^{-1}\sigma^2, \tilde{\sigma}\sigma^{-1}, \sigma^{-1}$ *обмежені на* E $\left(t = F(x)\right)$, σ *необмежене;*

5б) $p(v^* < -\varepsilon) > \varepsilon$ *при* $F > C$ *і деяких* $\varepsilon, C > 0$*;*

5в) $\int\limits_1^\infty \tilde{a}\tilde{\sigma}^{-1}dt < \infty$. *Тоді м. л. не ергодичний (непозитивний).*

6. **Доведення теореми 2.** З 5а) випливає: $\tilde{\sigma}F^{-0,5} < C_1\sigma F^{-0,5} < C_2$, тобто $\tilde{\sigma}^{-1} > C_2^{-1}F^{-0,5}$ ($C_{1,2} > 0$ деякі). Розглянемо функцію

$$f = \int\limits_1^t \tilde{\sigma}^{-1}dt,$$

яка з попереднього буде необмеженою, зростаючою та по причині спадання $\tilde{\sigma}^{-1}$ (означення $\tilde{\sigma}$) — опуклою догори, як потрібно для теореми 1. З 5а) випливає 4а) $\left(Mv^2 = \sigma^2 + a^2\right)$. Перевіримо 4б). З опуклості f буде $vf' = v\tilde{\sigma}^{-1} > v_f$, тому

$$\left(v_f < -\varepsilon\right) \supset \left(v < -\tilde{\sigma}\varepsilon\right) = \left(v^* < -\tilde{\sigma}\sigma^{-1}\left(\varepsilon + a\tilde{\sigma}^{-1}\right)\right).$$

Т. я. $a\tilde{\sigma}^{-1} < \tilde{a}\tilde{\sigma}^{-1}$ спадає до 0 $\left(F \to \infty\right)$ за означеннями та п. 5в), а $\tilde{\sigma}\sigma^{-1}$ обмежене (5а)), то 4б) (може з іншими ε, C) випливає з 5б). Далі, з умови 5в) буде

$$\infty > \int\limits_1^\infty \tilde{a}\tilde{\sigma}^{-1}dt = \int\limits_1^\infty \tilde{a}(t(f))\frac{df}{dt}dt = \int\limits_1^\infty \tilde{a}df,$$

тому за ознакою Коші ряд $\sum \tilde{a}(t_m)$, де $f(t_m) = m$, збігається. Але

$$\max\left(a^- \middle| m < f \le m+1\right) \le \max\left(a^- \middle| F \ge t_m\right)$$

т. я. $F \ge t_m \equiv f \ge m$. Тому 4в) виконується, теорема 2 випливає з теореми 1.

7. **Приклад.** Критичний процес Іржини з міграцією. Нехай стрибок v м.л. з стану $F \in E = \left[1, \infty\right)$ розподілений як $v'' + v'$, де v'' — стрибок з F деякого критичного процесу Іржини (для нього відповідні параметри будуть $a'' = 0, (\sigma'')^2 = CF$ як відомо), а міграція v' обмежена (наприклад «фізично»: $\left|v'\right| \le C$). Припускається виконання формальних умов (сепарабельність, незвідність, мінорантність). Тоді, навіть при залежності v', v'' (умовній) буде $\sigma^2 \sim CF$ (опустимо перевірку). Теорема 2 стверджує що, наприклад, при $a' > -F^{-0,51}$ для великих F (тобто при можливому перевищені в середньому еміграції над імміграцією) процес з міграцією все рівно залишиться неергодичним. Основна умова 5в) при перевірці неергодичності стає очевидною.

У Mikhaylenko, Filonov (2015) є інші загальні результати та застосування (з доведеннями).

Список літератури

Kersting, G. (1986). On recurrence and transience of growth models. *J. Appl. Probab*, *23*, 614–625.

Mikhaylenko, V., & Filonov, Yu. (2015). Unlimiteness by the probability system that are guided by common homogeneous Markov chain. *Management of Development of Complex systems, 22* (1), 107–115.

Nummelin, E. (1984). *General Irreducible Markov chains and Non-Negative Operators*. London, Cambridge University Press.

АСИМПТОТИКА ВИПАДКОВОГО БЛУКАННЯ З МОДИФІКАЦІЄЮ В НУЛІ

В. Л. Хоменко
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
khomenko.vlad7@gmail.com

Розглянемо випадкову послідовність $\{S_n\}_{n\geq 1}$, на $\mathbb{Z}$, що задовольняє наступну властивість

$$P(S_{n+1} = S_n + 1 \mid S_1 = i_1, S_2 = i_2, \ldots, S_n = i_n) = p_k = (\frac{1}{2} + k\Delta) \vee 1,$$

$$P(S_{n+1} = S_n - 1 \mid S_1 = i_1, S_2 = i_2, \ldots, S_n = i_n) = q_k = (\frac{1}{2} - k\Delta) \wedge 0,$$

де k — це кількість відвідування нуля послідовністю $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $\Delta > 0$.

Розглянемо послідовність серій випадкових блукань $\{S_n^{(n)}\}_{n\geq 1}$ таких, що в серії з номером n

$$\Delta = \Delta_n = \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

За допомогою лінійної інтерполяції, довизначимо $S_{nt}^{(n)}$ на $[0, \infty)$

$$S_{nt}^{(n)} = S_{[nt]}^{(n)} + \{nt\}(S_{[nt]+1} - S_{[nt]}), \quad t \geq 0.$$

Теорема 1.1 1. *Якщо* $\alpha \in (0,1)$, *то послідовність серій* $X_n(t) = \frac{S_{nt}^{(n)}}{\sqrt{n^{2-\alpha}}}$ *слабко збігається до лінійного руху*

$$X_n(t) \xrightarrow{d} 2\eta t, \quad t \geq 0,$$

де η — це випадкова величина з функцією розподілу

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Якщо $\alpha > 1$, *то послідовність серій* $Y_n(t) = \frac{S_{nt}^{(n)}}{\sqrt{n}}$ *слабко збігається до вінерівського процесу*

$$Y_n(t) \xrightarrow{d} W(t), \quad t \geq 0.$$

Список літератури

Биллингсли, П. (1977). *Сходимость вероятностных мер*. Москва: Наука.
Феллер, В. (1967). *Введение в теорию вероятностей и ее приложение* (Т. 1). Москва:
Ширяев, А. Н. (1957). *Вероятность*. Москва: Изд-во МГУ.

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛІПСОЇДА ПЕТУНІНА ДЛЯ ОЦІНКИ СЕРЕДНЬОГО

М. П. Шликов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

maksym.shlykov@gmail.com

Еліпсоїди широко застосовуються в сучасній математичній статистиці, теорії прийняття рішень та машинному навчанні. За їх допомогою будують опис даних, оцінюють математичне сподівання, моду та медіану, наближують квантилі. Наприклад, для побудови матриці коваріації та оцінки середнього використовують еліпсоїд мінімального об'єму, що містить вхідну вибірку а також метод MCD (minimum covariance determinant). Тут і надалі ми вважатимемо, що p — це розмірність простору, у якому задано вхідну вибірку даних, а n — розмір цієї вибірки.

У роботі Lyashko, Klyushin, Alexeyenko (2013) описано алгоритм побудови довірчого еліпсоїда, запропонований Ю. І. Петуніним. Автори використовують його побудови багатовимірного ранжування даних та наводять його основну перевагу: незалежно від розподілу вхідної вибірки його рівень значущості залежить лише від її розміру та дорівнює $\dfrac{n}{n+1}$. Проте алгоритм має недолік: його незручно застосовувати у просторах з розмірністю $p > 3$.

Для усунення даного недоліку в роботі Шликов (2015) алгоритм було модифіковано. Новий алгоритм є універсальним і може бути легко застосований у довільному скінченновимірному просторі. Слід також зазначити, що було збережено асимптотичну складність вихідного алгоритму. Для просторів розмірностей 2 та 3 вона складає $O(n \lg n)$, для просторів вищих розмірностей — $O(n^2)$. Для простоти ми вважаємо арифметичні операції з векторам елементарними. Модифікований алгоритм має вигляд:

Вхідні дані: $X = \left\{x_1,\ldots,x_n\right\}$

Алгоритм

1. $M_n^{(0)} \leftarrow M_n, B = \varnothing, k = 0;$

2. Доки $k < p$ виконувати:

2.1. Знайти $x_l^{(k)}$ та $x_t^{(k)}$ — точки, що визначають діаметр множини $M_n^{(k)}$;

2.2. $B \leftarrow B \bigcup \left\{ \dfrac{x_l^{(k)} - x_t^{(k)}}{\left\| x_l^{(k)} - x_t^{(k)} \right\|} \right\};$

2.3. $M_n^{(k+1)} \leftarrow P_L M_n^{(k)}$, де L — це гіперплощина, визначена рівнянням $(x, x_l^{(k)} - x_t^{(k)}) = (x_t^{(k)}, x_l^{(k)} - x_t^{(k)});$

2.4. $k \leftarrow k+1$;

3. Сформувати матрицю *U*, стовпчиками якої є вектори множини B;

4. $M_n' \leftarrow U^{\mathrm{T}} M_n$;

5. Знайти мінімальний паралелепіпед зі сторонами, напрямленими вздовж координатних осей, що містить множину M_n'. Нехай c — центр цього паралелепіпеда;

6. Побудувати перетворення *S*, що переводить цей паралелепіпед у куб;

7. $M_n'' \leftarrow SM_n'$, $c' \leftarrow Sc$;

8 $R \leftarrow \max\left\{\left\|x - c'\right\|,\ x \in M_n''\right\}$;

9 $E \leftarrow \dfrac{1}{R^2}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

10. $E \leftarrow US^{\mathrm{T}}ESU^{\mathrm{T}}$, $c \leftarrow Uc$;

Вихідні дані: E — матриця вихідного еліпсоїда, c — центр.

Наведений алгоритм вимагає невиродженості вхідної вибірки, проте може бути застосований і у виродженому випадку. Під виродженістю вибірки ми маємо на увазі наявність підпростору вихідного простору R^p, що її містить. У цьому випадку зазнають змін кроки 2 та 9 а також зміняться вихідні дані алгоритму: ми матимемо матрицю еліпсоїда, яка буде виродженою, його центр а також набір векторів $\{b_1, \dots, b_t\}$, що визначають підпростір, у якому знаходиться вибірка. Еліпсоїд тоді має вигляд:

$$\begin{cases} (x-c)^T E(x-c) \le 1 \\ (x, b_i) = 0, i = \overline{1, t} \end{cases}$$

При оцінці параметрів розподілу важливе місце займає стійкість отриманої оцінки. У роботі Rousseeuw (1985) розглядаються питання стійкості оцінок математичного сподівання, отриманих за допомогою еліпсоїда мінімального об'єму та методу MCD. Автори розглядають так звану точку нестійкості (breakdown).

Нехай ми маємо вхідну вибірку X та деяку оцінку її параметра $T(X)$. Позначимо

$$\beta(m, T, X) = \sup_{X'} \left\|T(X) - T(X')\right\|,$$

де X' отримана з X заміною довільних m елементів на довільні вектори. Тоді точкою нестійкості називається наступна величина:

$$\varepsilon_n^*(T, X) = \min\left\{\frac{m}{n} \mid \beta(m, T, X) < \infty\right\}$$

Точка нестійкості є характеристикою частини точок, які можуть бути викидами і при цьому змінять оцінку на скінченну величину.

Розглянемо наступну оцінку середнього вхідної вибірки:

$T\left(X\right) :=$ центр еліпсоїда Петуніна мінімального об'єму, що мітить принаймні $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$ точок X.

У цьому випадку вдалося довести, що

$$\varepsilon_n^*(T,X)=\frac{\left[\dfrac{n}{2}\right]-p+1}{n}.$$

Асимптотично це означає, що ми можемо мати 50% викидів у даних, а оцінка середнього зміститься на деяку скінченну відстань. Оцінка, отримана за допомогою еліпсоїда Петуніна, має таку саму точку нестійкості, як і еліпсоїд мінімального об'єму та метод MCD.

Подальші дослідження із якістю наближення середнього та матриці коваріації. Одним із актуальних питань є розподіл відстані Махаланобіса, визначеної еліпсоїдом Петуніна. Зокрема, невідомим залишається її розподіл а також наявність збіжності до відомих розподілів. Також заслуговує уваги питання побудови наближення квантилів з довільним рівнем значущості за допомогою даного еліпсоїда.

Список літератури

Lyashko, S. I., Klyushin, D. A., & Alexeyenko, V. V. (2013). Multivariate ranking using elliptical peeling. *Cybernetics and Systems Analysis, 49* (4), 511–516.

Rousseeuw, P. J. (1985). Multivariate estimation with high breakdown point. *Mathematical Statistics and Applications, 8,* 283–297.

Шликов, М. П. (2015). Про алгоритм побудови довірчого еліпсоїда Петуніна. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки, 2,* 203—208.

IV

ІСТОРІЯ
ТА МЕТОДИКА
МАТЕМАТИКИ

THE DIAGONAL TRICKS AND THE MAGIC HATCHEL

E. Khomenko
Kyiv, Ukraine
roman1928@ukr.net

While dealing with the crisis in math (the Russel's paradox, 1897), the author found it expedient to show that even such "greatest achievements of modern mathematics" (in D. Hilbert's view) as the Cantor's theory of infinite numbers may prove contradictory and faulty (IX Kravchuk Conf., 2002, Sect. IV, p. 567). The Cantor's proof of impossibility of the set of the natural numbers (N) being equivalent to the continuum (C) have been based on the rather ingenious *diagonal method* permitting to construct for a series of real numbers between 0 and 1 (equivalent by Cantor to the whole continuum) a number not belonging to this series. So, were it possible to arrange a one-to-one correspondence of C and N (in other words, to *enumerate* the continuum C), we could diagonally build a number in C not included into our enumerating correspondence. Which "proves C is bigger than N". *Orl korrect* from the "uniquely true" formalist's standpoint. But in the above mentioned contribution to the IX-th Kravch. Conf. the author had managed to present a laughingly simple way of establishing the requested one-to-one correspondence between C and N, thus refuting the whole Cantor's theory (and the formalist approach to math, for that matter).

And now we would like to add a colorful touch to the matter in question by pointing out that the diagonal method permits to prove, just the way Cantor did it, that N (the set of natural numbers) is not equal to N (itself)! In this case we should fill *all* the infinite "vacant places" before the significant figures of a number with zeroes, and the diagonal would run from upper right to down left (unlike upper left to down right as in Cantor's). Moreover, by arranging C in a series (e. g., by filling consecutively the decimal places with decimal figures and the "infinite rest" with zeroes) we can, in that case, too, construct a "diagonal number" and "prove" – as sure as Cantor did it – that C is not equal to itself! Glory to the powerful *diagonal method* and the "free play of human mind" (what Hilbert believed math to be)! Could it not be proven, too, just for the fun of it, that nothing is equal to nothing (or, perhaps more optimistic, anything to anything)?!

Another additional touch is concerned with the use the Menger's theorem as a means of illustrating and testing ground for the *eidetic* approach proposed by the author as a remedy for the crisis in math (X Kravch. Conf., 2004, Sect. IV, p. 749; XI, 2006, Sect. I, p. 635; XII, 2008, Sect. II, p. 842).

Let us imagine a graph G as a network between two singled out nodes u and v that can be "combed" through, passing step by step, separator by separator, by a *Magic Hatchel* (MH) from u to v. A "step" means here that a node *in* MH is replaced by the nodes neighboring that node *after* MH (as to the direction of its movement), which transfers MH to the next (neighboring) separator S_r in its progress from u to v.

Now, let us consider the *running transmission* T_r from u to S_r. It is easy to see that with every step of our MH it either retains its magnitude or lessens it (in case of lessening of the next separator). Thus, we can palpably, evidently, i.e. *eidetically* perceive that the size of T_r is defined by the breadth (or rather *narrowness*) of the separator left behind in this step. And once the running MH comes smack on the neighborhood of the node *v*, the T_{max} (total maximal transmission from *u* to *v*) must emerge as equal to the minimal separator S_{min} between, which means the Menger's theorem being *eidetically* shown.

Alternatively, we could with every step of MH *split* (duplicate) the nodes of the smaller of the two running separators in question (the former and the next) so as to make the running separator T_r as big as the bigger of the two involved. Having passed the whole way from *u* to *v*, the MH evidently leaves behind a transmission $T_{max}=S_{max}$. And if we now reverse the splitting process we evidently lessen the breadth of our transmission to the size of our separators, the ultimate result being defined by the narrowest of them. Hence, finally, $T_{max}=S_{min}$.

We ignore the formal details of the proof (a deficiency easily made up by interested readers), because our prime aim is to expound the clarifying force of the eidetic approach as represented by our newfangled gadget of the Magic Hatchel, assuredly useful in proving the rather important Menger's theorem in question.

It is very advisable of course, to find out as many, as possible other examples of eidetic proofs, just to drive the nail home. And after the intuitive understanding is soundly familiarized, the theoretical grounding may come on the agenda, as outlined in our contributions to the XIII-th. XIV-th and XV-th Kravch. Confs, thus reforming mathematics to the crisis-free condition. Quite a job, indeed.

ПРИМЕРЫ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Л. Г. Авраменко
НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
yuragoco@mail.ru

Причиной появления настоящей работы послужили два обстоятельства.

I. Прекрасная книга Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления» используется в преподавании более полувека. Но мало кто помнит учебник того же автора «Основы математического анализа», содержащий примерно тот же материал, что и «Курс», только без многочисленных примеров. Поэтому результаты поиска содержательных, современных примеров приложений математического анализа к практике постоянно освещаются автором на различных конференциях.

II. Адресованная студентам статья В. А. Князева, В. С. Черкасского «Дискретное преобразование Фурье — как это делается», из которой невозможно понять ни как это делается, ни почему так делается.

Пример. Преобразование Фурье F лежит в основе курса теории (обработки) сигналов. Сигнал трактуется как числовая функция времени $y = f(t)$. При этом, как известно студентам, $F : L_2(-\infty;\infty) \to L_2(-\infty;\infty)$. Первый культурный шок студента — что означает, откуда берется и как задается на практике сигнал от «бесконечного времени». Он не преодолевается даже предположением, что сигнал можно задать на полуоси $[0;\infty)$, продолжив его на всю ось четным образом, т. е. от сотворения мира до его конца. Более того, оказывается, что из сигнала выделяют какой-либо отрезок, например, $[-l;l]$ и работают с ним, предполагая, что функция имеет период $T = 2l$ и для периодичности $y(-l) = y(l)$. Поскольку на практике сигнал анализируется цифровым устройством, измеряющим его значения через равные промежутки времени $\Delta t = \dfrac{2l}{n}$, то для анализа доступен вектор $\overline{y} = (y_0; y_1; y_2, ..., y_n)$, содержащий результат n измерений и состоящий из $n+1$ числа, в котором из соображений периодичности функции полагают $y_0 = y_n$.

Для дифференцируемой (для простоты) на отрезке $[-l;l]$ функции, справедливо разложение в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi t}{l} + b_m \sin\frac{m\pi t}{l}\right), \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt, a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{m\pi t}{l}dt,\ b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{m\pi t}{l}dt$$

Далее воспользуемся формулой трапеций для нахождения коэффициента

$$a_0 = \frac{1}{l}\Delta t(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}).$$

Учитывая, что $y_0 = y_n$ и $\frac{2l}{\Delta t} = n$, получаем

$$a_0 = \frac{1}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Аналогично

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos\frac{m\pi k\Delta t}{l} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos mk\frac{2\pi}{n}.$$

и

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin\frac{m\pi k\Delta t}{l} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin mk\frac{2\pi}{n}.$$

Выводы. Для приближенного вычисления коэффициентов a_0, a_m, b_m требуется только вектор значений наблюдаемого сигнала в точках

$$t_k = -l + k\Delta t, k = \overline{0, n},$$

которые в теории обработки сигналов называются *отсчетами*. Эти коэффициенты зависят от числа произведенных наблюдений и наблюдаемых значений и не зависят от промежутка времени, на котором они произведены. Это не удивительно. Если в формуле (1) переменную t заменить переменной ωt, период функции изменится в ω раз, а коэффициенты Фурье останутся прежними, т.е. коэффициенты Фурье зависят от формы сигнала, а не от длительности промежутка $[-l; l]$, на который этот сигнал «растянут» по оси t.

Для вычисления коэффициентов a_m, b_m требуются значения тригонометрических функций в n точках, которые можно вычислить заранее и запомнить в виде массива. Эффективная процедура вычисления коэффициентов Фурье называется быстрым преобразованием Фурье (БПФ) и в силу алгоритмических особенностей требует, чтобы число отсчетов составляло степень 2.

При вычислении коэффициента a_n значения тригонометрической функции $\cos nk\frac{2\pi}{n} = 1$ при всех k. Коэффициенты a_{n-1} и b_{n-1} — последние, содержащие полезную информацию. Это приводит к частоте Найквиста необходимой дискретизации сигнала.

Все сказанное доступно студентам в примерах к рядам Фурье.

Список литературы

Князев, Б. А., Черкасский, В. С. (2008). Дискретное преобразование Фурье — как это делается. *Вестник НГУ. Серия Физика, 3* (4), 74—86.

Фихтенгольц, Г. М. (1968). *Основы математического анализа* (Т. 1). Москва: Наука.

Фихтенгольц, Г. М. (1969). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (Т. 3). Москва: Наука.

ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ЗМІСТУ ТЕСТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ GOOGLE DOCS ДОДАТКУ

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний,
А. Ф. Дудко, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
a.dyx@mail.ru

У доповіді розглянуто технологію оцінювання якості змісту тестів з використанням Google Docs додатку, яка передбачає організацію та проведення експертизи зі встановлення відповідності між тестовими завданнями і змістовною областю тесту та приймання узагальнюючих висновків розробником.

У сучасних умовах реформування освітньої галузі актуальною є проблема покращення контролю знань студентів. У зв'язку з упровадженням в освітній процес інформаційно-комп'ютерних технологій (ІКТ), які відповідають викликам сучасного інформаційного суспільства, особливого значення набуває комп'ютерне тестування. Так в НТУУ «КПІ» кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей організовано комп'ютерне тестування з вищої математики з використанням створеного викладачами кафедри комплекту дистанційних курсів «Вища математика» (Алєксєєва, Гайдей, Диховичний, Коновалова, Федорова, 2009). Вибір тестування як засобу оцінювання навчальних досягнень студентів вимагає вирішення ряду питань, пов'язаних із процесом розробки тестів. Однією з найвагоміших задач є задача оцінювання якості змісту тестів. Оцінювання якості змісту тесту, у свою чергу, породжує питання організації експертизи та вибору інструментарію для її проведення. Використання ІКТ для проведення експертизи дає можливість підвищити ефективність роботи експертів. Тому набувають значущості задачі вибору засобу ІКТ у якості інструменту проведення експертизи та розробки технології оцінювання якості змісту тесту з його використанням.

Для оцінювання якості змісту тесту необхідно вирішити наступні задачі:

— розробити специфікацію тесту;

— відібрати групу експертів, компетентних у змістовній області;

— організувати та провести експертизу якості змісту тесту;

— прийняти рішення щодо якості змісту тесту та подальшої роботи з ним.

Розробка специфікації тесту. Специфікація є описом тесту, який включає необхідну інформацію про цілі, завдання та структуру тесту, а також про основні вимоги до правил проведення тестування, обробку результатів та їх інтерпретацію.

Відбір групи експертів, компетентних у змістовній області. Оцінка якості змісту тесту зазвичай проводиться незалежними експертами, які не брали участь у розробці тесту. Як правило, число експертів складає не менше трьох осіб. До експертизи розробники залучають найбільш досвідчених викладачів, які мають великий стаж роботи з тими студентами, для яких призначений тест.

Організація та проведення експертизи. Правильна організації експертизи є однією з найвагоміших задач розробників тесту, оскільки від неї залежить ефективність роботи експертів. У якості інструменту проведення експертизи тестів з вищої математики нами був обраний Google Docs додаток, використання якого має ряд переваг:

- ✓ Швидкі та ефективні збір і оброблення даних.
- ✓ Мінімальні витрати.
- ✓ Можливість проведення експертизи незалежно від часу та відстані.
- ✓ Зручність спільної роботи з документами.
- ✓ Можливість обговорення та коментування в он-лайн режимі.

За 2—3 дні до початку роботи кожен експерт повинен ознайомитися зі специфікацією рецензованого тесту, що містить пояснення щодо його структури та запланованого до перевірки змісту. Для цього створюється файл у Google Docs, в якому розміщується текст специфікації (список вимог до рівня підготовленості іспитників додається як додаток на окремій сторінці в кінці документа) та текст тесту. Доступ до документу відкривається всім експертам.

Обрана нами дельфійська техніка проведення експертизи полягає в багаторазовому поштовому анкетуванні однієї і тієї ж групи експертів. Після першого опитування експертів і обробки його результатів, підсумки повідомляються учасникам експертної групи. Вони повинні або підтвердити свою точку зору, висловлену на попередньому етапі, і якщо вона значно відрізняється від думки більшості, розгорнуто її мотивувати, або змінити свою оцінку відповідно до думок більшості учасників. Потім знову обробляються висновки експертів, результати знову розсилаються експертам і так до тих пір, поки не будуть отримані узгоджені оцінки експертів.

Технологія експертизи якості змісту тесту зазвичай включає три напрямки роботи експертів:

- оцінювання завдань тесту;
- оцінювання тесту у цілому;
- оформлення узагальнюючих висновків і рекомендацій щодо поліпшення змісту тесту.

Робота експерта по першому напряму полягає в аналізі змісту окремих завдань тесту. Для цього експерт повинен заповнити таблицю, наведену на рис. 1. Таблиця розміщується розробником тесту в файлі Google Docs. Для кожного експерта створюється окремий файл експертизи, до якого йому відкривається доступ. Не рекомендуємо створювати єдиний файл з дублюванням таблиці для всіх експертів, оскільки можливість бачити коментарі інших експертів впливає на вираження об'єктивної думки.

Другий напрямок роботи експерта пов'язаний з аналізом якості змісту всього тесту.

Під час роботи за другим напрямом слід мати на увазі, що зміст тесту визначається як оптимальне відображення вимог до рівня підготовки іспитників у системі завдань тесту. Експерт, використовуючи дані четвертого рядка таблиці з рис. 1, повинен обчислити відсоток вимог, охоплених тестуванням. Отриманий експертом відсоток охоплення порівнюється з наведеними в специфікації тесту.

	№ завдання	1	2	3	…	L	$\sum$
	№ правильної відповіді в закритих завданнях						
	Правильна відповідь завдань з відкритою відповіддю						
	№ вимоги до рівня підготовленості						
	Рівень базовості						
	Значущість змісту завдання						
	Очікуваний відсоток виконання іспитниками з задовільною підготовкою						
	Очікуваний відсоток виконання іспитниками вибірки						
	Очікуваний час виконання завдання, хв.						
	Завдання, зміст яких не відповідає специфікації в цілому						
	Завдання, зміст яких не відповідає підтемі специфікації						
	Завдання, умова яких є нечіткою та неоднозначною						
	Завдання, в умові яких міститься не вся інформація для надання правильної відповіді						
	Завдання, в умові яких міститься інформація, яка дає відповідь на інші завдання тесту						
	Завдання, в яких зустрічаються неправильно складені дистрактори						
	Інші невдалі завдання						
	Коментарії про якість завдання						

Рис. 1. Результати експертизи змісту завдань

Експерт має оцінити правильність пропорцій змісту тексту, підраховуючи відсотки завдань у тесті, орієнтованих на матеріал кожної підтеми, які разом зі своїм баченням оптимального співвідношення розділів наводить на окремій сторінці файлу експертизи.

Експерт перевіряє відповідність змісту тесту його специфікації. Для цього експерт обчислює загальну кількість завдань, які не відповідають специфікації тесту, використовуючи дані 10 та 11 рядків таблиці з рис. 1.

Використовуючи дані 9 рядка таблиці з рис. 1 експерт обчислює очікуваний час виконання всього тесту і записує його в комірці, яка знаходиться на перетині 9 рядка та останнього стовпця.

Третій напрям роботи експерта полягає в оформленні узагальнюючих висновків і рекомендацій щодо покращення змісту тесту.

Прийняття рішення щодо якості змісту тесту та подальшої роботи з ним. На основі результатів експертизи розробник перевіряє узгодженість думок експертів та робить узагальнюючі висновки щодо якості змісту тесту. Узгодженість висновків експертів перевіряється на основі обчислення коефіцієнта рангової конкордації Кендалла — Сміта (Орлов, 2002). У випадку, коли висновки експертів є узгодженими, то відповідно до методу Дельфі експертиза повторюється. Коли ж висновки експертів узгоджені, то усереднюючи думки всіх експертів, розробник приймає рішення щодо подальшої роботи з тестом:

- залишити тест без змін;
- необхідна деяка корекція тестових завдань або специфікації тесту;
- необхідно докорінно змінити структуру тесту, переглянути специфікацію та провести повторну експертизу якості тесту.

Оцінювання якості змісту тесту є невід'ємною складовою створення валідного тесту. Наведена в роботі технологія оцінювання якості змісту тестів підтвердила свою ефективність і використовується в НТУУ «КПІ» викладачами кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей при створенні тестів з вищої математики.

Список літератури

Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., Федорова, Л. Б. (2009). Про розвиток та досвід експлуатації комплекту дистанційної освіти «Вища математика». *Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт*, *31*, 49—56.

Орлов, А. И. (2002). *Экспертные оценки*. Москва.

ПОСЛІДОВНІСТЬ РОЗДІЛІВ У КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ: ЧИ ІСНУЄ ОСТАТОЧНЕ РІШЕННЯ?

О. І. Баліна, Ю. П. Буценко
Київський національний університет будівництва і архітектури,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
armchairdoc@yandex.ua

Питання про послідовність викладу розділів курсу вищої математики належить до тих, які виникають перед кожним лектором-математиком у технічному виші з набуттям ним досвіду та, відповідно, глибини осмислення задач цього курсу та можливостей їх вирішення. Серед факторів, які впливають на остаточне рішення цієї проблеми в кожному конкретному випадку, вкажемо наступні:

— розділ кредитів, виділених на вивчення курсу, між семестровими;

— вимоги, пов'язані із забезпеченням вивчення інших навчальних дисциплін (фізики, прикладної геометрії, теоретичної та прикладної механіки, теорії електричних кіл, теорії електромагнітного поля та ін.);

— особливості уподобання лектора;

— розподіл між семестровими модулями запланованих у навчальному плані контрольних заходів (контрольних робіт, типових розрахунків, заліків, екзаменів та ін.).

Зрозуміло, що реальний процес формування курсу в кожному конкретному випадку може розставити ці позиції в будь-якому порядку, а остаточне формування робочої навчальної програми курсу є результатом ряду ітерацій.

На жаль, нині існуюча (і в цілому, на наш погляд, виправдана) тенденція укрупнення навчальних курсів, робить практично неможливим виокремлення із загального курсу в окремі курси таких, наприклад, розділів, як «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики» та ін. У більшості випадків не вдається навіть зберегти як окремий предмет аналітичну геометрію, що насправді включає у себе як розділи власне аналітичної геометрії, так і лінійної та вищої алгебри. Більше того, виділення окремих курсів «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Обчислювальна математика», «Дискретна математика» веде в багатьох випадках до втрати їх кафедрами математики. Таким чином виникає поряд із проблемою позиціонування розділів при вивченні однієї математичної дисципліни, також проблема взаємного розташування в курсі розділів, які належать різним математичним дисциплінам. За спостереженнями авторів, безумовна першість належить розділу, що умовно може бути названий «Матриці. Визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь», за яким слідують «Векторна алгебра», далі — «Аналітична геометрія на площині та у просторі». На наш погляд, ця ситуація вказує, перш за все, на доцільність переносу вказаних тем до шкільної програми. Справді, їх важливість для наступного неможливо переоцінити, проте еклектичність такого підходу також очевидна (при цьому як викладачам, так і студентам). Зрозуміло, що така пропозиція виглядає, м'яко кажучи, революційною, особливо на фоні незадовільного рівня засвоєння шкільної математики більшістю випускників середньої школи, проте саме вкрай низька ефективність «аналітичної» складової шкільної математичної освіти змушує розглядати альтернативу запропонованого змісту. Зауважимо також, що ефективність навчання студентів-першокурсників протягом перших тижнів їх перебування у виші є невисокою (проблеми адаптації, схоже, вічні) і розгляд у цей час дійсно важливого і необхідного для подальшого матеріалу не здається нам виправданим.

Специфічною є ситуація позиціонування в курсі розділу «Диференціальні рівняння». З одного боку, природним і привабливим для викладача як фахового математика є максимально цілісний виклад інтегрального числення (у випадках функцій однієї та багатьох змінних, елементів теорії поля), з іншого — вимоги «суміжників» (загально технічних та спеціальних кафедр) спрямовані зазвичай на випереджуючий розгляд відповідних тем.

Що ж стосується власне математичного аналізу, то, звичайно, незмінно-актуальними залишаються питання про оптимальний момент початку вивчення теорії рядів, доцільність розгляду з єдиних позицій як диференціального, так і інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, розгляд рядів, інтегралу та перетворення Фур'є безпосередньо після вивчення функціональних рядів або ж на базі теорії функцій комплексної змінної. У разі включення до курсу вищої математики таких розділів як «Дискретна математика», «Обчислювальна математика», «Теорія ймовірностей та математична статистика», можна висловити припущення, що перший з них (як такий, що принципово не вписується ані в геометричну, ані в функціональну тематику) має бути розташований на початку курсу, а два останніх в силу необхідності використання понять та результатів інших розділів — в кінці.

На сам кінець відмітимо, що

— оптимальне взаємне розміщення розділів курсу вищої математики мало б відповідати розміщенню відповідних курсів у навчальному плані студентів спеціальностей «Математика», «Прикладна математика»;

— вище вказаний варіант практично неможливий через те, що вказані курси для згаданих спеціальностей часто читаються паралельно, а для інженерних спеціальностей виділення вказаних розділів у окремі курси не реальне;

— визначальний вплив на взаємне розміщення розділів курсу математики мають не міркування фахівців – математиків, а побажання випускних кафедр;

— ураховуючи попереднє, лектор, який читає курс вищої математики має принаймні моральне право в межах наявних у нього степенів свободи на найбільш комфортну для нього особисто послідовність викладу розділів, що дозволяє йому найкращим чином донести матеріал до студентів.

Список літератури

Боев, О., Имас, О. (2005). Тенденции математической подготовки инженеров. *Высшее образование в России,* 5 (2), 15—22.

Иванов, О. А. (2011). Математическое образование студентов экономических специальностей: цели, проблемы, перспективы. В кн. *Российское экономическое образование глазами преподавателя* (с. 36—44). Санкт-Петербург: Русский остров.

Кисин, В. В., Зюрюкин, Ю. А., Князев, А. А. (2003). Актуальные прикладные проблемы и современный курс общей физики для технических вузов. *Физическое образование в ВУЗах, 9* (2), 31—37.

Островська, О. В., Юрик, І. І. (2014). Про методику втузівського курсу математики. У кн. *Математика в сучасному технічному університеті*: *Матеріали ІІІ міжнародної науково-практичної конференції* (с. 201—202). Київ: НТУУ «КПІ».

Чернобай, О. Б. (2014). Про деякі особливості викладання курсу «Вища математика». *Математика в сучасному технічному університеті*. *Матеріали ІІІ міжнародної науково-практичної конференції* (с. 211—212). Київ: НТУУ «КПІ».

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МАТЕМАТИЦІ ТА ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Г. Г. Барановська
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
galyna@baranovsky.org

Методи сплайн-функцій в обчислювальну математику і теорію наближень увійшли у 60-их роках XX сторіччя, спочатку як засіб інтерполяції складних кривих, а згодом як ефективний засіб розв’язання самих різноманітних задач обчислювальної математики і інженерної геометрії.

До таких задач відносяться інтерполяція і згладжування експериментальних даних, чисельне диференціювання і інтегрування функцій, чисельне розв’язання диференціальних і інтегральних рівнянь, задачі автоматизації проектування на ЕОМ, конструювання кривих і поверхонь, обробки сигналів, представлення геометричної інформації і т. п.

Особливо широко застосовуються сплайни у техніці, як апарат для математичного моделювання поверхонь і агрегатів складної форми: лопатей турбін, кузовів автомобілів, корпусів літальних апаратів і кораблів і т.п.

Відомі у математичній фізиці методи колокації і варіаційний метод Бубнова — Гальоркіна розв’язання крайових задач з використанням многочленів пов’язані із значними обчислювальними труднощами, а внаслідок використання сплайнів розроблені ефективні методи сплайн-колокації і метод скінченних елементів.

Гладкість і гнучкість сплайнів обумовлює їх широке використання не тільки у обчислювальній математиці, а також у машинній графіці, САПР, інженерній геометрії. Сплайни поступово витісняють многочлени в усіх прикладних задачах, пов’язаних із наближенням функцій.

Вперше робота по апроксимації сплайнами була опублікована у 1946 році американським вченим І. Шонбергом (Schoenberg, 1946). У серії публікацій він разом із учнями розвинув і популяризував теорію поліноміальних сплайнів. У 60-их роках і пізніше з’явились роботи Алберг, Нильсон, Уолш (1972), Корнейчук (1984), Завьялов, Квасов, Мирошниченко (1980), Стечкин, Субботин (1976) і багатьох інших математиків. Зокрема, у роботі Завьялов и др. (1980) розглядається застосування сплайнів у чисельному аналізі з алгоритмами і рекомендаціями по їх практичній реалізації на ЕОМ. У дослідженнях Корнійчука (1984) встановлено, що інтерполяційні сплайни в багатьох випадках мають найкращі апроксимативні властивості, які забезпечують мінімально можливу для заданої розмірності похибку. Як зазначає автор «вторгнення сплайнів у теорію наближень відбулось через задачі інтерполяції, завдяки їх хорошим обчислювальним та апроксимативним властивостям».

Теорія сплайн-функцій стала математичним апаратом для інженерно-геометричних розрахунків самого широкого призначення. Математичні основи обробки геометричної інформації на ЕОМ, а також алгоритми і принципи організації автоматизованої обробки даних викладені в роботі (Завьялов, Леус, Скороспелов, 1985).

Сплайни використовують також для обробки і передачі по каналах зв'язку мовних і відеосигналів у реальному масштабі часу.

У задачах наближеного відновлення функцій, значення яких обчислювати складно, або заданих на $\left[a,b\right]$ лише значеннями $y_i = f\left(x_i\right)$ на деякій сітці $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, можна користуватись формулою Тейлора або інтерполяційним многочленом Лагранжа, чи многочленами найкращого наближення. Недоліком таких класичних методів є те, що при великих n виникає осциляція між вузлами, послідовність інтерполяційних многочленів не завжди збігається до інтерпольованої функції, побудова полінома невисокого степеня методом найменших квадратів часто не забезпечує задовільної відповідності кривої заданим точкам, а підвищення степеня призводить до істотного ускладнення обчислень. Сплайни, як правило, позбавлені таких недоліків, чим зумовлене їх широке використання. Обчислення параметрів інтерполяційного сплайна зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею і домінуючою головною діагоналлю, що можна реалізувати, наприклад, методом прогонки. Сплайни забезпечують високу точність апроксимації одночасно і функції, і її похідних. Необхідно відзначити також стійкість відносно локальних похибок сплайна, представленого у вигляді лінійної комбінації базисних B-сплайнів: незначна зміна значень функції у одному або декількох вузлах сітки мало позначається на його значеннях для дещо віддалених точок.

У загальному випадку сплайн являє собою функцію, «склеєну» із узагальнених поліномів таким чином, що у точках склейки їх значення і значення похідних до деякого порядку рівні. Найчастіше в якості таких базисних функцій вибирають алгебраїчні або тригонометричні поліноми.

Поліноміальним сплайном степеня m дефекта $k\left(1 \le k \le m\right)$ з вузлами на сітці Δ_n називається функція $S_{m,k}\left(x, \Delta_n\right)$, для якої:

1. $S_m\left(x\right) \in P_m$ на $\left[x_i, x_{i+1}\right],\ i = 0,1,\cdots,n$;
2. $S_m\left(x\right) \in C^{m-k}\left[a,b\right]$.

Найчастіше використовують кубічні сплайни однієї і двох змінних, параметри їх легко обчислюються, а для більшості задач такої гладкості достатньо.

Список літератури

Schoenberg, I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math, 4,* 49–99, 112–141.

Алберг, Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. (1972). *Теория сплайнов и её приложения.* Москва: Мир.

Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л. (1980). *Методы сплайн-функций*. Москва: Наука.

Завьялов, Ю. С., Леус, В. А., Скороспелов, В. Н. (1985). *Сплайны в инженерной геометрии.* Москва: Машиностроение.

Корнейчук, Н. П. (1984). *Сплайны в теории приближений*. Москва: Наука.

Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н. (1976). *Сплайны в вычислительной математике*. Москва: Наука.

ЗАДАЧІ ЯК ВИД НАВЧАЛЬНОГО ВПЛИВУ У ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ

П. П. Баришовець, А. С. Муранов, О. С Муранов
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
pbar@ukr.net

Досить недавно під задачами (точніше, навчальними задачами) мали на увазі завдання з точних наук: математики, фізики, хімії. На даний час поняття задачі стало визначальним під час розгляду набагато ширшого кола питань навчального процесу у ВНЗ. Майже будь-яка задача може виступати в якості навчальної, але питання відбору таких задач та способів застосування їх в навчальному процесі залишаються досить складними. Зупинимося детальніше на ролі задач в математиці.

При аналізі навчальної задачі як навчального впливу важливе значення мають такі її характеристики.

1. Несуперечливість умови. Повинні існувати об’єкти, які її задовольняють.

2. Прогнозований час розв’язання — не більше однієї-двох навчальних годин.

3. Рівень зусиль, необхідних для її розв’язання — хоча б один студент у групі має наблизитись до її розв’язання.

4. Рівень її творчих вимог від студента. Принаймні частина процесу розв’язування задачі (більша, чи менша) не повинна бути шаблонною, стереотипною.

5. Чіткість формулювань умови та запитань — вони не повинні допускати двозначних тлумачень.

6. Рівень складності задачі.

7. Навчаючий рівень задачі.

Розглядаючи групу задач, об’єднаних спільною тематикою, слід враховуючи вказані вище характеристики встановити передбачувану черговість їх розв’язання. При цьому, наприклад, розв’язування «проблемних» задач не слід планувати на кінець заняття. Доцільно було б під час розв’язування якоїсь задачі дати коротку історичну довідку. Найбільше підійшла б для цієї мети задача практичного змісту. На жаль, у зв’язку зі скороченням загальної кількості годин на математику в вищих навчальних закладах і зниженням рівня математичної підготовки, що спостерігається у випускників середніх навчальних закладів збільшується відсоток студентів, яким більшість задач недоступна.

Оскільки внутрішня логіка навчальної дисципліни не дозволяє скорочувати матеріал усередині розділів, то викладач повинен шукати додаткові можливості активізації продуктивної діяльності студентів.

Подібну роль може відігравати використання в навчальному процесі деяких спеціальних підходів. Наведемо ряд прикладів.

1. Геометричний підхід.

Задача на зустріч. Дві особи домовились про зустріч між десятою та одинадцятою годинами. Кожна з них приходить випадково у вказаний час, чекає іншу 15 хв і залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

2. Запровадження параметра.

Задача. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = a \\ x + 2y + 5z = 2 \\ 3x - 2y - 4z = 1 \end{cases}.$$

3. Обернені задачі.

Задача 1. Знайти матрицю переходу від одного базису $\left\{\vec{e}_k\right\}$ до іншого $\left\{\vec{e}_k{}'\right\}$, якщо:

$$k = 1,\ 2,\ 3;$$
$$\vec{e}_1 = \{1;-1;2\},\ \vec{e}_2 = \{0;2;3\};\ \vec{e}_3 = \{1;1;-1\};$$
$$\vec{e}_1' = \{0;2;9\};\ \vec{e}_2' = \{2;4;1\};\ \vec{e}_3' = \{5;3;4\}.$$

Задача 2. Знайти координати вектора $\vec{b} = \{3;2;-4\}$ в новому базисі, якщо відома матриця переходу до нового базису

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Зміна ролі змінних.

А. Зміна порядку інтегрування в подвійному інтегралі.

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,\ y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,\ y)dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,\ y)\,dx.$$

Б. Зміна ролі змінних в диференціальних рівняннях.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$3y\frac{dx}{dy} + 2x = y^3.$$

Вважаємо змінну x функцією, а y — аргументом.

В. Розв'язування рівнянь відносно параметра. **Приклад.** Рівняння

$$2x^4 + 2x^3 + (a+1)x^2 + (1-a)x - a^2 + a = 0$$

розв'яжемо спочатку як квадратне відносно параметра a.

5. Задачі на повну, неповну та математичну індукцію.

Приклад 1. Обчислити суму ряду:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ \ldots\ + (-1)^{n-1}n.$$

При розв'язанні треба розглянути два випадки: парного і непарного n.

Приклад 2. Обчислити суму ряду:

$$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ \ldots\ + n\cdot n!.$$

Спочатку обчислюємо $S_1,\ S_2,\ S_3$, потім висуваємо гіпотезу:

$S_n = (n+1)! - 1.$

Доводимо її методом математичної індукції.

6. Задачі на доведення від супротивного. Задача про нескінченність кількості простих натуральних чисел. Теорема про єдиність границі.

7. Складання задач — при розгляді диференціальних рівнянь.

8. Метод невизначених коефіцієнтів. Застосовується:

а) в задачах на інтегрування раціональних дробів;

б) для розвязання диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

9. Підстановка. При знаходженні інтегралів.

10. Запровадження нової змінної. При знаходженні інтегралів, при розв'язуванні диференціальних рівнянь і т. п.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 4x - 5y$. Позначимо: $4x - 5y = z$.

11. Використання симетрії.

Приклад. Розгляд пар інтегралів:

$$\int e^x \sin x dx,\ \int e^x \cos x dx \text{ та подібних.}$$

Список літератури

Данко, П. Е., Кожевников, А. Г. (1997). *Высшая математика в упражнениях и задачах*. Москва: Высшая школа.

Денисюк, В. П., Репета В. К. (2013). *Вища математика* (Ч. 1.). Київ: НАУ.

Дубовик, В. П., Юрик, І. І., Вовкодав, І. П. та ін. (2003) *Вища математика: Збірник задач* В. П. Дубовика, І. І. Юрика (ред.). Київ: А.С.К.

Дюженкова, Л. І., Дюженкова, О. Ю., Михалін, Г. О. (2002). *Вища математика: Приклади і задачі*. Київ: Видавничий центр «Академія».

Кречмар, В. А. (1964). *Задачник по алгебре*. Москва: Наука.

Овчинников, П. П., Яремчук, Ф. П., Михайленко, В. М. (2000). *Вища математика* (Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення). Київ: Техніка.

Репета, В. К. (2014). *Вища математика* (Ч. 2). Київ: НАУ.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ У ВІЙСЬКОВОМУ ЗАКЛАДІ

І. С. Безклубенко, В. Є. Сновида, Т. В. Соловьова

Київський національний університет будівництва і архітектури,
Військовий інститут телекомунікації та інформатизації, Київ, Україна
i.bezklubenko@gmail.com, eviktoriya@bigmir.net, internshipwiuu@ukr.net

Стаття присвячена питанням методики викладання дискретної математики, а також висвітлює значення викладання курсу під час підготовки висококваліфікованих фахівців у галузі комп'ютерних наук.

Одне з основних завдань, що вимагає в сучасних умовах суспільство це підготовка висококваліфікованих військових спеціалістів. Забезпечення якісної фундаментальної підготовки майбутніх військових фахівців технічних спеціальностей є однією з проблем вищої освіти. Для підготовки таких спеціалістів слід забезпечити належний рівень математичної підготовки студентів. Математичні методи та математичне моделювання широко використовується для розв'язання практичних задач різних галузей науки, техніки тощо.

Метою викладання дисципліни «Дискретна математика» є засвоєння основ теорії систем числення, теорії множин, математичної логіки, базових понять комбінаторики для формування у студента теоретичної бази розв'язання технічних та фізичних проблем у галузі керування, електроніки та електронних систем і пристроїв. Для розв'язування математичних задач, що виникають при створенні сучасних інформаційних технологій, зокрема у проектуванні й управлінні, необхідно мати математичні моделі, які не тільки адекватні описуваним процесам і об'єктам управління, а й придатні для реалізації на обчислювальній техніці. З цих позицій розглядається класичний математичний апарат, який використовується для побудови моделей в інформаційних системах, теорії ігор тощо. Тому ми можемо бачити, як змінюється співвідношення дискретної математики і класичної (неперервної) математики. Протягом останніх двох століть основну роль у вивченні явищ природи відігравав математичний аналіз, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння математичної фізики, варіаційне числення, методи функцій комплексної змінної тощо.

З появою швидкодіючих електронних обчислювальних машин такі абстрактні області математики, як математична логіка, загальна алгебра, комбінаторика, формальні граматики і т. п., стали прикладними. Важливу роль почали відігравати дискретні моделі, які виникли в задачах економічного характеру, задачах проектування технічних пристроїв, у задачах побудови літальних та космічних апаратів. Необхідність розв'язування цих і їм подібних задач приводять до необхідності підготовки спеціалістів відповідного профілю.

Інформаційні технології впроваджено до навчальних планів усіх технічних (і не лише технічних) ВНЗ, тому потреба в них невпинно зростає. Це пояснюється необхідністю створення та експлуатації глобальних інформаційних мереж, небаченим зростанням комп'ютерної індустрії, повсюдним використовуванням цифрового оброблення сигналів.

Підготовка військових спеціалістів, проблема якості освіти військового спеціаліста стає все більш важливою і потребує неперервного оновлення.

Умови навчання курсантів військового навчального закладу мають певні особливості, які не можна не враховувати викладачу. Це великі психологічні і фізичні навантаження, які отримують курсанти, значна частка першокурсників це військовослужбовці контрактної служби, які закінчили школу декілька років тому, періодична неможливість бути присутніми на лекціях і практичних заняттях. Ці особливості навчання ускладнюють процес адаптації першокурсника до навчання у військовому закладі. Тому технології навчання повинні бути спрямовані на переорієнтацію діяльності викладача з інформаційної на організаційну в питаннях оволодіння курсантами навичок самостійної роботи, навичок користування інформаційними джерелами, вмінні планування робочого часу.

Ураховуючи ці особливості для організації і проведенні навчальних занять з курсантами повинні бути розробленні:

1) навчально-методичний комплекс (в електронному і друкованому вигляді) з курсу «Дискретна математика», що включає курс лекцій, практичні заняття, матеріали для контролю самостійної роботи;

2) методичні рекомендації для курсантів по виконанню завдань для практичних занять з переліком основних питань, які потребують опрацювання;

3) завдання для розрахунково-графічних робіт з методичними вказівками для їх виконання .

Доцільними будуть проведення консультацій з окремих тем або розділів.

Перед викладачем постає задача розширення педагогічних методів і прийомів, що сприяють активізації самостійної роботи кожного курсанта, враховання специфіку і профіль військового закладу.

Список літератури

Нікольський, Ю. В., Пасічник, В. В., Щербина, Ю. М. (2007). *Дискретна математика*. Львів: Магнолія 2006.

Спекторський, І. Я. (2004). *Дискретна математика*. Київ: НТУУ «КПІ».

Шунина, Г. А. (2008). Формы обучения курсантов Военной академии. *Вестник Военной академии Республики Белорусь*, (1), 120—124.

ПРО АЛГОРИТМІЗАЦІЮ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

М. М. Білоцький, П. П. Баришовець
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
mikbil@ukr.net, pbar@ukr.net

Відомі означення границі послідовності границі дійснозначної функції однієї дійсної змінної в точці та границі дійснозначної функції кількох дійсних змінних

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x\to x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = a\right) \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{c} \forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \\ 0<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^{(0)}\right)^2}<\delta \Rightarrow \left|f(x)-a\right| = \left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right|<\varepsilon \end{array}\right)$$

є важкими для сприйняття на перших етапах навчання математиці студентами вищих навчальних закладів. Чи можна рекомендувати послідовність кроків, близьку до «***алгоритмізації***» використання цих означень при розв'язанні відповідних задач? Для послідовностей та функції однієї дійсної змінної така «***алгоритмізація***», яка виникла з досвіду навчання математиці у вищих навчальних закладах, запропонована в Білоцький (2013, 2014). Варіант такої «***алгоритмізації***» для дійснозначної функції кількох дійсних змінних може виглядати так.

1-й крок. ***Виконання оцінок***

$$\left|f(x)-a\right| = \left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right| \le\le \cdots \le \varphi\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^{(0)}\right)^2}\right),$$

де $\varphi(t)$ — достатньо проста елементарна додатнозначна зростаюча на проміжку $(0;\rho)$ функція і $\varphi(t)\to 0\,(t\to 0+)$ (наприклад, $\varphi(t)=t^{\alpha}$, $\alpha>0$), тобто побудова скінченної послідовності порівнянь, метою якої завдяки властивості транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел буде порівняння

$$\left|f(x)-a\right| = \left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right| \le \varphi\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^{(0)}\right)^2}\right).$$

2-й крок. ***Розв'язування нерівності.*** Для наперед заданого довільного, але фіксованого $\varepsilon>0$ покладаємо

$$\left|f(x)-a\right|=\left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right|\le\varphi\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^{(0)}\right)^2}\right)<\varepsilon$$

і розв'язуємо на інтервалі $(0;\rho)$ відносно

$$d(x,x_0):=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^{(0)}\right)^2}$$

нерівність

$$\left(\varphi\left(d(x,x_0)\right)<\varepsilon\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(0<d(x,x_0)<\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)\Leftrightarrow\left(d(x,x_0)\in(0;\rho)\cap\left(0;\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)\right),$$

де $(0;\rho)\cap\left(0;\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)$ — множина розв'язків цієї нерівності, $\varphi^{-1}(t)$ — функція обернена до функції $\varphi(t)$. Покладаємо

$$\delta_0=\delta_0(\varepsilon):=\min\left\{\rho,\varphi^{-1}(\varepsilon)\right\}.$$

Такий вибір $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$ для довільного наперед заданого фіксованого $\varepsilon>0$ завжди є коректним так як для довільного $\varepsilon>0$

$$\left(0<d(x,x_0)<\delta_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(0<d(x,x_0)\in(0;\rho)\cap\left(0;\varphi^{-1}(\varepsilon)\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\left|f(x)-a\right|=\left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right|<\varepsilon\right).$$

3-й крок. ***Висновки.*** За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left\{\begin{matrix}\left(0<d(x,x_0)<\delta_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\varphi\left(d(x,x_0)\right)<\varepsilon\right)\\ \left(\left|f(x)-a\right|\le\varphi\left(d(x,x_0)\right)\right)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\left(0<d(x,x_0)<\delta_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-a\right|=\left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right|<\varepsilon\right)\right)$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon>0$ знайдено $\delta:=\delta_0(\varepsilon)>0$ таке, що

$$\left(\left(0<d(x,x_0)<\delta_0(\varepsilon)\right)\Rightarrow\left(\left|f(x)-a\right|=\left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a\right|<\varepsilon\right)\right),$$

тобто доведено, що

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x\to x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a.$$

Зауваження 1. Проведення потрібних оцінок на першому кроці «***алгоритму***», значно скорочуються, якщо використовувати наступну нерівність.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le n, i\ne j} 2a_i a_j} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le n, i\ne j} \left(a_i^2 + a_j^2\right)} =$$

$$= \sqrt{n\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \le n\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2},\ \text{де } a_k \ge 0\ \forall k = 1,2,\ldots,n \quad n\in\mathbb{N}$$

Зокрема,

$$a_1 + a_2 \le \sqrt{2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \le 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \le \sqrt{3}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \le 3\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Зауваження 2. Наведене трьох крокове правило легко модифікується на випадок, коли в означенні границі функції кількох дійсних змінних замість «евклідової» метрики

$$d\left(x, x_0\right) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^{(0)}\right)^2}$$

використовується інша метрика, наприклад, «кубічна»

$$d\left(x, x_0\right) := \max_{1\le k\le n}\left|x_k - x_k^{(0)}\right|.$$

Наступний приклад ілюструє застосування такого покрокового правила

Довести, що $\lim\limits_{x\to -2, y\to 1} x^2 y = 4.$◄

Маємо $f\left(x,y\right) = x^2 y,\ \ a = 4,\ \ \left(x_0, y_0\right) = \left(-2;1\right).$

1-й крок. ***Виконання оцінок.***

$$\left|f\left(x,y\right) - a\right| = \left|x^2 y - 4\right| = \left|x^2 y - 4y + 4y - 4\right| =$$

$$= \left|\left(x-2\right)\left(x+2\right)y + 4\left(y-1\right)\right| \le \left|y\right|\left|x-2\right|\left|x+2\right| + 4\left|y-1\right| \le$$

$$10\left|x+2\right| + 4\left|y-1\right| < 10\left(\left|x+2\right| + \left|y-1\right|\right) \le 20\sqrt{\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2},$$

при додаткових умовах

$$\sqrt{\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2} < 1\ \ \left|y\right| \le 2, \left|x-2\right| \le 5.$$

2-й крок. ***Розв'язування нерівності.*** Для наперед заданого довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ покладаємо

$$\left|f\left(x,y\right) - a\right| = \left|x^2 y - 4\right| < 20\sqrt{\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2} < \varepsilon,$$

і розв'язуємо

$$20\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<\varepsilon$$

при

$$0<\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<1\,.$$

Дістанемо

$$\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}\in\left(0;1\right)\cap\left(0;\frac{\varepsilon}{20}\right).$$

Покладаємо

$$\delta_0=\delta_0\left(\varepsilon\right):=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{20}\right\}$$

3-й крок. ***Висновки.*** За властивістю транзитивності відношення порівняння на множині дійсних чисел маємо

$$\left(0<\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<\delta_0\left(\varepsilon\right)\right)\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\left(\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<1,\quad 20\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<\varepsilon\right),\\ \left(\left|f\left(x\right)-a\right|=\left|x^2y-4\right|\le 20\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\left(0<\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<\delta_0\left(\varepsilon\right)\right)\Rightarrow\left(\left|f\left(x\right)-a\right|=\left|x^2y-4\right|<\varepsilon\right)\right)$$

Отже, для довільного наперед заданого $\varepsilon>0$ знайдено $\delta:=\delta_0\left(\varepsilon\right)>0$ таке, що

$$\left(0<\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}<\delta\right)\Rightarrow\left(\left|x^2y-4\right|<\varepsilon\right),$$

тобто $\lim\limits_{\left(x;y\right)\to\left(-2;1\right)}x^2y=4\,.$▶

Список літератури

Білоцький, М. М. (2013). Про алгоритмізацію процесу розв'язування задач з використанням означення границі послідовності. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наук. робіт, 40,* 66—72. Донецьк: Дон НУ.

Білоцький, М. М. (2014). Про алгоритмізацію використання означення границі. У кн. *Пятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 15—17 травня 2014 р., Київ. Матеріали конференції* (Т. IV. Історія та методика математики), (с. 48—50). Київ: НТУУ «КПІ».

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА КАК ФАКТОР ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

О. В. Бугрим, С. Е. Тимченко, Л. И. Шелест
Национальный горный университет, Днепропетровск, Украина
S.Timchenko@rambler.ru

Одним из важнейших общепсихологических факторов, обеспечивающих успешность процесса обучения, является мотивация. Большую роль в поддержании мотивации на протяжении всего периода обучения играют учебные материалы и формы работы с ними. Однотипность ослабляет положительную мотивацию, студент из активного участника процесса превращается в пассивного созерцателя. Полное удовлетворение приносит сознание того, что полученные знания и навыки можно применить сейчас же на практике. Решить эти вопросы можно включением в учебную деятельность игровых моментов, созданием ситуации познавательного спора, успехов в учении, методов эмоционального стимулирования.

Для реализации цели повышения эффективности обучения задачей преподавателя становится усовершенствование форм и методов обучения. Выбор той или иной формы приводит к выбору коммуникативного стиля преподавания, взаимоотношений преподаватель-студент. Активные и методы обучения требуют от педагога открытости, доступности, демократичности, установки на поддержку инициативы студента, его творческого подъема.

Как известно, основные формы обучения — это разные формы лекций, семинаров, практических занятий, самостоятельной работы и контрольных мероприятий. Современная модель обучения оставляет лекцию основной формой учебного процесса, но предлагает ей инновационные разновидности, использование активных методов обучения. Одной из разновидностей является проблемная лекция. Проблемная лекция систематизирует знания слушателей, мотивирует их познавательную деятельность, творческое сотрудничество студента и педагога.

Практические занятия также имеют различные формы: лабораторные работы, семинары, практикумы. Их цель — использование полученных знаний на практике, приобретение профессиональных умений и навыков, закрепление и углубление знаний, полученных на лекции, обсуждение результатов самостоятельной работы.

Выбор формы занятия, методов обучения зависит от уровня подготовки студентов, технических возможностей, специфики темы, времени, которое отведено на изучение темы. Конечно, большую часть практических занятий занимает повторение, необходимое для выработки умений и навыков. Но это не должно быть однообразное повторение, например, определенного класса задач. Однообразность снижает мотивационную установку, эффективность восприятия, внимания, мышления.

Активные формы обучения предлагают взглянуть на задачу под другим углом, предложить студентам составить алгоритм решения определенного класса задач, установить признаки, по которым можно отнести задачу к тому или иному типу. Если студент сформулирует мысль в процессе занятия, это вызывает чувство уверенности в своих возможностях и положительные эмоции от своей деятельности.

Рассмотрим применение этих элементов обучения на примере изучения темы «Ряд Фурье». Студентам к первой лекции предлагается составить небольшой толковый словарь, в котором отражены такие понятия: периодические функции, четные и нечетные функции, кусочно-непрерывные и кусочно-монотонные функции, односторонние пределы. Эти понятия должны быть внесены в конспект и предшествовать тексту лекции.

На практических занятиях студентам предлагается привести примеры периодического продолжения функций

$$y = x^2,\ y = x,\ y = x^3,\ y = \cos x,\ y = e^x.$$

Такие упражнения подготавливают студентов к более осмысленному восприятию дальнейшего материала.

После изучения действительной формы ряда Фурье студентам выдается индивидуальное задание. Задание выдается одно на двоих для возможности коллективного творчества. Кроме формального разложения функции в ряд требуется построить график данной функции, несколько гармоник и их сумму на одном рисунке. Для контроля соответствия полученного ряда данной функции необходимо следить за выполнением условий теоремы Дирихле, а именно за тем, чтобы в точках разрыва функции ряд давал среднее арифметическое односторонних пределов. Это дает возможность избежать ошибок. Данное задание может быть выполнено с привлечением компьютерных технологий с четким проявлением каждой гармоники и последующего их суммирования. После выполнения заданий назначается их защита.

Изучение темы «Ряды Фурье» включает выполнение учебно-исследовательской работы, связанной с применением гармонического анализа, а именно, с получением, построением и анализом амплитудных и частотных спектров. При выполнении работы студент должен подготовить пояснительную записку, в которой полностью отражено логическое описание выполненной работы, все промежуточные данные и результаты, полученные в ходе работы.

Учебно-исследовательская работа должна содержать такие разделы: вступление, теоретическую часть, расчетную часть, выводы. Обязательно приводится перечень используемых источников.

Вступление включает постановку задачи и обоснованный алгоритм ее решения.

Теоретическая часть посвящается рассмотрению математического аппарата, к которому студент обращается в процессе решения поставленной задачи (Пискунов, 1985; Щипачев, 1996). При этом студент должен подобрать этот материал так, чтобы не нарушая ясности, не выходить за рамки решаемой проблемы.

Расчетная часть содержит решение сформулированной во введении задачи с использованием математических методов и приемов, которые были представлены в предыдущем разделе. Выводы — это подведение итогов выполненной работы. Во время творческой деятельности у студента могут возникнуть некоторые замечания и предложения относительно дальнейшего развития исследования или сравнения полученных результатов с имеющимися в литературе.

Приведем сокращенный образец выполнения работы.

Постановка задачи.

Задана периодическая функция

$$f(t) = \begin{Bmatrix} E, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T. \end{Bmatrix}$$

где $E = \mathrm{const}, t_1 = \mathrm{const}, T$ — период.

Представить функцию $f(t)$ рядом Фурье в комплексной форме, построить графики комплексных амплитуд.

Теоретическая часть.

Известно, что любую периодическую функцию с периодом $T = 2l$, которая удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна) можно разложить в ряд Фурье (Романовский, 1959; Сінайський та ін., 2006)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

где $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$.

Далее проводятся подробные выкладки, которые приводят к получению комплексной формы ряда Фурье для функции $f(t)$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t},$$

где

$$C_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Коэффициенты C_k комплексные, поэтому их часто записывают в виде $C_k = \left|C_k\right| e^{i\phi_k}$. Совокупность $\left|C_k\right|$ называют спектром комплексных амплитуд, а ϕ_k — спектром фаз функции $f(t)$.

Расчетная часть. В расчетной части анализируются особенности заданной функции, строится ее график с продолжением на всю числовую ось, вычисляются коэффициенты C_k. Для данной функции после последовательных вычислений и преобразований имеем

$$\left|C_k\right| = \frac{E}{\pi}\left|\frac{\sin\dfrac{k\pi t_1}{T}}{k}\right|.$$

Совокупность этих величин дает искомый спектр.

Выводы. Здесь анализируются результаты расчета, делаются заключения об особенностях полученного спектра. Приведенные выводы иллюстрируются рисунком.

Каждому студенту выдается свой вариант задания (иногда один на двоих для возможности коллективного творчества). Защита учебно-исследовательской работы производится в присутствии всех студентов группы. В процессе защиты студенты задают вопросы, корректируют ответы, преподаватель играет роль направляющего консультанта. Студенты сами оценивают результаты выполненной работы. Как показывает практика, эти оценки достаточно объективны.

Аналогичные учебно-исследовательские работы можно предложить и по другим разделам курса высшей математики.

Список литературы

Пискунов, Н. С. (1985). *Дифференциальное и интегральное исчисления* (Т. 2). Москва: Наука.

Шипачев, В. С. (1996). *Высшая математика*. Москва: Высшая школа.

Романовский, П. И. (1959). *Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа*. Москва: Физматгиз.

Сінайський, Є. С., Новікова, Л. В., Заславська, Л. І. (2006). *Вища математика: Навчальний посібник* (Ч. 2). Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2006.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ РОЗДІЛУ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ» У КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

В. О. Варивода, О. М. Гришко
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
viktoriana@ukr.net

Суттєве скорочення обсягу навчальних годин, які відводяться студентам нематематичних напрямків підготовки на висвітлення теорії диференціальних рівнянь у загальному курсі «Вищої математики», ускладнює процес засвоєння основних теоретичних понять, зокрема, задачі Коші. Першокурсникам також достатньо складно усвідомити роль таких важливих математичних об'єктів як диференціальні рівняння. Ознайомлення з понятійним апаратом даної теми та деякими методами розв'язку звичайних диференціальних рівнянь можна запропонувати, на наш погляд, на прикладах і задачах з різних галузей: диференціальними рівняннями моделюються фізичні й хімічні процеси, процеси біофізичного та біохімічного регулювання в організмах, динаміка розмноження, динаміка епідемій, економічні процеси тощо.

Певний тип рівняння можна асоціювати із конкретним застосуванням. Наприклад, радіоактивний розпад, закони охолодження тіла й розмноження бактерій моделюються лінійним однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку. Лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку описуються коливальні процеси в механіці, біології, медицині, а також в електромагнетизмі. Другий закон Ньютона для вільного падіння записують звичайним диференціальним рівнянням 2-го порядку і так далі.

У кожній задачі за основу береться відомий «диференціальний» закон, який зв'язує малі зміни задіяних величин. Отриманий після інтегрування зв'язок між кінцевими значеннями величин допомагає студентам усвідомити, що диференціальні рівняння є математичними моделями реальних процесів та явищ.

Приклад 1. При проходженні світла крізь воду деяка його частина поглинається. Перпендикулярно до поверхні води падає світло з інтенсивністю J_0. Встановити, яка залежність інтенсивності світла від глибини.

○Нехай інтенсивність світла на глибині x дорівнює $J(x)$. Із оптики відомо, що швидкість поглинання світла на глибині x пропорційна інтенсивності світла на цій глибині (з деяким відомим для кожної середи коефіцієнтом k), а саме

$$J'(x) = -kJ(x), k > 0.$$

Знак мінус береться тому, що інтенсивність світла із збільшенням глибини x зменшується, то ж похідна $J'(x)$ — від'ємна. Інтегруємо: $J(x) = Ce^{-kx}$.

За початковою умовою

$$Ce^{-k0} = J_0 \Rightarrow J(x) = J_0 e^{-kx}.$$

Приклад 2. Крива проходить через точку $(3;4)$. Кожна дотична до цієї кривої перпендикулярна до радіуса-вектора відповідної точки дотику. Знайдіть рівняння кривої.

○ Кутові коефіцієнти дотичної до кривої та радіуса-вектора відповідної точки $(x;y)$ дорівнюють:

$k_1 = y' = \dfrac{dy}{dx}, k_2 = \dfrac{y}{x}$, причому $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ (умова перпендикулярності). Отримуємо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Його загальний інтеграл:

$$x^2 + y^2 = C.$$

У системі координат на площині рівняння $x^2 + y^2 = C$ задає множину концентричних кіл з центром в точці $(0;0)$. Початкові умови означають, що серед цієї множини кіл треба взяти те, яке проходить через точку з координатами $(3;4)$: $3^2 + 4^2 = C = 25$. Отже, шуканий частинний розв'язок задається рівнянням $x^2 + y^2 = 25$.

Приклад 3. У резервуарі знаходиться a кг водного розчину солі, в якому міститься b кг солі. У резервуар безперервно подають c кг чистої води в секунду, одночасно видаляють з нього c кг розчину, при цьому рідина безперервно змішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

○ Нехай $y(t)$ — кількість солі в резервуарі в кожен момент часу t. Протягом малого проміжку часу $[t; t + \Delta t]$ (t— деякий фіксований момент часу, $\Delta t > 0$) з розчином витекло $y(t) - y(t + \Delta t)$ кг солі, а концентрація розчину зменшилася від $\dfrac{y(t)}{a}$ до $\dfrac{y(t) - y(t + \Delta t)}{a}$. Виконується нерівність:

$$\frac{y(t) - y(t + \Delta t)}{a} c\Delta t \le y(t) - y(t + \Delta t) \le \frac{y(t)}{a} c\Delta t.$$

Звідки $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\dfrac{c}{a} y(t)$. Отримали рівняння: $y' = -\dfrac{c}{a} y$.

Ураховуючи умову $y(0) = b$, шукану функцію задаємо формулою: $y = be^{-\frac{c}{a}t}$.

Приклад 4. Знайти залежність від часу сили струму $i(t)$ в замкненому електричному колі з опором R, коефіцієнтом самоіндукції L, електрорушійною силою $E = E_0 \sin \omega t$, якщо $i(t)$ задовольняє диференційному рівнянню:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, i(0) = 0.$$

○Загальний розв'язок лінійного рівняння

$$\frac{di}{dt}+\alpha i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t, \alpha=\frac{R}{L}$$

має вигляд

$$i(t)=u(t)v(t),$$

де $u(t)=e^{-\alpha t}$ — як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dt}+\alpha u=0,$$

а

$$v(t)=\frac{E_0}{L}\int e^{\alpha t}\sin\omega t dt.$$

Двократно застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо:

$$v(t)=\frac{E_0}{L}\left(\frac{e^{\alpha t}(-\omega\cos\omega t+\alpha\sin\omega t)}{\omega^2+\alpha^2}+C\right),$$

$$i(t)=u(t)v(t)=\frac{E_0}{L}\left(\frac{-\omega\cos\omega t+\alpha\sin\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+Ce^{-\alpha t}\right).$$

Оскільки $i(0)=0$, то

$$0=\frac{E_0}{L}\left(\frac{-\omega}{\omega^2+\alpha^2}+C\right),$$

звідки $C=\dfrac{\omega}{\omega^2+\alpha^2}$. Отже, залежність сили струму від часу має вигляд:

$$i(t)=\frac{E_0}{L(\omega^2+\alpha^2)}(-\omega\cos\omega t+\alpha\sin\omega t+\omega e^{-\alpha t}).$$

Приклад 5. Матеріальна точка маси m вільно падає під дією сили тяжіння. Нехтуючи опором повітря, знайти закон руху точки, якщо початкове положення точки $y(0)=y_0$, а швидкість $v(0)=v_0$.

○Положення точки визначається координатою $y(t)$, що змінюється з часом t. Точка падає під дією сили тяжіння $F=mg$. За другим законом Ньютона

$$ma=m\frac{d^2y}{dt^2}=mg, \text{ або } \frac{d^2y}{dt^2}=g.$$

Отримане співвідношення інтегрується двічі за t:

$$\frac{dy}{dt}=gt+C_1,\ y(t)=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Оскільки швидкість руху точки $v(t)=\dfrac{dy}{dt}$, то при вказаних початкових умовах $C_1=v_0$, $C_2=y_0$. Закон руху точки:

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0 .$$

Приклад 6. Матеріальна точка з масою m коливається вздовж осі Ox під дією сили, що в кожний момент часу пропорційна відхиленню точки від початку координат і напрямлена до початку координат. Знайти закон руху точки, якщо в момент часу $t = 0$ вона мала координату x_0 і швидкість v_0.

○Позначивши координату рухомої точки в момент часу t через $x(t)$, за другим законом Ньютона маємо:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

За умовою ця ж сила пропорційна відхиленню точки від початку координат і напрямлена у протилежну сторону, тобто

$$F = -\alpha x(t) \ , \alpha > 0.$$

Отже, функція $x(t)$ задовольняє рівняння:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x(t) \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} + l^2 x(t) = 0,\ l^2 = \frac{\alpha}{m} > 0.$$

Загальний розв'язок отриманого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами матиме вигляд:

$$x = C_1 \cos lt + C_2 \sin lt$$

(відповідне характеристичне рівняння $k^2 + l^2 = 0$ має пару комплексно-спряжених коренів — $k_1 = li, k_2 = -li$). Із початкових умов з'ясовуємо:

$$x(0) = C_1 = x_0;\ x'(t) = -C_1 l \sin lt + C_2 l \cos lt,\ x'(0) = C_2 l = v_0,\ C_2 = \frac{v_0}{l}.$$

Отже, закон руху даної точки (розв'язок наведеної задачі Коші):

$$x = x_0 \cos lt + \frac{v_0}{l}\sin lt.$$

На наш погляд, викладений у такий спосіб теоретичний матеріал надасть темі «Диференціальні рівняння» більш виражену прикладну спрямованість. Складання диференціальних рівнянь для конкретних задач сприятиме формуванню уявлення про побудову математичних моделей. Насичення практичної частини курсу прикладами задач з тієї галузі, яка є професійним напрямком підготовки тих чи інших студентів, зацікавить, а головне посилить їх мотивацію до вивчення даного курсу.

Список літератури

Самойленко, А. М., Кривошея, С. А., Перестюк, Н. А. (1984). *Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.* Киев: Вища школа.

Свердан, П. Л. (2008). *Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник.* Київ: Знання.

Стефанова, Н. Л., Подходова, Н. С. (ред.) (2005). *Методика и технология обучения математике. Курс лекций: Пособие для вузов.* Москва: Дрофа.

СТОУНХЕНДЖ ТА ЙОГО ФРАКІЙСЬКИЙ АНАЛОГ — КОМПЕНДІУМИ ПРЕЦЕСІЙНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ АСТРОНОМІЇ

Г. Ю. Гриценко
НТТУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
yaropolkbazhaluk@gmail.com

Теорія «Прецесійної астрономії» була сформована у Шумері на поч. III тис. до н. е. та поширилася на Єгипет. За її принципами зводилися Великі єгипетські піраміди. У кінці III тис. до н. е. прецесійна астрономія у складі релігійного світогляду близькосхідних емігрантів проникає в Європу. За її принципами споруджуються Стоунхендж, Вудхендж та мегалітичні «святилища-обсерваторії».

Завдяки ініціативі фракійського жерця Декенея (І ст. до н. е.) прецесійна астрономія усталилася у Фракії та поширилася на територію Черняхівської культури (II—IV ст.). Історик Іордан (IV ст.) про діяльність Декенея писав: «Відкриваючи теоретику, навчав споглядати 12 знаків та біг через них планет, а також усю астрономію: він пояснив і те, яким чином місячний диск збільшується або щербиться, та показав, наскільки сонячна куля перевищує земне коло».

Стоунхендж був відомий фракійцям. Історик Діодор Сицилійський (І ст.) посилався на Гекатея Фракійського (IV ст. до н. е.), який стверджував, що на великому острові, який лежить напроти землі кельтів, існує величний храм Аполлона, сферичний за формою.

Теорія «Прецесійної астрономії» була відома Піфагору та Платону, якому приписується «Прогресія музики сфер», числа якої він наводив. Насправді це єгипетська «Таблиця прецесійних швидкостей — 1 градус за 72; 72,9 та 76,8 року».

Стародавніх жерців насамперед цікавили не ритмічні небесні явища, а пояснення та можливість впливу на феномени народження та смерті Людського роду. Відповіді на ці проблеми вони знаходили у Небі. Грізні явища — затемнення Місяця й Сонця — вважалися причинами катаклізмів, пошестей, могли призвести до кінця Світу та були справжніми причинами смерті Людини. Передбачення затемнень дозволяло завчасно їх відвертати жертвами. Справжніми батьками Людей вважалися світила та планети, які об'єктивно своїми лінійними фазами, які можна було візуально фіксувати, генерували терміни народження Людини у діапазоні 195—315 днів, а тому їхній рух досліджувався та їм поклонялись.

Астрономічні споруди — «Компендіуми», вони ж і храми,— формувалися канонічними прецесійними швидкостями («Ш»): 1 градус кола за 66—84,5 року.

Чисельні «Компендіуми» мали майже стандартний зміст, а саме:

1. Сонячний рік, адже Сонце стимулювало розвиток життя на Землі і душі праведників після смерті потрапляли на Сонце.

2. Синодичний Місяць, за яким регулювалася діяльність людства в часі.

3. Число періодичності місячних затемнень (177—178 діб) та 30-місячний цикл місячних затемнень.

4. Змінні відносні розміри дисків Землі, Місяця й Сонця як обов'язкових фігурантів місячних і сонячних затемнень.

5. Змінні терміни народження Людини («ТНЛ»), які генерувалися періодами світил та змінними періодами планет. Саме вчення «Космічної антропології» і стимулювало розвиток планетної астрономії.

6. Місячні та сонячно-місячні цикли: Сарос, 19-річний цикл, цикл місячних вузлів.

Отже, «Компендіуми» містили важливіші досягнення прецесійної астрономії.

Стоунхендж. Це мегалітична астрономічна споруда на півдні Англії початку II тис. до н. е., яка була запроектована близькосхідними жерцями. Це система з концентричних кіл та «підкови» в центрі, утворена кам'яними блоками та лунками.

1. «Підкову» утворюють 5 «трилітів». «Триліт» — два циклопічних кам'яних стовпи, перекритих (затемнених) третьою плитою. 3 х 5 = 15. Усередині «підкови трилітів» розташована підкова з 19 стовпчиків. 15 + 19 = 34. У центрі споруди лежить кам'яний блок — «Вівтарний камінь»-1. 34 + 1 = 35.

2. Кола із 30 циклопічних кам'яних стовпів, перекритих (затемнених) 30-ма плитами. 30 + 30 = 60. Ззовні цього кола — 29 та 30 лунок, розташованих по колах. Усередині, по колу із 30 стовпів розташоване коло з 59 стовпчиків.

(29 + 30) + (30 + 30) + 59 = 178 — число періодичності місячних затемнень, яке вважалося також і числом смерті Людини.

3. У зовнішньому колі 56 лунок, у системі яких напроти «входу» лежить великий кам'яний блок — «Ешафот»-1. 56 + 1 = 57.

4. На вході дві ями: «Д» та «Е» від великих каменів. (1 + 1 = 2), а також 48 малих лунок. Підсумок рахункових одиниць: 35 + 178 + 57 = 35 + 235 = 270.

270 х 2 х 48 = 72 х 360 = 25 920 років — цикл прецесії зі швидкістю 72 р., де 2 — кількість ям, а 48 — кількість малих лунок.

5. За межами оточуючого валу — великий «П'ятковий камінь», спрямований на точку сходу Сонця у день літнього сонцестояння.

Астрономічна структура Стоунхенджу генерувалася канонічними прецесійними швидкостями: 68; 70; 72; 72,8; 72,9; 73,05; 73,75 та 76 р.

Астрономічний годинник Стоунхенджу («АГ»). Це коло з 56 лунок. «АГ» працював за принципом «гри на залишках». Число астрономії цілочисленно ділилося на 56, а залишок відкладався на «індексах — показниках» годинника. Базова швидкість «АГ» —72,8 р. 728 : 13 = 56.

«АГ» мав 5 індексів — лунок, розташованих біля чотирьох кам'яних стовпчиків, два з яких обведені рівчаками, що ділили «АГ» на числа:

21 + 7 + 21 + 7 = 28 + 28 = 56. Число 28 — це 28-добовий календарний місяць.

П'ятий індекс — лунка біля «Ешафота». Числове значення індексів при підрахунку за годинниковою стрілкою від північного стовпчика, обведеного рівчаком: №№ 1; 11; 21; 28; 49; 56. № 28 та № 56 — індекси при стовпчиках, обведених рівчаками.

І. Обчислення Сонячного року:

1. Обчислення за «АГ»: (652 х 56) + 11 = 36523 д. 36523 + 1 («Ешафот») = 365,24 д. — тропічний Сонячний рік. 36524 + 1 («П'ятковий камінь») = 365,25 д. — зоряний Сонячний рік. Чотири лунки біля «П'яткового каменя» можуть позначати 4 роки. 365,25 х 4 = 1461 д. Генеруюча прецесійна швидкість (далі — «Ш») — 73,05 х 360 = 365,25 х 72 = 1461 х 18.

2. Обчислення за «АГ»: (6 х 56) + 28 = 28 х 13 = 364 д. — календарний рік.

«Ш» — 72,8 х 360 = 364 х 72 = 28 х 936 = 13 х 2016

3. Елементи п'яти трилітів: 3 х 3 х 3 х 3 х 3 = 243 д. 243 х 15 = 364,5 д. — календарний рік, відомий грекам. 15 — число блоків у п'яти «трилітах».

«Ш» — 72,9 х 360 = 364,5 х 72 = 243 х 108

II. Обчислення місячних затемнень:

1. Коло із 30 «затемнених» стовпів — це 30-місячний цикл місячних затемнень. 29 та 30 лунок — доби місяців. (15 х 29) + (15 х 30) = 30 х29,5 = 177 х 5 = 885 д. — 30-місячний цикл. Протягом цього циклу відбувається 6 місячних затемнень з інтервалом у 6 місяців. 29,5 х 6 = 177 д., і таких інтервалів 5.

Кожний «затемнений триліт» фіксує 177 д. Коло з 59 стовпчиків — це два місяці по 29,5 д. Тоді три блоки «триліту»: 3 х 59 = 177 д., а 5 «трилітів»: 177 х 5 = 885 д.

«Ш» — 73,75 = 29,5 х 900 = 177 х 150 = 885 х 30 = 30 х 885 = 15 х 1770.

У Сароському 223-місячному циклі затемнень присутні три 30-місячні цикли.

III. Диски Землі, Місяця й Сонця:

1. Обчислення за «АГ»: (714 х 56) + 49 = 40 033 — коло Землі (насправді 40 032 км).

2. Обчислення за «АГ»: (19,5 х 56) = 1092 — відносне середнє коло Місяця.

(78 х 56) = 4368 — відносне середнє коло Сонця.

(4 х 56) + 49 = 273 — відносний середній радіус Місяця.

«Ш» — 72,8 х 360 = 1092 х 24 = 4368 х 6 = 273 х 96.

3. 19 стовпчиків «малої підкови». 19 х 60 = 1140 — максимальне коло Місяця.

1140 х 4 = 4560 — максимальне відносне коло Сонця.

19 х 15 = 285 — відносний максимальний радіус Місяця.

19 х 4 = 76. «Ш» — 76 х 360 = 1140 х 24 = 4560 х 6 = 285 х 96

4. Числа великої та малої «підков»: 15 + 19 = 34 34 х 30 = 1020 — мінімальне відносне коло Місяця. 1020 х 4 = 4080 — мінімальне відносне коло Сонця.

34 х 2 = 68 «Ш» — 68 х 360 = 1020 х 24 = 4080 х 6 = 255 х 96

IV. Місячні та Сонячно-місячні цикли:

1. Обчислення за «АГ»: (12 392 х 56) + 28 = 6939,80 д. — 19-річний сонячно-місячний цикл. 365,25 х 19 = 6939,75 д.

2. 178 + 57 = 235 (див. вище). 6939,75 : 235 = 29,53085 д. — синодичний місяць (насправді 29,53056 д.).

3. Обчислення за «АГ»: 11 761 х 56 = 6586,16 д. — Сарос.

Насправді 29,53056 х 223 = 6585,31 д.

V. Терміни народження Людини («ТНЛ»):

1. Числа «трилітів»: 3х 3 х 3 х 3 х 3 = 27 х 9 = 243 д. — період видимості Венери — бажаний «ТНЛ».

2. Числа «трилітів»: (15 + 1) х 19 = 30,4 х 10 = 304 д. — 10-місячний період року, відомий у Римі, де 1 — «Вівтарний камінь».

3. (15 + 1) + 19 = 35.   35 х 6 = 210 д. — мінімальний «ТНЛ».

35 х 8 = 280 д. За «АГ»: 56 х 5 = 280 д.   35 х 9 = 315 д. — макс. «ТНЛ».

За «АГ»: (56 х 4) + 28 = 28 х 9 = 252 д. — «ТНЛ».

35 х 2 = 70. «Ш» — 70 х 360 = 210 х 120 = 252 х 100 = 280 х 90 = 315 х 8

4. «Ш» — 73,75 х 360 = 265,5 х 100 = 29,5 х 900.

265,5 = 29,5 х 9 — 9-місячний «ТНЛ».

5. Один «триліт» позначав як смерть Місяця, Сонця й Людини, так і народження Людини. 59 х 3 = 177 д. — число затемнення, а 177 х 15 = 265,5 д.

6. «АГ» генерує: 10,5 х 56 = 588 д. — період Венери та: 14,5 х 56 = 812 д. — період Марса.   588 + 812 = 1400 = 280 х 5. Небесне подружжя породжувало п'ять 280-денних дітей. За «АГ»: 56 х 25 = 1400 д.   56 х 5 = 280 д.

Святилище-обсерваторія в столиці даків Сармисегетузі (Румунія). «Велике святилище» в Сармисегетузі споруджене жерцями астрономічної школи Декенея у І ст. Об'єкт за структурою та змістом подібний на Стоунхендж. Це також система концентричних кіл з «підковою» в центрі, утворена дерев'яними стовпами та кам'яними блоками.

Якщо Стоунхендж — перший європейський «Компендіум прецесійної астрономії», то «Велике фракійське святилище» — один з останніх. Їх у часі розділяють 2 000 років.

Структура святилища:

1. «Підкову» утворює 21 дерев'яний стовп, а її кінці з'єднані рядом із 13 стовпів. 21 + 13 = 34. На двох входах у «підкову» по 2 кам'яні плити-поріжки. 2+2 = 4.   34 + 4 = 38.

2. Коло з 68 дерев'яних стовпів, розділених чотирма входами: 17 + 17 + 18 + 16 = 68. На входах: 4 + 3 + 4 + 3 = 14 кам'яних плит-поріжків. 68 + 14 = 82.

3. У зовнішньому колі 104 кам'яні стовпчики. До нього примикає коло з 210 кам'яних стовпчиків, 30 з яких — нижчі. Вони ділять високі стовпчики на 30 груп по 6 стовпчиків у кожній: 30 х 6 = 180.   104 + (30 + 180) = 104 + 210 = 314.

Підсумок рахункових одиниць: (38 + 82) + 314 = 120 + 314 = 434.

Астрономічна структура об'єкта генерується прецесійними швидкостями: 68; 72,8; 76 та 82 роки протягом 1 градуса кола.

І. Обчислення Сонячного року:

1. Число з «підкови» — 13.   13 х 14 = 182 д.   182 х 2 = 28 х 13 = 364 д. — календарний рік. 364 х 2 = 728. Числа 2 та 2 — плити на входах.

«Ш» — 72,8 х 360 = 364 х 72 = 28 х 936 = 13 х 2016

2. Числа кола з 68 стовпчиків: 17 + 17 + 18 + 16 = 50 + 18 = 51 + 17 = 52 + 16.

Кількість кам'яних стовпчиків у двох зовнішніх колах — 314.

314 + 50 = 364 д.   314 + 51 = 365 д.   314 + 52 = 366 д. Сонячного року.

3. 314 + 38 = 352 д. — календарний місячний рік. 38 — число «підкови».

21 х 18 = 378 д. — період Сатурна. 21 — число з «підкови».

352 + 378 = 365 х 2 = 730 д. — дворічний римський календарний період з «роком Місяця» та «роком Сатурна».

II. Обчислення місячних затемнень:

1. «Ш» — 82 х 360 = 29,52 х 1000. 29,52 д. — синодичний місяць.

29,52 х 30 = 885,6 д. — 30-місячний цикл місячних затемнень, де 30 — низькі кам'яні стовпчики. 29,52 х 6 = 177,12 д. — періодичність місячних затемнень, де 3 + 3 = 6 — плити на двох входах.

2. 104 + 14 = 29,5 х 4 = 118 д. — середній період Меркурія, де 104 — стовпчики зовнішнього кола, а 14 — плити на чотирьох входах.

29,5 х 30 = 885 д. — 30-місячний цикл місячних затемнень.

29,5 х 6 = 177 д. — періодичність місячних затемнень.

III. Диски Землі, Місяця і Сонця:

1. 314 + 82 + (2 + 2) = 400 — коло Землі, де (2 + 2) — числа з «підкови».

2. Числа «підкови». 21 + 13 = 34. 34 х 30 = 1020 — мінімальне коло Місяця.

30 — низькі стовпчики. 34 х 120 = 4080 — мінімальне коло Сонця.

34 х 2 = 68. «Ш» — 68 х 360 = 1020 х 24 = 4080 х 6

3. Числа «підкови»: 21 + 2 + 2 + 13 = 38. 38 х 30 = 1140 — макс. коло Місяця.

38 х 120 = 4560 — макс. коло Сонця. 38 х 2 = 76

«Ш» — 76 х 360 = 1140 х 24 = 4560 х 6.

4. Числа «підкови»: 21 х 13 = 273 — відносний радіус Місяця. 273 х (2 х 2) = 1092 — середнє коло Місяця. 1092 х 4 = 4368 — середнє коло Сонця.

«Ш» — 72, 8 х 360 = 273 х 96 = 1092 х 24 = 4368 х 6

IV. Місячні та сонячно-місячні цикли:

1. 30; (30 000) : 82 = 365,854 д. — Сонячний рік, де 30 — низькі стовпчики.

365,854 х 18 = 6585,366 д. — Сарос, де 18 — число кола з 68 стовпів.

2. 210 + 13 = 223 місяці, де 210 — коло з 210 стовпчиків, а 13 — число «підкови». 6585,372 : 223 = 29,530787 — синодичний місяць.

3. 30 х 180 = 5400, де 180 — високі стовпчики з кола, в якому 210 стовпчиків.

540 000 : 82 = 6 585,366 д. — Сарос.

4. Числа кола з 68 стовпів та поріжки: 17 + 3 = 16 + 4 = 20

20; (20 000) : 82 = 243,902 місяця. 243,902 х 27 = 6585,366 д. — Сарос.

14 + 13 = 27, де 14 — плити-поріжки, а 13 — число «підкови».

4. 210 + 34 = 244 місяці, де 34 — число «підкови». 244 х 27 = 366 х 18 = 6588 д. — Сарос.

5. 210 + (2 + 21 + 2) = 235 місяців, де (2 + 21 + 2) — числа «підкови».

29,530787 х 235= 6939,73 д. — 19-річний сонячно-місячний цикл.

6. 21 х 18 = 378 д. — період Сатурна. 378 х 18 = 27 х 252 = 6804 д. — цикл місячних вузлів.

V. Терміни народження Людини («ТНЛ»):

1. 104 х 2 = 208 д. — мін. «ТНЛ».

2. 38 х (3 + 4) = 38 х 7 = 266 д. — 9-місячний «ТНЛ», де 38 — число «підкови», а 3 та 4 — плити-поріжки.

3. 38 х (4 + 4) = 38 х 8 = 30,4 х 10 = 304 д. — 10-місячний період римського Сонячного року — «ТНЛ».

4. Число двох зовнішніх кіл: 104 + 210 = 314 д. — макс. «ТНЛ».

5. 13 х 6 = 78, де 13 — число «підкови», а (3 + 3 = 6) — плити-поріжки.

68 + (3 + 4 + 3) = 68 + 10 = 78, де (3 + 4 + 3) — плити-поріжки.

«Ш» — 78 х 360 = 585 х 48 = 780 х 36. 585 д. — період Венери. 780 д. — період Марса. 585 + 780 = 1365 = 273 х 5. Небесне подружжя породжує п'ятьох 273-денних дітей. Числа «підкови»: 13 х 21 = 273 д.

Астрономічна система на глеку Черняхівської культури з села Ромашок на Київщині. Ця система тотожна астрономічній системі «Великого святилища» в Сармисегетузі. Певно, цей глек фракійського походження.

У верхньому ряді глека — групи ромбів: 52 + 41 + 34 = 127 ромбів.

У нижньому ряді 32 + (1) + 16 + (1) + 20 + (1) + 8 + 17 = 68 + 8 + (1 + 1 + 1) + 17 = 76 + (3) + 17 = 96 ромбів.

Підсумок рахункових одиниць: 127 + 96 = 223 місяці Саросу.

Швидкості: 17 х 4 = 34 х 2 = 68 р.; 76 р. та 41 х 2 = 82 р.

Ці швидкості присутні також у «Великому святилищі» Сармисегетузи.

На глекові присутні також групи «рисок» з астрономічним значенням.

Отже, тотожні за змістом «Компендіуми» Стоунхенджа та «Великого фракійського святилища» містять важливіші досягнення близькосхідної прецесійної математичної астрономії.

Аналогічний зміст мають як «Мале святилище-обсерваторія» у Сармисегетузі, так і фракійське «Святилище-годинник» у селі Долиняни на Буковині (Україна). Наведені фракійські астрономічні об'єкти стверджують існування у фракійців і слов'ян розвинутих астрономічних знань близькосхідного походження у часи Черняхівської культури, що кардинально змінює уявлення про рівень цивілізованості фракійців і слов'ян у першій половині І тис.

Шумеро-єгипетська «Прецесійна математична астрономія» проіснувала в незмінному вигляді до часів християнства, тобто протягом 3500 років.

ШУМЕРО-ЄГИПЕТСЬКА ПРЕЦЕСІЙНА МАТЕМАТИЧНА АСТРОНОМІЯ (III—I тис. до н. е.)

Г. Ю. Гриценко

НТТУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

yaropolkbazhaluk@gmail.com

На підставі дешифрування шумерської «Універсальної астрономо-математичної таблиці» («УТ»), а також ряду археоастрономічних об'єктів і текстів автором доведено існування розвинутої математичної астрономії в Шумері та Єгипті з початку III тис. до н. е.

Конкретно «УТ» — «Таблиця швидкостей прецесії у діапазоні: 1 градус за 66,6—100 років, цикли якої формують періоди світил та планет, кола Землі, Місяця і Сонця, періоди затемнень та терміни народження Людини».

У Шумері, певно, вже із середини IV тис. до н. е. проводилися систематичні астрономічні спостереження. Були накопичені статистичні дані про рух світил і планет, періоди затемнень та відносні розміри Землі, Місяця та Сонця, а також зафіксована прецесія — зміщення «Сфери нерухомих зірок» відносно точки рівнодення. Був зроблений висновок, що «першодвигуном» Сонячної системи було не Сонце, а рух Сфери нерухомих зірок.

Явно близькосхідну фізичну теорію причини руху Сонячної системи виклав Платон у «Післязаконні»: «Один (колобіг), а саме восьмий, його можна визнати Космосом, веде за собою всі інші (сім колобігів)».

Відносні розміри Землі і Місяця були обчислені внаслідок зіставлення їхніх розмірів під час повного місячного затемнення. Встановили, що діаметри Землі та Місяця відносяться як числа 1000 та 273 (насправді 272,27). При π = 3,125 (за «УТ») коло Землі дорівнює 1000 x 3,125 = 3125, а Місяця — 273 x 3,125 = 853,125. Ці відносні числа спростили, перемноживши на 128.

3,125 x 128 = 400 000 — відносне коло Землі, наведене Аристотелем!

853,125 x 128 = 109 200 — відносне коло Місяця. (Насправді коло Землі = 40 000—40 032 км, а коло Місяця = 10 912 км).

Подібність шумерських та сучасних чисел параметрів Землі і Місяця пояснюється тим, що французькі метрологи прийняли коло Землі за Аристотелем, рівне 40 000 км (нуль скоротили).

Жерці прийняли діаметр Землі = 128. Тоді: 128 x 3,125 = 400 — відносне коло Землі, а відносне коло Місця = 109,2. Відносне коло Сонця прийняли у 400 разів більшим, ніж коло Місяця. 109,2 x 400 = 43680. (Насправді 4 368 700 км).

На рубежі IV та III тисячоліть астрономи Шумеру вирішили математично систематизувати спостережні дані та теоретичні висновки. Була створена «УТ» — астрономо-математична Модель Всесвіту, за якою була нормована математика та канонізована фізична «прецесійна астрономія».

Математична структура «УТ»

1. «УТ» містить 29 стовпчиків, у стовпчиках по 25 чисел. Усього 725 математично взаємопов'язаних чисел. У стовпчиках числа подвоюються та роздвоюються, а в рядках — взаємопов'язані як обернені величини.

2. Базовий ряд має вигляд: …6^2; (1 : 6); 60; 1; 100; 6; (1 : 6); 6^2; $(1 : 6)^2$; 6^3...

Числа 1 та 6 подвоюються, а числа 60 та 100 — роздвоюються, і так почергово.

3. Кожне число у рядку, з одного боку, має обернену величину відносно числа 1 (100…), а з другого боку — відносно числа 6 (60…). Числа астрономії могли фіксуватися їхніми оберненими величинами.

4. «Нулі» на початку та в кінці числа не писалися, знаку «0» не існувало. Розрядна кома ставилася за змістом, а додаткові розряди дописувалися умоглядно.

5. Числа швидкостей протягом одного градуса кола (66,6—100) фіксувалися в «УТ» або цілочислено, або дуже наближеними числами.

6. Числу «швидкість» відповідало число «циклу прецесії», тому що кожне число «УТ» таблично збільшується у 6 та 36 (360) разів, тобто множилося на 360 градусів.

7. «Числа прецесій» генерували числа астрономічних періодів і параметрів, які цілочислено в них вписувалися.

8. «Цикли прецесій», астрономічні періоди та кола Землі, Місяця і Сонця математично були «колами», оскільки їм відповідали в «УТ» числа «діаметри» при $\pi = 3{,}125$.

9. «УТ» дозволяла фіксувати п'ятизначні числа «циклів прецесій» завдяки стисканню натурального ряду чисел подвоєнням.

10. «УТ» симетрична множина, в якій числа поволі еволюціонують навколо «атракторів» — близьких за значенням чисел, розташованих поряд, що дозволяло фіксувати як змінні синодичні періоди планет, так і змінні розміри Місяця і Сонця. Платон писав: «Місяць Бог створив таким, що він здається то більшим, то меншим».

11. За «УТ» канонізовані: одиниця виміру «Один Метр» та похідний від нього «Царський лікоть»: 1 : 1,91 = 0,5236 м (обчислення за «УТ»).

12. В «УТ» присутні числа «Золотого перерізу»: 1 000 000 : 618 = 1618,12 (обчислення за «УТ»).

«УТ» була базовим «Астрономічним довідником» стародавнього світу. Похідна від «УТ» відома історикам математики єгипетська «Математична таблиця ділення числа 2 на непарні числа від 3 до 101», яка міститься у «папірусі Райда». Насправді це «Таблиця швидкостей прецесії у діапазоні 1 градус за 66—101 рік».

Прогресія Платона «Музика сфер» насправді є єгипетською «Таблицею швидкостей прецесії у діапазоні 1 градус за 72; 72,9 та 78,6 року». Ця таблиця взагалі є фрагментом «УТ». «Біблія» містить велику кількість чисел близькосхідної «прецесійної астрономії» і є надійним «астрономічним довідником».

Щодо ймовірного знання прецесії в Шумері, то наводимо приклади знання цього явища у стародавньому світі. Гіппархом (II ст. до н. е.) швидкість прецесії була визначена спочатку: 1^o за 100 р., а потім за 84,5 року.

У IX ст. арабські астрономи отримали значення 1^o за 66 та 72,5 року, а Біруні — за 69 років. У Китаї у VII ст. Лю Чжо встановив — 1^o за 75 р. Складається враження про «узгодження» висновків Гіппарха, арабських та китайських астрономів з даними близькосхідних астрономів. За сучасними даними, швидкість прецесії — 1^o за 72 р.   72 х 360 = 25 920 р. — цикл прецесії.

Наводимо астрономічні обчислення за таблицями прецесійних швидкостей як «УТ», так і єгипетських. Реальними вважалися тільки ті астрономічні періоди та параметри, які генерувалися канонічними швидкостями «першодвигуна». Канонічних швидкостей було 25.

1. Коло, діаметр та радіус Землі: 400; 128; 64. (Насправді 40 000—40 032 км). 80 — швидкість протягом 1^o.   80 х 360 = 28 800 = 400 х 72 = 128 х 225 = 64 х 450

2. Відносний діаметр Місяця: 255—285. (Насправді 272,27).

Відносне коло Місяця: 1020—1140. (Насправді 10 912 км).

Відносне коло Сонця: 4080—4560. (Насправді 4 368 700 км).

68 х 360 = 24 480 = 255 х 96 = 1020 х 24 = 4080 х 6

72 х 360 = 25 920 = 270 х 96 = 1080 х 24 = 4320 х 6

72,8 х 360 = 26 208 = 273 х 96 = 1092 х 24 = 4368 х 6

73 х 360 = 26 280 = 273,75 х 96 = 1095 х 24 = 4380 х 6

75 х 360 = 27 000 = 281,25 х 96 = 1125 х 24 = 4500 х 6

76 х 360 = 27 360 = 285 х 96 = 1140 х 24 = 4560 х 6

3. Сонячний рік: 364—366 д. (Насправді 365,25 д.).

72,8 х 360 = 26 208 = 364 х 72 = 28 х 936.   28 х 13 = 364 д.

72,9 х 360 = 26 244 = 364,5 х 72.   73 х 360 = 26 280 = 365 х 72.

73,2 х 360 = 26 352 = 366 х 72.

76 х 360 = 27 360 = 364,8 х 75 = 30,4 х 900.   30,4 х 12 = 364,8 д.

78 х 360 = 28 080.   28,08 х 13 = 365,04 д.

84,5 х 360 = 30 420.   30,42 х 12 = 365,04 д.

4. Періоди Місяця: 29,6 д.   29,6 х 6 = 177,6 д.;   355,2 д. та 29,66… д., 178 д., 356 д. (Насправді 29,53 д.).   178 д. — період місячних затемнень — «число смерті».

74 х 360 = 26 640 = 29,6 х 900 = 177,6 х 150 = 355,2 х 75.

89 х 360 = 32 040 = 29,66 х 1080 = 178 х 180 = 356 х 90.

5. Caроський цикл місячних затемнень: 6588 д. (Насправді 6585, 78 д.).

73,2 = 26 352 = 27 х 976 = 366 х 72 = 6588 х 4.   366 х 18 = 27 х 244 = 6588 д.

6. Цикл місячних вузлів: 6804 д. (Насправді 27,2122 х 250 = 6803,05 д.).

75,6 х 360 = 27 216 = 27,216 х 1000 = 27 х 1008 = 28 х 972 = 6804 х 4

378 х 18 = 27,216 х 250 = 27 х 252 = 28 х 243 = 6804 д.

7. Період Меркурія: 104; 117; 132 д. (Насправді 104—132 д.).

78 x 360 = 28 080 = 104 x 270 = 117 x 240. 66 x 360 = 23 760 = 132 x 180

8. Період Венери: 576; 584; 585; 592 д. (Насправді 577—591 д.).

72 x 360 = 25 920 = 576 x 45. 73 x 360 = 26 280 = 584 x 45.

78 x 360 = 28 080 = 585 x 48. 74 x 360 = 26 640 = 592 x 45.

9. Період Марса: 765; 780; 810 д. (Насправді 765—811 д.).

68 x 360 = 24 480 = 765 x 32. 78 x 360 = 28 080 = 780 x 36.

72 x 360 = 25 920 = 810 x 32.

10. Період Юпітера: 396; 405 д. (Насправді 395—403 д.).

66 x 360 = 23 760 = 396 x 60. 72 x 360 = 25 920 = 405 x 64.

11. Період Сатурна: 375; 378; 380 д. (Насправді 376—380 д.).

75 x 360 = 27 000 = 375 x 72. 76 x 360 = 27 360 = 380 x 72.

84 x 360 = 30 240 = 378 x 80

12. Відстань від Місяця до Землі: 384. (Насправді 384 400 км).

Радіус Землі = 64. 64 x 60 = 3840. 76,8 x 360 = 27 648 = 384 x 72 = 1536 x 18.

3840 x 400 = 1 536 000 — відстань від Землі до Сонця. (Насправді 149 504 000 км).

13. Відстань від Землі до «Сфери нерухомих зірок» за прогресією «Музика сфер»: 384 x 27 = 10 368. 72 x 360 = 25 920 = 10 368 x 2,5

14. Терміни народження Людини. За сучасною біологією — 196—315 днів. Оптимально 280 д. За статистикою жерців — 195—314, 315 днів, у середньому 255 днів. 27 x 9 = 243 д. — період видимості Венери, бажаний термін народження.

72,9 x 360 = 26 244 = 243 x 108 68 x 360 = 24 480 = 255 x 96

72 x 360 = 25 920 = 270 x 96 72,8 x 360 = 26 208 = 273 x 96

76 x 360 = 27 360 = 304 x 90 = 30,4 x 900. 30,4 x 10 = 304 д.

70 x 360 = 25 200 = 280 x 90 = 315 x 80. 78 x 360 = 28 080 = 585 x 48 = 780 x 36.

Небесне подружжя: Марс — 780 д. та Венера — 580 д. народжувало п’ятьох 273-денних дітей. 780 + 585 = 1365 = 273 x 5. Числа 273 та 1365 — біблійні (Біблія, Числа 3).

15. Швидкість 1^{o} за 100 років — всеохоплююча і містить швидкості 66,6… та 75. 100 x 360 = 36 000 = 66,6… x 540 = 75 x 480. Число 36 000 — біблійне (Біблія, Числа 31).

«УТ» проіснувала в Ойкумені з початку III тис. до н. е до часів прийняття християнства в Європі та до часу іспанської агресії у Новий світ.

Спростовується наявне в історії астрономії стале уявлення про примітивність догрецької, єгипетської та вавилонської астрономії.

Автором уперше відкриті невідомі історикам науки розвинуті математичні та астрономічні знання, а відтак і світогляд дохристиянських світових цивілізацій. Відбулося їх повторне відкриття, але вже як суспільств зовсім іншого духовного та наукового рівня, ніж уважалося раніше.

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ДЕЯКИХ КОМАНД МОВИ $\LaTeX$ ДЛЯ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕКСТІВ

Г. М. Губаль
Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна
niik-g@yandex.ru

Робота з системою $\LaTeX$, призначеною для створення математичних текстів подібна до програмування, тим більше, що ця система розрахована на використання текстового режиму, командного рядка і багатьох конфігураційних файлів [1—3].

У роботі досліджуються класи документів, які забезпечують розширення можливостей задання розмірів шрифтів, при цьому, як локально, так і глобально. При цьому використовуються пакети moresize, anyfontsize, mathptmx, lmodern. Наводяться і аналізуються деякі команди, які використовуються у мові створення математичних текстів $\LaTeX$.

У документах $\LaTeX$ можна змінювати розмір шрифту як локально (змінювати розмір шрифту окремих літер), так і глобально (змінювати розмір шрифту у всьому документі). При зміні розміру шрифту глобально змінюється розмір шрифту не тільки основного тексту, а й розмір шрифту заголовків, виносок, колонтитулів, колонцифр та ін. Тому іноді доцільно змінювати шрифт локально.

Щоб змінити глобально розмір шрифту в класах документів article, report і book (за замовчуванням у цих класах задано розмір шрифту 10pt), необхідно змінити опцію класу, яка відповідає за розмір шрифту. Наприклад, розмір шрифту 11pt у класі документа article задається такою командою:

```
\documentclass[11pt]{article}
```

Якщо необхідно використати розширені розміри шрифтів у основних класах, підключають пакети extsizes. Ці пакети генерують шрифти розмірів 8pt, 9pt, 14pt, 17pt і 20pt. Наприклад, шрифти розмірів 17pt і 14pt у класах extreport і extarticle генеруються такими командами:

```
\documentclass[17pt]{extreport}
\documentclass[14pt]{extarticle}
```

Класи документів ams мають більше розмірів шрифтів, ніж стандартні класи.

Щоб змінити розміри шрифту локально у стандартних класах документів (розміри слова, абзацу, виноски), необхідно використовувати макроси, які задаються одним оператором або оточенням:

```
\begin
…
\end
```

Наприклад,

```
{\large Це більший розмір шрифту.\par}
\begin{footnotesizes}
```

Розмір цього шрифту має розмір шрифту виноски.

\end{footnotesizes}

Пакет moresize дає можливість використати макроси \ssmall і \HUGE. Макрос \ssmall генерує розмір шрифту в межах між \scriptsize і \tiny, а макрос \HUGE генерує розмір шрифту більший від найбільш допустимого за замовчуванням.

Проблему збільшення розмірів стандартних шрифтів у $\LaTeX$ за допомогою макроса \HUGE можна розв'язати, використавши типи масштабованих шрифтів з пакета PSNFSS. Наприклад, у класі документа article можна підключити пакети mathptmx і moresize і використати макроси \HUGE, \ssmall:

```
\documentclass{article}
\usepackage{mathptmx}
\usepackage[10pt]{moresize}
\begin{document}
{\ssmall Розмір шрифту знаходиться в межах між \scriptsize і \tiny}
{\HUGE Розмір шрифту більший від 25pt}
\end{document}
```

Аналогічним пакетом до пакета moresize є пакет anyfontsize. У цьому пакеті використовується команда \fontsize з двома обов'язковими аргументами: нового розміру шрифту і baselineskip:

```
\fontsize{size}{baselineskip}
```

Розглянемо клас документів memoir, який забезпечує розширені розміри шрифтів від 9pt до 60pt глобально. При цьому використовуються такі опції: 9, 10, 11, 12, 14, 17, 20, 25, 30, 36, 48, 60pt. Наприклад, розмір шрифту 25pt у класі memoir генерується такою командою:

```
\documentclass[25pt, extrafontsizes]{memoir}
```

Для задання розмірів шрифтів більших від 25pt необхідно використовувати пакет Latin Modern в T1 кодуванні за допомогою таких команд:

```
\usepackage{lmodern}
\usepackage[T1]{fontenc}
```

Щоб змінити розміри шрифтів локально у класі документів memoir використовують макроси як і в стандартних класах. На кінцях таблиці стандартних розмірів шрифтів у $\LaTeX$ використовуються такі макроси класу memoir: \minuscule і \HUGE.

Розглянемо деякі команди, які використовуються для представлення математичного тексту.

Щоб встановити одинарний, подвійний міжрядковий інтервал або міжрядковий інтервал 1,5 рядка, необхідно підключити пакет setspace і використати одну з команд \singlespacing, \doublespacing або \onehalfspacing відповідно.

Розглянемо випадок, коли виникає необхідність помістити формулу в рамку. Наведемо приклад створення формули в рамці в оточенні align. При цьому представимо оператор \Aboxed:

```
\makeatletter
```

```
\newcommand\Aboxed[1]
{\@Aboxed#1\enddne}
{\settowidth
\@templ{$\displaystyle#1{}$}
}
\setlength\@templ
{\@templ+\aboxsep+\aboxrule}
\global\@templ=\@templ\kern\@templ
&
\kern-\@templ\boxed{#1#2}
\makeatother
```

У документі звернемось до оператора \Aboxed за допомогою такого коду:

```
\begin{align}
\Aboxed{&\frac{d}{dt}F(t)=\mathcal{A}F(t)}\\
&\F(t)=U(t)F(0)
\end{align}
```

Наведений код генерує такий текст:

$$\begin{aligned} &\boxed{\frac{d}{dt}F(t)=\mathcal{A}F(t)} \\ &F(t)=U(t)F(0) \end{aligned} \qquad (1)$$

У випадках, коли виникає необхідність створити ліву фігурну дужку в системі нумерованих рівнянь, яка задається оточенням subequations, необхідно підключити пакет empheq з використанням команди \empheqlbrace. При цьому використовується такий код:

```
\begin{subequations}
\begin{empheq}[left=\empheqlbrace]{align}
&\frac{d}{dt}F(t)=\mathcal{A}F(t)}\\
&\left.{F(t)}\right|_{t = 0}= F(0)
\end{empheq}
\end{subequations}
```

Наведений код генерує такий текст:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}F(t)=\mathcal{A}F(t) && (1) \\ &\left.F(t)\right|_{t=0}=F(0) && (2) \end{aligned}\right.$$

Іноді буває зручно нумерувати абзаци для подальшого рецензування документа. У цьому випадку визначимо оператор \Header за допомогою такого коду:

```
\newcounter{vcount}
\def\Header#1
{\medskip\hbox{\bfseries #1}\setcounter{vcount}{1}
\everypar{\arabic{vcount}}
```

\stepcounter{vcount}}

Звернутись до цього оператора у тексті докуметна можна так:

\Header{Introduction}

The evolution of states of many-particle systems is described by the BBGKY hierarchy of equations.

A solution of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations is represented as the expansion over particle groups whose evolution is governed by the cumulants.

States of many-particle systems can be described in terms of the one-particle distribution function that satisfies the kinetic equation.

Наведений код генерує такий текст з нумерованими абзацами:

Introduction

1. The evolution of states of many-particle systems is described by the BBGKY hierarchy of equations.

2. A solution of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations is represented as the expansion over particle groups whose evolution is governed by the cumulants.

3. States of many-particle systems can be described in terms of the one-particle distribution function that satisfies the kinetic equation.

Список літератури

1. Дубинич, В. Н., Дубинич М. В. (2012). Использование системы LATEX для подготовки научных изданий. В кн. *Перспективы развития высшей школы: материалы V Международной науч.-метод. конф.* Гродно: ГГАУ.
2. Жуков, М. Ю., Ширяева, Е. В. (2009). *LATEX2ε: искусство набора и вёрстки текстов с формулами*. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ.
3. Ширяева, Е. В., Ширяева И. В. (2010). *Введение в TEX-программирование*. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ.

ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ПРИ ВИКЛАДАННІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

О. А. Даніч
Миколаївський національний університет імені В. О.Сухомлинського, Миколаїв, Україна
lonchik_lonchik@mail.ru

Процес інформатизації, що охопив сьогодні всі сторони життя сучасного суспільства, не оминув і галузь освіти. Потреба у висококваліфікованих фахівців, які володіють не тільки певним багажем знань, але й здатні до самовдосконалення, самоосвіти та саморозвитку, помітно зросла. Тому згідно з Національною доктриною розвитку освіти у XXI ст. пріоритетом розвитку освіти є впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, що забезпечують доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформатизованому суспільстві. Використання інформаційно-комунікативних технологій при викладанні геометрії, зокрема аналітичної, сприяють досягненню основних педагогічних цілей, а також відкривають нові можливості. Наприклад, при вивченні поверхонь другого порядку можна не тільки побудувати поверхню, але і повертати її, розглядаючи під будь-якими кутами, вибирати для більш повної уяви про поверхню різні засоби її забарвлення, різні системи координат тощо.

Мета дослідження — розглянути можливості використання інформаційно-комунікативних технологій при викладанні дисципліни «Аналітичної геометрії» у ВНЗ.

Доцільність використання ІКТ під час навчання аналітичної геометрії студентів вищих навчальних закладів насамперед пов'язана з тим, що одним з реальних шляхів підвищення якості професійної математичної підготовки майбутніх фахівців є активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів, підвищення ефективності навчання. При цьому використання ІКТ дає можливість підвищити мотивацію навчання, ефективніше реалізувати принципи диференціації та індивідуалізації навчання, краще організувати і підвищити ефективність аудиторної та самостійної роботи студентів, озброїти новими засобами пізнавальної діяльності, новими методами і прийомами наукового пізнання, що базуються на використанні ІКТ.

При викладанні аналітичної геометрії стануть у пригоді такі математичні пакети, як: *MathCAD, Maple V, Mathematica, Matlab, MuPad, Derive, Hit, GRAN, DG та ін.* Ці системи мають зручний інтерфейс, реалізують багато стандартних і спеціальних математичних операцій і функцій, мають потужні графічні засоби двох- і тривимірної графіки, мають власні мови програмування, засоби підготовки математичних текстів до друку, дозволяють імпортувати дані в інші програмні продукти та експортувати з них інформацію для обробки.

Інформаційні технології, у порівнянні з традиційними методами дозволяють по новому поставити викладання аналітичної геометрії у вищих навчальних закладах, забезпечують активізацію науково-дослідної діяльності студентів, полегшують сприйняття і засвоєння навчального матеріалу за рахунок наочності, яка часто ховається за складністю формул, розвивають просторову уяву та інтелектуальні здібності, поліпшують образне мислення студентів, акцентують увагу студентів на важливих моментах, за рахунок відтворення інформації на екрані, роботу в різних режимах (текстових, графічних), виконання аналітичних та чисельних розрахунків, підключення додаткових засобів для розширення кола задач. Саме тому застосування педагогічних програмних засобів в процесі навчання аналітичної геометрії у поєднанні з класичними методиками сприяє якісній реалізації основних принципів дидактики, як: принцип науковості, зв'язку теорії з практикою, систематичності та послідовності, безперервності навчання, стимуляції та мотивації, усвідомленості та активності, професійної спрямованості.

Систематичне й педагогічно доцільне використання під час занять мультимедійних засобів сприяє вдосконаленню сенсомоторної сфери студентів, розвитку їх зорової і слухової чутливості, формуванню вміння сприймати, розвитку спостережливості, здатності до самостійної творчої роботи.

Застосування навчальних програм дозволяє вивільнити викладача від рутинної роботи з повторення матеріалу для закріплення знань та вмінь і контролю. А студенти, з свого боку, мають можливість використання потужної довідкової бази, набувають конкретних практичних вмінь й навичок, розвивають інформаційно-комунікаційні компетентності.

Отже, впровадження сучасних інформаційних технологій у навчання — одна з найбільш важливих і стійких тенденцій розвитку світового освітнього процесу, що дозволяють інтенсифікувати освітній процес, збільшити швидкість сприйняття, розуміння та глибину засвоєння величезних масивів знань. За останні роки комп'ютерна техніка й інші засоби інформаційних технологій стали все частіше використовуватися при вивченні більшості навчальних предметів, в тому числі й математики.

Список літератури

Жалдак, М. І. (2003). Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. пр.*, *7*, 3—16. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова.

Інтегроване середовище вивчення курсу «Аналітична геометрія» для вищих навчальних закладів: Настанова користувача (2008). — Херсон: Науково-дослідний інститут інформаційних технологій.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ТЕХНІЧНОМУ ТА ЕКОНОМІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТАХ

В. В. Дем'яненко[1], О. О. Дем'яненко[2], С. Д. Потапенко[1]
Київський національний економічний університет імені В. Гетьмана,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
w.dem@ukr.net, o.dem@ukr.net, sergey.potapenko@kneu.edu.ua

Курс вищої математики, який читається в технічних та економічних університетах є базовим. Обсяг та наповнення його може бути різним в залежності від потреб подальших спеціальних курсів. Але підходи до формування курсу та методичні прийоми однакові, зокрема, приклади застосування викладеного теоретичного матеріалу є обов'язковими. Природньо, що в технічному університеті пропонуються задачі фізичного, хімічного змісту, а в економічному — економічного. В математичному сенсі при цьому може розв'язуватись одна задача. Розглянемо наступний приклад.

Задача 1. Бак для води має форму куба зі стороною n метрів. Нехай рівень води, що вимірюється від дна бака, в момент часу t дорівнює $h\left(t\right)$. Починаючи з моменту часу $t = 0$ вода в бак наливається з постійною швидкістю k літрів за секунду. Одночасно з цим вода з бака витікає зі швидкістю $w \times h\left(t\right)$. Обчисліть до якого обсягу тяжіє обсяг води в баку, якщо $t \to \infty$.

Розв'язання. Об'єм

$$V\left(t\right) = n^2 \times h\left(t\right) \Rightarrow V'\left(t\right) = n^2 \times h'\left(t\right).$$

За умовою задачі

$$\frac{dV\left(t\right)}{dt} = k - w \times h\left(t\right).$$

У результаті маємо диференціальне рівняння

$$h'\left(t\right) + \frac{w}{n^2} h\left(t\right) = \frac{k}{n^2}.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуючи його, отримаємо, що обсяг

$$h\left(t\right) = \frac{k}{w} + Ce^{-\frac{w \times t}{n^2}},$$

де C — константа.

Звідки

$$\lim_{t\to\infty} h\left(t\right) = \frac{k}{w} + \lim_{t\to\infty} Ce^{-\frac{w \times t}{n^2}} = \frac{k}{w}.$$

Отже рівень води у баку ніколи не перевищить $\frac{k}{w}$ метрів, а обсяг води буде тяжіти до $\frac{n^2 \times k}{w}$ м^3, але ніколи не буде більшим за нього.

Та сама математична задача в економічній інтерпретації може виглядати наступним чином.

Задача 2. У відділі деякого підприємства працює n співробітників. Одночасно у кожного зі співробітників може знаходитись на виконанні до m виробничих завдань. Нехай рівень складності виконання виробничих завдань у відділі визначається через $h\left(t\right)$ і може бути розрахований для будь якого моменту часу t, а самі завдання, починаючи з $t = 0$, надходять у відділ на обробку з постійною інтенсивністю k завдань за одиницю часу. Нехай інтенсивність виконання виробничих завдань складає $w \times h\left(t\right)$ завдань за одиницю часу, де w — деякий коефіцієнт, що може визначатись емпірично та означає ступінь впливу різноманітних психологічних факторів — наприклад, стомленість працівників тощо. Необхідно визначити до якої кількості тяжіє загальний обсяг робіт, що знаходяться на виконанні у відділі, якщо $t \to \infty$.

Розв'язання. Умова задачі зводиться до

$$V\left(t\right) = m \times n \times h\left(t\right) \Rightarrow V'\left(t\right) = m \times n \times h'\left(t\right),$$
$$\frac{dV\left(t\right)}{dt} = k - w \times h\left(t\right). \tag{1}$$

Якщо для простоти запису позначити $h\left(t\right)$ через y то з виразів (1) можна отримати лінійне диференційне рівняння першого порядку

$$y' + \frac{w}{m \times n} y = \frac{k}{m \times n}, \qquad 2)$$

розв'язання якого дасть відповідь на поставлене питання у задачі.

Методом варіації довільної сталої знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y' + \frac{w}{m \times n} y = 0.$$

Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{w}{m \times n} dt.$$

Після виконання інтегрування та потенціювання отримаємо

$\ln\left(y\right) = -\frac{w}{m \times n}\int dt + \ln\left(C_1\right) \Rightarrow y = C_1 e^{-\frac{w}{m \times n}\int dt} \Rightarrow y = C_1 e^{-\frac{w \times t}{m \times n}}$. Позначимо C_1 через $C\left(t\right)$, тоді

$$y = C(t)e^{-\frac{w\times t}{m\times n}}.$$

Підставивши отриманий вираз для y у рівняння (2) отримаємо

$$\left(C(t)e^{-\frac{w\times t}{m\times n}}\right)' + \frac{w}{m\times n}C(t)e^{-\frac{w\times t}{m\times n}} = \frac{k}{m\times n} \Rightarrow$$

$$C(t)' e^{-\frac{w\times t}{m\times n}} - \frac{w}{m\times n}C(t)e^{-\frac{w\times t}{m\times n}} + \frac{w}{m\times n}C(t)e^{-\frac{w\times t}{m\times n}} = \frac{k}{m\times n} \Rightarrow$$

$$C(t)' e^{-\frac{w\times t}{m\times n}} = \frac{k}{m\times n} \Rightarrow C(t)' = \frac{k\times e^{\frac{w\times t}{m\times n}}}{m\times n} \Rightarrow$$

$$C(t) = \frac{k}{m\times n}\frac{m\times n}{w}e^{\frac{w\times t}{m\times n}} + C_2 = \frac{k}{w}e^{\frac{w\times t}{m\times n}} + C_2.$$

Тоді

$$y = \left(\frac{k}{w}e^{\frac{w\times t}{m\times n}} + C_2\right)e^{-\frac{w\times t}{m\times n}} = \frac{k}{w} + C_2 e^{-\frac{w\times t}{m\times n}}. \qquad (3)$$

Так як через y позначено $h(t)$ то

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{k}{w} + \lim_{t\to\infty}\left(C_2 e^{-\frac{w\times t}{m\times n}}\right) = \frac{k}{w}.$$

Отже, з умов задачі, а саме з виразів (1), загальний обсяг робіт, який знаходиться на виконанні у відділі, буде тяжіти до кількості $\frac{m\times n\times k}{w}$ робіт, але ніколи не перевищить дане значення. При $t = 0$ значення $h(0)$ повинно дорівнювати 0. Отже,

$$\frac{k}{w} + C_2 e^{-\frac{w}{m\times n}\times 0} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{k}{w}.$$

Таким чином, з (3), рівень складності виконання виробничих завдань у відділі визначається за формулою

$$h(t) = \frac{k}{w} - \frac{k\times e^{-\frac{w\times t}{m\times n}}}{w} = \frac{k}{w}\left(1 - e^{-\frac{w\times t}{m\times n}}\right).$$

Саме така функція відповідає умовам задачі. Тоді загальна кількість робіт, що знаходяться на виконанні у відділі, у будь який момент часу t, може бути визначена за формулою

$$V(t) = \frac{m \times n \times k}{w}\left(1 - e^{-\frac{w \times t}{m \times n}}\right).$$

Отриманий результат допускає подальший економічний аналіз, зокрема за допомогою наступної імітаційної моделі можна оцінити допустиму кількість одночасно не виконаних завдань, час визначення деякої запланованої сукупності завдань тощо.

Імітаційна модель реалізована через комп’ютерну симуляцію у початковому коді 1. Значення параметрів моделі визначаються у 3-му, 4-му, 5-му, 6-му та 7-му рядках початкового коду моделі. Тут T — максимальна кількість одиниць часу. Число 7200 означає, що моделювання здійснюється для часового проміжку у дві години, якщо за одиницю часу обрано секунду. Альтернативним варіантом реалізації імітаційної моделі є початковий код 2.

Початковий код 1

Вміст файлу *model-a.cpp*

```
1 #include <iostream>
2
3 #define m 10
4 #define n 10
5 #define k 3
6 #define w 0.25
7 #define T 7200
8
9 int main(void) {
10     double V = 0;
11     std::cout << "t␣V" << std::endl;
12     for (int t = 0; t <= T; ++t) {
13         std::cout << t << '␣' << V << std::endl;
14         V += k - w * V / (n * m);
15     }
16     return 0;
17 }
```

Графіки на рис. 1 та рис. 2 побудовані за умов, для яких $m = 10$, $n = 10$, $k = 3$, $w = 0.25$.

Початковий код 2

Вміст файлу *model-b.cpp*

```
#include <iostream>
#include <cmath>

#define m 10
#define n 10
#define k 3
#define w 0.25
#define T 7200

int main(void) {
    std::cout << "V(" << T << ")=" << m * n * k / w * (1 - pow(M_E, -w * T / m / n)) << std::endl;
    return 0;
}
```

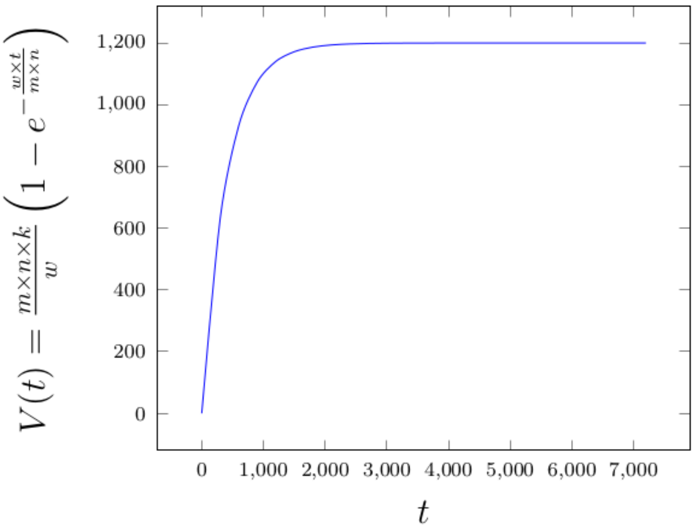


Рис. 1. Зміна кількості робіт, що знаходяться на виконанні
у відділі, з плином часу

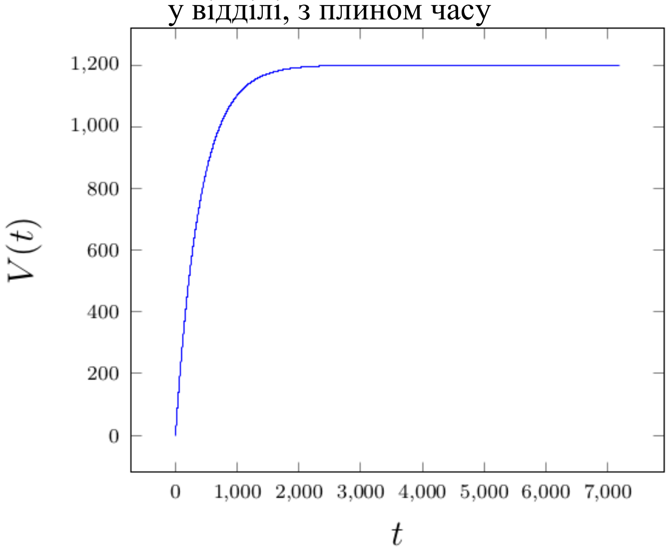


Рис. 2. Графічна інтерпретація результатів моделювання

Наведені задачі підтверджують важливість базових математичних курсів, що читаються в університетах різного профілю та ілюструють принцип наочності у процесі навчання.

Список літератури

Вітлінський, В. В. (2003). *Моделювання економіки*. Київ: КНЕУ.

Стрижак, Т. Г., Коновалова, Н. Р. (1997). *Диференціальні рівняння*. Київ: Світ.

ПРО ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ ВСТУПНОЇ ЛЕКЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ТА МАТЕМАТИЗОВАНИХ КУРСІВ

В. В. Дем'яненко О. О. Дем'яненко

Київський національний економічний університет імені В. Гетьмана,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

w.dem@ukr.net, o.dem@ukr.net

Лекція є однією з основних складових частин навчального процесу. Лекції читають століттями, але все одно лекційне викладання продовжує розвиватись та вдосконалюватись.

Можна сформулювати загальні вимоги до лекцій. Зокрема, методика викладання лекцій вимагає ясності та чіткості викладення матеріалу, виділення головного, зв'язку з попереднім матеріалом. На лекції обов'язково має бути сформульована тема, мета. Вона має бути чіткою, лаконічною, доступною, ілюстрованою прикладами. Математична лекція має бути добре аргументованою. Зрозуміло, що виконання всіх цих вимог великою мірою залежить від майстерності викладача, від його фахового рівня та широти кругозору, від захопленості педагога своїм предметом та від його вміння захопити увагу слухачів. Тобто, лекція — це дуже індивідуальна справа. Але можна вказати деякі підходи, методичні та психологічні прийоми, які допоможуть зробити лекцію досконалою.

Автори хочуть докладно зупинитись на проблемах саме першої, вступної лекції курсу, яка певною мірою визначає успіх наступних лекцій. Готуючись до такої лекції, безумовно, треба чітко розрізняти чи є курс базовим, чи таким, що є продовженням вже вивчених курсів.

Розглянемо як приклади вступну лекцію до базового курсу «Математичний аналіз», що починають читати у першому семестрі в технічному університеті та вступну лекцію до курсу «Теорія алгоритмів», що читається на другому курсі в економічному університеті і який базується на вивчених попередніх курсах.

Вступна лекція до базового курсу вимагає чіткого формулювання предмета вивчення, переліку знань та вмінь, які студенти повинні набути протягом вивчення курсу. Треба докладно пояснити в яких формах буде проводитись оцінювання знань протягом семестру (контрольні, опитування, колоквіуми) та як будуть оцінюватись знання студентів у підсумку (іспит, залік). Якщо для оцінювання знань студентів застосовується рейтингова система, то з нею студентів треба ознайомити.

Далі, обов'язково треба зробити посилання на Інтернет ресурс, де розміщені навчальні робочі програми курсу, методичні матеріали, літературні джерела. Зважаючи на те, що лекція є вступом до математичного курсу доцільно акцентувати увагу на необхідності слідкувати за позначеннями, які запроваджує лектор і заохочувати студентів їх використовувати; підкреслити структурованість майбутнього матеріалу, а саме необхідність виділяти означення та формулювання теорем, вміння відрізняти пояснення та загальні міркування від чітких доведень. Тобто, треба приділити увагу суто організаційним питанням та питанням методологічним. Зрозуміло, що весь цей великий обсяг інформації, що не є розглядом матеріалу по суті, але є необхідним, швидко втомлює слухачів. Тому, щоб підтримати інтерес студентів до майбутнього курсу є сенс змалювати перспективи застосування майбутніх знань при вивченні наступних курсів; зробити, можливо невеликий історичний екскурс, щоб підкреслити які видатні історичні особистості доклали зусиль до становлення та розвитку математичного аналізу.

Вступна лекція до курсу, який базується на вже вивчених дисциплінах, такого як «Теорія алгоритмів» має свої особливості. Студенти вже мають досвід навчання в університеті та складання сесії, тому організаційним моментам можна приділити якомога менше уваги. А ось визначити мету, предмет, основні завдання курсу, вказати міждисциплінарна зв'язки, перелік компетенцій необхідно докладно. Безумовно, необхідне посилання на Інтернет ресурс. Для стимулювання зацікавленості слухачів корисно подати історичну картину передумов виникнення та розвитку дисципліни «Теорія алгоритмів». Наводячи зв'язки між теорією та практикою висвітлюються перспективи використання знань, умінь та певного досвіду після засвоєння навчальної дисципліни в практичній площині.

На відміну від вступної лекції базового курсу, яку можна розглядати як монолог лектора, у першій лекції курсу «Теорія алгоритмів» лектор може запровадити дискусію зі слухачами стосовно необхідності визначення точного, з математичної точки зору, поняття алгоритму. Мета дискусії — чітке усвідомлення студентами різниці між побутовим розумінням поняття «алгоритм» та його науковим означенням. У цьому контексті розглядаються різні історичні підходи щодо становлення, уточнення, кристалізації визначення цього поняття, набуття їм наукового статусу. Під час дискусії головна увага викладача приділяється керуванню пізнавальною діяльністю студентів, спрямовуючи її на самостійне відкриття цього визначення. Такий метод сприяє розвитку мислення, мови, становленню наукового світогляду студентів. Викладач робить орієнтовну діагностику як індивідуального рівня підготовленості студентів, так і потоку загалом. Виявлення меж доступності сприйняття та засвоєння навчального матеріалу, врахування попереднього досвіду студентів дає можливість викладачу з'ясувати оптимальний темп нарощування складності матеріалу на наступних заняттях.

Загалом усі запропоновані авторами міркування націлені на формування позитивної мотивації студентів при вивченні нових дисциплін і, відповідно, підвищенню рівня їх знань.

МИХАЙЛО КРАВЧУК,
ГЕНІАЛЬНИЙ УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Ваше ім'я уже навічно записане
на скрижалях математичної науки»
Ж. Адамар
У вас велике майбутнє!
Колись пишатимусь, що мав честь
бути знайомим з вами...
Д. Гільберт

Михайло Пилипович Кравчук (1892—1942) — найвидатніший український математик ХХ століття, всесвітньовідомий вчений, педагог, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук. Земний шлях видатного математика пройшов від Волині до Колими. Народився Михайло Пилипович Кравчук 27 вересня 1892 року в селі Човниці Ківерцівського повіту на Волині в сім'ї землеміра. Батько його, Пилип Йосипович Кравчук, син селянина-шевця, закінчив Петровсько — Розумовську академію в Москві.

Мати, Фредеріка, полька за походженням, була освіченою жінкою, вільно володіла кількома іноземними мовами — польською, французькою, німецькою, грала на фортепіано. В родині було четверо дітей: Костянтин, Вікторія, Михайло та Єва.

Після закінчення з золотою медаллю гімназії в місті Луцьку в 1910 році Михайло Кравчук вступає на математичне відділення фізико-математичного факультету Університету Святого Володимира в Києві. Видатні професори В. П. Єрмаков (1845—1922), Д. О. Граве (1863—1939), Г. В. Пфейффер (1872—1946), Б. Я. Букреєв (1859—1962) були першими вчителями студента Михайла Кравчука в університеті. Творча атмосфера наукових семінарів з теорії груп, теорії еліптичних функцій під керівництвом професора Д. О. Граве сприяла розвитку математичних здібностей талановитого юнака, пробуджувала в нього інтерес до нового, впливала на вибір напрямів перших наукових пошуків та досліджень.

Вже у студентські роки Михайло Кравчук опублікував перше самостійне дослідження з теорії комутативних матриць, яке було надруковано в 1914 році в

«Записках Харківського математичного товариства». У цій роботі узагальнюється відома теорема німецького математика Шура про верхню

границю числа лінійно незалежних матриць n-го порядку переставної групи, причому вказуються типи матриць, відповідних зазначеному узагальненню.

По закінченню університету в 1914 році за клопотанням професорів Д. Граве та Б. Букреєва М. Кравчук був залишений при університеті для підготовки до професорського звання.

У зв'язку з евакуацією університету на Схід через наближення військових дій та закриття університетської бібліотеки, М. П. Кравчук змушений був на зиму 1915—1916 років переселитися в інше університетське місто. Взимку 1915 року Михайло Кравчук приїхав до Москви, де познайомився з багатьма провідними математиками, відвідував наукові семінари, зокрема, семінар з теорії функцій професора Д. Ф. Єгорова, прослухав цикли лекцій професорів М. М. Лузіна, Б. К. Млодзеєвського та інших.

Повернувшись до Києва й успішно склавши магістерські іспити, Михайло Пилипович прочитав 5 вересня 1917 р. свою першу так звану випробну лекцію з предмету чистої математики «Про функції, що справджують теорему додавання», а згодом, і першу лекцію з теорії множин і здобув звання приват-доцента. З того часу почалася напружена титанічна робота М. П. Кравчука, присвячена розвитку української освіти. Він викладає математичні дисципліни в Українському народному університеті, політехнічному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному та сільськогосподарському інститутах. У цей період М. П. Кравчук публікує свій курс лекцій з геометрії та перший переклад українською мовою відомого підручника з геометрії Кисельова, разом з академіком Федором Калиновичем укладає тритомник українського математичного словника.

У важкі роки громадянської війни М. П. Кравчук виїздить з молодою дружиною Есфірою Йосиповною (1894—1957), з якою він одружися в 1918 році, в село Саварку Богуславського району. Там Михайло Пилипович працює з 1919 по 1921 рік директором школи та вчителем математики. Новий вчитель докорінно змінює методи навчання, пробуджує у школярів інтерес до науки, до самостійної творчості. Одним з його учнів у цій школі був Архип Люлька. В майбутньому Архип Михайлович Люлька (1908—1984) — всесвітньовідомий вчений, академік, генеральний конструктор авіаційних двигунів, творець перших у світі турбокомпресорного і турбореактивного двигунів.

Повернувшись до університету, Михайло Пилипович поринув у наукову діяльність. У першій половині 20-х років він отримав фундаментальні результати з

теорії змінних матриць, теорії білінійних форм та лінійних перетворень, які він поклав в основу докторської дисертації, що була успішно захищена 14 грудня 1924 року. Це був перший в УРСР захист докторської дисертації. Згодом М. П. Кравчук зацікавився питаннями узагальненої інтерполяції. У 1925 році М. П. Кравчуку було присвоєне звання професора.

Математичні інтереси вченого розширюються, його праці відзначаються оригінальністю ідей, нестандартністю підходів до математичних проблем. У вересні 1928 року Михайло Пилипович вирушає на Міжнародний математичний конгрес в Італію (м. Болонья). Дорогою виступає на засіданні Математичного товариства в Парижі. На конгресі молодий український професор встановлює дружні стосунки з відомими вченими Франції, Італії, Німеччини: Ж. Адамаром, Р. Курантом, Ф. Трікомі, Т. Леві-Чівіта, Д. Гільбертом та іншими.

Ось уривок листа відомого французького математика Жака Адамара (1865—1963) до М. П. Кравчука: «Дорогий друже, нарешті одержав обіцяні Вами ваші ж наукові праці. Як одна, так і друга приємно вразили мене своєю новизною. Такі складні проблеми і такі прості розв'язання! Тільки генію таке під силу! Не відаю, як довго судилося Вам жити, але що б з Вами не сталося — Ваше ім'я вже навічно записане на скрижалях математичної науки...» [1]. Михайло Кравчук — перший українець, що успішно репрезентував разом із колегами вітчизняну математику на міжнародному рівні. Він також брав участь у роботі математичного конгресу в Цюріху у 1932 році, де виступив із доповіддю з проблем моментів.

У 1929 році понад 30 організацій висунули кандидатуру М. П. Кравчука в дійсні члени Всеукраїнської академії наук, і на засіданні Ради Академії його було обрано академіком одностайно. У віці 37-ми років він став наймолодшим академіком ВУАН. Разом з ним на цьому засіданні академіками ВУАН стали Д. Яворницький, П. Тичина, О. Леонтович, Є. Патон, М. Вавілов, О. Богомолець, О. Паладін та багато інших відомих згодом діячів науки та культури України.

Наступні вісім років виявилися найпліднішими у творчості М. Кравчука.

Найбільша (за числом праць) частина наукової спадщини Михайла Кравчука належить до теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Ця тематика була традиційною для київських математиків 20—30-х років. Досить згадати дослідження М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Г. В. Пфейффера та інших. Великий внесок вніс до цього розділу математики М. Кравчук. Він успішно розвинув метод найменших квадратів у теорії наближеного інтегрування диференціальних та інтегральних рівнянь. Метод найменших квадратів професор Кравчук досліджував у двох напрямках, а саме в напрямку зменшення похибки наближених розв'язків та в напрямку доведення збіжності похідних від цих наближень при відповідних граничних умовах і відповідному наборі функцій, з яких складається наближений розв'язок. Результати цих досліджень М. П. Кравчук доповів на Міжнародному математичному конгресі в Болоньї у 1928 році.

Переважна більшість праць М. П. Кравчука з теорії наближеного інтегрування присвячена розвиткові та застосуванню методу моментів до наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь, лінійних рівнянь математичної фізики, диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь.

Основна ідея методу моментів — визначити функцію на даному інтервалі через моменти на тому самому інтервалі, тобто через інтеграли

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \quad (i = 1,2,\ldots),$$

де $\varphi_i(x)$ — задані функції.

Найзначніші свої результати з теорії моментів М. П. Кравчук виклав у фундаментальній двотомній монографії «Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь» (1936 р.).

Перший том — це дослідження методу моментів в його застосуванні до наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь та систем цих диференціальних рівнянь. У другому томі розглядаються лінійні рівняння з частинними похідними математичної фізики.

У 2001 році дослідником праць М. Кравчука Іваном Качановським (США) в архівах Смітсонівського Музею Американської історії у Вашингтоні та університету штату Айова в Еймсі була знайдена перекладена англійською мовою двотомна монографія Кравчука «Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь». Переклад здійснено американським математиком і фізиком, винахідником першого електронного комп'ютера Джоном Вінсентом Атанасовим. Ще в 1937 році у листі до академіка Кравчука він писав, що публікації українського математика виявились дуже корисними у його роботі, і він хотів би мати копії всіх праць вченого, вміщених в українських журналах [3].

Скоріше всього, М. П. Кравчуку не судилося дізнатися про це визнання і застосування свого наукового доробку, бо вже розпочався його хресний шлях на Колиму, де він і загинув через чотири роки. Не отримавши відповіді від Кравчука, Д. Атанасов 16 листопада 1937 року надсилає до Києва ще одного листа на адресу Асоціації культурних зв'язків з іноземними країнами. Він просить повідомити, чи дійшов лист до М. П. Кравчука, і чому він не відповів.

Водночас Д. Атанасов повідомив, що їхня бібліотека замовила через посередників у Німеччині всі книги М. Кравчука і просить надіслати йому дві монографії вченого. І. Качановський уважає, що монографію, котру Д. Атанасов переклав англійською мовою, він отримав через німецьких посередників. Вчені Д. Атанасов і К. Беррі плідно працювали і в листопаді 1939 року з'явилися перші начерки комп'ютера ABC (за першими літерами Atanasoff — Berry Computer). З кінця 1939 року до середини 1942 року вони розробляли та проектували комп'ютер. Машина була сконструйована з єдиною метою — для вирішення великих систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Атанасов не спромігся отримати патент на свій ABC і існує думка, що Д. Атанасов не заявив авторського права через те, що вважав співавтором і М. Кравчука. Як порядний і ретельний вчений, він визнавав, що математичною основою комп'ютера ABC були ідеї, запозичені у М. Кравчука.

Американський науковець Іван Качановський, уродженець Волині, стверджує, що світ не лише пізнає Україну через Михайла Кравчука, а й має йому багато в чому завдячувати у своєму поступі до прогресу.

Тяжка година випробування настала для М. П. Кравчука у 1937 році.

Особиста трагедія вченого була наслідком ряду подій, що відбувалися в Україні, зокрема і у ВУАН. Академія наук довгий час чинила опір політизації, напруженість у стосунках ВУАН з державою зростала. Самовіддана праця М. П. Кравчука в ім'я розбудови української науки, його авторитет не могли залишитись непоміченими органами тоталітарного режиму, треба було визначатись політично. Восени 1929 року почалися арешти у справі Спілки визволення України (СВУ). Серед арештованих — багато знайомих М. П. Кравчука, людей, з якими він мав наукові та дружні стосунки. Щойно обраному академіку пропонують ганебну роль «громадського обвинувача» на процесі СВУ. М. Кравчук, пославшись на хворобу, відмовляється обвинувачувати віце-президента ВУАН Сергія Єфремова та інших вчених. Було зрозуміло, що цією відмовою його кар'єра закінчується. На жаль, не тільки кар'єра, а й життя...

З того часу почали збирати фальшиві докази його «шпигунської» та «контрреволюційної» діяльності. 14 вересня 1937 року в газеті «Комуніст» була надрукована стаття «Академік Кравчук рекламує ворогів», підписана директором Інституту математики Академії наук України Д. Граве та науковим секретарем інституту К. Бреусом, де повідомлялось про те, що М. Кравчук позитивно оцінив праці математиків, яких НКВД заарештувало, як «ворогів народу», зокрема свого учня В. Можара. З'являються погромні статті, влаштовують відомому вченому ганебні судилища в стінах політехнічного інституту, університету, відвертаються від нього колишні колеги, аспіранти. Ставляться під сумнів його математичні досягнення, вказують на нього, як на прихованого націоналіста, який намагається займатися антирадянськими діями.

Небагатьом вистачило громадянської мужності стати на захист вченого. Серед таких сміливців були Й. Погребинський, О. Смогоржевський, Ю. Соколов, М. Чеботарьов, П. Бондаренко, В. Зморович.

21 лютого 1938 року М. Кравчука заарештували, а вже через два дні, 23 лютого 1938 року Президія Академії наук УРСР на чолі з президентом Академії наук О. Богомольцем ухвалила рішення вивести М. П. Кравчука, члена багатьох закордонних математичних товариств, зі складу дійсних членів АН УРСР. В обвинувальному вироку М. П. Кравчука визнали активним учасником і керівником націоналістичної організації. В результаті — вирок «виїзної сесії» Військової колегії Верховного Суду СРСР: 20 років тюремного ув'язнення і 5 років позбавлення політичних прав. Михайло Кравчук подавав дві скарги, де пояснював, що ув'язненим обмовив себе за умов тяжкого морального та фізичного впливу, але на жодну скаргу відповідей не було. Із Києва він був відправлений через 10 тисяч кілометрів до Владивостока, а звідти в трюмі суховантажного судна «Джума» до Магадану, а далі в зловісні колимські копальні в нелюдські умови: морози сягали –60°, щоденна норма добування породи гірником становила півтори тони (можна порівняти з нормами царських каторжан у Нерчинську: не більше півсотні кілограмів). З хворим серцем Михайло Кравчук не міг довго протриматись в забої. Замучений тяжкими умовами, хворобами, отримавши інвалідність, М. Кравчук звертається з третьою скаргою до Москви — до Голови Верховного Суду і Генерального прокурора СРСР. Але відповіді на свою скаргу не дочекався. 9 березня 1942 року великого академіка не стало, навіки залишився в колимській мерзлоті...

Колима, Колима! Чи ж ти винна була
Що стількох українців згноїла?
Чи зігрілася ти від святого тепла,
Від їх розуму, совісті й тіла...
Колима, Колима... Золота Колима.
Наче свічі погаслі — могили...
Чи то зірка горить — чи душа Кравчука?
Але зірка — до болю красива...

Н. І. Півторацька, Богуслав, 2004

Наукові праці українського математика М. П. Кравчука (понад 180 робіт) стосуються різних розділів математики: алгебри і теорії чисел, математичного аналізу і теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики, історії математики. Його наукові роботи увійшли до скарбниці світової науки і стали зразком для наслідування.

Наукові здобутки видатного українця знаходять застосування в різних розділах теоретичної і прикладної математики:

- випадкові блукання, симетричні матриці Кравчука та біноміальні сподівання;
- мартингали, поліноми Кравчука і мультиноміальні розподіли;
- алгебри Лі та поліноми Кравчука;
- групи Лі, відображення, матриці Кравчука та групові елементи;
- квантова ймовірність та тензорна алгебра, матриці Кравчука як власні вектори;
- коефіцієнти Клебша — Ґордана та поліноми Кравчука;
- перетворення Кравчука;
- поліноми Кравчука як гіпергеометричні функції;
- Ґаусові квадратури. Нулі поліномів Кравчука. Сумація Ґауса — Кравчука;
- теорія кодування [2].

В останні роки з’явилася ціла низка наукових праць у галузі прикладної математики і комп’ютерних наук, в яких використано ідеї М. П. Кравчука. Так, у 2003-му році науковці університету Малайї (Малайзія) запропонували новий метод оброблення та реконструкції зображень за допомогою моментів Кравчука. У 2006-му році грецькі вчені доповіли про трьохвимірні пошукові алгоритми, побудовані на трьохвимірних моментах Кравчука, для оброблення тривимірних зображень. У 2009-му році група вчених із Франції, США та Німеччини показала ефективність застосування зважених трьохвимірних моментів Кравчука як засобу аналізу даних для розпізнавання характеру пухлин. Використання поліномів та перетворення Кравчука в теорії кодування, розпочате ще в 70-их роках XX століття, активно триває і нині [2].

Нація матиме майбутнє, коли пам’ятатиме і шануватиме своїх великих синів. У фундаменті українського відродження золотими цеглинами закладено здобутки великого громадянина, видатного вченого-математика М. П. Кравчука, чиє життя стало легендою для нині сущих та прийдешніх поколінь. Бездержавна нація, підневільний народ у часи радянщини втрачав генофонд. Найкращих нищили, як небажаних свідків власної нікчемності, прикриваючись ідеологією химерних ілюзій. Цим і пояснюється тривале замовчування, навіть і після реабілітації, слави геніального подвижника науки Михайла Пилиповича Кравчука, людини чиїм ім’ям уславилась наша рідна Україна [7].

Як непросто було піднімати із забуття ім’я репресованого вченого, по крихті збирати інформацію про його життя та творчість! Адже міру покарання М. П. Кравчуку (це стало відомо з розсекречених документів), персонально визначили Сталін, Молотов і Жданов [6]. Завдяки зусиллям багатьох науковців, в тому числі і науковців зі США та Австралії, ім’я Михайла Кравчука повернулося в український науковий пантеон. Доктор фізико-математичних

наук, професор Національного технічного університету «КПІ» Ніна Опанасівна Вірченко присвятила майже 50 років свого життя вивченню життєвого шляху, наукової творчості Михайла Кравчука. Неоціненний її внесок в увічнення його пам'яті! Вулиці і гімназії, названі у його честь, документальний фільм про нього, пам'ятники та меморіальні дошки, видання його творів та книги про нього, міжнародні наукові конференції імені академіка Кравчука — в усіх цих великих справах тепло її серця.

«Оглядаючись на пройдений життєвий шлях, кредо якого було «Моє життя — Україна і математика», тепер додаю ще: «Михайло Кравчук і студентство»,— зі слів Ніни Вірченко.

Наукові ідеї Михайла Кравчука вивчатимуться, поглиблюватимуться розвиватимуться, адже геній його далеко випередив свій час. Його наукові праці американські та японські вчені застосовували у проектуванні телеапаратури [8]. «Тільки в 2001 році у 15-ти наукових статтях в США були використані праці Кравчука»,— зазначає І. Качановський. У 1992 році ЮНЕСКО внесла ім'я М. Кравчука до переліку найвизначніших осіб.

Народ мій є! Народ мій завжди буде!
Ніхто не перекреслить мій народ!
Пощезнуть всі перевертні й приблуди
І орди завойовників — заброд!

Василь Симоненко

Список літератури

1. Возняк, Г. М. (2012). *Михайло Кравчук: «Моя любов — Україна і математика»*. Тернопіль: Навчальна книга — Богдан.

2. «Моя любов — Україна і математика» (2013). Ювілейна сесія Загальних зборів національної академії наук України, присвячена 120-тій річниці від дня народження академіка М. П. Кравчука. Вісник НАН України, (1), 25—28.

3. Вірченко, Н. О. (2007). *Велет української математики*. Київ: Задруга.

4. Вірченко, Н. О., Гайдей, В. О., Міхно, О. П. (укл.) (2014). *Михайло Кравчук. Вибрані праці. Історія і методика математики*. Київ: НТУУ «КПІ».

5. Вірченко, Н. О. (2000). *Михайло Кравчук. Науково-популярні праці*. Київ: НТУУ «КПІ».

6. Кратко М. І. (упор.) (2011). *Голгофа академіка Кравчука*. Луцьк, ВІППО.

7. Сорока, М. О. *Колимська теорема Кравчука: Біограф. роман*. (2-ге вид., доп.). Київ: Молодь.

8. Качановський, І. (2002). Український математик М. Кравчук та винахід першого електронного комп'ютера. У кн. *Матеріали IX Міжнародної конференції ім. академіка М. Кравчука* (с. 6). Київ: НТУУ «КПІ».

СЛАВЕТНА ДОЧКА УКРАЇНИ. ЖИТТЄВИЙ, ТВОРЧИЙ ТА ПРОСВІТНИЦЬКИЙ ШЛЯХ ПРОФЕСОРА МАТЕМАТИКИ Н. О. ВІРЧЕНКО

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова
Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна, e-mail: matan.kpi.ua

Я — дочка свого народу,
Всю красу свою, всю вроду,
Лиш йому, йому віддам,
За кохану Україну,
Як потрібно, то й загину.
Н. О. Вірченко

Ніна Опанасівна Вірченко — український науковець, математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики АН ВШ України, віце-президент АН ВШ, Соросівський Професор (1997), заслужений діяч науки і техніки України, лауреат І премії НТУУ «КПІ» (1998), заслужений викладач НТУУ «КПІ» (1999), Почесний професор НТУУ «КПІ» (2005), голова Науково-методичної ради Всеукраїнського товариства політв'язнів та репресованих, член НТШ, Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств, видатний громадський діяч. У творчому доробку Н. О. Вірченко понад 350 наукових та науково-методичних робіт, у тому числі 23 книги, виданих українською, російською, англійською та японськими мовами.

Складним та тернистим був початок життєвого шляху Ніни Опанасівни. Під час навчання на механіко-математичному факультеті Київського університету у 1948 році активна, розумна, допитлива, патріотична студентка була заарештована з політичних міркувань. Хоча в ті часи юна українка ще не володіла всією інформацією про сутність тогочасного політичного режиму, не знала про тисячі невинно репресованих та закатованих діячів науки та культури, серце та душа дівчини прагнули справедливості та свободи, думки та слова іскрилися патріотизмом. Сталінські репресивні жорна відбирали найкращих.

А вона завжди була найкраща! Учасниця гуртка радіотехніки та аеродинаміки (єдина дівчина поміж 29 хлопців!), здійснила 10 стрибків з парашутом, випромінювала масу ідей, проектів. Завжди відверто виказувала свої думки щодо історії України, її незалежності, про боротьбу УПА, займалася рукописними листівками, де правдиво висвічувалися ці питання. За доносом найближчої подруги Діни Решетько (такі імена теж мають бути відомі) 28-го червня 1948 року Ніна Вірченко була заарештована, звинувачена у «політичній змові, таємному заколоті». Як доказ був приведений особистий щоденник, який дівчина вела з 15-ти років. Допити витримала гідно, мужньо, нікого не обмовивши!

Ніна Вірченко отримала жорстокий вирок — 10 років у спецтаборах за участь в «українсько-націоналістичній банді». Шість страшних років юна дівчина провела в тайшетських таборах (Східний Сибір, Іркутська область). Виснажлива робота у жорстоких умовах, лісоповал, каменярні, знущання нелюдей-наглядачів, непросте оточення, хвороби, голод, холод, втрати друзів, повна ізоляція від рідних, зовнішнього світу.

Серед політв'язнів найбільше було дівчат із Західної України. Як вони любили Україну! У більшості з них життя на волі було пов'язане з боротьбою за незалежність своєї країни у лавах ОУН-УПА. Для Ніни їх розповіді та думки — як одкровення! Розмови з ними — як причастя. Повстанські пісні, яким вона навчилася від них, — гімн незламності та мужності. Поезія Івана Франка, Тараса Шевченка, повстанські пісні були цілющими ліками для спраглих сердець політв'язнів.

Світлим моментом у важкі часи життя у зоні була зустріч юної Ніни Вірченко з Матір'ю-Ігуменею Йосифою (Оленою Вітер). Патріотична українська релігійна діячка була заарештована за співпрацю з ОУН та отримала двадцять років каторги і п'ять років заслання. Ігуменя Йосифа стала для юної Ніни та інших політв'язнів духовною опорою, вона була яскравим прикладом поведінки гордої української жінки, яка незламно пройшла усі тортури, не скорилася сталінським нелюдям в ім'я Божої віри та рідної України. Після неймовірно тяжких робіт на лісоповалі збирались тендітні дівчата, серед яких була і Ніна Вірченко, на верхніх нарах у довгому промерзлому напівтемному бараці і слухали палкі розповіді ігумені Йосифи. І вона так образно, так майстерно, натхненно розповідала про історію України, про її славних синів та дочок, ділилася своїми спогадами та надихала волею і бажанням жити. Світло очей ігумені Йосифи зігрівало у морози добром молоденьких дівчат, повивало материнською любов'ю.

Матір-Ігуменя Йосифа — свята людина. У Єрусалимі На Почесній стіні Праведників вписано її ім'я. За врятування єврейських дітей під час німецько- нацистської окупації уряд Ізраїлю у 1976 році удостоїв її почесним титулом «Праведник світу». У місті Скалаті Тернопольської області іменем Матері-Ігумені названа одна з вулиць. Пізніше, надаючи належну шану цій дивовижній жінці, Ніна Опанасівна написала про неї книгу «За Бога, за Україну!» [1].

Шість жахливих років, кожна година з яких — подвиг, відбула юна Ніна у Сибірських таборах. Мінялись колонії, тяжкі роботи — то лісоповал, то вантажили щось на залізниці, то знесилюючі каменярні, морози понад –40°. Усе витримала, не зламалася. Своїм життям завдячує Ніна Опанасівна тим гордим, мужнім, сердечним українкам, з якими звела її доля у тайшетських таборах. Богдана Бійовська, Мартуся Чорна, Оксана Мешко, Ірина Сеник, Надія Солтис, Нуся Катамай, Тоня Сірик, Мирося Румак, Олена Вітер, Стефа Процак, Стефа Хомчак, Юля Дейнека, Дануся Пилипчук та багато інших. Про своїх посестр із сибірських таборів Ніна Вірченко зберегла багато душевних спогадів.

Мирослава Румак — справжня подруга, захоплювала Ніну Вірченко своєю шляхетністю, своєрідністю підходу до подій повсякдення, своєю сміливістю, відчайдушністю, вірністю, сердечністю дружби ще з сибірських часів. Хіба забудеш буття на лісоповалі, коли найтяжчу роботу виконували ці дівчата. Мирося з конем вивозить із глибокого лісу зрізані колоди, а Ніна з дівчатами обрубують їх та тягають на собі до великого високого штабелю, там складають та готують до вивезення на товарняках. Робота виснажлива, понад дівочих можливостей, тільки підтримка подруг не давала впасти без сил. А на каменярнях не раз величезні брили летіли на дівчат. Бог уберіг...

Тоня Сірик була членом ОУН, із нею Ніна Вірченко тримала зв’язок майже 50 років. Ніби сестрою їй стала.

Мартуся Чорна — теж член ОУН. Хата її родини була зв’язковим пунктом для підпілля. У січні 1948 року її рідну хату оточив радянський спецзагін, після бою усіх було заарештовано. Зовсім юну Марту засудили на 10 років спецтаборів, термін вона відбувала у тайшетських таборах, де зустріла подругу на усе життя — Ніну Вірченко. Марта Чорна, вірна подруга, завжди поряд з Ніною Опанасівною, разом поділяють і труднощі, і радості.

Незабутня Ірина Сеник, талановита поетеса, жінка — борець, термін її ув’язнення — найдовший, 34 роки таборів, заслань! Ірина Сеник — одна зі 100 героїнь світу, громадський діяч, почесна громадянка міст Борислава і Львова, заслужений майстер народної творчості України. У 1941 році вона стала членом ОУН, була зв’язковою генерала Романа Шухевича (1944). В 1945 році була заарештована і засуджена на 10 років виправно — трудових таборів та відправлена до Східного Сибіру, потрапила до 7-го тайшетського спецтабору «Озерлаг» Іркутської області. Після 10-ти років таборів Ірину відправили на заслання у Кемеровську область.

Лише у 1968 році Ірина Сеник повертається в Івано-Франківськ, до Львова повернутися їй не дозволили. Займається правозахисною роботою, бере участь у виданні підпільного вісника, організованого В. Чорноволом. Та у 1972 році новий арешт за «антирадянську пропаганду з метою повалення могутньої радянської влади». Отримала 10 років таборів та 5 років заслання. Далі попала в Мордовію, в табір, де сиділи В. Чорновіл і В. Стус. Звільнили Ірину Сеник тільки у 1983 році.

Так було підвладно долі, що у 1950 році у Східному Сибіру в тайшетських спецтаборах особливого режиму зустріла Ніна Вірченко Ірину Сеник. Своєю увагою, любов'ю, теплом героїчна Ірина зігрівала усіх дівчат, вчила співати, жартувати, сміятись навіть у найскрутніші часи табірного життя. Не раз згадувала Ніна Опанасівна про особливе святкування свого дня народження, що влаштувала їй Ірина Сеник з дівчатами у 1952 році: «Ніколи більше, ніколи й ніде не було у мене такого дня народження» [2].

Навіть відбуваючи покарання, молода Ніна Вірченко хотіла бути корисною: проводила уроки математики, крейдою та дошкою слугували паличка і пісок чи сніг, склала 10 заповідей для української жінки-політв'язня, працюючи деякий час у хліборізці, рятувала в'язнів від голоду, а сама в той час хворіла на туберкульоз, у неї послабшав зір. Українські посестри, які поділили з Ніною Вірченко тяжку долю у таборах, допомагали їй витримати незгоди, вижити в неймовірно тяжких умовах, вселяли та підтримували віру у себе, надавали силу боротися, не схибити та не впасти, вони назавжди лишились у серці та житті Ніни Опанасівни.

Сердечні, щирі, розумні, добрі, ці сонячні українські жінки повсякчас підтримували Ніну Опанасівну у її справах та починаннях навіть на відстані. Багато разів Н. О. Вірченко пізнала радість зустрічей зі своїми посестрами у чудовому Карпатському краї. Починала поїздку зі Львова, де її чекала Дануся Пилипчук. Згадували Ірину Сеник (її слова: «я бачу Вас, високі вежі Львова»...). Потім зустріч з Надією Солтис, Стефою Хомчак. Далі поїздка до Івано-Франківська, де чекає Мирося Румак. Не раз згадували з нею про величезний камінь, що ледве не зачепив дівчат. А там у саме серце Верховини — у Бистрець, до Юлії Дейнеки. Розмови, спогади, плани, пісні...

Батьки Ніни Вірченко завжди підтримували її, намагалися вирвати зі смертельних сталінських кайданів, добивались побачення з рідною дитиною і таки добилися. Батько проїхав тисячі кілометрів до Східного Сибіру, але йому дозволили побачитись з донечкою лише на відстані 200 метрів, коли вона проходила разом з іншими ув'язненими на роботу, тільки й всього що помахали один одному рукою...

«Задави ж, батьку мій,
ти сльозу на очах
за Вітчизну прийми
мою плату!»

В цих жорстоких умовах горда українка не зрадила ні себе, ні друзів, ні мрій. 30-го січня 1954 року була звільнена, як така, що була засуджена малолітньою, повернулася в Україну, а її незабутні дівчата, посестри, надихнули її почати усе знову.

З цього часу починається надзвичайно активна, напружена, творча та педагогічна діяльність Ніни Опанасівни Вірченко, що неперервно триває понад шістдесят років [3]. Табори загартували мрійливу дівчину, закохану у романтику та героїку подвигу, виховали стійкого, виваженого та мудрого бійця, який знає, що у недовгому житті немає часу ні на вагання, ні на поразки. Невтомна творча праця, невпинна педагогічна та просвітницька діяльність — усе на благо України, у ім'я її свободи. Н. О. Вірченко знову вступає до Київського університету (дозволено було поновитися лише на заочне відділення), блискуче вчиться і за два роки переводиться на стаціонар. Математичні здібності молодої студентки були настільки вагомими, що її зараховують в аспірантуру. Українські вчені-патріоти професори Г. М. Положій, І. І. Ляшко, академік І. Т. Швець поручилися за неї.

Завзята та наполеглива Ніна Вірченко блискуче захищає кандидатську та докторську дисертації. Незважаючи на втрачений у таборах час і здоров'я, перешкоди, що чинила радянська влада відносно колишніх політичних ув'язнених (стеження, обшуки, встановлення прослушки), талановитій українці вдається піднятися на високий рівень у науковому та педагогічному середовищі.

Ще у 1965 році, працюючи над проблемами математичної фізики, у науковій літературі Ніна Опанасівна натрапила на згадку про математика Михайла Кравчука, у такому контексті, що не могла не зацікавитися долею цього вченого. Активно досліджуючи це питання, з'ясувала, що праці М. Кравчука вилучено з бібліотечних фондів, а сам він, як ворог народу, загинув на Колимі у 1942 році. Недарма через роки, долі випало звести українських вчених, що мали багато спільного, для яких жахи сталінських таборів існували не лише як інформація на папері. Людина з кришталево-чистим серцем, справжній патріот, відданий своїй країні, Ніна Вірченко глибоко перейнялася невідомою трагічною долею М. Кравчука. По крихті збирала архівні матеріали, свідчення людей, що знали академіка Кравчука, розшукувала його родину, їздила на його батьківщину (село Човниці на

Волині) та у село Саварку Богуславського району, де працював директором школи та вчителем математики М. П. Кравчук, вивчала наукові праці вченого. Ніна Опанасівна захопилася геніальністю його творчих ідей, які й донині є джерелом дослідницької наукової роботи математиків усього світу. Михайло Кравчук став для Н. О. Вірченко взірцем служіння науці, чесності та патріотизму.

Жодну справу Ніна Опанасівна не вміє робити упівсили, кожного разу докладає максимум зусиль. Вона домоглась, щоб ім'я Михайла Кравчука асоціювалось і в Україні, і за кордоном зі світовою славою української науки. Титанічних зусиль доклала для цього професор Н. О. Вірченко. «Михайло Кравчук — математик широкого масштабу. Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці. Світ не знав лише, що він — українець»,— сказав професор математики Є. Сенета (Австралія).

З 1992 року у НТУУ «КПІ» проходять міжнародні наукові конференції імені академіка М. Кравчука, організатором яких є Н. О. Вірченко. Цього року відбувається вже сімнадцята конференція. Проведення цих конференцій — справа не тільки почесна, а й дуже відповідальна, складна, потребує високої емоційної та професійної напруги. Ніна Опанасівна має велику допомогу та підтримку з боку кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ», яку очолює професор О. І. Клесов. Без кафедри Н. О. Вірченко не уявляє свого життя. З 1973 року кожного семестру студенти НТУУ «КПІ» мають змогу слухати чудові лекції видатного педагога професора Н. О. Вірченко, яка у повній мірі реалізувала свої наукові, педагогічні та організаційні здібності, заслужила глибоку повагу та шану колег і студентів, здобула світове наукове визнання, виховала гідну зміну.

На кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей працюють і учні Ніни Опанасівни. Віктор Олександрович Гайдей — доцент кафедри, який прийняв естафету від свого вчителя у самовідданій праці організації міжнародних конференцій імені академіка М. Кравчука, для привернення математичної громадськості до вивчення спадщини великого вченого, залучення до участі у конференціях вчених з багатьох країн світу. Активна, напружена, високопрофесійна робота В. О. Гайдея є запорукою продовження великої справи. Крім того, Віктор Олександрович є одним з активних засновників та організаторів вже чотирьох міжнародних наково-практичних конференцій «Математика у сучасному технічному університеті».

У сьомому корпусі НТУУ «КПІ» обладнано аудиторію імені М. Кравчука (2002), біля шостого корпусу на Музейній площі встановлено пам'ятник вченому, одна з вулиць Києва названа його ім'ям, створено документальний телефільм «Голгофа академіка Кравчука», на батьківщині великого математика встановлено пам'ятну стелу, музей М. Кравчука поповнюється експонатами. В усіх цих великих справах — частини серця Ніни Опанасівни Вірченко.

Н. О. Вірченко — активний діяч Всеукраїнського товариства в'язнів і репресованих, що засновано 3 червня 1989 року, з 1999 року очолює Науково - методичну раду товариства. Науково — методична рада веде дослідницьку роботу. Свій багатий досвід колишні політв'язні, репресовані, депортовані використовують в ім'я ствердження і розбудови соборності української держави, для відродження національної самосвідомості, повернення духовної спадщини. З 1992 року видається журнал «Зона», ведеться просвітницько-виховна робота серед молоді.

Особливу цінність для молоді та історії становлять нариси Н. О. Вірченко про колишніх політв'язнів та репресованих — І. Сеник, О. Вітер, О. Мешко, Б. Бійовську, Є. Концевича та інших. Багато досліджень є у Ніни Опанасівни стосовно українських вчених — М. Остроградського, Г. Вороного, А. Люльки, М. Кравчука, Є. Вікторовського та багатьох інших. Не можна не згадати і праці правозахисного характеру — «Про заборону української мови (XVII—XX ст.)», «Дещо про українську математичну термінологію». Щемить серце, коли читаєш книгу спогадів «Зернини з доріг життя мого...»

Реабілітована професор Вірченко була лише в 1991 році...

Життєва позиція Ніни Опанасівни Вірченко, відданість ідеалам правди, добра, свободи, полум'яна любов до України, незламність духу дають право стверджувати, що вона з того високого ряду, що освячений іменами В. Стуса, В. Чорновола, М. Кравчука. Сподвижницька та просвітницька діяльність професора Н. О. Вірченко знаходить все більше послідовників, служить надихаючим прикладом для сучасних та прийдешніх поколінь.

Список літератури

1. Вірченко, Н. О. (2007). *За Бога, за Україну!* Київ: Задруга.
2. Вірченко, Н. О. (2011). *Зернини з доріг життя мого...(Книга споминів)*. Київ: Задруга.
3. Задерей, Н. М., Нефьодова, Г. Д. (2014). Ніна Вірченко — видатний педагог і математик. У кн. *Матеріали XV Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (Т. 4) (с. 98—101). Київ: НТУУ «КПІ».
4. Задерей, Н. М., Нефьодова Г. Д. (2010). Взірець служіння Україні та математиці. У кн. *Матеріали XIII Міжнародної конференції імені академіка М. Кравчука*. (Т. 3.). (С. 190—191). Київ: НТУУ «КПІ».

СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ У ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова, І. Ю. Мельник
НТУУ «Київський політехнічний інститут»,
Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна
irinam_5656@mail.ru

У наш час рівень інформації, обсяг знань, кількість вмінь та навиків, що є необхідними сучасному спеціалісту в будь-якій сфері занятості, стрімко зростає. Незабаром здібності пересічної людини стануть занадто слабкими, щоб відповідати рівню наукових досягнень, а для засвоєння хоча б найважливішої чи найкориснішої частини знань не вистачить часу, відміряного кожному для життя. Неефективне використання розумових можливостей, повільність та неспішність отримання освіти канули в Лету.

Сьогодні наука вступає в інформаційну стадію розвитку. Глобальна комп'ютеризація передбачає необхідним розвиток високого мислення, що дає можливість сучасному учню, студенту, науковцю мислити та засвоювати вивчене більш швидкими темпами та надалі зайняти гідне місце серед професіоналів.

Логічність мислення, чіткість у постановці задач, аналіз методів розв'язання, обґрунтований розв'язок цих задач та можливість його перевірки — усі ці складові мають місце при вивченні математики. Зараз як середня, так і вища освіта найчастіше базується на вивченні математичних дисциплін, як фундаменту, на якому будується більшість основних спеціальностей, що спрямовані на технологічне переоснащення сучасного виробництва, тобто тих професій, що сприяють швидкому прогресу в усіх сферах людської діяльності.

У всьому світі зростає інтерес до математики, математичних олімпіад, гуртків, літніх математичних шкіл. Наприклад, нині, частіше ніж будь-коли, американські підлітки обирають для вивчення у школах математичні предмети, в останні роки у США бурхливо розвиваються літні математичні табори, де школярі поглиблено займаються математикою. Кількість таких таборів зростає з кожним роком. Найбільш відомі з таких таборів — Awesome Math та Epsilon Camp. Серед американських школярів також невпинно зростає інтерес до невеликих математичних гуртків.

Як стверджує Річард Ружик, засновник приватного центру «Мистецтво розв'язування задач» (Art of Problem Solving), в Кремнієвій долині та інших технологічно потужних містах і регіонах США з'являються літні математичні школи, математичні гуртки, які існують на кошти спонсорів та благодійних організацій. Математичні гуртки зазвичай ведуть не визначні вчені чи професори університетів, а колишні випускники шкіл або звичайні викладачі. Попит на такі знання такий значний, що батькам доводиться записувати дітей у чергу та очікувати деякий час.

Головна й важлива відмінність таких таборів і гуртків від звичайної школи полягає в тому, що у школі наполягають на вивченні низки правил і слідуванні цим правилам, як деякій інструкції, а гуртки намагаються розвинути здатність самостійно мислити, самотужки шукати цікаві неординарні розв'язки логічних задач та проблем. Формальне запам'ятовування в математиці знищує потяг до знань, творчості, позбавляє відчуття переможної радості та гордості від нехай іноді і незначного, але все ж самостійного успіху у вирішенні деякої проблеми.

Популярність математики у США нині зростає не лише з точки зору розвитку особистості. Згідно Бюро статистики праці (Bureau of Labor Statistics) зріст економіки США буде спиратися на так звані STEM-області, тобто науку, технології, інженерію і математику (Задерей, Нефьодова, Мельник, 2015б). А праця спеціалістів у цих областях буде гідно забезпечуватися.

Слід зауважити, що займатися математикою у США — це як вступити до елітного клубу для досить забезпечених родин. Більшість додаткових програм, літніх математичних таборів, гуртків платні, ціни досить високі і тому недоступні для малозабезпечених сімей. Рік навчання у математичній школі коштує 3000 доларів, а місяць перебування учня у спеціалізованому математичному таборі — біля 6000 доларів. Незважаючи на це, зацікавленість у вивченні математики дуже значна.

За висловом директора зі стратегії освітнього фонду Edwin Gould Foundation Пег Тайр, у США зараз проходить математична революція. Доказом цього є незаперечні результати: на минулій Міжнародній математичній олімпіаді у липні 2015 року команда школярів США посіла перше місце. Зауважимо, що останній раз США отримали золото 21 рік тому, хоча з 2010-го року завжди були у трійці лідерів. Раніше США постійно були позаду Китаю, який з останніх 16-ти олімпіад виграв 12.

56-та Міжнародна математична олімпіада проходила в місті Чайнмай (Королівство Таїланд) з 4-го по 16-те липня 2016 року. В олімпіаді брали участь 557 учнів з 104 країн. Кількість (52) дівчат становила 9%. Кожну країну представляла команда з 6-ти учасників. Олімпіада проходила у два тури 10-го та 11-го липня. Кожного дня учасникам пропонувалось по три задачі, на розв'язок яких давалося 4,5 години. Максимальна кількість балів за кожну задачу становить 7 балів. Складність задач зростала з першої по шосту.

Варто зазначити, що третя задача на олімпіаді була запропонована від України, її авторами є Данило Хілько та Михайло Плотніков. Правда, саме ця задача виявилась найскладнішою для Антона Тригуба, вихованця Данила Хілька, що характеризує чесність наших математиків.

З умовами задач можна ознайомитись на сторінці:

http://matholymp.org.ua/_files/ad61785119/2015-ukr.pdf

Кількість медалів, отриманих учасниками 56-тої математичної олімпіади:

- золоті медалі — 39 (при сумі балів ≥ 26 балів)
- срібні медалі — 100 (при сумі балів ≥ 19 балів)
- бронзові медалі — 143 (при сумі балів ≥ 14 балів)

Перші одинадцять командних результатів

Таблиця 1.

Місце	Країна	Золото	Срібло	Бронза
1	США	5	1	-
2	Китай	4	2	-
3	Південна Корея	3	1	2
4	Північна Корея	3	3	-
5	В'єтнам	2	3	1
6	Австралія	2	4	-
7	Іран	3	2	1
8	Росія	-	-	6
9	Канада	2	4	-
10	Сінгапур	1	4	1
11	Україна	2	4	1

Представниками України були троє одинадцятикласників Харківського математичного ліцею № 27 — Денис Смірнов (золото), Софія Дубова (срібло), Во Дінь Тхань Фонг (срібло), двоє одинадцятикласників Києво-Печерського ліцею №171 «Лідер» — Наталія Хотяїнцева (золото) та Анастасія Альохіна (срібло) та дев'ятикласник Антон Тригуб (срібло) — учень київської гімназії «Академія». Керівниками української делегації були Богдан Володимирович Рубльов та Андрій Володимирович Паньков.

Результати української команди

Таблиця 2.

Задачі / Учасники	1	2	3	4	5	6	Сума балів	Місце	Нагорода
Смірнов Денис	1	5	7	7	2	7	29	19	Золото
Хотяїнцева Наталія	7	7	2	7	3	0	26	37	Золото
Альохіна Анастасія	7	2	0	7	7	0	23	58	Срібло
Тригуб Антон	7	2	0	7	3	2	21	88	Срібло
Дубова Софія	7	1	1	7	3	0	19	118	Срібло
Во Дінь Тхань Фонг	4	5	0	7	1	0	17	160	Бронза

50% української команди складали дівчата. Ці розумниці відзначилися і на Європейській математичній олімпіаді для дівчат, де брало участь 109 старшокласниць з 23 європейських країн, а також учениці з США, Японії, Індії, Мексики, Саудівської Аравії, Тунісу. Олімпіада проходила з 14-го по 19-те квітня 2015-го року в Мінську.

Олімпіада для дівчат проводиться за правилами міжнародної математичної олімпіади. З кожної країни по чотири дівчини. Українська команда складалась з учениць Харківського фізико-математичного ліцею № 27 (Дубова Софія, Сіліна Ольга), та Київсько-Печерського ліцею № 171 «Лідер» (Альохіна Анастасія, Хотяїнцева Наталія). Вже другий рік поспіль українські дівочі команди з великим відривом займають перші місця. І цього року у змаганні українки випередили команду США. Найкращий результат серед європейських учасниць показала Дубова Софія (41 бал з можливих 42 балів).

Олімпіади з математики популярні і серед студентів. Перша олімпіада з математики серед студентів була започаткована в Україні видатним математиком XX сторіччя М. П. Кравчуком у 1935 році. Вищі навчальні заклади пишаються своїми переможцями.

Потреба у висококваліфікованих управлінських кадрах і керівниках, ініціативних менеджерах, самостійних фахівцях є нагальною для сьогодення. Навики управління нерозривно пов'язані з технічними уміннями, що включають знання та майстерність у певній спеціалізованій сфері: інженерній, комп'ютерній, фінансовій, виробничій тощо. Високий рівень математичної та технічної освіти є запорукою професійності менеджера вищої ланки, про що свідчать дослідження міжнародної дослідницької компанії HayGroup. Опитування визначили, що більшість топ-менеджерів, які працюють у потужних українських бізнес-структурах є випускниками технічних вишів, де досить значну увагу приділяють вивченню математичних дисциплін (Задерей, Нефьодова, Мельник, 2015б).

Список літератури

Задерей, Н. М., Нефьодова, Г. Д., Мельник, І. Ю. (2015а). STEM - освіта в українському просторі. У кн. *XI Міжнародна науково-практична конференція «Релігія, релігійність, філософія та гуманітаристика у сучасному інформаційному просторі: національний та інтернаціональний аспекти» від 29—30 грудня 2015 року* (с. 74—76). Рубіжне: СНУ ім. В. Даля.

Задерей, Н. М., Нефьодова, Г. Д., Мельник, І. Ю. (2015б). Освіта сучасних управлінських кадрів. У кн. *Четверта міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному науковому світі» 24—25 грудня 2015 р., Київ: Матеріали конференції* (с. 288—290). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu4-abstracts.pdf

ПРО ПОШУКИ МОДЕРНІЗАЦІЇ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

І. М. Зелепугіна
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна
zelepugina@ukr.net

Протягом останніх десятиріч усі розвинені країни світу здійснювали і продовжують здійснювати реформування освітніх систем. При цьому першочерговою метою реформування з самого початку ставилося підвищення інтелектуального потенціалу нації, розвиток творчої особистості. На сучасному етапі в Україні також активно відбувається процес інтеграції національної системи вищої освіти в європейський і світовий освітній простір, здійснюється модернізація освітньої діяльності у контексті європейських вимог. Відповідно до нового Закону України «Про вищу освіту» метою діяльності вищих навчальних закладів є підготовка «конкурентоспроможного людського капіталу для високотехнологічного та інноваційного розвитку країни, самореалізації особистості, забезпечення потреб суспільства, ринку праці та держави у кваліфікованих фахівцях». Зрозуміло, що випускники технічних університетів мають бути готові до розробки технологій, які до моменту закінчення їх освіти ще не існували. Тільки якісна фундаментальна підготовка, визначальним елементом якої для інженерно-технологічних кадрів є математична освіта, забезпечить майбутньому спеціалісту здатність адаптуватися до будь-якого типу діяльності.

Вищим навчальним закладам надано відтепер самостійності в багатьох питаннях. Нажаль, наслідком стало зниження в технічних університетах рівня фундаментальної природничо-наукової освіти, зокрема математичної. Маємо різке (у 2 та більше разів) скорочення кількості аудиторних годин (при збільшенні годин на самостійну роботу студентів) та кількості семестрів, виділених на вивчення математики при повному збереженні змісту освітньої професійної програми. Так, наприклад, на весь курс вищої математики для технологічних спеціальностей у нашому університеті виділено лише один семестр. Залишається сподіватися, що це лише тимчасово, лише перехідний етап, так би мовити «хвороба росту».

Зрозуміло, що простим стисненням об'єму матеріалу не обійтися, курс математики тоді стане надзвичайно концентрованим з точки зору насиченості поняттями та методами, втратить логіку наслідування та аргументованість, адже властива математиці повнота аргументації та класифікація покликана виховувати у майбутніх фахівців загальну логічну культуру мислення. Курс вищої математики та інших математичних дисциплін у вищому технічному навчальному закладі має задовольняти як вимогам фундаментальності, так і професійної спрямованості. Необхідно як забезпечити студентів математичним апаратом для вивчення спеціальних дисциплін та професійної підготовки, так і сформувати базу для неперервної самоосвіти в області математики та її застосування.

При побудові курсу в жорстких теперішніх умовах, на мій погляд (і це вже апробовано), слід опиратися на такі дві обставини: по-перше, вплив комп'ютерних та інформаційних технологій невпинно зростає і студентство активно користується всіма їх перевагами; по-друге, значна частина студентів переконана, що математика не наближує, а віддаляє їх від опанування професії. Тому, при запровадженні нового поняття слід обов'язково підкреслювати його застосування в галузі, у якій спеціалізуються студенти, та можливість застосування комп'ютерів при розв'язанні задач. Так, наприклад, агітувати і заохочувати використовувати хоча б можливості EXCEL при розв'язуванні задач лінійної алгебри, математичного програмування, математичної статистики, тощо. При розгляді диференціальних рівнянь, приділяти особливу увагу саме складанню рівнянь динаміки різних процесів відповідно до спеціальності. Як показує досвід, студенти більш зацікавлено тоді відносяться до вивчення математичних дисциплін.

Але як вкластися в дуже обмежену кількість аудиторних годин? Зрозуміло, що більшу частину матеріалу доводиться давати на самостійне опрацювання. При цьому вважаю неправильним видавати цілі теми на самостійну роботу, а лише таку її частину, що потребує деталізації та самостійного усвідомлення. Фактично пропонується переглянути відношення до того, що саме необхідно пройти в аудиторії, по кожному розділу і відійти від звичних шаблонів. Наприклад, при вивченні інтегрального числення — методам інтегрування приділити меншу увагу, а більше зосередитися на відповідних застосуваннях; крім того, дозволити користуватися для знаходження невизначених інтегралів гаджетами. Тут важливо, щоб студенти вміли правильно користуватися можливостями комп'ютерних технологій, одержувати свідомі результати та проводити їх аналіз. Звичайно, деякі студенти користуються розв'язаннями задач on line, але це теж можна врахувати при оцінюванні знань, орієнтуючись все-таки на тих студентів, які прийшли за якісною освітою. Наприклад, нехай оцінювання самостійної роботи не перевищуватиме 50 балів.

Для забезпечення самостійної роботи викладачам КНУТД стає в нагоді розроблене на сайті нашого університету модульне середовище (середовище MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment)), де подано по кожній дисципліні та спеціальності детальні конспекти лекцій та практичних занять, різні методичні розробки, а також розроблені тести для перевірки та контролю знань. Звичайно, і наповнення модульного середовища, і робота з ним, і підготовка матеріалів для індивідуальних самостійних робіт студентів та їх перевірка, нажаль, вимагає набагато більше часу, ніж той, який заплановано у педагогічному навантаженні викладача. Але, як показує практика проведення подібної модернізації курсу вищої математики, усі затрати дають результат: більшість студентів матеріал засвоюють і працюють зацікавлено.

ДОСЛІДЖЕННЯ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ У СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКОМУ НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

В. Я. Ілляшенко
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
ira_form@mail.ru

Східноєвропейський національний університет(СНУ) імені Лесі Українки у 2015 році відзначив своє 75-річчя. Ці роки — результат цілеспрямованої та наполегливої праці цілих поколінь педагогів, вчених, які навчались, трудились в університеті.

Математичне життя розквітло у виші з приходом на фізико-математичний факультет у 1952—1953 рр. доктора фіз.-мат. наук С. І. Зуховицького, канд. фіз.-мат. наук С. С. Калиновської, В. К. Дзядика, який у 1955 р. захистив кандидатську дисертацію. Усі вони працювали в одній галузі — теорії наближення функцій.

Професор С. І. Зуховицький (1908—1994), відомий на той час вчений, організував семінар з теорії функцій, який фактично перетворився у Школу для молодих викладачів, студентів — старшокурсників. В. К. Дзядик (1919—1998) за час роботи в пединституті (1953—1960 рр.) захистив докторську дисертацію «Дослідження апроксимативних і геометричних властивостей деяких функцій» і після від'їзду в 1957 р. С. І. Зуховицького керував семінаром (1957—1960 рр.). Учасники семінару активно розробляли питання теорії функцій дійсної й комплексної змінних, захистили кандидатські й докторські дисертації. Серед них відомі в Україні та поза її межами вчені, доктори фіз.-мат. наук Г. І. Єскін, В. І. Горбачук, В. І. Білий.

У 1955—1957 рр. на кафедрі математики вченими С. І. Зуховицьким, В. К. Дзядиком започаткована в Луцькому педінституті математична школа з теорії функцій дійсної змінної.

На початку творчого шляху (1953—1955 рр.) В. К. Дзядик працював над розв'язанням окремих задач теорії наближення функцій, які не піддавались відомим уже математикам. У серії перших публікацій відображені його результати по розв'язанню проблеми Фавара, які здобули міжнародне визнання. Завершуючи дослідження академіка С. М. Нікольського і проф. О. П. Тімана, В. К. Дзядик одержав у 1956—1958 рр. конструктивну характеристику неперіодичних функцій класів Гельдера і Зігмунда, над якою раніше працювали такі відомі математики, як Д. Джексон, С. Бернштейн, А. Зігмунд. У ці роки Владислав Кирилович почав розробляти фундамент конструктивної теорії функцій комплексної змінної. У першому (1953 р.), другому (1955 р.), третьому (1958 р.) випусках «Наукових записок» Луцького педінституту опубліковані статті, які відображають окремі результати, отримані В. К. Дзядиком під час роботи в Луцьку. Отже, В. К. Дзядик започаткував у нашому виші дослідження як з теорії функцій дійсної, так і комплексної змінних.

Пізніше на основі результатів, одержаних у Луцьку, професор, член.-кор. АН УРСР В. К. Дзядик заклав фундамент створеної ним теорії, яка встановлює зв’язок між структурними властивостями функцій, заданих на замкнених множинах на комплексній площині, і швидкістю наближення цих функцій алгебраїчними многочленами.

Дальшого розвитку теорія функцій комплексної і дійсної змінних дістала в роботах В. К. Дзядика та його учнів, зокрема випускників університету.

Р. М. Ковальчук (1933—1996 рр.) (випуск. 1955 р., працював з 1955 до 1995 року викладачем, першим зав. кафедрою математичного аналізу, деканом фіз.-мат. факультету) дослідив неперервні й диференційовані властивості функцій, аналітичних усередині круга, а також граничні властивості функцій, що здійснюють конформні відображення областей, обмежених спрямлюваними жордановими дугами. У 1964 р. одним з перших серед учнів В. К. Дзядика він захистив кандидатську дисертацію «Про модулі неперервності аналітичних функцій та про наближення функцій багатьох комплексних змінних».

Результати, отримані З. В. Зарицькою (випускн. 1955, працювала з 1955 до 2013 р. доцентом, зав. кафедрою математичного аналізу), стосуються наближення функцій лінійними додатними операторами та застосувань апроксимаційного методу Дзядика.

Н. Ф. Кононова (працювала з 1954 до 1999 доцентом, зав. кафедрою математики) вивчала питання, що стосуються інтерференції цілих функцій, а також теорії наближення елементарних функцій.

О. І. Швай (1935—2000) (випуск. 1956, працював у виші з 1958 до 1972) зробив помітний внесок у завершення конструктивної характеристики функцій класів Гельдера (дослідження 1967—1973 рр.), одержав (спільно з П. Є. Антонюком) важливу для застосувань оцінку наближення ядер типу Коші на множинах комплексної площини (1978 р.).

В. Й. Горбайчук (1935—1997) (випуск. 1957, працював у виші з 1961 до 1997 р., пройшов шлях від асистента до професора, зав. каф. диф. рівнянь та мат. фізики), досліджував (1969—1972 рр.) конструктивні й структурні властивості функцій на плоских компактах додатної місткості. Наступні його праці стосуються застосувань методів апроксимації до вивчення аналітичного продовження гармонійних функцій (1975—1979 рр.), дослідження коливальності розв’язків рівнянь еліптичного типу, що визначаються полігармонійним оператором, обернених задач математичної фізики (1980—1990 рр.) та ін.

У 1993 р. на математичному факультеті відкрита аспірантура зі спеціальності «Математичний аналіз». Проф В. Й. Горбайчук був науковим керівником перших аспірантів — випускників університету О. М. Піддубного, С. Б. Гембарської, Р. В. Товкача Ними проведені дослідження граничних властивостей аналітичних функцій в областях комплексної площини, знайдено обмежені бігармонійну та біаналітичну функції в одиничному крузі, які в жодній точці не мають дотичних границь, встановлено абсолютну збіжність подвійних степеневих рядів, що мають обмежену варіацію, одержано оцінки найкращих наближень функцій окремих класів алгебраїчними поліномами.

Учень В. Й. Горбайчука П. В. Задерей (випуск. 1970 р.) після закінчення аспірантури Інституту Математики АН України працював там, захистив докторську дисертацію. Ним дана оцінка норм тригонометричних поліномів в інтегральній і рівномірній метриках та показано їх застосування в теорії наближень. Професор П. В. Задерей працював довгий час у нашому виші за сумісництвом і сьогодні керує науково-дослідною роботою аспірантів — випускників університету, надає консультації молодим вченим.

П. Є. Антонюк (1937—1997) (випуск. 1957 р., працював у виші з 1961 до 1997 викладачем, зав. кафедрою математичного аналізу, деканом) одержав важливі результати, досліджуючи у 1968—1973 рр. класи функцій комплексної змінної, які характеризуються заданою швидкістю спадання їх найкращих наближень на множинах з кутами, а також рівномірне наближення многочленами функцій на замкнених множинах.

М. Є.Коренков (випуск. 1963 р., з 1965 до 2015 працював на факультеті) вивчав асимптотичні властивості мероморфних функцій, одержані результати викладені в дисертації «Асимптотичні властивості логарифмічних похідних цілих функцій» (1979 р.). У 1985—1989 рр. ним досліджена асимптотика і розподіл значень сигма і дзета-функцій Вейєрштраса і тета-функції Якобі, логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку.

Л. І. Філозоф (випуск. 1971, працює з 1977 р. на кафедрі матем. аналізу викладачем, доцентом, з 1982—2015 рр. очолював кафедру) — учень В. К. Дзядика — досліджував у 1975—1979 рр. наближення функцій ланцюговими дробами та раціональними функціями, захистивши в 1979 р. кандидатську дисертацію. У 1983 р. ним була одержана асимптотика відхилень діагональних апроксимацій Паде і багатоточкова апроксимація Паде. Останні результати стосуються асимптотичної рівності найкращих раціональних наближень деяких функцій у комплексних областях.

Дослідження з питань наближення періодичних функцій, започатковані В. К. Дзядиком, продовжені Д. М. Бушевим (випуск. 1973 р., доцент, працює з 1975 р. на кафедрі математичного аналізу), який одержав асимптотичні рівності для точних верхніх граней найкращих наближень деяких класів згорток. Дослідження наближень класів згорток дали можливість узагальнити або уточнити важливі результати, одержані відомими математиками А. М. Колмогоровим, С. М. Нікольським, С. Б. Стєчкіним, В. К. Дзядиком, О. І. Степанцем.

Питанням наближення класів диференційованих функцій тригонометричними многочленами і раціональними дробами присвячені роботи І. Р. Ковальчука (випуск. 1978 р., працює у виші з 1980 р. асистентом, доцентом, деканом (2000—2015)).

Результати, отримані Ю. І. Харкевичем (випуск. 1987 р., працює з 1991 р. ст. викладачем, доцентом, професором, зав. кафедри диф. рівнянь та матем. фізики, деканом з 2015 р.) стосуються наближення функцій узагальнених класів Гельдера операторами, що породжуються прямокутними методами підсумування рядів Фур'є. Проф. Ю. І. Харкевич сьогодні керує науковим семінаром, продовжуючи традиції, закладені на факультеті видатними вченими С. І. Зуховицьким, В. К. Дзядиком, де викладачі, аспіранти, студенти факультету розглядають актуальні питання сучасної теорії функцій.

Випускники математичного факультету (учасники семінару) протягом останніх років зробили вагомий внесок у розвиток теорії наближення функцій.

Так, доценти кафедри диф. рівнянь та мат. фізики К. М. Жигалло, Т. В. Жигалло вивчали асимптотичну поведінку величини наближення інтегралами Пуассона на класах диференційованих періодичних функцій, а також на класах локально сумовних функцій у рівномірній та інтегральній метриках.

Наукові результати І. В. Кальчук (випуск. 2003 р., доц., зав. кафедри алгебри і матем. аналізу) стосуються досліджень апроксимативних властивостей лінійних методів підсумовування рядів та інтегралів Фур'є, що задаються множиною функцій натурального аргументу, які залежать від дійсного параметра на різних функціональних класах, зокрема на класах Соболєва, класах спряжених функцій та класах Степанця.

Дослідження О. В. Федуник (випуск. 2003 р., доцент кафедри алгебри і матем. аналізу) присвячені вивченню апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних; одержані точні за порядком оцінки лінійних та ортопроекційних поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних.

К. В. Соліч (випуск. 2009 р., канд. ф.-м.н.) дослідила білінійні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних.

Наукові результати Т. А. Степанюк (випуск. 2011 р., канд. ф.-м.н.) стосуються апроксимативних характеристик класів (ψ, β)-диференційовних функцій.

Студенти, учаснику семінару, під час навчання в університеті здобувають призові місця на Всеукраїнських конкурсах студентських наукових робіт і далі продовжують наукові дослідження. Так студ. В. Миронюк успішно закінчив аспірантуру Інституту математики НАН України, студентка К. Швай (І місце на конкурсі) зараз навчається в аспірантурі цього Інституту.

Протягом багатьох років постійні консультації для викладачів, аспірантів, студентів факультету надавали провідні вчені в галузі теорії функцій: член-кор. НАН України, професор, зав. відділом теорії функцій Інституту математики НАН України О. І. Степанець (1942—2007), доктори фіз.-мат. наук, провідні наукові співробітники відділу теорії функцій Інституту математики НАН України А. С. Романюк, А. С. Сердюк та ін..

Посіяне науковою і педагогічною діяльністю великих Учителів дає непогані сходи на ґрунті так уміло і щиро зораного та зігрітого їх душевним теплом.

ПРОСТІ ДВОСТОРОННІ ФОРМУЛИ ТА ДВОСТОРОННІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЧИСЛА ПІ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

До дня числа Пі (14-го березня)

Історія числа Пі має безліч важливих та цікавих та навіть героїчних фактів, встановлено його важливі властивості, придумано велику кількість формул та алгоритмів (Мязіна та ін., 2016; Матлаш та ін., 2016) (див. також в Гуглі Пи (число) - Википедия). Існують також стосовно нього досі не розв'язані проблеми. Проте не зустрічається прості як завгодно точні двосторонні формули для цього числа, а тим паче рівняння для його обчислення і, зокрема, двосторонні рівняння. Тут ці речі пропонуються як такі, що можуть бути цікавою темою для шкільних математичних гуртків (наприклад, формули для обчислення цього числа за допомогою калькуляторів, у яких тригонометричні функції обчислюються, коли кути задані в градусах, а не в радіанах, тощо).

За допомогою формули для площі правильного n-кутника, вписаного в коло одиничного радіуса та описаного навколо нього, дістаємо двосторонні формули для числа π:

$$\pi > 0,5n\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\pi,\ \pi < n\,\mathrm{tg}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\pi. \tag{1}$$

Якщо ж у співвідношеннях (1) π та 180° замінити на невідоме $x_n = x(n)$, то для числа π матимемо двосторонні скінченні рівняння

$$x_n = 0,5n\sin\left(\frac{2x_n}{n}\right),\ x_n = n\,\mathrm{tg}\left(\frac{x_n}{2}\right)$$

(перше з них можна розв'язувати методом простих ітерацій).

Список літератури

Мязіна, М., Кивенко, Р., Дем'яненко, О. О. (2016). З історії обчислення числа ПІ (стародавній період). Матеріали Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», 24— 25 грудня 2015 року, Київ, 257—261. http://matan.kpi.ua/mvstu4.html

Матлаш, В., Шевченко, В., Дем'яненко, О. О. (2016). З історії обчислення числа ПІ (середньовічний період). Матеріали Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», 24— 25 грудня 2015 року, Київ, 255—261. http://matan.kpi.ua/mvstu4.html

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ЕЙЛЕРА Й ФЕРМА У КРИПТОГРАФІЇ ТА ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ

Н. В. Калашнікова
Дніпропетровський національний університет, Дніпропетровськ, Україна
natalja_kn@ukr.net

Мала теорема Ферма — одне з основних тверджень теорії чисел. Вперше була сформульована в листі французького математика П'єра де Ферма до свого друга Бернара Френікля де Бессі 18 жовтня 1640 року.

Теорема Ферма (мала теорема Ферма). *Якщо число* p — *просте і* $(a,p)=1$, *то*

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}.$$

Наслідок. Якщо p — просте число і a — будь-яке ціле число, то

$$a^{p}\equiv a \pmod{p}.$$

Теорема Ейлера. *Якщо* $m>1$ *і* $(a,m)=1$, *то*

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}.$$

Теореми Ейлера і Ферма широко використовуються в криптографії — науці, яка займається розробкою методів перетворення (шифрування) інформації з метою її захисту від несанкціонованого доступу. Найбільш поширеною серед криптосистем з відкритим ключем є система RSA, запропонована в 1978 році, назва якої походить від перших літер прізвищ її розробників — Р. Рівеста (R. Rivest), А. Шаміра (A. Shamir) та Л. Адлемана (L. Adleman). В основі криптосистеми лежить той факт, що розкласти велике складене число на прості множники досить складно, оскільки в теорії чисел не існує ефективного алгоритму факторізації натуральних чисел.

Для обґрунтування системи RSA необхідні нижчеподані твердження, доведення яких базується на застосуванні теореми Ейлера.

Твердження 1. *Нехай* $p_1,p_2,\ldots,p_k$ — *різні прості натуральні числа і* $m=p_1p_2\cdots p_k$. *Тоді для будь-яких* $a,n\in\mathbb{Z}$ *має місце конгруенція*

$$a^{n\varphi(m)+1}\equiv a \pmod{m}.$$

Доведення. Нехай $\left(a,m\right)=1$. Тоді із теореми Ейлера випливає, що

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}, \text{ тобто } a^{n\varphi(m)+1}\equiv (a^{\varphi(m)})^n\cdot a\equiv 1\cdot a\equiv a \pmod{m}.$$

Припустимо тепер, що $(a,m)=d\neq 1$. Позначимо $c=\dfrac{m}{d}$. Оскільки m є добуток різних простих множників, то $(a,c)=(c,d)=1$. За теоремою Ейлера

$$a^{\varphi(c)}\equiv 1 \pmod{c}.$$

Тому що $c\mid m$, то $\varphi(c)\mid\varphi(m)$, тобто

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\text{mod} \quad c),$$

а, отже,

$$a^{n\varphi(m)} \equiv 1 (\text{mod} \quad c).$$

Остання конгруенція означає, що $a^{n\varphi(m)} - 1$ ділиться на c. Із

$$a^{n\varphi(m)+1} - a = a(a^{n\varphi(m)} - 1),\ a \vdots d,\ (a^{n\varphi(m)} - 1) \vdots c \text{ і } (c, d) = 1$$

випливає, що $(a^{n\varphi(m)+1} - a) \vdots cd$, тобто $m \mid a^{n\varphi(m)+1} - a$, таким чином,

$$a^{n\varphi(m)+1} \equiv a (\text{mod} \quad m).$$

Твердження 2. *Нехай* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *— різні прості натуральні числа,* $m = p_1 p_2 \cdots p_k$, $n \in \mathbb{N}$ *і* $(n, \varphi(m)) = 1$. *Тоді відображення* $f(x) = x^n$ *взаємно однозначне на* Z_m.

Розв'язання. Оскільки числа n і $\varphi(m)$ взаємно прості, то існують $k, l \in \mathbb{Z}$ такі, що $ln + k\varphi(m) = 1$. Тоді $ln = 1 - k\varphi(m)$. Розглянемо відображення $g(x) = x^l$:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x^{ln} \equiv x^{1-k\varphi(m)} \equiv x (\text{mod} \quad m).$$

Отже, $f \circ g = g \circ f = \varepsilon$, а це означає, що відображення g обернене до f.

Розглянемо принцип роботи системи RSA. Нехай p, q — різні прості натуральні числа, $m = pq$, $e \in \mathbb{N}$ і $(e, \varphi(m)) = 1$. Функція f, яка реалізує систему RSA, діє так:

$$f(x) = x^e (\text{mod} \quad m).$$

Із висновку твердження 2 випливає, що відображення $f(x) = x^e$ взаємно однозначне на $\mathbb{Z}_m$, а, отже,

$$f(x) = x^e (\text{mod} \quad m)$$

— взаємно однозначне відображення множини цілих чисел відрізка $[0, m-1]$ у себе. Знайдемо обернене відображення. Розглянемо конгруенцію

$$de \equiv 1 (\text{mod} \quad \varphi(m)).$$

Оскільки e і $\varphi(m)$ взаємно прості, то ця конгруенція має єдиний розв'язок. Позначимо

$$g(x) = x^d (\text{mod} \quad m).$$

Застосувавши висновок твердження 1, матимемо

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x^{de} \equiv x^{1+k\varphi(m)} \equiv x (\text{mod} \quad m).$$

Таким чином, відображення g обернене до f, а функція

$$g(x) = x^d (\text{mod} \quad m)$$

— функція розшифрування.

Наприклад, згенеруємо ключі і зашифруємо за допомогою криптосистеми RSA повідомлення 3, 25, 75.

Нехай $p = 7$, $q = 11$. Тоді $n = pq = 77$, $\varphi(77) = 60$.

Оскільки число 7 взаємно просте з числом 60, то можна вибрати, наприклад, $e = 7$. Функція шифрування в цьому випадку задається за правилом:

$$f(x) = x^7 \Big(\mathrm{mod} \quad 77\Big).$$

Маємо

$$f(3) = 3^7 \equiv 31(\mathrm{mod} \quad 77),\ f(25) = 25^7 \equiv 53(\mathrm{mod} \quad 77),$$

$$f(75) = 75^7 \equiv -2^7 \equiv 26(\mathrm{mod} \quad 77).$$

Ми одержали криптограму 31, 53, 26. Знайдемо функцію розшифрування:

$$7d \equiv 1(\mathrm{mod} \quad 60) \Leftrightarrow d \equiv 43(\mathrm{mod} \quad 60),$$

тобто

$$g(x) = x^{43}(\mathrm{mod} \quad 77)$$

— функція розшифрування.

Багато криптографічних систем використовують великі прості числа, тому дослідження їх властивостей набуває ще більшої важливості. Джерелом ефективних тестів на простоту є мала теорема Ферма. Перевірку умови

$$a^n \equiv a(\mathrm{mod} \quad n) \tag{1}$$

називають тестом Ферма. Рівність (1) не є необхідною й достатньою умовою простоти числа n. Тому тест Ферма працює з гарантією тільки в одному напрямку: якщо для деякого натурального числа a умова (1) порушується, то число n складене. Е протилежному випадку число n може бути простим з деякою ймовірністю, яка зростає при повторенні тесту з іншою основою a. Складене число n називають *псевдопростим* числом (Ферма) за основою a, якщо є вірною конгруенція (1). Наприклад, 341 є псевдопросте число за основою 2, оскільки воно складене і

$$2^{341} \equiv 2(\mathrm{mod} \quad 341).$$

Теорема 1. *Для кожного цілого числа $a \geq 2$ існує нескінченна множина псевдопростих чисел Ферма за основою a.*

Доведення. Якщо непарне просте число p не ділить $a^2 - 1$, то

$$n = \frac{a^{2p} - 1}{a^2 - 1}$$

— псевдопросте число за основою a.

Але існують складені числа, які проходять тест Ферма при всіх a, які взаємно прості з ними. Складене число n, для якого при всіх натуральних числах a, взаємно простих з n, справедлива конгруенція

$$a^{n-1} \equiv 1\Big(\mathrm{mod} \quad n\Big),$$

називається *числом Кармайкла.*

Твердження 3. *Складене число n є числом Кармайкла тоді й тільки тоді, коли при всіх натуральних числах a справедлива конгруенція*

$$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

Найменше число Кармайкла дорівнює $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Покажемо, що це дійсно число Кармайкла. Конгруенція

$$a^{561} \equiv a \pmod{561}$$

рівносильна тому, що

$$a^{561} \equiv a \pmod{3},\ a^{561} \equiv a \pmod{11} \text{ і } a^{561} \equiv a \pmod{17}.$$

Якщо a ділиться на 3, то

$$a^{561} \equiv 0 \equiv a \pmod{3}.$$

У тому випадку, коли число a не кратне 3,

$$a^2 \equiv 1 \pmod{3},$$

а, значить,

$$a^{561} = (a^2)^{280} \cdot a \equiv 1 \cdot a \equiv a \pmod{3}.$$

Конгруенції

$$a^{561} \equiv a \pmod{11} \text{ і } a^{561} \equiv a \pmod{17}$$

доводяться аналогічно.

Критерій Корселта. *Непарне складене ціле число n є числом Кармайкла тоді й тільки тоді, коли для кожного його простого дільника p виконані дві умови:*

1) число n не ділиться на p^2;

2) число $p-1$ ділить $n-1$.

Із критерію Корселта, зокрема, випливає, що в канонічному розкладі числа Кармайкла не менше трьох простих множників.

За допомогою критерія Корселта можна, наприклад, довести, що 2465 — число Кармайкла. Дійсно, $2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29$. Е канонічному розкладі числа 2465 немає квадратів і $4 \mid 2464$, $16 \mid 2464$ і $28 \mid 2464$.

Для перевірки числа на простоту також використовується інший варіант малої теореми Ферма.

Теорема 2. *Нехай n — непарне просте число і $n-1 = 2^s t$, де число t непарне. Якщо число a не ділиться на n, то або $a^t \equiv 1 \pmod{n}$, або $a^{2^r t} \equiv -1 \pmod{n}$ для деякого r, де $0 \le r \le s-1$.*

Доведення. Із малої теореми Ферма випливає, що порядок будь-якого елементу $\overline{a}$ мультиплікативної групи $\mathbb{Z}_n^*$ є дільником числа $n-1 = 2^s t$. Якщо $\left|\overline{a}\right| = t$, то має місце конгруенція

$$a^t \equiv 1(\mathrm{mod} \quad n).$$

У випадку, коли $\left|\overline{a}\right| = 2^m t$ для деякого m, де $1 \le m \le s$, то $a^{2^{m-1}t} \equiv -1(\mathrm{mod} \quad n)$. Якщо $\left|\overline{a}\right| = 2^m$ для деякого m, де $1 \le m \le s$, то $a^{2^{m-1}} \equiv -1(\mathrm{mod} \quad n)$, а, значить, і

$$a^{2^{m-1}t} \equiv 1(\mathrm{mod} \quad n).$$

Теореми Ейлера та Ферма також застосовуються в теорії подільності. Розглянемо це на деяких прикладах.

Задача 1. Довести, що коли число a не ділиться на непарне просте число p, то можливий один і тільки один із випадків:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\left(\mathrm{mod} \quad p\right) \text{ або } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\left(\mathrm{mod} \quad p\right).$$

Розв'язання. Згідно з малою теоремою Ферма $a^{p-1} \equiv 1\left(\mathrm{mod} \quad p\right)$. Звідси виходить, що

$$(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)(a^{\frac{p-1}{2}} - 1) \equiv 1\left(\mathrm{mod} \quad p\right),$$

тобто добуток $(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)(a^{\frac{p-1}{2}} - 1)$ ділиться на p. Оскільки число p просте, то принаймні один із множників кратний p. Якщо припустити, що обидва множники діляться на p, то отримаємо, що їх різниця ділиться на p. Але $(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) - (a^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 2$ і 2 не кратне p. Отримана суперечність доводить правильність висловлювання.

Задача 2. Якщо $n \ge 2$ і $(a^n - a, n) = 1$ для деякого натурального a, то число n складене і не дорівнює степеню простого числа.

Розв'язання. Якщо припустити, що число n просте, то з малої теореми Ферма отримаємо: $a^n \equiv a\left(\mathrm{mod} \quad n\right)$, тобто $(a^n - a, n) = n$.

Отже, число n складене. Нехай $n = p^k$, де p — просте число, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$a^{p^k} \equiv ((a^p)^{p\cdots})^p \equiv a\left(\mathrm{mod} \quad p\right),$$

тобто $(a^n - a) \vdots p$, а, значить, $(a^n - a, n) \ne 1$.

Список рекомендованої літератури

Босс, В. (2013). Теория чисел. *Лекции по математике* (Т. 14). Москва: URSS.

Крэндалл, Р., Померанс, К. (2011). *Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты*. Москва: URSS.

Кузнецов, Г. В., Фомичов, В. В., Сушко, С. О., Фомичова, Л. Я. (2004). *Математичні основи криптографії.* Дніпропетровськ, НГУ.

ПРО ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ОКРЕМИХ РОЗДІЛІВ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В ТЕХНІЧНОМУ ВНЗ

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, pobeda586@gmail.com

У Національному авіаційному університеті іноземні студенти можуть навчатися українською, російською та англійською мовою. Вибір мови навчання здійснюється іноземними студентами залежно від їх мовної підготовки та планів на майбутнє працевлаштування. Відмітимо, що можливість отримання професійної освіти англійською мовою є дуже важливою для майбутніх фахівців у галузі авіації, оскільки англійська мова є однією з офіційних мов Міжнародної організації цивільної авіації (ICAO).

Кафедра вищої та обчислювальної математики забезпечує викладання англійською мовою низки математичних дисциплін для студентів різних технічних спеціальностей.

Зауважимо, що студентам, які навчаються за більшістю технічних напрямів, питання аналітичної геометрії викладаються в рамках відповідних розділів синтетичної дисципліни «Вища математика». Проте для студентів, що навчаються за напрямами, які вимагають поглибленої математичної підготовки, ці питання викладаються в рамках дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». У рамках англомовного проекту НАУ викладачі кафедри вищої та обчислювальної математики працюють зі студентам, що навчаються за напрямами обох типів.

Викладачами кафедри вищої та обчислювальної математики НАУ було створено навчальний посібник англійською мовою в чотирьох частинах, який повністю забезпечує супровід курсу вищої математики для навчання за кредитно-модульною системою студентів усіх технічних спеціальностей. Зокрема, розділи, пов'язані з лінійною алгеброю та аналітичною геометрією, викладено в Denisiuk et al. (2006). Відмітимо, що дослідження кривих та поверхонь другого порядку, вивчення якого входить у програму дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» приведено в англомовному посібнику Grebeniuk & Karupu (2004). Крім того, для повного забезпечення викладання цієї дисципліни проводиться робота по створенню навчального посібника, що є аналогом посібника Денисюк та ін. (прийнято до друку) для англомовних студентів. Паралельно розробляються опорні матеріали для цієї дисципліни.

Методика викладання аналітичної геометрії студентам технічних напрямів навчання досліджувалася багатьма авторами. Відмітимо, що проблеми викладання цієї дисципліни мають свою специфіку при роботі з іноземними студентами. Певні особливості має також викладання дисципліни англійською мовою.

Дослідження з методики викладання математичних дисциплін іноземним та українським студентам у рамках Проекту англомовної освіти НАУ проводиться починаючи з 2007 року. Деякі особливості викладання окремих розділів аналітичної геометрії іноземним та українським студентам розглядалися в рамках дослідження з методики викладання англійською мовою математичних дисциплін студентам НАУ (див. Карупу, Олешко, Пахненко (2011; 2012; 2013; 2015; 2016).

Дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» складається із двох модулів: «Елементи лінійної та векторної алгебри» та «Елементи аналітичної геометрії».

Розглянемо основні, на наш погляд, проблеми, що постають при викладанні студентам англомовних груп питань, що відносяться до аналітичної геометрії.

Відмітимо певну відмінність у підходах до оцінки значущості різних тем та їх взаємозв'язків, що практикувалися при навчанні українських та іноземних студентів у середній школі. Оскільки в англомовних групах навчаються як українські, так і іноземні студенти, то врахування специфічності їхньої теоретичної і практичної підготовки викладачем є досить важливим. Особливо важливим урахування цих відмінностей є при проведенні практичних занять, оскільки саме в процесі розв'язування задач вони проявляються найсильніше .

Значна частина проблем, що постають при викладанні дисципліни аналітичної геометрії та відповідного розділу дисципліни «Вища математика», пов'язана з саме з достатньо поверховим рівнем сприйняття більшістю студентів технічних вишів (як українських, так і іноземних) абстрактних питань лінійної алгебри і недостатнім розумінням ними важливості володіння теоретичним матеріалом, без якого є неможливим його застосування до самостійного розв'язування змістовних задач.

Відмітимо також, що значна частина проблем, що постають при викладанні аналітичної геометрії та відповідного розділу дисципліни «Вища математика», пов'язана з недостатнім рівнем шкільної підготовки іноземних студентів саме з геометрії, особливо стереометрії.

Зауважимо при цьому, що значна частина цих студентів намагається розв'язувати геометричні задачі чисто аналітично, використовуючи якісь часто неправильні аналогії з задачами з цілком відмінною геометричною інтерпретацією.

Відносно непоганим є засвоєння мікромодулів «Пряма на площині» та «Площина і пряма у просторі». При цьому мікромодуль «Пряма на площині» засвоюється іноземними студентами набагато краще. Складнішим для них є засвоєння мікромодуля «Площина і пряма у просторі», що є наслідком поганого просторового мислення значної їх частини. Більшість як українських, так і іноземних студентів дуже добре сприймають опорні матеріали, які крім рівнянь і рисунків містять також і словесні описання ознак канонічних рівнянь відповідних геометричних об'єктів. Особливо хороші результати дає використання таких матеріалів при роботі саме з іноземними студентами.

Відмітимо, що засвоєння мікромодуля «Криві другого порядку» є також порівняно непоганим, хоча деякі труднощі виникають у певної частини іноземних студентів при знаходженні характеристик еліпса і гіперболи у випадках, коли фокуси кривої розташовані не на осі абсцис, а на осі ординат. Задачі, в яких задіяні параболи з різними варіантами розташування фокуса на координатних осях, для більшості іноземних студентів не викликають труднощів у випадках, коли вершина параболи розміщена в початку координат або принаймні на тій же осі, що і фокус. Задачі останнього типу іноді вимагають додаткового пояснення викладачем. Зауважимо, що задачі, в яких вершина параболи розміщена не на координатних осях, як правило також вимагають пояснення, супроводжуваного розв'язуванням прикладу викладачем або сильним студентом. Ця процедура на наш погляд є корисною також і для частини українських студентів. Відмітимо, що оскільки більшість іноземних студентів досить вправно вміють виділяти повний квадрат, то після показового розв'язування еталонного прикладу вони в цілому повністю засвоюють цей матеріал. Тому практично всі студенти англомовних груп як правило здобувають навички розв'язування задач, у яких потрібно здійснювати паралельне перенесення координатних осей, знаходити всі характеристики кривих другого порядку і будувати ці криві.

Набагато складнішими для іноземних студентів є засвоєння мікромодуля «Поверхні другого порядку». При цьому основним чинником такої ситуації є погане просторове мислення, характерне для багатьох іноземних студентів. Для справедливості зауважимо, що засвоєння цього матеріалу є складним і для значної частини українських студентів технічних спеціальностей не тільки і не стільки внаслідок недостатніх технічних навичок алгебраїчних перетворень, а й унаслідок недостатності просторової уяви. Під час роботи в таких групах бажано достатню увагу приділяти виробленню навичок розпізнавання основних форм канонічних рівнянь поверхонь другого порядку. Відмітимо при цьому, що при чіткому викладі викладачем алгоритму розпізнавання найпростіших їх типів значна частина іноземних студентів достатньо добре засвоює і застосовує ці навички. Особливо хороші результати дає використання різноманітних опорних конспектів. Зауважимо ще раз, що наявність опорних матеріалів, які крім рівнянь і рисунків містять також і словесні описання ознак канонічних рівнянь відповідних геометричних об'єктів, для переважної більшості іноземних студентів при вивченні цієї теми є критично необхідними.

Особливо важкими для вивчення іноземними студентами (на жаль, і українськими також) є мікромодуль «Дослідження алгебраїчних рівнянь кривих другого порядку» і, особливо, мікромодуль «Дослідження алгебраїчних рівнянь поверхонь другого порядку». Українські студенти, особливо ті, що навчалися в середній школі в класах з поглибленим вивченням математики, показують дещо кращі результати.

Слід відмітити також більшу готовність іноземних студентів порівняно з українськими студентами використовувати системи комп'ютерної математики і певний рівень навичок застосування цих систем. Тому для хоча б часткової компенсації недоліків загальної математичної підготовки цих студентів ми рекомендуємо їм активне використання символьного ядра однієї з систем комп'ютерної математики.

Список літератури

Denisiuk, V. P., Grishina, L. I., Karupu, O. V., Oleshko, T. A., Pakhnenko, V. V., & Repeta, V. K. (2006). *Higher mathematics* (Part 1): Manual. Kyiv: NAU.

Grebeniuk, M. F., & Karupu, O. W. (2004). Bilinear and quadratic forms in geometry. Manual. Kyiv: NAU.

Денисюк, В. П., Гребенюк, М. Ф., Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Репета, В. К. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник*. Київ: НАУ (прийнято до друку).

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Пахненко, В. В. (2011). Про деякі особливості викладання математичних дисциплін англомовним студентам. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки, вип. 83*, 76—79.

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Пахненко, В. В. (2012). Деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, *2* (2), 11—14.

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Пахненко, В. В. (2013). Про деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам за кредитно-модульною системою. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки, 2013* (8 (261)), 52—57.

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Пахненко, В. В. (2015). Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії англомовним студентам в Національному авіаційному університеті. У кн. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*ПЛЮС-2015»: Матеріали ІІ Міжнародної науково-методичної конференції, 3—4 грудня 2015 року, м. Суми. Ч.2.*, (с. 45—46). Суми: ВВП «Мрія».

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., Пахненко, В. В. (2016). Про деякі методичні аспекти викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії в Національному авіаційному університеті. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*. *4* (38), Issue 77, 29–32.

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

О. Б. Качаєнко

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

kachayenko@ukr.net

Вивчаючи лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, взагалі не приділяють увагу розв'язуванню лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з функціональними коефіцієнтами. Після формулювання теореми про структуру розв'язків лінійного однорідного та лінійного неоднорідного диференціальних рівнянь переходять відразу до розв'язування лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Але корисно продемонструвати, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку з функціональними коефіцієнтами інтегрується у квадратурах. Для цього варто розглянути певні задачі.

Задача. Знизити порядок і знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

якщо відомий частинний його розв'язок $y_1 = y_1(x)$.

Розв'язання. Зробимо заміну $y = y_1(x)z$, де функція $z = z(x)$ невідома. Тоді

$$y' = y_1'z + y_1z', \;\; y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''.$$

Підставивши це в початкове рівняння, після простих перетворень отримаємо

$$y_1z'' + \left(2y_1' + a_1(x)y_1\right)z' = 0.$$

Це рівняння не містить шуканої функції. Отже, поклавши $z' = p(x)$, знизимо порядок диференціального рівняння на одиницю, тобто отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Справді, якщо $z' = p$, то $z'' = p'$ ($z'' = \dfrac{dp}{dx}$), і останнє рівняння набуває вигляду

$$p' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1(x)\right)p = 0.$$

Знайдемо його розв'язок. Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо

$$p = Ce^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1} + a_1(x)\right)dx}.$$

Але $p = \dfrac{dz}{dx}$, тому $z = C\int e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1} + a_1(x)\right)dx}dx + C_1$.

Далі отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння у вигляді

$$y = y_1(x)z = Cy_1(x)\int e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+a_1(x)\right)dx}dx + C_1y_1(x),$$

де

$$y_2(x) = y_1(x)\int e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+a_1(x)\right)dx}dx$$

— другий частинний розв'язок рівняння.

Отримання загального розв'язку рівняння можна винести на самостійну роботу.

Загальний розв'язок рівняння також можна отримати, використовуючи відому формулу Ліувілля — Остроградського для відшукання другого частинного розв'язку, якщо відомий один його частинний розв'язок $y = y_1(x)$, тобто

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx, \tag{1}$$

тоді

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \text{ і } y = C_1y_1 + C_2y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$$

Розглянемо приклад: відомо, що при $x \neq 0$ функція $y_1 = x$ є частинним розв'язком рівняння

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = 0.$$

Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

Розв'язання. Зробимо заміну

$$y = y_1(x)z = xz, \text{ тоді } y' = z + xz', \; y'' = 2z' + xz''.$$

Підставляємо в рівняння, отримаємо

$$x^2(2z'y + xz'') + 3x(z' + xz') - 3xz = 0,$$

або після простих перетворень

$$xz'' + 5z' = 0.$$

Зробимо заміну $z' = p(x)$, тоді $z'' = p'(x)$ та отримаємо

$$xp' + 5p = 0 \text{ або } p' + \frac{5}{x}p = 0.$$

Знайдемо його розв'язок. Інтегруючи рівняння, отримаємо $p = \dfrac{C}{x^5}$.

Звідси

$$z = C\int\frac{dx}{x^5} + C_1 = \frac{-C}{4x^4} + C_1.$$

Отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$y = xz = x\left(C_1 - \frac{C}{4x^4}\right) = C_1 x + C_2\frac{1}{x^3},$$

де $C_2 = \frac{-C}{4}$. З іншого боку, використовуючи формулу (1) для рівняння

$$y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0,$$

де $a_1\left(x\right) = \frac{3}{x}$, отримаємо

$$y_2\left(x\right) = x\int\frac{e^{-\int\frac{3}{x}dx}}{x^2}dx = x\int\frac{e^{-3\ln\left|x\right|}}{x^2}dx = x\int\frac{1}{x^5}dx = \frac{-1}{4x^3}.$$

Тоді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + C_2\left(-\frac{1}{4x^3}\right) = C_1 x + C_3\frac{1}{x^3}.$$

Якщо лінійне рівняння є рівнянням другого порядку і нам відомий один його частинний розв'язок, то для відшукання загального розв'язку краще скористатися формулою Абеля (Гудименко, Павлюк, Волкова, 1972, с. 84; Івасишен, Лавренчук, Настасієв, Дрінь, 2010).

$$y = y_1\left(x\right)\left(\int\frac{Ce^{-\int a_1\left(x\right)dx}}{y_1^2\left(x\right)}dx + C_1\right)$$

Для лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку з функціональними коефіцієнтами

$$y'' + a_1\left(x\right)y' + a_2\left(x\right)y = f\left(x\right)$$

загальний розв'язок знаходимо, використовуючи метод Лагранжа. Отримаємо

$$y = C\left(x\right)y_1\left(x\right)\int e^{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1} + a_1\left(x\right)\right)dx}dx + C_1\left(x\right)y_1\left(x\right)$$

або

$$y = C_1\left(x\right)y_1\left(x\right) + C_2\left(x\right)y_1\left(x\right)\int\frac{e^{-\int a_1\left(x\right)dx}}{y_1^2\left(x\right)}dx.$$

Невідомі функції $C_1\left(x\right)$, $C_2\left(x\right)$ знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1'\left(x\right)y_1\left(x\right) + C_2'\left(x\right)y_2\left(x\right) = 0, \\ C_1'\left(x\right)y_1'\left(x\right) + C'\left(x\right)y_2'\left(x\right) = f\left(x\right). \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему методом Крамера, отримаємо

$$\begin{cases} C_1(x) = -y_2(x)\int \dfrac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + C_1, \\ C_2(x) = y_1(x)\int \dfrac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + C_2, \end{cases}$$

де

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

— визначник Вронського.

При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з функціональними коефіцієнтами, якщо не вказаний один частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння, тоді підбираємо цей частинний розв'язок і загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння знаходимо за формулою Абеля. При знаходженні загального розв'язку неоднорідного рівняння використовуємо метод Лагранжа (метод варіації сталих) або підбираємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння і використовуємо теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (Івасишен та ін., 2010). Такі задачі можна розглядати на практичному занятті, а також запропонувати в розрахунковій роботі або в домашній контрольній роботі.

Список літератури

Гудименко, Ф. С., Павлюк, І. А., Волкова, В. О. (1972). *Збірник задач з диференціальних рівнянь*. Київ: Вища школа.

Івасишен, С. Д., Лавренчук, В. П., Настасієв, П. П., Дрінь, І. І. (2010). *Диференціальні рівняння: методи та застосування*. Чернівці: ЧНУ.

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ НА ТЕРИТОРІЇ УКРАЇНИ В XIX СТОЛІТТІ ТА РОЛЬ «ЖУРНАЛУ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ» В ПОПУЛЯРИЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ

Т. С. Клецька, Т. В. Крижановська

Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна

tsk9@mail.ru

Наприкінці XIX століття розвиток природничих наук та технологій на теренах Російської імперії почав набирати такої швидкості, якої вітчизняні науковці раніше не могли й уявити. Це в свою чергу вимагало відповідного вдосконалення математичного апарату.

Бурхливе наукове життя в ті часи було зосереджено в першу чергу в університетах, які були не тільки освітніми, а й науковими центрами. Російська імперія була розділена на навчальні округи, три з яких — Харківський, Київський та Одеський розміщувались на території України, кожен з округів містив один університет. Університети були центрами місцевого управління навчальними закладами відповідного учбового округу. Важливу роль відігравали також різного роду природничо-наукові товариства, які також були тісно пов'язані з крупними університетами. Слід зазначити, що зміст лекцій повністю визначався професорами, які їх читали. Саме тому з приходом нових викладачів курси лекцій суттєво змінювались.

Одним з наслідків цієї ситуації стало те, що шкільна математична освіта почала суттєво відставати від того рівня, який був необхідний для вступу в університет. Це було пов'язано як з недостатністю фінансування, так і з відсутністю необхідних кадрів. Ця проблема встала настільки гостро, що стала постійною темою обговорення наукової спільноти. Члени Київського фізико-математичного товариства, наприклад, безкоштовно читали лекції на спеціальних загальноосвітніх курсах. Писали та перекладали деякі іноземні підручники. Але на відміну від університетів, шкільні підручники мали пройти довгий шлях погодження. Математика в гімназіях викладалася в ті часи за підручниками Осиповського «Курс математики» (університетський підручник, який у гімназіях вивчався у скороченому вигляді) та Фусса «Начальные основания чистой математики» (невелике за обсягом видання відзначалося стислістю та доступністю викладення матеріалу і розроблялося спеціально для гімназій). Удалою спробою популяризації математики було видавництво науково-популярних журналів.

У 1884 році в Києві починає виходити «Журнал елементарної математики», засновником і головним редактором якого був професор Київського Імператорського університету св. Володимира В. П. Єрмаков. Це було перше і єдине на той час в Україні науково-популярне видання з математики, адресоване учням старших класів гімназій, любителям математики та вчителям.

Програма нового журналу вперше була викладена його майбутнім редактором і видавцем в заяві, адресованій Головному управлінню у справах друкарства: «Издание это я предполагаю выпустить по следующей программе:

1. Задачи по всем отделам элементарной математики, предложенные учителями, учениками и редакцией, и наилучшие решения предложенных задач. Задачи, предложенные на письменных экзаменах при испытаниях на зрелость в различных гимназиях.

2. Библиографические сведения о вновь выходящих учебниках и сочинениях по элементарной математике».

Незважаючи на складну економічну й політичну ситуацію того часу видання журналу було узгоджено, не в останню чергу завдяки зусиллям і репутації Єрмакова.

Основна увага приділялася задачам з елементарної математики, а особливо тим розділам, які недостатньо докладно розглядалися у шкільному курсі або взагалі не входили до програми. Наприклад, геометричним задачам на побудову, основам теорії чисел. Також друкувалося багато статей з вищої математики, які могли бути подані мовою елементарної математики. Наприклад, з теорії ймовірностей, аналітичної геометрії та аналізу невизначених рівнянь.

Спочатку редакція не збиралася публікувати матеріали методичного характеру, вважаючи, що «основной педагогический прием состоит в краткости и ясности изложения: поменьше теории и побольше упражнений и задач», однак вже через рік думка редактора змінилася: «Мы желали бы ввести отдел педагогический. Чтобы быть хорошим учителем, недостаточно иметь хорошие учебники и задачники, нужно еще уменье преподавать, что достигается только более или менее продолжительным опытом. Просим опытных педагогов поделиться своими замечаниями с лицами, готовящимися к педагогическому поприщу».

З журналом співпрацювали відомі київські математики того часу — Б. Я. Букрєєв, М. Є. Ващенко-Захарченко, А. Н. Коркін, а також тоді ще молоді Г. Ф. Вороний і Д. А. Граве. На думку В. А. Добровольського, автора книги про В. П. Єрмакова, «журнал... стал самым серьезным и богатым по своему содержанию, самым интересным и популярным по своей форме из всех дореволюционных журналов по элементарной математике».

Окрім теорії та прикладів розв’язаних задач у журналі публікувалися також задачі, розв’язок яких читачам (незалежно від віку) пропонувалося знайти самостійно та надіслати до редакції. Сьогодні це б назвали заочною математичною олімпіадою. Прізвища переможців публікувалися в наступних номерах журналу.

З 1887 року журнал було перейменовано у «Вісник дослідної фізики та елементарної математики». Головним редактором став Е. К. Шпачинський, який працював у редакції під керівництвом Єрмакова від самого початку.

Основними розділами журналу були:

Статті.

Наукова хроніка.

Досліди і прилади.

Завдання. Бібліографія.

У них опубліковані кілька тисяч статей, заміток, завдань, рецензій, авторами яких є більшість вчених і методистів кінця XIX — початку XX століття. Треба зазначити, що журнал ще довго залишався переважно математичним. У першому його номері, наприклад, серед десяти запропонованих задач лише одна була з фізики.

Журнал продовжував виходити щомісяця до 1917 року.

Список літератури

Антонов, О. М. (1957). *История Киевского университета*. Киев: Вища школа.

Боголюбов, А. Н. (1984). *Киевское физико-математическое общество: Из истории математического естествознания*. Киев: Наукова думка.

Боголюбов, А. Н. (отв. ред.) (1979). *Киевские математики-педагоги*. Киев: Вища школа.

Ващенко-Захарченко, М. Е. (1887). Элементарная геометрия в объеме гимназического курса. Киев: Тип. Имп. Ун-та св. Владимира.

Гнеденко, Б. В. (1956). О развитии математики на Украине. *Историко-математические исследования, 9,* 403—426.

Добровольский, В. А. (1981). Василий Петрович Ермаков: 1845—1922. Москва: Наука.

Жмудський, О. З. (1959). *Історія Київського університету*. Київ: Вища школа.

Князев, Е. А. (1993). *Высшее государственное образование в России: история и современность*. Москва: НИИВО.

Лебедев, П. А. (1990). *Антология педагогической мысли России второй половины XIX — начала XX в.* Москва: Педагогика.

Охременко, Д. В. (1973). *Развитие математической культуры в России XIX века и роль «Журнала элементарной математики» и «Вестника опытной физики и элементарной математики» в усовершенствовании научно-педагогической культуры учителей математики России XIX-XX века*: дис. … канд. пед. наук : 13.00.02, Московский областной педагогический институт, Москва.

Чиненный, А. (1999). Университетский преподаватель: XIX век. *Высшее образование в России*, (3), 52—59.

ТЕСТОВИЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІН МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ (НА ПРИКЛАДІ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»)

А. С. Коверзнєва, Т. Б. Гренечко
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв, Україна
nastja-koverzneva@rambler.ru , tetyana.hanenko@yandex.ru

Зменшення годин аудиторних занять та збільшення ролі самостійної роботи при вивченні дисциплін математичного циклу, потребує значного посилення контролю та вдосконалення роботи студентів з метою поліпшення управління процесом навчання. Своєчасний контроль знань дає можливість зосередити увагу студентів на вузлових питаннях. Його результати дозволяють кожному студенту оцінити свої успіхи в оволодінні досліджуваним курсом. Можливість бачити результати своєї праці робить навчальні заняття цікавішими для студентів, активізує аудиторію. Аналіз результатів контролю дає можливість викладачеві корегувати методику проведення лекційних та практичних занять, вибирати форми навчання студентів, що володіють різним рівнем знань, в позааудиторний час (Сніжко, 2011).

Використання для контролю знань студентів фронтального або індивідуального опитування потребує великої затрати часу, та й цим методом контролю зручно перевіряти лише знання теоретичного матеріалу. А оцінювання практичних умінь і навичок студентів на короткочасних контрольних роботах вимагає багато часу для їхньої перевірки. Тому одним з перспективних методів контролю знань, який дає можливість об’єктивно, якісно й досить швидко оцінити знання студентів, є тестовий метод. Перевагами цього методу є можливість детальної перевірки кожної теми курсу і здійснення оперативної діагностики рівня оволодіння навчальним матеріалом кожним студентом. Економія навчального часу при перевірці знань і оцінці результатів ставить тестування на одне з провідних місць у методах контролю знань студентів (Загвязинский, 2001)

Незважаючи на певні здобутки, проблема діагностування навчальних досягнень майбутніх вчителів математики з дисципліни «Математична статистика» шляхом тестування ще не отримала ґрунтовного вивчення та наукового узагальнення.

На нашу думку при вивченні дисципліни «Математична статистика» найдоцільніше використовувати таку форму тестування, як комп’ютерну.

У порівнянні з традиційними формами контролю комп’ютерне тестування має ряд переваг: об’єктивність оцінки; швидке отримання оцінки і звільнення викладача від трудомісткої роботи з обробки результатів тестування; тестування на комп’ютері цікавіше в порівнянні з традиційними формами опитування, що створює позитивну мотивацію у студентів; можливість здійснювати самоконтроль навчальної діяльності; підвищення ефективності роботи викладацького складу (Аванесов, 1998; Шимкова, 2007).

У структурі контролю знань студентів з математичної статистики можна використовувати такі види комп’ютерного тестування студентів: вхідне тестування навчальної дисципліни (перед початком вивчення теми) та поточне тестування навчальної дисципліни. Важливу роль відіграють тести для самоконтролю та самоперевірки студентів. Кожен з означених видів тестування має форму тесту, який надається кожному студенту програмними та технічними засобами комп’ютерної техніки. Кожен тест складається з певного переліку тестових завдань. Кількісний склад тестових завдань у тесті, їх зміст та критерії, відповідно до яких здійснюється оцінювання результатів тестування, визначаються робочою програмою навчальної дисципліни (Кожевникова, 2015).

При складанні тестів з математичної статистики можна використовувати завдання відкритої (студенти друкують відповідь на тестове завдання) та закритої форм (студенти обирають варіант відповіді на тестове завдання) таких типів:

— правильно — неправильно (закрита форма);
— вибір з множини (закрита форма);
— вибір відповідності (закрита форма);
— встановлення послідовності (закрита форма);
— коротка текстова відповідь (відкрита форма);
— коротка числова відповідь (відкрита форма);
— заповнення пропусків в істинному твердженні (відкрита форма).

З одного і того ж навчального матеріалу тести можуть бути різного ступеня складності, що розширює можливості викладача у реалізації диференційного підходу у навчанні, а студенту дозволяє проявити себе на рівні своїх можливостей (Челышкова, 2003).

Використання тестового контролю знань при підготовці фахівців з різних спеціальностей дозволяє викладачам розробляти ефективні моделі оцінювання досягнень студентів з максимальним урахуванням сучасних підходів, специфіки, цілей і завдань вивчення математичних дисциплін і, з огляду на існуючі тенденції, робить перспективним комп’ютеризацію тестового контролю.

Можна зробити висновок, що систематичне застосування якісних тестів у процесі навчання математичній статистиці допоможе організувати більш ефективний контроль знань студентів, оперативно виявляти загальні тенденції у якості засвоєння дисципліни та приймати відповідні управлінські рішення. Однак, на нашу думку, у зв’язку з вгадуванням правильних відповідей та для досягнення кращих результатів навчання, доцільно поєднувати тестові форми контролю знань із традиційними. Систематичне проведення контрольних заходів за допомогою складених на вищому рівні інструментів контролю дозволяє вищим навчальним закладам формувати висококваліфікованих фахівців у різних галузях знань, готових застосовувати накопичений багаж знань у будь-яку хвилину.

Список літератури

Аванесов, В. С. (1998). *Композиция тестовых заданий*. (2-е изд., испр. и доп.). Москва: Адепт.

Загвязинский, В. И. (2001). *Теория обучения: современная интерпретация.* Москва: Академия.

Кожевникова, А. В. (2015). Комп'ютеризовані адаптивні тести як інноваційна форма підготовки майбутніх учителів під час дистанційного навчання. *Збірник наукових праць «Педагогіка та психологія», 51,* 50—57.

Сніжко, М. В. (2011). Методична система організації алгоритмічного тестування в процесі підготовки майбутніх вчителів математики. *Автореф. дис... канд. пед наук: 13.00.04,* Херсонський держ. ун-т. Херсон: б. в.

Челышкова, М. Б. (2003). *Теория и практика конструирования педагогических тестов*. Москва: Информационно-издательский дом «Филинг».

Шимкова, І. В. (2007). Використання автоматизованого тестового контролю знань для організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів. *Педагогічні науки: зб. наук. праць.–Херсон: Видавництво ХДУ,* 407—410.

НАЦІОНАЛЬНО-ПАТРІОТИЧНЕ ВИХОВАННЯ ЯК НЕВІД'ЄМНИЙ СКЛАДНИК ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ТА ВИЩІЙ ШКОЛІ (З ДОСВІДУ РОБОТИ)

В. В. Кошманюк

Гімназія № 14 імені Василя Сухомлинського», Луцьк, Україна

gimn14@lt.ukrtel.net, kalish_nm@i.ua

Мій скарб — це знайдені в народі таланти.
Помітити їх, не дати зів'яти — хіба це не
честь для патріота?
М. П. Кравчук

Сьогоднішній час вирізняється швидкозмінною динамікою життя, наявністю непередбачених складних життєвих ситуацій, навіть трагічних подій, які забирають сотні життів людей.

Але життя продовжується…

У такій атмосфері росте гімназист, нове покоління української держави, людина як найвища цінність.

Тому головною тенденцією виховання стає формування системи ціннісного ставлення особистості до соціального і природного довкілля та самої себе. Ми маємо допомогти учням реалізувати творчі можливості, вплинути на їхнє морально-духовне і фізичне здоров'я.

Україна має підстави пишатися своїми науковими школами, своїми визначними математиками й фізиками, імена яких увійшли до когорти визначних діячів світу. Проте часто українці мало обізнані з ними. Як імена, так і досягнення українських учених виявляються більш знаними за межами України. Тому актуальними є зусилля вчителів математики, спрямовані на те, щоб імена наших видатних співвітчизників стали широко відомими і в Україні. Навіть для шкільних підручників останніх років характерно наведення окремих відомостей з історії математики, інформації про видатних математиків, зокрема українських, цікавих висловлень учених. Проте цього замало, щоб по-справжньому захопити учнів. Не слід розраховувати тільки на те, що вони дадуть учням поштовх до самостійного ознайомлення і пошуку додаткової інформації. У той же час в самому процесі навчання математики відомості з історії науки використовуються епізодично і безсистемно.

На мій погляд, одним з головних важелів є створення умов для організації активної позаурочної пошуково-дослідницької діяльності учнів щодо ознайомлення з життям та досягненнями українських математиків, висвітлення соціальної науково-фундаментальної та науково-прикладної ролі математики та її популяризації.

Формування в учнів ціннісного ставлення до суспільства, держави та до самої себе, відчуття своєї належності до України, усвідомлення єдності власної долі з долею своєї країни, активної за формою та моральної за змістом життєвої позиції є головною домінантою національно-патріотичного виховання учнів у процесі шкільного навчання, у тому числі, навчання математики.

Виховання у школярів почуття патріотизму слід здійснювати на уроках математики, віддаючи перевагу окремим аспектам цієї роботи відповідно до вікових особливостей учнів.

Зокрема, у 5—6 класах пріоритет вихованню в учнів любові до України, її природи, рідного дому, школи, рідної мови, шляхом складання самими учнями і розв'язування задач, в яких мова йде про Волинь, Україну. Це задачі, що містять історичні дані; відомості про тваринний та рослинний світ регіону, в якому проживають школярі тощо. Під час розв'язування задач доречно пропонувати учням коментувати виконання дій. Це сприятиме розвиткові усного мовлення, формуванню у школярів вмінь правильно і грамотно висловлювати свої думки українською мовою.

У 7—9 класах можливо розширити знання учнів про культуру країнського народу.

У процесі навчання слід звертати увагу учнів на прізвища українських математиків, на їхній внесок у розвиток математичної науки. Це насамперед М. П. Кравчук, М. О. Зарицький, М. А. Чайковський, В. Й. Левицький, Г. Ф. Вороний, М. В. Остроградська та інші.

Широкі можливості щодо виховання почуття патріотизму створюються при проведенні тематичних позакласних заходів, присвячених українським математикам: математичні вечори, вікторини, конференції, диспути, дискусії чи змагання тощо. На таких заходах можна розповісти учням про життя, діяльність та здобутки видатних українців, запропонувати розв'язати кілька задач, складених ними.

У 10—11 класах серед основних виховних завдань є прищеплення любові до Батьківщини, відданості своєму народу, гордості за його культурні надбання, вболівання за його долю.

Учнів основної та старшої школи варто також залучати до проектної діяльності, пов'язаної з вивченням діяльності відомих українських математиків.

Математика в житті людини посідає особливе місце. Ми настільки з'єдналися з нею, що навіть не помічаємо її.

Як українці у своєму побуті використовували математику, залишається для нас ще не зовсім дослідженою загадкою. Тому доцільно старшокласникам ознайомитися з математичною культурою українського народу, розглянути стародавні задачі прикладного характеру, народні міри, різні способи усних обчислень, старовинне математичне письмо, математичні жарти та розваги.

Під час навчання у виші, на роботі чи вдома потрібно постійно розв'язувати задачі, і не тільки математичні. Яка ймовірність успішного складання іспиту? Скільки коштів потрібно заробити, щоб купити квартиру? Скільки можна отримувати, якщо займатися математикою і розв'язуванням математичних задач? Яким повинен бути об'єм вашого дому і скільки для цього потрібно цегли? Як правильно розрахувати, щоб народилась дівчинка чи хлопчик? І тут допоможе математика. Вона крокує скрізь за людиною, допомагає їй розв'язувати задачі, робить життя набагато зручнішим.

Швидко змінюється світ і саме життя. З'являються нові технології. Тільки математика і розв'язування задач у традиційному розумінні не змінює себе. Математичні закони перевірені і систематизовані, тому людина у складних ситуаціях може покластися на неї. Математика не підведе.

Навчання — важливий засіб формування духовності особистості, який не лише розвиває розумові здібності, а й виховує. Тому часто розпочинаю уроки епіграфами, продумую девізи та використовую вислови видатних людей.

Грецький учений Арістотель писав: «Добробут держави залежить від її законів». Основний Закон нашої держави — Конституція — документ, який фіксує державний устрій України, визначає її завдання і цілі, внутрішню і зовнішню політику, права й обов'язки громадян.

У Конституції України відображено принципово нову демократичну позицію щодо захисту прав і свобод людини та громадянина. Головне завдання, яке поставлене перед суспільством і учителями — навчитись і дітей навчити жити за Конституцією.

Нове кримінально-процесуальне законодавство передбачає розгляд справ неповнолітніх, з одинадцяти років спеціальними судами у справах неповнолітніх. Правова відповідальність особи за скоєне правопорушення настає і тоді, коли вона не знала, що допущений вчинок виходить за межі моральності і є правопорушенням чи злочином. Діти не знають основні свої права та обов'язки, основні правові поняття. Тому звертаю увагу учнів на значущість правового аспекту Основного Закону держави, розуміння прав та обов'язків людини, громадянина.

Україна — правова держава, на території якої кожна дитина має всі права, записані у Конвенції прав дитини. Учням я пропоную вдома після ознайомлення з Конвенцією про права дитини написати творчу роботу «Права дитини».

Морально-правові знання, одержані школярами на уроках і в позаурочний час, у поєднанні з їхніми власними спостереженнями, практичне дотримання дисципліни і порядку в класі та за його межами, збереження навколишнього середовища відіграють важливу роль у їхньому світоглядному, моральному і правовому вихованні, у формуванні їхньої правової культури.

Виховна робота, мета якої — забезпечити єдність навчання і розумового розвитку, починається з вивчення розвитку дитини.

Кожна дитина вимагає нестандартних підходів до їх навчання і виховання, диференціації та індивідуалізації роботи з ними. Виникла проблема як організувати позакласну і позагімназійну роботу з математики, фізики та інформатики, щоб самі гімназисти брали участь у творенні того, що хочуть. Такий підхід дуже важливий для виявлення і розвитку індивідуальних особливостей творчої особистості. А тому результати роботи ми пов'язуємо з критеріями творчо розвинутої особистості: критичність мислення, наявність нахилу до доведення, аргументованості висновків, чутливість і певне сприйняття до інформації, інтелектуальних і життєвих задач, абстрагування, інтелектуальна ініціатива, творча уява тощо. Але не можна було б говорити сьогодні про результативність роботи вчителів з дітьми, якби вся позакласна й позагімназійна робота тісно не пов'язувалася і не входила б у систему роботи гімназії на формування національного світогляду та самосвідомості учнів, батьків та вчителів.

Ми живемо в час відродження самобутньої культури українського народу, ми все частіше гортаємо сторінки своєї історії, яка сягає в сиву давнину і знаходимо там дорогоцінні джерела його великої мудрості. Пошуки в педагогіці - це не лише нові ідеї, методи, прийоми, а й традиційні, давно випробувані з елементами новизни й творчості.

Якщо і перші й другі застосувати в комплексі, то все це разом і створює ті прогресивні засади, які дають змогу ефективно вирішувати завдання розвитку молодої особистості. А тому позакласна робота — різні тижні, вечори, творчі вітальні, родинні свята, зустрічі, екскурсії, гуртки, важливий етап розумового розвитку дитини.

Дослідження, експерименти, наукові роботи відділів МАН, Палацу учнівської молоді, гуртки технічної творчості, секції дають можливість розвитку особистості. Учні в цих гуртках цікавляться питаннями, що далеко виходять за межі елементарних знань, являють собою матеріали з досягнень науки.

Інтелектуальне заглиблення учня в певну галузь науки сприяє тому, що з відповідного предмета він знає значно більше, ніж вимагає шкільна програма. А чим більше це заглиблення, тим ширше коло інтелектуальних інтересів учня. Більше того, таке випередження програми — з певної галузі знань окремими учнями — необхідна умова багатого розумового життя колективу і умова розвитку задатків кожної особистості. Розумний, розвинений учень завжди з одного чи кількох предметів випереджає програму. Глибокі ґрунтовні знання з усіх предметів у поєднанні з розвитком особливого інтересу до одного предмета, до однієї галузі знань — у цьому важлива умова всебічного розвитку людини.

Залежно від індивідуальних задатків, здібностей і нахилів учні одного і того самого віку, класу можуть оволодіти не одним і тим самим обсягом знань з даного предмета. Для тих у кого немає нахилу до теоретичного мислення і практичної діяльності, пов'язаних з даною наукою, внаслідок чого вони із значними труднощами оволодівають матеріалом,— навчальна програма з даного предмета — максимум. А для тих, хто без труднощів оволодіває теоретичними питаннями, що виходять за межі програми, виявляє нахил до теоретичного мислення, до розумової праці, в якій є елементи наукового дослідження, вчитель визначає ширше коло знань. Правильно визначити сили, здібності, задатки, нахили кожної дитини, визначити, на що вона здатна,— одне з важливих завдань навчально-виховного процесу.

Особистість, яка багато знає — можна назвати інтелектуальною, а от розумною скоріше ту, яка вміє мислити, продукувати ідеї.

Власне такі люди є національним багатством кожної держави.

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

О. І. Кушлик-Дивульська
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
olkuda@yandex.ua

Мета лабораторного практикуму полягає в закріпленні знань, одержаних студентами під час вивчення дисципліни «Теорія ймовірності і математична статистика», їх застосуванні для розв'язування конкретних практичних завдань з використанням теоретичних знань та можливостей пакету Microsoft Excel. Виконання лабораторних робіт сприяє формуванню самостійності у аналізі проведених обчислень, дослідженні реальних практичних задач, які є необхідною складовою підвищення технічного та економічного рівня підготовки студента. Зміст і структура лабораторних робіт відображають новітні тенденції в питаннях навчання та підготовки кваліфікованих спеціалістів.

Лабораторні роботи виконуються в 3-му семестрі стаціонарної форми навчання за програмою напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр спеціальності 7.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» згідно до навчальної та робочої навчальної програми дисципліни «Теорія ймовірності і математична статистика», яка передбачає 18 годин лекційного матеріалу, 18 годин практичних занять та 18 годин лабораторних робіт.

Лабораторні роботи дисципліни містять короткі теоретичні відомості: основні формули, теореми, також приклади розв'язування типових задач, перелік основних теоретичних питань вказаної теми. Сформовані індивідуальні завдання кожної теми студенти виконують при підготовці до заняття. Протокол виконаної лабораторної роботи оформлюється у вигляді сторінок формату А4 та електронного файлу.

Типова структура виконаної практичної роботи містить:

— титульний аркуш;

— основна частина (короткі теоретичні відомості та розв'язані задачі);

— додатки: виконані задачі за допомогою пакету Microsoft Excel із описанням.

Пропонується такий перелік лабораторних робіт (Кушлик-Дивульська, Кушлик 2015):

1. Елементи комбінаторики. Класичне означення ймовірностей. Основні теореми ймовірностей.
2. Послідовні незалежні випробування. Формула Бернуллі.
3. Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин.
4. Закони розподілу та числові характеристики неперервних випадкових величин.

5. Вибірка, її характеристики. Точкові оцінки числових характеристик випадкових величин. Побудова надійних інтервалів.

6. Обчислення коефіцієнта кореляції та перевірка його статистичної значущості. Побудова ліній регресії.

7. Перевірка законів розподілу випадкових величин: розподіл з рівномірною щільністю та розподіл Пуассона.

8. Статистична перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу.

Для виконання лабораторних робіт 6, 7, 8 наведено реальні експериментальні дані вимірювань на одному із поліграфічних виробництв у вигляді додатку, де ΔE — колірні відмінності виміряного кольору від еталонного значення, D — оптична густина фарби, 80, 40 — розтискування растрової точки $(80 + k$, вказано $k)$ при стабільній подачі фарби та зволожувального розчину і при коригуванні подачі фарби автоматизованою системою контролю параметрів відбитка. Для лабораторної роботи 6 — визначити силу зв'язку між обраними факторами та порівняти їх, для робіт 7, 8 — висунути гіпотезу про підлягання даних обраному закону розподілу та перевірити її. Як приклад, наведено дані вимірювань з перших трьох текстових накладів, друкування яких здійснювалось на поліграфічному виробництві в різні дні декілька разів по 100 відбитків. Їх використано для перевірки підлягання отриманих значень у вибірках нормальному закону розподілу за критерієм Пірсона, зроблено висновок про те, що дані експериментальних вимірювань підлягають нормальному законові розподілу.

Ознайомлення, опрацювання за темами відповідних лабораторних робіт дає можливість застосовувати алгоритми Excel для практичного використовуваних статистичних задач, які є трудомісткими через значну кількість математичних обчислень. Лабораторні роботи оформлено у вигляді методичних вказівок Кушлик-Дивульська**,** Кушлик (2015), тому розраховані на широку кількість користувачів, які мають доступ до програмного забезпечення і початкові необхідні знання теорії ймовірностей. Методичні вказівки доповнюють навчальний посібник «Теорія ймовірності та математична статистика» (Кушлик-Дивульська та ін., 2014).

Список літератури

Кушлик-Дивульська, О. І., Кушлик Б. Р. (2015). *Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика»*. Київ: НТУУ «КПІ». http://ela.kpi.ua/handle/123456789/14333.

Кушлик-Дивульська, О. І., Поліщук, Н. В., Орел, Б. П., Штабалюк, П. І. (2014). *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Київ: НТУУ «КПІ».

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ MATLAB ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ РОЗВ’ЯЗКУ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Т. В. Лапа, О. М. Мовша, М. А. Синенко
Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів, Україна
mara.a.snnk@gmail.com

MatLab (Matrix Laboratory) — високоефективна система комп’ютерної математики, яка широко використовується при розв’язуванні як наукових, так і інженерних задач. Складні розрахунки, обробка експериментальних даних, їх візуалізація та оптимізація, моделювання експерименту — ось далеко не повний перелік задач, які можуть бути реалізовані в системі MatLab. Основним об’єктом, з яким працює MatLab, є числовий масив (матриця). Це дозволяє суттєво спростити розрахунки і зробити процес програмування доступним навіть для початківців. Тому ми вважаємо, що знайомство з цією системою є доцільним для студентів технічних вишів. Крім того, поєднання вивчення теоретичного матеріалу з комп’ютерним моделюванням сприяє глибшому засвоєнню останнього. У даній роботі ми продемонструємо можливості використання MatLab при розв’язуванні однієї задачі математичної фізики.

Розглянемо хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

де $u(x,t)$ — невідома функція координати x і часу t, a — параметр.

Як відомо, хвильове рівняння описує реальні фізичні процеси, зокрема малі поперечні коливання струни. У цьому випадку функція $u(x,t)$ визначає відхилення струни від положення рівноваги в точці з координатою x у момент часу t, a — швидкість поширення збурення вздовж струни.

Щоб повністю описати коливний процес, крім хвильового рівняння необхідні початкові та граничні умови. Початкові умови характеризують стан струни в початковий момент часу $t = 0$:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x).$$

Граничні умови — стан струни на її кінцях. Будемо розглядати граничні умови першого типу (кінці струни закріплені):

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Тут l — довжина струни. Нехай

$$l = 8 \text{ см}, \ a = 10\frac{см}{с}.$$

Задамо функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0,\ x \in [0;2) \text{ або } x \in (6;8]; \\ 0{,}5 + 0{,}25(x-4),\ x \in [2;4]; \\ 0{,}5 - 0{,}25(x-4),\ x \in [4;6]; \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1); \\ 2, & x \in [1;3]; \\ 0, & x \in (3;8]; \end{cases}$$

Скористаємося методом відокремлення змінних (метод Фур'є). Метод Фур'є детально розглянутий, наприклад, в Арсенин (1974). Нагадаємо основні його етапи. Розв'язок граничної задачі $u(x,t)$ будемо шукати у вигляді:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Після відокремлення змінних отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

де λ — деякий параметр. Розв'язавши задачу Штурма —Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0;$$

знаходимо власні значення (λ_n) та власні функції (X_n):

$$\lambda_n = \frac{(\pi n)^2}{l^2} = q_n^2; \qquad q_n = \frac{\pi n}{l};$$

$$X_n = \sin q_n x, n \in \mathbb{N}.$$

Далі, для кожного власного значення λ_n розв'язуємо відповідне диференціальне рівняння для невідомої функції $T(t)$:

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t, \qquad \omega_n = aq_n;$$

Коефіцієнти A_n, B_n визначаємо з початкових умов:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin q_n x\ dx; \qquad B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l \psi(x)\sin q_n x\, dx;$$

Відмітимо, що коефіцієнти A_n є кофецієнтами Фур'є для функції $\varphi(x)$ за ортогональною системою функцій $\{X_n\}$, а B_n — коефіцієнтами Фур'є для функцій $\psi(x)$ домноженими на $\frac{1}{\omega_n}$. Для даних функцій маємо:

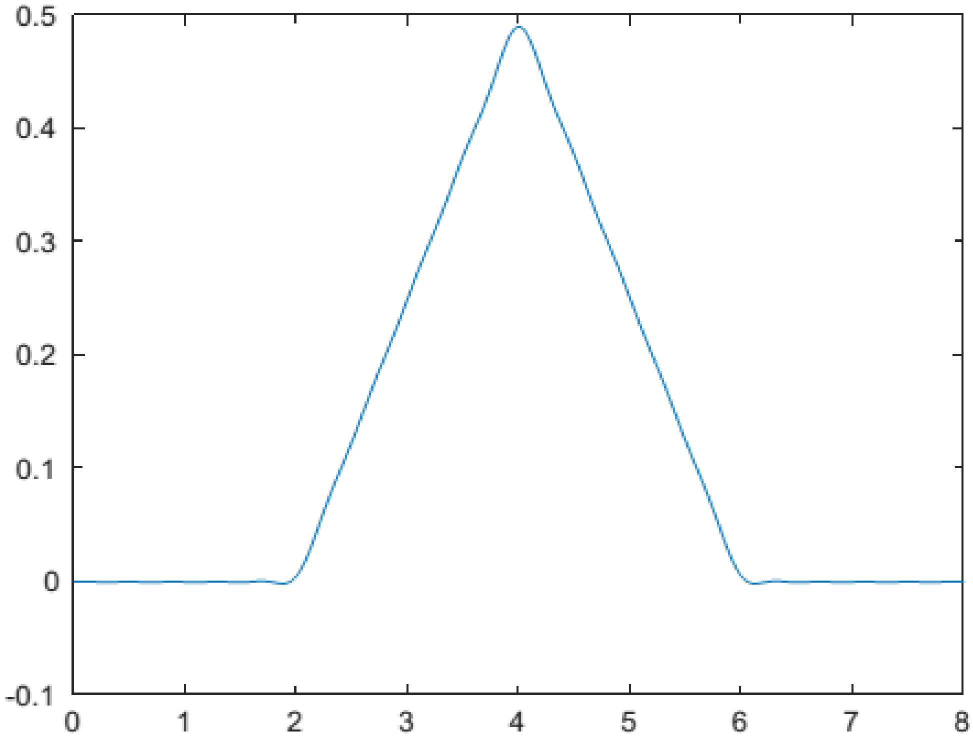
$$A_n = \frac{8}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{4}\right); \quad B_n = \frac{6{,}4}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{8}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Отже,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right)\sin q_n x.$$

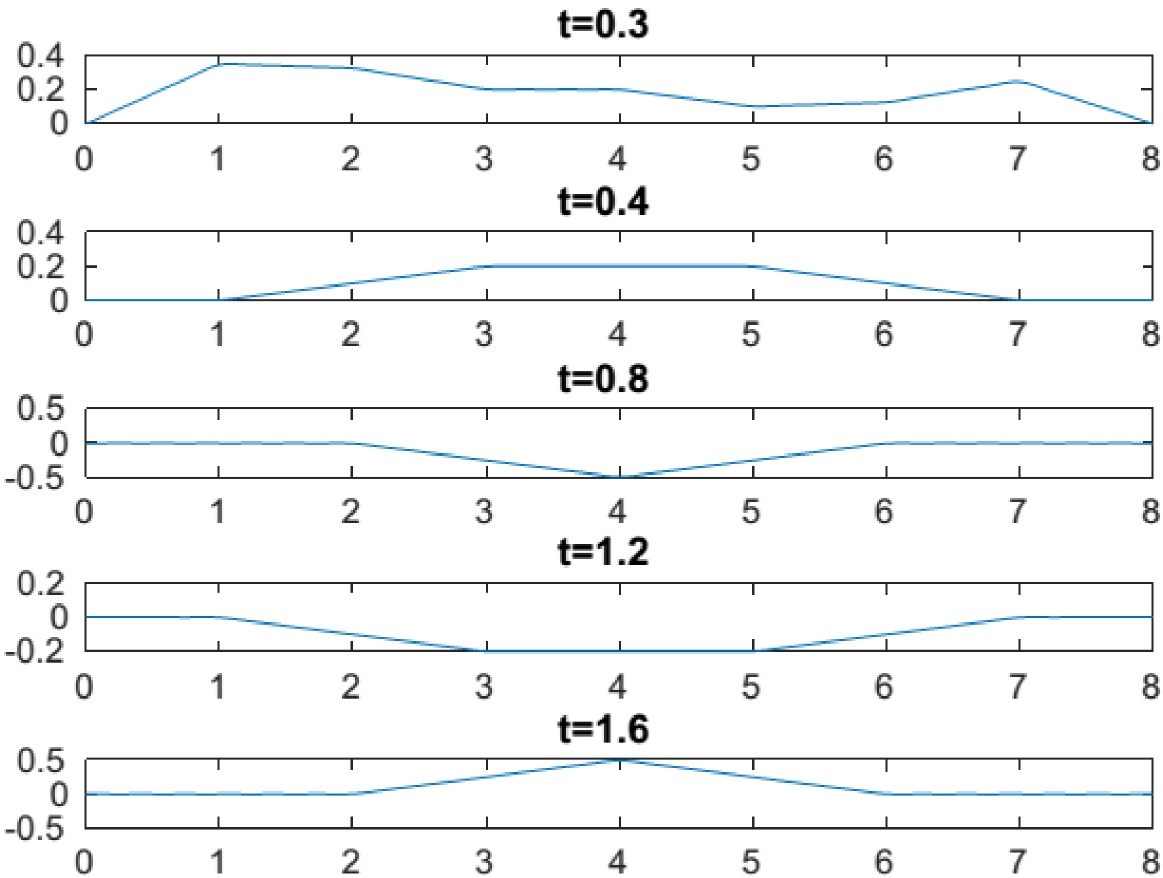
Для демонстрації коливання струни в часі, побудуємо графіки знайденої функції для різних значень t. Скористаємося системою MatLab. Наведемо приклад програми для побудови графіка в початковий момент часу.

```
>>X=[0:0.02:8];
>>t=0;S=0;
>>for k=1:40 q=pi*k/8; a=(8/((pi*k)^2))*sin(pi*k/2)*(1-cos(pi*k/4));
b=(8/(pi*k))*sin(pi*k/8)*sin(pi*k/4);
S=S+(a*cos(10*q*t)+(1/(10*q))*b*sin(10*q*t))*sin(q*X); end;
>>plot(X,S)
```



Положення струни в початковий момент часу $(t=0)$

Змінюючи значення t, можемо отримати еволюцію коливного процесу в часі.



(Час t вимірюється в секундах)

Таким чином, використання системи MatLab дозволяє досить просто візуалізувати отриманий розв'язок хвильового рівняння і спостерігати за розвитком коливного процесу в часі, що, звичайно, сприяє глибшому розумінню відповідного теоретичного матеріалу.

Список літератури

Арсенин, В. Я. (1974) *Методы математической физики и специальные функции*. Москва: Наука.

Дьяконов, В. П. (2008) *MatLab 7: Самоучитель*. Москва: ДМК Пресс.

З ІСТОРІЇ ВИНИКНЕННЯ І РОЗВИТКУ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

О. М. Ленюк, О. М. Нікітіна, Т. М. Пилипюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці,
Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», Чернівці,
Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
Lenyuk_OM@mail.ru, nik_ole4ka@mail.ru, myh@i.ua

Присвячується пам'яті
доктора фізико-математичних наук,
професора, академіка АН ВШ України
Михайла Павловича Ленюка
(30.10. 1936—23.03.2013)

У зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів у техніці, технології, будівництві, радіоелектроніці, зварювальному виробництві тощо при розрахунку на міцність конструктивних елементів машин, а також серед багаточисленних технічних задач, що виникають при конструюванні машин і проектуванні інженерних споруд, виникає необхідність у вивченні в першу чергу температурних полів і напружень як в однорідних об'єктах, так і в тілах, що складаються з декількох матеріалів, які мають різні фізико-механічні характеристики. Важливу роль тут відіграють дослідження кінетики фізичних і хіміко-технологічних процесів, розрахунки елементів на кручення і питання концентрації напружень.

Досить широкий клас задач математичної фізики зводиться до знаходження розв'язку крайових задач для диференціальних рівнянь (систем рівнянь). Одним із ефективних методів розв'язування таких задач є метод інтегральних перетворень (ІП) [1, 23—25]. ІП вважається відомим (заданим), якщо: 1) відома структура прямого інтегрального оператора; 2) відома структура оберненого інтегрального оператора; 3) наявна основна тотожність перетворення диференціального оператора, який породжує ІП; 4) вказана логічна схема застосування до відповідних задач математичної фізики та математичного аналізу.

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба в розв'язанні достатньо широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур. Оскільки тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження, то вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ.

Це вимагає, з одного боку, удосконалення й модифікації існуючого математичного апарату, а, з другого боку, створення нових методів. Зокрема, виникла потреба в побудові таких ІП, які давали б можливість алгебраїзувати лінійні диференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами. Такі ІП були створені в другій половині XX століття. Вони одержали назву — гібридні інтегральні перетворення (ГІП).

Уперше ГІП з'явились в математичній літературі в 70-х роках XX століття в роботах Я.С. Уфлянда та його учнів [2, 3, 6—8, 26—28].

Методика, запропонована в цих роботах, була застосована В.С. Проценком і його учнями для побудови ГІП Фур'є — Лежандра, Лежандра — Фур'є, Фур'є — Ганкеля, Ганкеля — Лежандра [17—22].

Подальший розвиток теорія ГІП знайшла у працях М. П. Ленюка та його учнів [4, 5, 9—16, 29]. Зокрема, при найбільш загальних обмеженнях на структури диференціальних операторів, крайових умов та умов спряження побудовані ГІП типу Фур'є, Фур'є — Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го й 2-го роду, Конторовича — Лєбєдєва, Мелера — Фока, Лежандра тощо з n точками спряження. Наявність основної тотожності інтегрального перетворення відповідного гібридного диференціального оператора дає можливість успішно застосовувати ці перетворення до розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних областях, а також до задач математичного аналізу (обчислення невласних інтегралів та функціональних рядів).

Список літератури

1. Ахиезер, Н. И. (1984). Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков: Вища школа. — 120 с.
2. Белова Н.А. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра / Н. А. Белова, Я. С. Уфлянд // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3, № 8. — С. 1397—1399.
3. Белова Н. А. Об одном разложении в интеграл по сферическим функциям первого и второго рода / Н. А. Белова // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 11. — С. 2006—2010.
4. Быблив О. Я. Интегральные преобразования Ганкеля II рода для кусочно- однородных сегментов / О. Я. Быблив, М. П. Ленюк // Известия вузов. Математика. — 1987. — № 5. — С. 82—85.
5. Быблив О. Я. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно- однородной полярной оси / О. Я. Быблив, М. П. Ленюк // Известия вузов. Математика. — 1987. — № 7. — С. 3—11.
6. Ефимова И. Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям / И. Т. Ефимова // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 3, № 5. — С. 817—822.
7. Ефимова И.Т. Некоторые интегральные преобразования на составном промежутке и их приложение к решению краевых задач для слоистых сред / И. Т. Ефимова // Дис. канд. физ.-мат. наук. — Ленинград, 1972. — 150 с.
8. Ефимова И. Т. Об одном обобщении интегральной теоремы Фурье и ее приложениях / И. Т. Ефимова, Я. С. Уфлянд // Прикл. матем. и механ. — 1969. — Т. 33. — Вып. 5. — С. 941—944.
9. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера — Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
10. Конет І. М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера — Фока на полярній осі з n точками спряження / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Допов. НАН України. — 2006. — № 9. — С. 22—27.

11. Конет І. М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера — Фока на полярній осі 0 r R ³ > 0 з n точками спряження / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Матем. Студії. — 2006. — Т. 25, № 2. — С. 169—180.
12. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — Киев, 1983. — 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
13. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье) / М. П. Ленюк. — Киев, 1983. — 56 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.18).
14. Ленюк М. П. Узагальнення інтегралу Фур'є — Бесселя / М.П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. — Київ : Ін-т математики АН України, 1993. — Вип. 2. — Ч. 1. — С. 89—101.
15. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича — Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
16. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
17. Найда Л. С. Гибридные интегральные преобразования типа Ханкеля — Лежандра / Л. С. Найда // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1983. — № 7. — С. 40—42.
18. Найда Л. С. Гибридные интегральные преобразования Ханкеля — Лежандра / Л. С. Найда // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1984. — Вып. 8. — С. 132—135.
19. Проценко В. С. К решению некоторых задач математической физики для составных областей / В. С. Проценко // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1997. — Вып. 1. — С. 56—64. 249
20. Проценко В. С. Обобщенное интегральное преобразование типа Фурье — Лежандра / В. С. Проценко, А. В. Головченко // Мат. методы анализа динам. систем. — Харьков, 1982. — Вып. 6. — С. 26—28.
21. Проценко В. С. Гибридные интегральные преобразования Фурье — Ханкеля и некоторые задачи кручения кусочно-однородных тел / В. С. Проценко, Т. Т. Кащавец // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. — Харьков, 1978. — Вып. 1. — С. 120—124.
22. Проценко В. С. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред / В. С. Проценко, А. И. Соловьев // Прикладная математика. — 1982. — Т. XIII, № 1. — С. 62—67.
23. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — Москва : ИЛ, 1955. — 668 с.
24. Титчмарш Е. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Ч. Титчмарш. — Москва : Гостехиздат, 1948. — 480 с.
25. Титчмарш Е. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Е. Ч. Титчмарш. — Москва : ИЛ, 1968. — Т. 1. — 668 с.
26. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах упругости / Я. С. Уфлянд. — Ленинград : Наука, 1967. — 402 с.
27. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Ленинград : Наука, 1976. — С. 93—106.
28. Юшкова Е. А. О некоторых сингулярных краевых задачах для уравнения Бесселя и их приложениях в математической физике / Е. А. Юшкова // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 3, № 10. — С. 1403—1407.
29. Яремко О. Э. Матричные гибридные интегральные преобразования / О. Э. Яремко. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1997. — 117 с.

ПРО ІСТОРІЮ ЛОГАРИФМІВ

М. В. Маковський, Т. І. Цюпій
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна
kafedra333@meta.ua

У XVII столітті в Західній Європі математика вже мала достатньо розвинену алгебраїчну символіку, яка дала поштовх розвиткові тригонометрії та значною мірою спростила техніку підрахунків.

Проте, логарифми у математиці увійшли в практику лише наприкінці епохи Відродження в XVII столітті.

У XVI столітті були широко розповсюджені два методи, які дозволяли при підрахунках повною мірою замінити додаванням більш складніші дії множення.

Перший з них називався *простаферетичним* методом (назва походить від грецьких слів «простезис» та «афайрезис» — додавання та віднімання) та ґрунтувався на тригонометричних формулах:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

Другий метод давав змогу перейти від множення до додавання за допомогою алгебраїчної формули:

$$ab = \frac{1}{4}\left[\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2\right]$$

При цьому, другий метод був зручним лише у тому випадку, коли він спирався на вже готові таблиці квадратів чисел. Такі таблиці були опубліковані Антоніо Магіні в 1592 році.

Проте, в XVII столітті вище згадані, досить громіздкі методи математичного обчислення поступово були витіснені новим, ще не відомим нікому на той час методом, що носить назву *логарифмічного методу.*

Винахідниками логарифмів, які згодом склали їх у таблиці для практичного використання та застосування, а також надали їм теоретичне обґрунтування, були: швейцарський годинниковий майстер Бюргі та шотландець Джон Непер.

Проте, слід зауважити, що годинникар Бюргі не був спеціалістом з математики. Оскільки він був годинниковим майстром і механіком, йому досить часто доводилося розбиратися в будові та функціонуванні астрономічних приладів того часу, а іноді й робити астрономічні обчислення, пов’язані з досить клопіткими спостереженнями за допомогою цих приладів.

У 1603 році Бюргі обіймав на той час досить престижну посаду. Він був придворним годинникарем у Празі — культурному центрі тих часів, саме там він зустрівся і працював з Йоганном Кеплером.

Маючи справу з громіздкими астрономічними розрахунками, Бюргі розмірковував над цим, і згодом йому спало на думку значне спрощення цих розрахунків та обчислень.

Це спрощення мало неабиякий позитивний результат, що відбився на працях науковців сьогодення: воно дає змогу зберегти велику кількість часу, що є досить важливим у наш час науково-технічного прогресу.

У своїй праці «Арифметичні та геометричні таблиці прогресій» Бюргі склав таблиці, які дозволили в майбутньому обчислювати логарифми.

Основа логарифмів Бюргі відрізняється від числа e тільки, починаючи з четвертого десяткового знаку.

Йоганн Кеплер, який розумів важливість значень таблиць Бюргі для обчислень, наполегливо рекомендував йому опублікувати свій метод, але Бюргі не поспішав.

Так вийшло, що таблиці логарифмів були надруковані від імені іншого автора. Таблиці Бюргі були опубліковані в 1620 році, а на шість років раніше Джон Непер опублікував складені ним таблиці під назвою «Опис неймовірної таблиці логарифмів».

Йост Бюргі (1652—1632)


Джон Непер (1550—1617)

Шотландський барон Джон Непер також не був спеціалістом з математики, він мав свої інтереси в різних галузях знань, причому головним чином він безпосередньо займався тими питаннями, які стосувалися життя.

Він винайшов декілька *сільськогосподарських машин*, а також деякі військові прилади в області математики.

У сфері математики Джон Непер головним чином цікавився питаннями обчислення, шукаючи способи для полегшення підрахунків.

Так, в праці «Рабдологія» він дає опис свого приладу, який в наш час носить назву «неперові палички» і слугує добрим методологічним посібником для школярів.

Ідею логарифмів Джон Непер розробив ще в останні роки XVI століття, не маючи ніяких відомостей про праці Бюргі в цій галузі.

Неперові палички

У першій книзі з цього питання «Опис неймовірної таблиці логарифмів» Непер склав таблицю логарифмів, виклав їх властивості та вказав їх практичне застосування при проведенні різноманітних обчислень.

Ще раніше, до публікації цієї книги, Непер написав іншу книгу «Устрій неймовірної таблиці логарифмів», в якій дається роз’яснення методу обчислення логарифмів, але вона була видана вже після його смерті у 1619 році.

Таблиці Непера головним чином були призначені для обчислення тригонометричних величин і були побудовані на дуже оригінальних ідеях, пов`язаних з рухом матеріальної точки.

Доволі складний хід думок Непера привів його до ідей, які в наш час можна було б пояснити, лише використовуючи диференціальне числення та метод інтегрування диференціальних рівнянь.

Логарифми, створені Непером, певним чином відрізняються за характером від тих логарифмів, до яких ми звикли.

Наприклад, вони відрізняються тим, що в таблиці Непера зі зростанням числа логарифми спадають.

Можна зробити висновок, що Непер заслужено вважається винахідником логарифмів. Він не тільки дав практичну таблицю, а й детально розробив теорію логарифмів та виявив їхню сутність.

Значення логарифмів важко переоцінити для обчислювальної техніки, про це красномовно говорять слова Лапласа:

«Винахід логарифмів, скоротивши роботу астронома, продовжило йому життя».

Список літератури

Болгарский, Б. В. (1974). *Очерки по истории математики*. Минск: Вышэйшая школа.

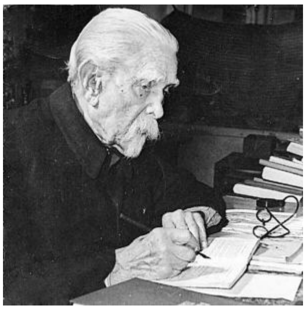
Вилейтнер, Г. (1960). *История математики от Декарта до середины XIX столетия*. Москва: ГИФМЛ.

БОРИС ЯКОВЛЕВИЧ БУКРЕЕВ

Т. В. Маловичко

НТУУ «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru



Борис Яковлевич Букреев родился в Льгове Курской области 5 сентября 1859 года. Отец его был учителем математики и штатным смотрителем Льговского уездного реального училища Курской губернии. Начальное образование Борис Яковлевич получил дома, а среднее — в Курской классической гимназии, которую окончил с серебряной медалью. Осенью 1878 года он поступил на физико-математическое отделение факультета естественных наук Киевского университета святого Владимира. Его студенческая работа «Геометрическая теория движения неизменной плоской фигуры в своей плоскости» в 1880 г. была удостоена большой золотой медали. По окончании курса в 1882 г., Б. Я. Букреев получил степень кандидата математических наук и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Уже в 1884 г. вышла в свет его первая научная работа «Аналитические выражения однозначных функций». В 1885 г. учёному присвоено звание приват-доцента по чистой математике. Теория эллиптических функций Вейерштрасса особенно привлекала к себе внимание Бориса Яковлевича. В этой области он избрал себе тему для магистерской диссертации: «Разложение трансцендентных функций на частные дроби», Борис Яковлевич был удостоен степени магистра математики и допущен к чтению лекций по теории функций. Весной 1887 г. Министерство народного образования командировало его на два года за границу, для дальнейших научных занятий в Берлинском университете и Шарлоттенбургском политехникуме. Во время своей научной командировки Б. Я. Букреев работал в зарубежных библиотеках и посещал лекции лучших учёных того времени — по философии, физике и математике, слушал лекции Вейерштрасса, Кронекера, Фукса, Гельмгольца и других в Берлинском и Лейпцигском университетах. Результатом освоения немецкой математической школы стала написанная им докторская диссертация на тему: «О фуксовых функциях нулевого ранга с симметричным основным полигоном». Успешная защита диссертации состоялась 12 мая 1889 года после возвращения учёного из-за границы. В июле 1889 г. Борис Яковлевич получил звание экстраординарного, а ещё через полгода — ординарного профессора на кафедре чистой математики Киевского университета.

В тот период научная деятельность Б. Я. Букреева была неразрывно связана с педагогической деятельностью. Он издавал курсы лекций и учебники, которые пользовались большой популярностью. В конце 90-х годов объектом его научных интересов стала, главным образом, геометрия, точнее геометрия Лобачевского. В 1900 г. вышел в свет его большой курс «Элементы теории поверхностей», по которому обучались несколько поколений математиков. По предложению Бориса Яковлевича, в 1907 г. был создан математический кабинет при Киевском университете. В 1896 г. Б. Я. Букреев был избран в состав профессуры Киевских высших женских курсов (КВЖК). В 1898 г. доктор математики Б. Я. Букреев был приглашён преподавать высшую математику на химическом отделении вновь созданного Киевского политехнического института. В 1920 г., на базе Киевского университета, был создан Высший институт народного образования им. М. П. Драгоманова. Борис Яковлевич был избран в профессорский состав вуза и начал преподавать разные математические дисциплины: основы дифференциального и интегрального исчисления с упражнениями, дифференциальную геометрию, вариационное исчисление, теорию и практику математических инструментов, историю математики и прочее. Он был одним из основателей и первых преподавателей вновь созданного Химико-фармацевтического института.

Сторонник практической, творческой работы студентов, он проводил увлекательные практические занятия, способствовавшие развитию творческого мышления студентов. Лекции Б. Я. Букреева отличались строгостью, чёткостью и логической стройностью. Он много внимания уделял методологии преподавания материала. Наиболее целесообразным он считал переход к лекциям-беседам с привлечением студентов к самостоятельной и практической работе. Большое значение в преподавании Б. Я. Букреев придавал наглядности. Он считал необходимым вводить в процесс обучения демонстрацию изготовленных самими студентами различных математических моделей, визуально иллюстрирующих результаты исследований по геометрии и теории функций. По его мнению, это повышало интерес к занятиям. На лекциях, иногда без всякого предупреждения, он начинал опрос студентов по всему изложенному материалу, что способствовало их систематической подготовке. После революции, когда учебников не было, Борис Яковлевич составлял для студентов конспекты своих лекций, а студенты переписывали их. Занятия проводил, как в помещении вуза, так и на собственной квартире, особенно когда в институте было очень холодно. Но профессор Букреев никогда не занижал требования и во время экзаменов всегда был «грозой» студентов.

В первые годы после Октябрьской революции он преподавал на электротехническом, механическом факультетах и факультете инженеров путей КПИ. А с 1925 года он читал лекции по чистой и прикладной математике и вёл практические занятия на всех факультетах этого вуза.

Наряду с этим он был действительным членом большого количества научных обществ. Как член-корреспондент ВУАН с 1922 года, он работал на научно-исследовательской кафедре КПИ, где заведовал секцией анализа. Б. Я. Букреев был основателем, активным деятелем и первым секретарем Киевского математического общества, созданного ещё в 1889 г. Почти 30 лет своей преподавательской деятельности учёный посвятил работе в Киевском политехническом институте. Из-за реорганизации и создания отраслевых институтов Борис Яковлевич оставил в 1930 году КПИ и все свое внимание сосредоточил на подготовке своей научной смены в Киевском университете. В начале XX века научно-педагогическую деятельность на физико- математическом факультете вместе со своим педагогом вели ученики Б. Я. Букреева: академики АН УССР Д. А. Граве, М. Ф. Кравчук, Н. М. Крылов, Г. В. Пфейффер, члены-корреспонденты АН УССР Н. Х. Орлов, Ю. Д. Соколов, будущие академики Н. Н. Боголюбов и Н. А. Кильчевский. С 1930 г. Борис Яковлевич работал в Институте математики АН СССР, где некоторое время возглавлял сектор геометрии. В 1930 году вышел из печати учебник Б. Я. Букреева «Введение в вариационное исчисление». Это был один из первых его учебников, изданных в Киеве на украинском языке. Наряду с изложением предмета в нём были показаны широкие возможности применения вариационного исчисления в других науках и в решении практических задач. В 1951—1952 гг. вышла из печати его монография по неевклидовой геометрии. Особенно заметный след Б. Я. Букреев оставил на ниве геометрии. Одна из первых его геометрических работ увидела свет в 1886 году, а одна из последних, «О тригонометрии Лобачевского», датирована 1957 годом. В последние годы учёный основное внимание уделял вопросам проективной и неевклидовой геометрии Б. Я. Букреев оставил значительное математическое наследие — более 150 научных работ. Значителен его вклад в историю математики — это очерки о жизни и деятельности В. Ермакова, Н. Ващенко-Захарченко, Г. Монжа и др.

Борис Яковлевич был высокообразованным человеком, свободно владел русским, немецким, английским языками, знал итальянский и немного шведский язык. Посетил Францию, Англию, Италию, Данию, Австрию. Одним из первых в 1925 году, начал вести практические занятия, а с 1926 года и читать лекции на украинском языке.

За отличную службу он был награждён орденами: св. Владимира 4 степени (1904 г.), св. Анны 2 степени (1900 г.), св. Станислава 2 (1896 г.) и 3 степеней (1891 г.), получил Медаль в память царствования императора Александра III. В январе 1941 г. Верховной Радой УССР Борис Яковлевич был удостоен звания «Заслуженный деятель науки». В 1957 г. Московское математическое общество наградило его «Медалью Эйлера». За выдающиеся заслуги, многолетнюю и безупречную научно-педагогическую деятельность Приказом Верховного Совета СССР в 1953 г. Борис Яковлевич был награждён Орденом Ленина, а в 1959 г. — Орденом Трудового Красного Знамени.

Жена его Екатерина Алексеевна (1864—1945) не работала, воспитывала детей, которых было трое, но занималась общественной деятельностью: была «дамой-патронессой» Высших женских курсов. В доме часто собирались учены, философы, профессура, обсуждались животрепещущие темы, новости культурной жизни.

Старшая дочь Татьяна (1889—1992) закончила Бестужевские курсы в Санкт-Петербурге — одно из первых женских высших учебных заведений России. Впоследствии занималась библиотечным делом. Прожила она, как и отец, 103 года. Её сын (внук Бориса Яковлевича) Кирилл Борисович Толпыго (1916—

1994) был избран членом-корреспондентом Академии наук Украины по специальности «теоретическая физика», преподавал в Киевском государственном университете, с 1960 года по 1966 год был заведующим кафедрой теоретической физики Киевского государственного университета.

Сын Евгений Борисович Букреев (1890—1985) — известный киевский медик, заслуженный врач УССР, доцент кафедр госпитальной и факультетской терапии Киевского медицинского института. В 1901—1909 годах учился в Первой киевской гимназии. По окончании ее Евгений Букреев поступил на медицинский факультет Киевского университета св. Владимира. Его соучеником по гимназии и университету был будущий писатель Михаил Булгаков, и Евгений Борисович делился о нем воспоминаниями. Преподавал в Киевском медицинском институте. Малоимущим пациентам часто тайком оставлял деньги на лекарства. Награжден орденом Ленина.

Младший сын Николай также закончил Киевский университет св. Владимира, стал химиком.

Во время нацистской оккупации Киева в 1941—1943 годах Букреев оставался в Киеве, в своей квартире по улице Никольско-Ботанической, 10. Когда осенью 1943 года гитлеровцы оставляли город, они приказали всем киевлянам покинуть жильё и уходить на запад, неподчинение грозило расстрелом на месте. Однако 84-летний профессор забаррикадировал входные двери. Ему посчастливилось благополучно дождаться освобождения.

Борис Яковлевич торжественно повторял фразу: «Вот доживу до ста лет, тогда со спокойной совестью уйду на пенсию». Дожил до ста, но работу бросать не подумал, потому что имел ясный ум, талант преподавателя и здоровья. В стенах Киевского университета он отпраздновал и свой 100-летний юбилей, который совпал с празднованием 125-летия университета. Такое событие было очень символичным: письма-поздравления приходили сразу двум адресатам — вузу и его талантливому преподавателю.

Умер в 1962 году в Киеве, похоронен на Байковом кладбище.

Список литературы

Баштовая, Л. С. (2014). Б. Я. Букреев — основатель киевской школы геометрии. *Страна знаний*, (9), 13—16.

Бєлоусова, В. (1984). Борис Якович Букрєєв. *У світі математики*, *15*, 45—48.

Грацианская, Л. Н. (1960). Борис Яковлевич Букреев. *Математика в школе,* (2), 83—85.

Чайковский, Ю. Б. (2014). Евгений Борисович Букреев: известный и неизвестный. *Практикуючий лікар*, (3), 26—29.

Рекорди справжнього професора. Одержано з http://uahistory.com/topics/famous_people/2807

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ У ХАРКІВСЬКІЙ ПРИВАТНІЙ ЖІНОЧІЙ НЕДІЛЬНІЙ ШКОЛІ ХРИСТИНИ АЛЧЕВСЬКОЇ

О. П. Міхно, В. О. Гайдей

Педагогічний музей України,

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

amihno@ukr.net

Х. Д. Алчевська
(1841—1920)

У квітні цього року виповнилося 175 років від дня народження українського педагога та просвітительки Христини Алчевської (1841—1920). Найвагомішим внеском у розвиток української освіти стала її діяльність як засновниці, вчительки, наставниці й керівника великої групи педагогів Харківської приватної жіночої недільної школи, відкритої 13 травня 1862 року, яку вона утримувала власним коштом.

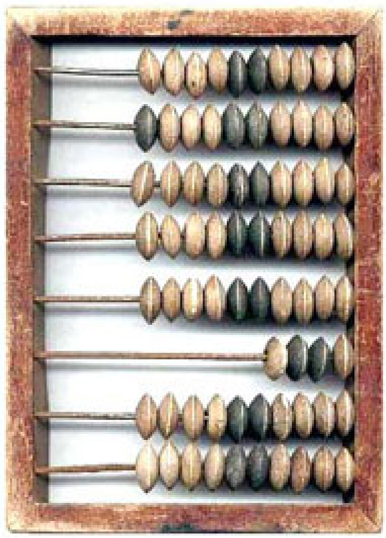
Діяльність недільної школи Х. Алчевської досить докладно висвітлена у працях Л. Боднар (2005), Н Коляди (2004), О. Мазуркевича (1958), М. Мухіна (1979) та ін. Проте методика викладання математики у цій школі ще не була предметом спеціального дослідження. Мета цієї публікації — висвітлити особливості викладання математики у школі Х. Алчевської.

Недільні школи — це нетрадиційні безплатні заклади освіти для дітей та дорослих, навчання в яких відбувалось у неділю та святкові дні. В Україні перша недільна школа була відкрита у жовтні 1859 року в Києві на Подолі, на розі вулиць Костянтинівської та Хорива у приміщенні Києво-Подільського повітового дворянського училища. Після заборони недільних шкіл у червні 1862 року Христина Данилівна запросила своїх учениць продовжити навчання в неї вдома. Майже вісім років її жіноча недільна школа перебувала на нелегальному становищі. На шляху до офіційного відкриття школи поставало безліч усіляких перешкод, зокрема, відсутність належного приміщення та вчительського диплома у Х. Алчевської, якій довелося складати екзамени. Нарешті, у березні 1870 року в будинку міського парафіяльного училища відбулось офіційне відкриття Харківської приватної недільної школи.

З метою поширення даних про стан справ у недільних школах, у журналі «Русская школа» протягом десяти років (1897—1907) існувала рубрика «Хроніка недільних шкіл», яку вела вчителька школи М. Салтикова, а редагувала матеріали Х. Алчевська. Так, у одній з публікацій за 1897 р. знаходимо цікаві роздуми вчительки недільної школи про особливості викладання математики для дорослих учениць: «Насамперед треба зважати на запити учениць, рівень їх підготовки і ступінь розвитку, їх вік, нарешті їх життєві обставини, щоб знати, наскільки і в яких саме випадках їм потрібна арифметика» (Салтыкова, 1897, с. 363). Тобто викладання математики має пристосовуватися до складу учнів та їх вимог, а також закріплювати наявні знання і, спираючись на них, узагальнювати і виводити арифметичні правила.

З урахуванням цих особливостей обсяг матеріалу для першого року викладання математики був таким:

письмова та усна нумерація,
знаки арифметичних дій,
таблиця множення,
одиниці вимірювання,
дроби,
додавання та віднімання,
використання рахівниці,
запис розрахунків,
розв’язання практичних задач.


Рахівниця

Педагог С. Миропольський у книзі «Школа і суспільство» подає цікаві відомості про викладання математики у недільній школі Х. Алчевської. По-перше, для унаочнення початкового навчання лічбі школа мала арифметичний ящик, торгівельні і дробові рахівниці, креслeники тощо. По-друге, у школі практикувалося обговорення пробних уроків математики на зборах вчителів школи. У протоколі обговорення уроку відзначено як переваги, так і недоліки. По-третє, вчителі школи пропонували власні програми з математики, зокрема програма п. Томашевської також обговорювалася на зборах. Головною перевагою цієї програми було визнано пристосування її до умов недільної школи, розподілу на групи учениць, їх слабкої підготовки (Миропольский, 1882, с. 48—49).

Геометрія викладалася у старшому класі і подавалися лише найнеобхідніші відомості, оскільки на цей предмет виділялося лише 10 уроків. Наприклад, програма вчительки Кочеткової містила такі теми: «Тіло. Куб. Лінії. Лінійні кути. Площина. Вимірювання площ. Призма (чотиригранна), грані і ребра. Вимірювання об’ємів. Куля» (Миропольский, 1882, с. 50).

На численні прохання недільних шкіл Російської імперії вчителі школа Х. Алчевської у 1885 році здійснили перше видання розроблених і апробованих ними «Програм з усіх предметів навчання в недільній школі для дорослих і малолітніх учнів», куди, зокрема увійшли «Програма-конспект з арифметики для трьох років навчання малолітніх» і «Програма з арифметики для груп дорослих». За структурою кожна програма складалася з трьох частин:

1. Необхідні навчальні посібники та коротких вступ.

2. Сама програма, здебільшого з методичними вказівками до уроків.

3. Наочні посібники, які слід використовувати під час того чи іншого урок (Мухін, 1979, с. 117).

Понад півстоліття Харківська приватна жіноча недільна школа, у якій здобуло освіту понад 17 тисяч жінок, була не лише зразковим навчальним закладом, а й своєрідною дослідницькою педагогічною лабораторією, яка, розгорнувши широку діяльність, перетворилася завдяки Х. Алчевській на методичний недільних шкіл.

Список літератури

Боднар, Л. С. (2005). Алчевська Христина Данилівна. У кн. *Українська педагогіка в персоналіях* (Кн. 1: X—XIX століття) О. В. Сухомлинська (ред.) (с. 531—537). Київ: Либідь.

Коляда, Н. (2004). Христина Алчевська. На освітянській ниві. У кн. *Українки в історії* (с. 98—100.). Київ.

Мазуркевич, О. Р. (1958). До оцінки педагогічної діяльності і творчої спадщини Х. Д. Алчевської. *Радянська школа*, (3), 72—88; (4), 68—80.

Миропольский, С. И. (1882). *Школа и общество. Частная Харьковская женская воскресная школа*. Санкт-Петербург: Изд. Скороходова.

Мухін, М. І. (1979). *Педагогічні погляди та освітня діяльність Х. Д. Алчевської*. — Київ: Вища школа.

Программы по все предметам обучения в воскресной школе для взрослых и малолетних учащихся (1885). Харьков.

Салтыкова, М. (1897). Отчет Харьковской частной женской воскресной школы за 1892/93 учебный год. *Русская школа*, (7—8).

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИЧНІ НЕРІВНОСТІ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ

А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько, Л. С. Васіна

Національний університет «Львівська політехніка»,
Технічний коледж Національного університету «Львівська політехніка»,
Львів, Україна
ludavhome@gmail.com

Нерівності — це той алгебраїчний матеріал, який широко застосовується в різних розділах елементарної та вищої математики і дає можливість навчати студентів методам доведень та оцінок різних виразів. Тут є широке поле вибору вправ різного рівня складності з орієнтацією на рівень підготовки студентів, але зі збереженням основного методичного завдання. Зауважимо, що навіть за відсутності спеціально відведених годин на нерівності, розглядати і доводити їх необхідно як для повноти картини, так і у прикладних цілях.

Розглянемо деякі методи доведень нерівностей.

1. *Прямі доведення:* якщо необхідно довести, що $A > B$, доводимо $A - B > 0$. Наприклад, довести, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 \left(a-c\right)^2 \geq 0.$$

2. *Синтетичний метод доведення*: доведення, яке використовує відому нерівність. Наприклад, багато нерівностей мають в основі теорему про середнє арифметичне, геометричне і гармонічне:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}, \quad \text{де } a_j > 0. \quad (1)$$

Наслідком нерівності (1) є властивість суми обернених додатних чисел

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Використовуючи цю нерівність можна на рівні школи доводити нерівності типу

$$\lg a + \log_a 10 \geq 2,\ a > 1;\ \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2 \quad \text{тощо.}$$

Застосовуючи нерівність про середнє, можна довести, що

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n \geq 2.$$

Доведення.

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Нерівності такого типу використовуються при обчисленні границь, дослідженні рядів на збіжність.

Задача на оптимум. З паралелепіпедів з даною сумою трьох взаємно перпендикулярних ребер, знайти той, об'єм якого найбільший.

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3},$$

де $m = a + b + c$.

Отже,

$$V \le \left(\frac{m}{3}\right)^3.$$

Знак рівності буде лише при $a = b = c = \frac{m}{3}$. Тоді

$$V_{\max} = \left(\frac{m}{3}\right)^3.$$

Звернемо увагу також на те, що узагальненням теореми про середнє є запис означення функції, опуклої знизу:

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}.$$

Такі функції зустрічаються, наприклад, в опуклому програмуванні.

Розглядаючи скалярний добуток і його властивості, варто звернути увагу на нерівність Коші — Буняковського.

Нехай $\overline{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$, $\overline{b}(b_1, b_2, ..., b_n)$, тоді $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right| \cos\alpha$.

Оскільки $\cos\alpha \le 1$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} \le \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|$ або

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

Узагальненням цієї нерівності є інтегральна нерівність Буняковського — Шварца

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Інтегральні нерівності (Полиа, Сеге, 1978) можуть складати зміст спецкурсу або факультативу для студентів-математиків. Зауважимо також, що узагальненням нерівності (2) є нерівність Гельдера

$$\sum_i a_i b_i \le \left(\sum_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3)$$

де $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, яка співпадає з нерівністю (2) при $p = 2$, $q = 2$.

Нерівність Гельдера має велике значення в математичному та функціональному аналізі. Пряме її доведення можна розглядати як у загальному випадку, так і для різних p і q, провокуючи студентів на побудову прикладів, які ілюструють необхідність умови

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

3. *Метод математичної індукції* використовується при доведенні багатьох нерівностей, наприклад Ясинський (2005), с. 7—9, зокрема, варто розглянути доведення нерівностей

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2} \text{ або } a_1+a_2+...+a_n \ge n,$$

за умови $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Для доведення першої нерівності можна використати опуклість функції або метод математичної індукції і порівняти типи і рівень складності доведення, а також можливість узагальнення. Друга нерівність дозволяє подати, як наслідок, гарне доведення теореми про середнє в загальному випадку: нехай

$$d=\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}, \text{ тоді } \sqrt[n]{\frac{a_1}{d}\cdot\frac{a_2}{d}\cdot ... \cdot\frac{a_n}{d}}=1,$$

отже,

$$\frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d}+...+\frac{a_n}{d} \ge n, \text{ звідки } \quad \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

4. До важливих класичних нерівностей, які часто слід віднести і *нерівність Бернуллі*: а) якщо $x \ge -1$, $0 < \alpha < 1$, то $\left(1+x\right)^\alpha \le 1+\alpha x$;

б) якщо $\alpha < 0$ або $\alpha > 1$, то $\left(1+x\right)^\alpha \ge 1+\alpha x$.

Як правило, цю нерівність розглядають для $\alpha \in \mathbb{N}$ або $\alpha = \frac{1}{2};\frac{1}{3}$. Варто звернути увагу на те, що вона виконується для довільних дійсних α. Два випадки нерівності вимагають ілюстрації відповідних ситуацій і сприяють активізації творчого відношення до навчального матеріалу.

Список літератури

Полиа, Г., Сеге, Г. (1978). *Задачи и теоремы из анализа* (Ч. 1. Ряды, интегральное исчисление, теория функций). Москва: Наука.

Ясинський, В. А. (2005). *Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування*. Тернопіль: Навчальна книга — Богдан.

ВИЩА МАТЕМАТИКА І НОВІ ІФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Н. М. Панасюк
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
nanipa01030@yandex.ua

Саме слово «технологія» має грецьке коріння і означає сукупність методів обробки чогось. У наш час це поняття включає також застосування науки до розв'язування практичних задач.

Інформаційні технології направлені на оброблення і перетворення інформації. Важливим засобом сучасних інформаційних технологій є ПК з відповідним програмним забезпеченням. За допомогою мережевих засобів ІКТ спростилося використання навчально-методичної та наукової інформації, організація оперативної консультативної допомоги, проведення віртуальних навчальних занять у реальному часі. Одними з таких технологій є, наприклад, відеозаписи, що можуть бути використані як у спеціальних відео класах, так і, що важливо, у домашніх умовах. Звичайно, використання ІКТ при вивченні курсу вищої математики має певну специфіку і є складнішим у відмінності від гуманітарних дисциплін.

Сьогодення, зі зростаючою обмеженістю аудиторного часу, а також коштів, що виділяються на освіту створює додаткові складнощі. Тому, як мені здається, інтеграція викладачів як вищої математики, так і інших фундаментальних дисциплін з викладачами інформатики дозволить не тільки зекономити аудиторний час на впровадження ІКТ в ці курси, а й дозволить оптимальніше використовувати спеціальні аудиторії, яких, на жаль, обмаль. Студенти будуть не тільки розв'язувати задачі для вивчення основ інформатики, а і працювати із задачами, класичний підхід до яких їм вже відомий, тим самим поглиблювати отримані знання і вивчати нові технології. Звичайно корисно формулювати задачі таким чином, щоб вони ще були пов'язані із спеціальністю.

Разом з тим, треба відмітити і певний негативний вплив ІКТ, який виникає в процесі навчання: це як вплив на здоров'я та фізіологічний стан того, хто навчається, так і ряд факторів психолого-педагогічного характеру. Однією з переваг навчання із застосування ІКТ вважається індивідуалізація навчання. Вона має різні сторони. Так, використання ПК в самостійній роботі студентів при якій видаються набори індивідуальних завдань з певними методичними рекомендаціями і по якій студент , в подальшому, звітує перед викладачем як у письмовій формі, так і на ПК є, безумовно, корисним. Ми перевіряємо, ніби індивідуально, засвоєння студентами певного матеріалу, але, як показує досвід, захист цих завдань в аудиторії (завдань аналогічних, а інколи тих самих!!!) виявляє низький рівень самостійності у виконанні цих робіт. Будемо відвертими, у більшості своїй студент шукає в Інтернеті розв'язки подібних задач, або, якщо «поталанило», таких самих і просто їх списує. Кращий варіант, якщо студент розбирається в цьому матеріалі, пропускає його «крізь себе», тобто знання стають своїми. Такий процес формує певні навички, які, в подальшому, використовуються в інших задачах з іншою специфікою, тобто студент розвивається і вдосконалюється.

Проводячи заняття в аудиторії, викладач спілкується з студентами, відчуває зворотний зв'язок, те, як сприймають студенти матеріал, а вони всі різні з різним рівнем підготовки та бажанням вчитись. Тут вже спрацьовує індивідуалізація іншого плану: викладач — студент наживо. Розбираючи, після певних базових пояснень, задачі середнього рівня виявляєш несприйняття одними і легкість для інших. Отже тепер можна видавати, для початку, більш легкі задачі першим — для їх самостійної роботи з подальшим контролем викладача і більш складні, розвиваючі, іншим. Саме тут треба використовувати ІКТ з широкою базою задач різного рівня. Враховуючи також те, що студенти полюбляють працювати в Інтернеті, у тому числі використовуючи його для списування, викладач може направити ці устремління на розвиток, створюючи відповідні завдання для поза аудиторної роботи, виконання яких буде відповідним чином стимулюватись. Наприклад, завершити розв'язок, до наведених розв'язків написати пояснення, математичні обґрунтування, в інших завданнях викласти лише логіку, тобто побудувати так звану блок-схему розв'язку, тощо.

Цю роботу студент повинен виконувати в поза аудиторний час, отримуючи певні преференції. Викладач же створює авторські педагогічні програмні засоби, що реалізуються, зокрема, в мультимедійній формі на CD і DVD- дисках, на сайтах та в мережах Інтернет і які можуть використовуватись не тільки в спеціально обладнаних аудиторіях, а і вдома та, звичайно, в дистанційній освіті.

Інформаційні технології в дистанційному навчанні студентів повинні забезпечувати як доставку основного об'єму матеріалу, що вивчається так і інтерактивну взаємодію студента з викладачем та оцінку знань отриманих студентами в процесі навчання, при цьому треба надавати студентам можливість самостійного вивчення й засвоєння цього матеріалу. Викладач також скеровує студента в безмежному інформаційному просторі Інтернету, стимулюючи при цьому ініціативність студента, тобто процес навчання продовжується, зв'язок студент — викладач — студент не поривається, відбувається також діалогічне навчання. Студента вчать вчитись, а викладач вдосконалюється разом з ним, акумулюючи при цьому педагогічний досвід, який породжує нові методичні ідеї. Хочеться звернути увагу ще на те, що в наш, час стрімкого розвитку науки і нових технологій, у тому числі інформаційних, не можна підготувати спеціаліста на все життя. Тобто ми повинні так організувати викладання матеріалу, щоб поруч з набуттям знань, студент вчився вчитися, а викладач був його партнером в цьому навчанні.

Неодноразово звертала увагу на відсутність просторового мислення і уяви у навіть не найслабших студентів, глибокого розуміння поняття функція, як закону, що описує геометричний образ. Для подолання цих проблем, на мою думку, треба впроваджувати мультимедійні технології, створювати презентації. Точка рухається, описуючи криву і при цьому у віконечках змінюються цифри, що є її координатами, причому при різних способах задання функції, в тому числі в параметричній формі і полярній системі координат; обертаються, перетинаються різні геометричні образи, утворюючи поверхні, останні перетинаються утворюючи область інтегрування для повторних інтегралів. Зорове сприйняття допомагає запам'ятовуванню й розумінню матеріалу.

Для побудови достатньо складних зображень: графіків функцій, моделей поверхонь та їх перетинів можна використовувати додаток Microsoft Mathematics (Add-in), що «прив'язують» до комп'ютерного редактора Microsoft Word у вигляді окремого пункту меню «Mathematics». З його допомогою можна будувати графіки функцій на площині, поверхні у тривимірному просторі, змінювати параметри графіків, зберігаючи в одному із графічних форматів PNG, IPEG, BMP. Операціями drag&drop зображення можна повертати, змінювати масштаб. Не є проблемою побудувати одразу декілька графіків на площині і у просторі, вибравши в меню «Graph/plot і 2d» для кривих та «Graph/plot і 3d» для поверхонь. За допомогою «Mathematics» можна обчислювати значення функцій, у тому числі тригонометричних, границі, похідні функцій, інтеграли, додавати, множити, знаходити обернені матриці, суми і добутки рядів. Але я, відверто кажучи, не поділяю захоплення деяких авторів, що описують як зручно диференціювати степеневу чи показникову функцію, при цьому зробивши декілька операцій на комп'ютері для знаходження табличної похідної. Технікою диференціювання і інтегрування студент повинен володіти, а застосування ПК може бути лише ознайомлювальним.

Узагалі використання ІКТ є доцільним. Їх впровадження не вимагає обов'язкового знання мов програмування та досконалого володіння персональним комп'ютером. У викладанні курсу необхідним є використання можливостей не тільки всесвітньої мережі Інтернет, а і комп'ютерних середовищ, що входять в Microsoft Office. При цьому звернемо увагу на величезний розвиваючий потенціал математики, що формує логіку мислення, вміння аналізувати, будувати логіку і взаємозв'язки в дослідженнях, робити узагальнення і висновки. Математика впливає також на розвиток звичайного мовлення, формування певних мотивацій, які випливають з логічних міркувань, допомагає встановлювати причинно-наслідкові зв'язки. Останніми роками спостерігається все зростаюче невміння студентів пояснювати, мотивувати, обґрунтовувати, будувати логіку розв'язків. Системне використання ПК, згортання такого необхідного в навчальному процесі діалогічного спілкування викладач-студент, студент-студент, глобальне використання тестових перевірок призводить до таких наслідків. Запам'ятовування матеріалу,термінів, розвинення мислення скоріш відбувається при діалогічному навчанні. При відсутності останнього, як показують психологічні дослідження, не формується і монологічне спілкування самого із собою, тобто самостійне мислення. Тому використовувати ІКТ у навчальному процесі треба дуже виважено, щоб не загубити саму можливість формування творчого мислення майбутніх спеціалістів і перспектив їх подальшого самостійного розвитку.

НАОЧНІСТЬ В ТЕМІ «КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ»

Н. Д. Парфьонова
Харківський національний університет мені В. Н. Каразіна, Харків, Україна
nataliaparfyonova@yahoo.com

Незважаючи на те, що рівень базової шкільної підготовки з математики, і як наслідок і бажання та здатність студентів вивчати вищу математику, останнім часом катастрофічно падає, вищі навчальні заклади намагаються не опустити рівень знань випускників за рахунок педагогічної майстерності викладачів та використання нетрадиційних методів навчання. З огляду на це, проблема пошуку шляхів удосконалення навчального процесу є соціально значущою й актуальною. Підвищення якості навчання студентів університетів може відбуватися за рахунок застосування новітніх інформаційних технологій навчання, розробки нових програм і підручників.

Метою статті є розкриття можливостей застосування систем комп'ютерної математики (СКМ) у процесі вивчення теми «Конформні відображення» при вивченні курсу «Комплексний аналіз».

На вивчення теорії функцій комплексної змінної в університетах на нематематичних спеціальностях, зазвичай, відводиться мало часу. Зокрема студенти зі слабкою попередньою підготовкою не встигають засвоїти, мабуть, одну з найважливіших тем: «Конформні відображення».

Наведемо опис методики викладання цієї теми для студентів фізичних спеціальностей із застосуванням пакета Maple 12. СКМ Maple було обрано бо він є одним із світових лідерів серед математичних пакетів і буде корисний для подальшого використання студентами при виконанні курсових та дипломних робіт та майбутньої професійної діяльності.

Кількість публікацій, що стосуються опису та використанню пакету Maple у світі дуже велика, але прямих аналогів не має. Бо в статті демонструються не лише можливості цього математичного пакету, для знайомства з ним існують досить гарні й дуже великі посібники, а ті можливості, які дозволяють підвищити наочність навчального матеріалу та уникнути чорнових трудомістких розрахунків і побудов.

Поняття конформного відображення є одним з найважливіших понять математики. Воно знаходить численні істотні застосування в різних областях фізики — метод конформних відображень з успіхом вирішує практичні задачі гідро- і аеродинаміки, теорії пружності, теорії електростатичного, магнітного і теплового полів. Їх вивчення почалося ще з робот д'Аламбера, Ейлера, Гауса і Рімана. З тих часів конформні відображення широко застосовуються як математичний апарат при вивченні механіки суцільного середовища.

У теорії конформних відображень розглядаються дві основні задачі:

1) знайти образ області при заданому відображенні (пряма задача);

2) знайти конформне відображення однієї заданої області на іншу (обернена задача).

Для розв'язання першої задачі потрібно знайти образ межі заданої області, а для розв'язання другої — аналітичну функцію, що встановлює взаємно однозначну відповідність між межами двох областей. У теорії конформних відображень *немає універсального методу, що забезпечує розв'язання якої-небудь з цих задач. Немає загального алгоритму, що дозволяє знайти образ заданої області при заданому конформному відображенні, а тим більше немає алгоритму побудови конформного відображення з однієї області в іншу.* Розв'язання конкретної задачі *можна знайти*, добре **знаючи конформні відображення, здійснювані елементарними аналітичними функціями**, а також **конформні відображення типових областей**. У кожному конкретному випадку використовують розв'язання однієї зі стандартних задач. Тому дуже *важливим педагогічним завданням* є навчити студентів вирішувати хоч би стандартний набір прямих задач і з їх допомогою виробити інтуїцію необхідну при рішенні обернених задач.

Доцільно студентам перед виконанням роботи в будь-якій доступній формі (на лекції, паперовий «роздрук» безпосередньо при виконанні роботи, в електронній формі у форматі .pdf або .djvu) продемонструвати велику кількість різних класичних прикладів. Приклади розбивають на п'ять класів функцій «Лінійні функції», «Дробово-лінійні функції», «Степеневі функції», «Функція Жуковського», «Трансцендентні функції». Перші два-три завдання в кожному класі функцій — це відображення ліній (в основному декартову і полярну сітки), а інші — це відображення областей, обмежених як лініями сіток («автоматичне» розв'язання), так і, лініями, що не є лініями ні декартової ні полярної сіток («ручне» розв'язання).

Далі кожен студент отримує індивідуальне завдання такого виду:

1. Знайти образи дійсної, уявної осей і кола $\{z : \left|z\right| = 2\}$ під дією лінійного відображення $w = (-1 + i)z + 2 - 3i$.

2. Знайти образи полярної сітки при відображенні гілкою степеневої функції $w = \sqrt{z} - i$, $\sqrt{1} = -1$.

3. Знайти образи декартової координатної сітки при відображенні $w = \operatorname{ch} z$.

4. Знайти образ області $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0, \left|z\right| < 1, \left|z - i\right| < 1\}$ при дробово-лінійному відображенні $w = \dfrac{z - i}{z + 1}$.

5. Знайти образ області $\left\{z : 1 < \left|z\right| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$ при відображенні функцією Жуковського $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Відмітимо, що в перших завданнях студенти тренуються працювати з вбудованими можливостями системи Maple, функцією conformal з пакету plots, призначеною для знаходження образу декартової або полярної координатних сіток та функцією complexplot, призначеною для малювання параметрично заданих кривих в комплексній площині. Тобто дивляться як знаходити шукані образи «автоматично».

Ураховуючи вищесказане та досвід викладання в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, вважаємо доцільним:

— розташовувати малюнки за наступним планом: лінія, лінії чи область у площині; стрілочка з підписом відображаючої функції; отриманий образ у площині;

— широко використовувати колір для зіставлення лінії в z-площині та її образа в w-площині й навіть розрізи площини робити кольоровими, щоб передати його структуру, геометрію відображення.

Задача 1. *Знайти образи полярної координатної сітки при відображенні функцією Жуковського.*

Для відображення полярної координатних сітки використовуватиметься функція conformal з опцією coords=polar.

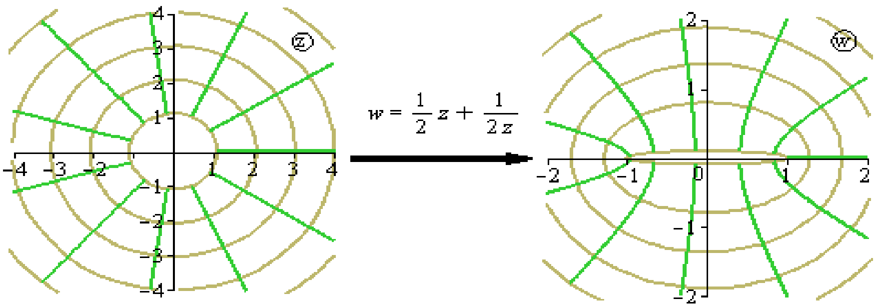


Рис. 1. Відображення полярної сітки функцією Жуковського

Зверніть увагу, що одного погляду на малюнок досить, щоб зрозуміти без зайвих слів, що промені z-площини (колір «LimeGreen») перейдуть при відображенні функцією $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ у гіперболи w-площини, кола z-площини (колір «DarkKhaki») перейдуть у еліпси w-площини Але остаточна відповідь не очевидна і малюнок лише допомагає, але не розв'язує задачу. Повний розбір цієї задачі треба детально провести «вручну». До речі дуже важко обійтися у задачах такого типу чорно-біло-сірих кольорах, колір сприяє зростанню інтуїції.

Відповідь: функція Жуковського відображає конформна зовнішність одиничного круга z-площини в w-площину з розрізом уздовж відрізка $[-1,1]$ дійсної осі. При цьому полярна сітка z-площини в зовнішності круга відображається в сітку еліпсів і гіпербол з фокусами в точках $w = \pm 1$. Така сітка ліній зображена на рис. 1.

Задача 2. *Знайти образ* G *області* $\left\{z : \left|z - 2\right| < 2, \left|z - 1\right| > 1, \operatorname{Im} z < 0\right\}$ *при відображенні функцією* $w = \cos\frac{4\pi}{z}$.

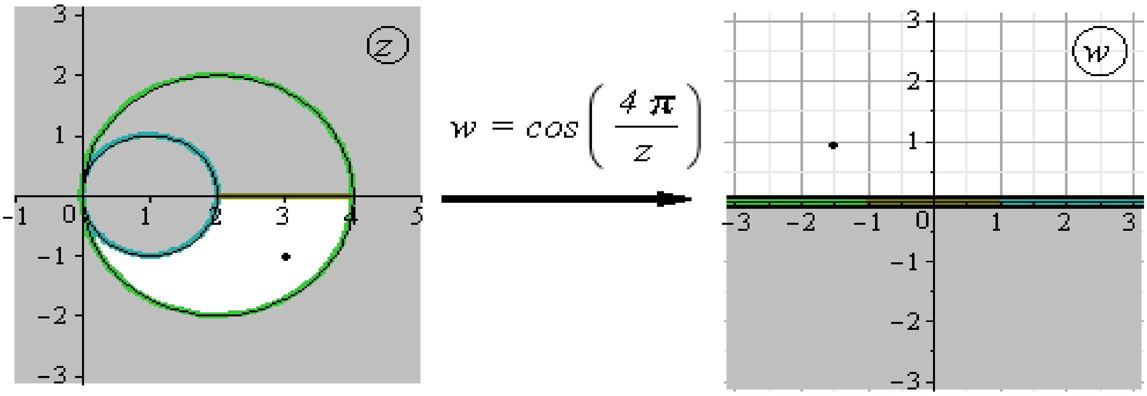


Рис. 2. Відповідь задачі 2

Межею області є дуги двох кіл та відрізок, тому нам не вдасться скористатися функцією conformal як у попередньому прикладі. Будемо послідовно параметризувати частини межі й знаходити їх образи, а потім знайдемо образ «зручної» внутрішньої точки.

При розв’язанні задачі традиційним способом багато часу витрачається на побудову ліній, обмежуючих областей, часто в параметричній формі, що є досить складною, трудомісткою та потребуючою багато часу роботою. Крім того, ці побудови вже не є предметом вивчення й лише відволікають від суті й мети заняття. Проте це не є основним недоліком традиційного способу розв’язування даної теми. Основною вадою є неможливість виконання достатньої кількості вправ кожним студентом, що необхідно для набуття стійких навичок і набуття інтуїтивного чуття.

Така структура заняття дає викладачу час на виконання кожним студентом більшої кількості індивідуальних завдань з даної теми, та перевірку результатів на занятті. Крім того, з’являється можливість включити у роботу всіх студентів, навіть з дуже малими попередніми знаннями, що не можливо в цей темі при традиційному її викладанні.

Результати впровадження комп’ютерної техніки в навчальний процес засвідчили, що студенти краще засвоюють матеріал теми «Конформні відображення», набувають досвіду із застосування сучасних інформаційних технологій у майбутній професійній діяльності.

Список літератури

Garvan, F. (2002). *The Maple Book.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Mathews, J. H., & Howell, R. W. (2012). *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. Sudbury: Jones and Bartlett Publishers.

Клочко, Т. В., Парфёнова, Н. Д. (2009). *Решение задач комплексного анализа средствами Maple.* Харьков: Издательство ХНУ им. В. Н. Каразина.

Парфёнова, Н. Д. (2009). *Комплексный анализ.* Харьков: Издательство ХНУ им. В. Н. Каразина.

ПРОФЕСІЙНА НАПРАВЛЕНІСТЬ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНОМУ ВИШІ ШИРОКОГО ПРОФІЛЮ

І. В. Пасічник, І. В. Щербина, Т. П. Бас, О. В. Акімова
НМетАУ, Дніпропетровськ, Україна
i.pasechnik@ukr.net, sherbinaiv@ukr.net

Відомо, що теоретичною основою професійної діяльності інженера є технічні науки, успішне засвоєння яких залежить від належного рівня фундаментальної підготовки. Основою підготовки студентів у політехнічному виші є оволодіння знаннями з математики, фізики, механіки, що є базою для формування у майбутніх фахівців чіткої уяви про фізичні та механічні процеси та методи їх математизації. Тому перед викладачами математики стоїть важлива задача — навчити студентів математизувати, теоретично аналізувати практичні ситуації, пов'язані з виробництвом, економікою, технікою. Досконале оволодіння різними розділами математичних наук сприяє можливості подавати реальні процеси у вигляді математичних моделей, функцій, алгебраїчних, геометричних структур, диференціальних рівнянь, ймовірносних моделей тощо.

Найбільш ефективним методом розв'язання цієї задачі є включення в процес викладання задач практичного змісту, що дозволяє використовувати зв'язки між предметами, що вивчаються в навчальному закладі. Розглянемо деякі приклади.

Вивчення вищої математики, як правило, починається з лінійної алгебри. Розглянуті в шкільному курсі математики системи двох лінійних рівнянь узагальнюються на трьох та n-мірні випадки. Багато задач економічного та технічного змісту приводяться до розв'язання таких систем.

Задача 1. Розглянемо електричне коло (рис. 1). Потрібно визначити струми в гілках за допомогою законів Кірхгофа. Параметри елементів електричного кола такі:

опір резисторів: $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, $R_4 = 65$ Ом,

електрорушійна сила: $E_1 = 70$ В, $E_2 = 375$ В.

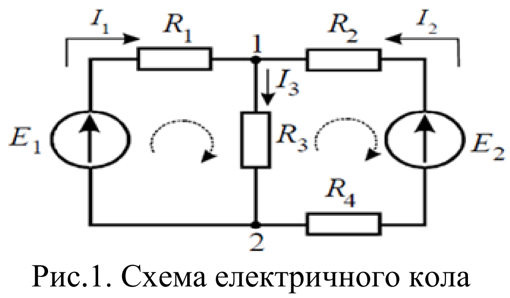


Рис.1. Схема електричного кола

Розв'язання. Обираємо позитивні напрямки шуканих струмів гілок і позначаємо їх на схемі.

Складаємо рівняння, використовуючи перший закон Кірхгофа для вузла 1. Вибравши напрямки обходів контурів, записуємо рівняння за другим законом Кірхгофа. У підсумку маємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ -\left(R_2 + R_4\right) I_2 - R_3 I_3 = -E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 50 I_1 + 50 I_3 = 70 \\ -80 I_2 - 50 I_3 = -375 \end{cases}.$$

Розв'язуємо отриману систему методом Крамера за допомогою детермінантів:

$$\Delta = 13000,\ \Delta_1 = -9650,\ \Delta_2 = 34000,\ \Delta_3 = 24350.$$

Знаходимо значення струмів за формулами Крамера:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{9650}{13000} = 0,74A, I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{34000}{13000} = 2,62A,$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24350}{13000} = 1,87A.$$

Зауваження: позитивний напрямок струму вибирається довільно; він зазвичай вказується стрілкою. Якщо в результаті розрахунку струму, виконаного з урахуванням обраного позитивного спрямування, струм має знак плюс ($i > 0$), то це означає, що його напрямок збігається з обраним позитивним напрямком. В іншому випадку, коли струм від'ємний ($i < 0$), він спрямований протилежно.

У розділі «Інтегральне числення» розширити застосування операції інтегрування допомагають практичні задачі, у яких необхідно обчислити моменти інерції, роботу сили при зміщенні, кінетичну енергію, тиск тощо. Важливе значення має також використання наближених методів обчислення визначених інтегралів.

Задача 2. Знайти тиск P колеса залізничного вагона на рейку, якщо він визначається формулою

$$P = \iint_D q ds,$$

де $q = \lambda z\left(1 - \dfrac{x^2}{2rz} - \dfrac{y^2}{2\rho z}\right)$, λ — коефіцієнт, що залежить від шорсткості і властивостей матеріалу, r — радіус кривини колеса, ρ — радіус кривини рейки, z — деформація рейки. При цьому площадка зім'яття рейки проектується на площину XOY у вигляді фігури D, яка обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{2rz} + \dfrac{y^2}{2\rho z} = 1$.

Розв'язання. Позначимо $a = \sqrt{2rz}$, $b = \sqrt{2\rho z}$ і перейдемо до узагальнених полярних координат. Тоді $x = aR\cos\phi$, $y = bR\sin\phi$, $ds = abRdRd\phi$. Рівняння еліпса $R^2 = 1$, $R = 1$.

$$P = \iint_D q ds = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \lambda z\left(1 - \frac{a^2 R^2 \cos^2\phi}{a^2} - \frac{b^2 R^2 \sin^2\phi}{b^2}\right) \cdot abRdR =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \lambda zab\left(R - R^3\right)dR = \frac{\lambda zab}{4}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda zab\pi}{2}, \text{ або } P = \pi\lambda z^2\sqrt{r\rho} \text{ (Па).}$$

Практично в кожній проблемі економічного або технічного характеру (в більшості політехнічних вузів є економічні напрямки освіти) виникають питання оптимізації процесів, які описуються певними функціями. Ці задачі, зв'язані з мінімізацією всіх можливих витрат, вибором оптимальних умов експлуатації агрегатів та інше.

На сучасному етапі розвитку ринкових відносин в Україні, враховуючи постійне зростання конкуренції, велика увага приділяється дослідженням та аналізу джерел формування прибутку підприємств, зокрема, взаємозв'язку доходів, витрат та обсягів виробництва і реалізації продукції.

Найбільш розповсюдженим методом такого аналізу є CVP-аналіз («аналіз беззбитковості»), методика проведення якого передбачає ряд обмежень, таких як наявність змінних витрат, що змінюються прямо пропорційно зміні обсягів виробництва у так званих релевантних діапазонах.

Оскільки ринкові відносини передбачають можливість надання знижок при значних обсягах закупівлі необхідної сировини (а, отже, нелінійні залежності змінних витрат підприємства), постає задача проведення аналізу функції залежності витрат на закупівлю сировини від обсягів виробництва продукції в нерелевантних діапазонах CVP-аналізу (Зелікман, Зелікман, 2012).

Задача 3. При закупці підприємством великих обсягів сировини або матеріалів, які необхідні для задоволення виробничих потреб даного підприємства, постачальники, як правило, готові знизити ціну на сировину (матеріали). Найчастіше до певного визначеного обсягу закупки Q_1 ціна залишається незмінною (vc_1), а при його перевищенні — знижується ($vc_2 < vc_1$). За таких умов якщо величина необхідного обсягу закупки Q_i наближається до граничного значення Q_1, може виникнути ситуація, при якій покупка сировини або матеріалів у кількості $Q_1 > Q_i$ потребує менших сумарних затрат за рахунок зменшення ціни даної сировини (матеріалу) і, відповідно, існує такий обсяг закупки сировини (матеріалів) Q_s, при якому стає економічно доцільним закупати сировину (матеріали) в більшій кількості Q_1, яка забезпечує зниження ціни на дану сировину чи матеріал. Виявити вид залежності значення критичного обсягу закупівлі Q_s від основних параметрів закупівлі — первісної ціни vc_1, граничного значення обсягу Q_1, зниженої ціни за одиницю виду сировини vc_2.

Розв'язання. Вказаний критичний обсяг закупівлі сировини (матеріалів) Q_s визначається за формулою:

$$Q_s = Q_1 \cdot vc_2 / vc_1 .$$

Таким чином, залежність загальних змінних витрат на сировину та матеріали від обсягів виробництва і реалізації продукції визначається наступним чином:

$$VC = \begin{cases} vc_1 \cdot Q, \text{ якщо } 0 \le Q \le Q_s; \\ vc_2 \cdot Q_1, \text{ якщо } Q_s \le Q \le Q_1; \\ vc_2 \cdot Q, \text{ якщо } Q_1 \le Q. \end{cases}$$

Наведена функція є неперервною, область її визначення: $Q \in \left[0, +\infty\right)$. При dсіх значеннях Q значення функції є невід'ємним, область можливих значень: $VC \in \left[0, +\infty\right)$. Функція зростає на двох інтервалах: 1) $Q \in \left(0; Q_s\right)$; 2) $Q \in \left(Q_1, +\infty\right)$.

Проведені дослідження функції залежності загальних змінних витрат на закупівлю сировини та матеріалів від обсягів цієї закупівлі показали, що значення критичного обсягу закупівлі Q_s, при якому стає економічно доцільним закупати сировину (матеріали) в більшій кількості Q_1, яка забезпечує зниження ціни на дану сировину чи матеріал, залежить від ряду основних параметрів $(vc_1 \cdot vc_2, Q_1)$, та дозволили виявити вид цих залежностей.

Таким чином, з самого початку навчання студент отримує загальне уявлення про зміст і можливості математичних методів, які згодом будуть їм засвоєні. Вивчення основних розділів вищої математики, що досить повно ілюструється практичними прикладами з різних областей техніки і економіки, викликає у майбутнього фахівця жвавий інтерес, підвищує його мотивацію. Наявність пізнавального інтересу до предмета більш за все впливає на успіхи в навчанні, що, у свою чергу, є показником ефективності роботи викладача.

Виникає питання: скільки часу можна приділяти розв'язанню задач з практичним змістом, якщо весь курс вищої математики для більшості технічних спеціальностей укладається в один чи два семестри? Очевидно, що треба розробляти нові підходи до організації та планування навчального процесу з тим, щоб важливі прикладні питання математичного знання не залишалися без уваги. Ефективне викладання курсу вимагає нових технологій викладання, які передбачають підготовку лекційних курсів у презентаційній формі (слайди, роздатковий матеріал), розробку навчальних посібників в електронній формі, розробку комп'ютерного комплексу контролю знань, формування у студентів навичок використання комп'ютерних пакетів для проведення математичних та інженерних розрахунків.

Список літератури

Зелікман, В. Д., Зелікман, А. В. (2012). Аналіз функції залежності витрат на закупівлю сировини від обсягів виробництва продукції. У кн. *Проблеми реалізації науково-творчого потенціалу молоді: пошуки, перспективи*. Дніпропетровськ: ІМА — прес, 46—48.

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ЗАСОБІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРИВИХ В ОКОЛІ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

Т. А. Подчос

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна
voloshanyuk@mail.ru

Дослідження характеру розміщення інтегральних кривих в околі особливої точки має важливе значення для якісної теорії диференціальних рівнянь та для багатьох задач фізики та механіки. Особливо цікавими є ізольовані особливі точки, тобто такі, в деякому околі яких немає інших особливих точок.

Лише для невеликої кількості найпростіших диференціальних рівнянь загальний розв'язок може бути виражений за допомогою інтегралів від відомих функцій. У зв'язку з цим виникла задача вивчення властивостей розв'язків диференціального рівняння за виглядом власне рівняння (на основі властивостей функцій, які містяться у ньому). Оскільки розв'язок подається у вигляді інтегральних кривих, то виникла задача про дослідження їх властивостей, розміщення й поведінки в околі особливих точок (Александров, Колмогоров, Лаврентьев, 1956, с. 39). Дослідження особливих точок диференціального рівняння першого порядку вперше було проведено Пуанкаре (1881 р.), та продовжено Бендиксоном (1900 р.) (Степанов, 1935, с. 84).

У наш час завдяки високому розвитку інформаційних технологій є змога використовувати у математиці різноманітні програмні засоби, які дозволяють поєднувати високі обчислювальні можливості під час дослідження різних об'єктів та унаочнення результатів. Використання комп'ютера із цією метою допомагає краще усвідомити зміст поняття, уникнути помилок в обчисленнях, автоматизувати і полегшити роботу.

Проведемо дослідження ізольованої особливої точки (за Пуанкаре), на прикладі диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+ky}, \tag{1}$$

де $a,\ b,\ c,\ k\in\mathbb{R}$, та покажемо переваги використання програмних засобів для нашого дослідження.

Очевидно, що ізольована особлива точка рівняння (1) збігається з початком координат, у всіх інших точках $\left(x_0,y_0\right)\neq\left(0,0\right)$ права частина рівняння (1) задовольняє умову Ліпшиця, тому через кожну точку $\left(x_0,y_0\right)$ проходить лише одна інтегральна крива. Проаналізуємо, як будуть розміщені інтегральні криві в околі точки $\left(0,0\right)$.

Із рівності (1) маємо:

$$\frac{dx}{cx+ky}=\frac{dy}{ax+by}=dt$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = cx + ky, \\
\dfrac{dy}{dt} = ax + by.
\end{cases} \tag{2}
$$

Систему (2) запишемо у векторно-матричній формі

$$\frac{dz}{dt} = Az,$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} c & k \\ a & b \end{bmatrix}, \; z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці A має вигляд:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & k \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Розв'язавши його, отримаємо корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(b+c) \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4(bc - ak)}}{2} = \frac{b+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b-c)^2 + 4ak}\,.$$

Розглянувши різні випадки залежно від значень λ_1 і λ_2, можемо зробити висновок, що для диференціального рівняння (1) тип особливої точки $(0,0)$ визначається коренями характеристичного рівняння, тобто числом

$$D = (b-c)^2 + 4ak,$$

а саме: $D > 0$ і $bc - ak > 0$ — вузол; $D > 0$ і $bc - ak < 0$ — сідло; $D < 0$ і $b + c \neq 0$ — фокус; $D < 0$ і $b + c = 0$ — центр; $D = 0$ і $a = k = 0$, $b = c$ — дикритичний вузол; $D = 0$ і $a \neq k, k \neq 0, b = c$ — вироджений вузол (Степанов, 1935, с. 77—83).

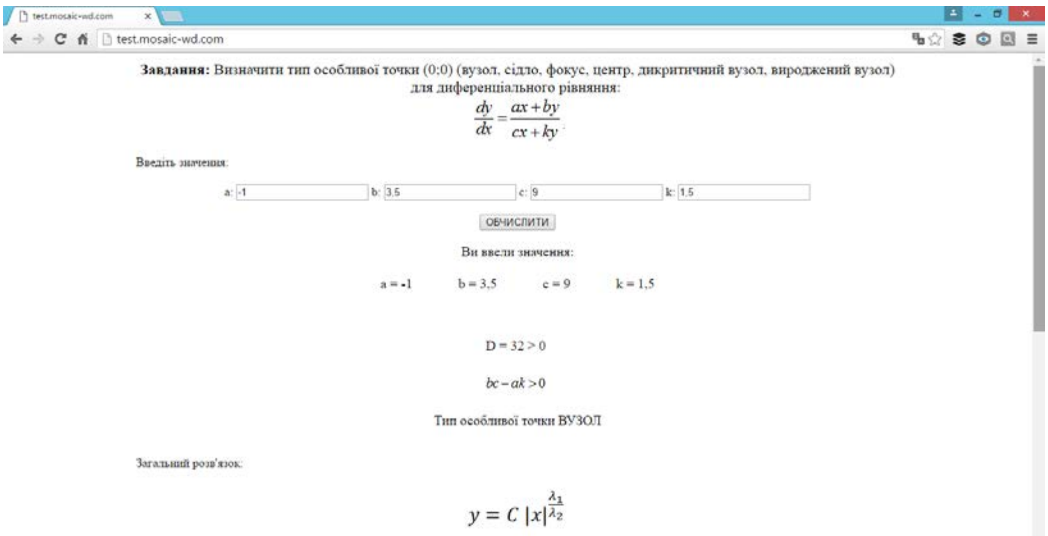


Рис. 1. Визначення типу особливої точки

З метою автоматизації дослідження поведінки інтегральних кривих в околі особливої точки розглянутого диференціального рівняння (1) нами було створено сторінку із простим інтерфейсом (рис. 1) у мережі інтернет, яка розміщена за адресою test.mosaic-wd.com. Вона перевіряє вище розглянуті умови для конкретних значень коефіцієнтів рівняння (1) та визначає тип особливої точки. Наприклад, для введених у відповідні комірки чисел:

$$a = -1;\ b = 3{,}5;\ c = 9\ ;\ k = 0{,}5$$

програма автоматично визначає тип особливої точки – вузол.

Для побудови графіка інтегральних кривих, необхідно ввести у відповідні комірки значення констант. Після цього відбувається автоматичний перехід на безкоштовний веб-сервіс Wolfram Alpha, у якому будується графік (рис. 2).

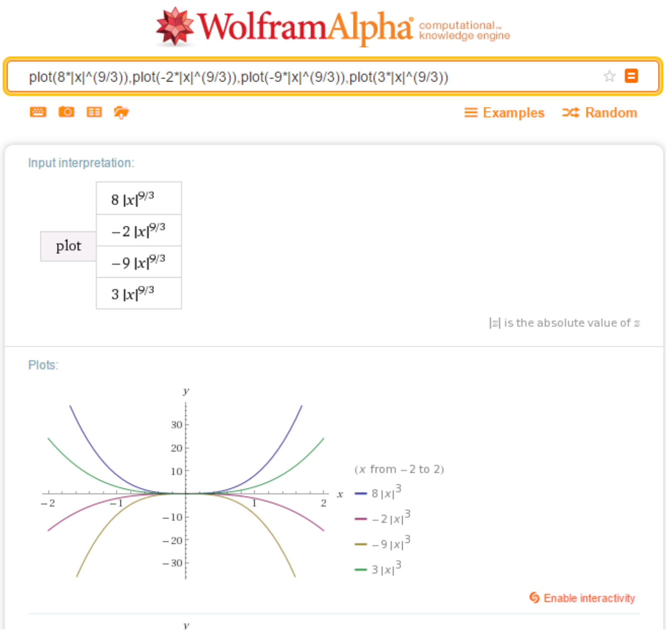


Рис. 2. Побудова графіка інтегральних кривих з використанням Wolfram Alpha

Програма Wolfram Alpha була розроблена у 2009 році Стівеном Вольфрамом. За наявності доступу до мережі інтернет, будь який користувач може вільно з нею працювати. Для даного дослідження зручно використовувати Wolfram Alpha, оскільки з її допомогою можна будувати графіки в полярній системі координат. Також вона дозволяє зображати в одній системі координат графіки декількох інтегральних кривих, що допомагає краще зрозуміти їх розташування.

Отже, використання програмних засобів при вивченні особливих точок диференціальних рівнянь допомагає зменшити витрати часу на виконання обчислень, унаочнює процес дослідження, а також є способом перевірки правильності отриманих результатів.

Список літератури

Wolfram Research, Inc. (n. d.). *WolframAlpha*. Одержано з http://www.wolframalpha.com

Александров, А. Д., Колмогорова, А. Н., Лаврентьев, М. А. (Ред.) (1956). *Математика, ее содержание, методы и значение* (Т. 2.). Москва: Изд. Академии наук СССР.

Степанов, В. В. (1953). *Курс дифференциальных уравнений*. Москва: ГИТТЛ.

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ В ДИСЦИПЛІНІ «ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

Н. В. Поліщук
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
nvpolinv@gmail.com

Системи масового обслуговування (СМО) широко використовуються в прикладних задачах. Вони розглядаються також у дисципліні «Дослідження операцій».

Маємо двоканальну СМО з відмовами, яка може перебувати в трьох станах: S_0, S_1, S_2. Граф системи має вигляд:

$$\boxed{S_0} \underset{\lambda_{10}}{\overset{\lambda_{01}}{\rightleftarrows}} \boxed{S_1} \underset{\lambda_{21}}{\overset{\lambda_{12}}{\rightleftarrows}} \boxed{S_2} \quad .$$

У системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її із стану S_i в стан S_j, $i, j = 0,1,2$, з інтенсивністю λ_{ij}.

Позначимо $p_i\left(t\right)$ — ймовірність знаходження системи в стані S_i, $i = 0, 1, 2$, у момент часу t. Ці ймовірності задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 - \lambda_{01}p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1, \\ p_2' = \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2, \end{cases}$$

з початковим умовами:

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0.$$

У кожний момент часу t, для функцій $p_i\left(t\right)$ виконуються співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1 .$$

У теорії випадкових процесів доведено (Кремер, 2000), що, якщо кількість станів системи скінчена і з кожного з них можна за скінчене число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t \to \infty} p_i(t) = p_i, \quad i = 0,1,2,$$

які задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{10}p_1 - \lambda_{01}p_0 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2 = 0, \end{cases}$$

при умові

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Ці ймовірності можна визначити за формулами Ерланга:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Застосуємо цю систему для дослідження ефективності роботи поліграфічного комплексу з двох друкованих машин і однієї ремонтної бригади.

Нехай стан системи S_0 — обидві машини працюють, S_1 — одна з машин працює, інша в ремонті, S_2 — обидві машини не працюють. Нехай середній час безвідмовної роботи однієї машини $t_0 = 10$ годин, ремонт машини триває $t_1 = 3$ години . При переході із стану S_0 в стан S_1 з ладу може вийти перша або друга машина з інтенсивністю

$$\lambda = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{10},$$

тому

$$\lambda_{01} = 2\lambda = \frac{2}{t_0} = \frac{1}{5}, \lambda_{12} = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{10}, \lambda_{21} = \lambda_{10} = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{3}.$$

Норма доходу від роботи двох друкованих машин $80\,у.е.$ за одиницю часу, однієї машини $40\,у.е.$ за од.ч., ремонт однієї машини коштує $25\,у.е.$за од.ч. Обчислюючи фінальні ймовірності за формулами (1), маємо

$$p_0 = 0{,}562; p_1 = 0{,}337; p_2 = 0{,}101.$$

Кожна машина працює з ймовірністю $p_0 + p_1/2$, не працює — з ймовірністю. $p_1/2 + p_2$. Тому дохід від роботи комплексу

$$D = 2\left(40\left(p_0 + \frac{p_1}{2}\right) - 25\left(\frac{p_1}{2} + p_2\right)\right) =$$

$$= 80p_0 + 40p_1 - 25p_1 - 2 \cdot 25p_2 = 44{,}965\,у.е.\ \textit{за од.ч.}$$

Список літератури

Кремер, Н. Ш., Прутко, Б. А., Тришкин И. М. (2000). *Исследование операций в экономике*. Москва: ЮНИТИ, 2000.

Поліщук, Н. В., Кушлик-Дивульська, О. І., Орел. Б. П. (укл.) (2011). *Дослідження операцій: конспект лекцій для студентів видавничо-поліграфічного інституту*. Київ: НТУУ «КПІ». Електронне навчальне видання НМУ № Е 10/11– 571.

НЕСТАНДАРТНИЙ ПОГЛЯД НА СТАНДАРТНУ ЗАДАЧУ

В. К. Репета, Л. А. Репета
Національний авіаційний університет,
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
repetavk@gmail.com

На практичних заняттях з теорії ймовірностей під час вивчення окремих тем розділу «Випадкові події» студентам здебільшого пропонується до розв'язання певний набір задач на використання однієї конкретної формули, наприклад, $P(A)=\dfrac{m}{n}$ (за класичним означенням ймовірності), повної ймовірності, Бернуллі, Пуассона тощо. Внаслідок цього у студентів формується думка про єдиноможливий спосіб розв'язання певного типу задач. Проте є задачі, які можна розв'язувати інакше, іноді навіть заміною точних методів наближеними.

Часто поза увагою пересічного студента залишаються взаємозв'язки між формулами, чи залежність однієї з них від іншої (точної або наближеної). На жаль, у першу чергу, брак часу не дозволяє викладачу приділити цьому питанню належну увагу. Класичним прикладом такої залежності є наближені формули Пуассона та Муавра — Лапласа (локальна теорема), які за певних умов використовують замість точної формули Бернуллі. Ці формули застосовують під час вивчення незалежних повторних випробувань. Постає питання про можливість вживання інших наближених формул замість точних, оскільки для багатьох практичних задач достатньо отримати результат близький до точного.

Розглянемо один з таких прикладів.

Однією з найпоширеніших формул в теорії ймовірностей є формула Бернуллі $P_n\left(k\right)=C_n^k p^k q^{n-k}$, за якою визначають ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A настане рівно k раз за умови, що у кожному випробуванні ця подія може настати з тією самою ймовірністю p ($q=1-p$ — ймовірність непояви події A в кожному випробуванні). Чи можна формулу Бернуллі використовувати у випадках, які не вписуються у схему Бернуллі, тобто коли ймовірність появи події A може змінюватися від випробування до випробування?

Відповідь на це питання є ствердною.

Розглянемо таку **задачу**. Нехай із скриньки, у якій є m білих та n чорних кульок, навмання одну за одною виймають без повертання $k+l$ кульок. Яка ймовірність того, що буде вийнято k білих куль та l чорних куль?

Нехай подія A означає, що буде вийнято k білих та l чорних куль. Тоді за класичним означенням ймовірності матимемо

$$P\left(A\right)=\frac{C_m^k C_n^l}{C_{m+n}^{k+l}}. \qquad (1)$$

Перетворимо праву частину цієї формули так:

$$\frac{C_m^k C_n^l}{C_{m+n}^{k+l}} = \frac{\dfrac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \dfrac{n!}{l!(n-l)!}}{\dfrac{(m+n)!}{(k+l)!(m+n-k-l)!}} = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} p_k \cdot q_l = C_{k+l}^k p_k \cdot q_l,$$

де

$$p_k = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{(m+n)(m+n-1)...(m+n-k+1)},$$

$$q_l = \frac{n(n-1)...(n-l+1)}{(m+n-k)(m+n-k-1)...(m+n-k-l+1)}.$$

Запишемо наближені формули

$$p_k \approx p^k,\ q_l \approx q^l.$$

Значення виразу

$$p = \frac{m-(k-1)/2}{m+n-(k-1)/2}$$

уважатимемо «середньою» ймовірністю того, що вийнята кулька матиме білий колір, відповідно $q = \dfrac{n-(l-1)/2}{m+n-k-(l-1)/2}$ — «середня» ймовірністю того, що вийнята кулька матиме чорний колір.

Якщо число $m+n$ є достатньо великим порівняно з k і l, то сума $p+q \approx 1$.

Отже, формулу (1) можна замінити наближеною формулою

$$P(A) \approx C_{k+l}^k p^k \cdot q^l. \tag{2}$$

За фіксованих значень k і l та збільшенні значення $m+n$ формула (2) стає більш точною і при $m+n \to \infty$ формула (2) дає такі ж результати, що й формула (1).

Приклад. Порівняємо результати обчислень за формулами (1) і (2) для $m=14,\ n=6,\ k=3,\ l=2$.

За формулою (1): $P(A) = \dfrac{C_{14}^3 C_6^2}{C_{20}^5} \approx 0,352.$

За формулою (2) отримаємо: $p = \dfrac{13}{19} \approx 0,684,\ q = \dfrac{5,5}{16,5} \approx 0,333$, тоді

$$P(A) \approx C_5^3 (0,684)^3 \cdot (0,333)^2 \approx 0,356.$$

Висновок. Нестандартні підходи до розв'язання задач поглиблюють у студентів розуміння теорії ймовірності як важливої сучасної математичної дисципліни та спонукають до подальших творчих пошуків.

ДОВЕДЕНЯ ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА ЗА ДОПОМОГОЮ ДЕЯКИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОВЯЗАНИХ З КОЛОМ

Ю. В. Серветник

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

servetnuk@mail.ru

На сьогоднішній день великі труднощі для студентів технічних спеціальностей становить засвоєння курсу вищої математики. Чинниками, які негативно на це впливають, є невміння доводити математичні факти, установлювати логічні зв'язки між різними розділами вищої математики (Вірченко, 2015). Саме тому, у школах необхідно приділяти увагу різноманітним способам доведення одних і тих самих математичних фактів.

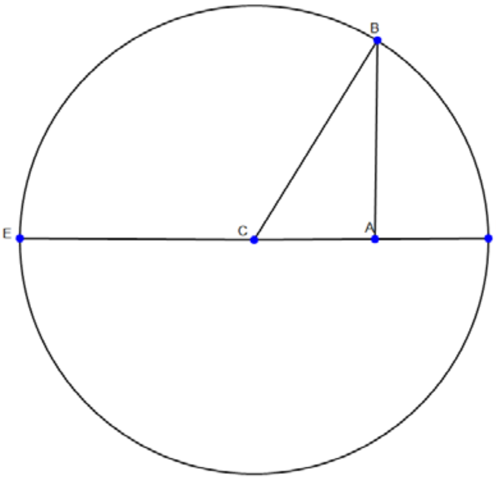
Найяскравішим прикладом, який задовольнить таку необхідність, є теорема Піфагора. Завдяки ній ми можемо проілюструвати різні способи доведення тих самих математичних фактів, використовуючи такі принципи дидактики як *послідовність викладеного*, *наочність* та *науковість*. Також побічним ефектом буде розвиток просторової уяви учнів, розвиток математичної інтуїції та креативності.

Нагадаємо деякі властивості пов'язані з колом (Дергачов, 2006).

1. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

2. Якщо з точки, що лежить поза колом, проведені дві січні, то добуток довжини однієї січної на довжину її зовнішньої частини дорівнює такому ж добутку довжин для будь-якої іншої січної.

3. При перетині двох хорд кола, точка перетину розбиває кожну хорду на пару відрізків так, що добуток довжин цих відрізків однієї хорди дорівнює відповідному добутку іншої.



Доведення 1 (Bogomolny, n. d., a). Розглянемо ΔABC та ΔEBF, побудовані таким чином як на малюнку (C – центр кола). ΔEBF є прямокутним як трикутник описаний колом (гіпотенуза EF є діаметром). ΔABC є прямокутним оскільки AB є висотою ΔEBF і відповідно утворює прямий кут з відрізком AC. Знайдемо AB, використавши властивість висоти прямокутного трикутника (квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу (Bogomolny, n. d., b), і отримаємо таку рівність:

$$AB^2 = EA \cdot AF. \tag{1}$$

Оскільки,

$$EA = EC + CA \tag{2}$$

$$AF = FC - CA, \tag{3}$$

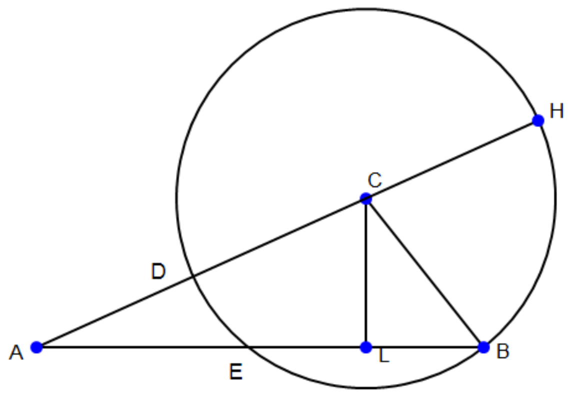
то рівність (1) набуває вигляду:

$$AB^2 = \left(EC + CA\right) \cdot \left(FC - CA\right). \tag{4}$$

Використавши те, що радіуси кола рівні $\left(EC = FC = CB\right)$ маємо:

$$AB^2 = \left(CB + CA\right) \cdot \left(CB - CA\right) = CB^2 - CA^2. \tag{5}$$

Доведення 2 (Bogomolny, n. d., a). ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$). $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Проведемо з вершини C коло з радіусом a. Проведене коло перетнуло сторони AC і AB в точках D та E відповідно. Продовжимо сторону AC як показано на рисунку та проведемо $CL \perp AB$. Застосуємо теорему про січні:



$$AH \cdot AD = AB \cdot AE \tag{6}$$

або

$$\left(b + a\right) \cdot \left(b - a\right) = c \cdot \left(c - 2BL\right). \tag{7}$$

Очевидно, що ΔABC подібний до ΔBCL, звідси дістанемо таке співвідношення:

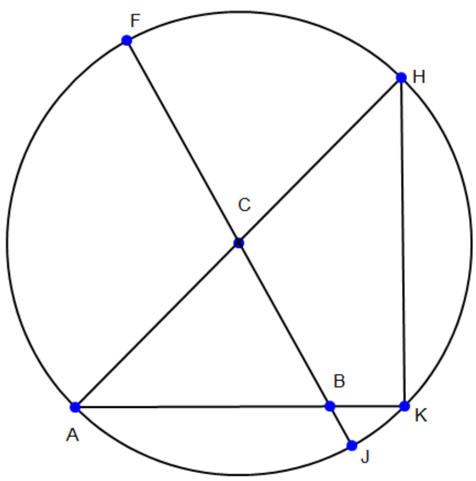
$$\frac{BL}{BC} = \frac{BC}{AB}. \tag{8}$$

З (8) отримаємо:

$$BL = \frac{a^2}{c}. \tag{9}$$

Підставивши (9) в (7), отримаємо бажаний результат.

Доведення 3 (Bogomolny, n. d., a). Нехай ΔACB — прямокутний ($\angle C = 90°$) Проведемо з вершини C коло з радіусом довжини $AC = b$. Продовжимо сторони AC та AB до перетину з колом в точках H і K відповідно та проведемо діаметр FJ, що проходить через сторону CB. Використаємо теорему про хорди, що перетинаються:



$$AB \cdot BK = BJ \cdot BF \tag{10}$$

або

$$c \cdot BK = \left(b - a\right)\left(b + a\right), \tag{11}$$

де

$$BK = AK - c. \tag{12}$$

Із подібності ΔABC та ΔAKH :

$$AK = \frac{2b^2}{c}. \tag{13}$$

Підставивши (13) в (11), отримаємо ще одне доведення теореми Піфагора.

Бажаючі ознайомитись з багатьма іншими доведеннями теореми Піфагора та її історією можуть знайти на сайті Bogomolny (n. d.)a. та у книзі Литцман (1960).

Список літератури

Bogomolny, A. (n. d.)a. Pythagorean Theorem and its many proofs from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Retrieved from http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

Bogomolny, A. (n. d.)b. Intersecting Chords Theorem from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Retrieved from http://www.cut-the-knot.org/proofs/IntersectingChordsTheorem.shtml

Вірченко, Н. (ред.) (2015). *Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф.* (Т. 3.). Київ: НТУУ «КПІ».

Дергачов, В. А. (2006). *Геометрія у визначеннях, формулах і таблицях*. Харків: Веста: Ранок.

Литцман, В. (1960). Теорема Пифагора. Москва: ГИФМЛ.

ПОДІЛ ПЛОСКИХ КУТІВ НА N≥2 РІВНИХ ЧАСТИН ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ Й ЛІНІЙКИ

М. О. Танчук
Київ, Україна
kokaalya@gmail.com

Розглянемо довільний гострий кут $<$ BOA і покажемо, як його можна розділити на n рівних частин за допомогою циркуля і лінійки, не зважаючи на ті догми, які на сьогоднішній день існують в математичній літературі по геометрії, що таку побудову виконати неможливо для деяких значень числа n > 2.

Французький математик П. Л. Ванцель довів у 1837 році, що трисекція кута α можлива тільки тоді, коли рівняння $x^3 - 3 \cdot x - 2 \cdot \cos \alpha = 0$. має розв'язок в квадратних радикалах.

Наприклад, трисекція можлива для кутів виду $2\pi/n$, якщо ціле число n не ділиться на 3.

Хоча трисекція кута, в загальному випадку, неможлива за допомогою циркуля і лінійки, існують криві, за допомогою яких таку побудову можна виконати: трисектриса, квадратриса, конхоїда Нікомеда, конічні перерізи, спіраль Архімеда, трисекція за допомогою плоского орігамі, трисекція за допомогою невсіса, запропонованого ще Архімедом, хоча така побудова не є класичною.

Розглянемо випадок поділу гострого кута на три рівні частини, хоча така схема поділу гострих кутів $\alpha \leq \pi/2$ справедлива і для інших цілих n ≥ 2.

За допомогою лінійки проведемо пряму на стороні OA. З точки O, як з центра, циркулем опишемо коло довільного радіуса R і в точці O проведемо пряму лінію перпендикулярну до OA; таким чином матимемо прямокутну декартову систему координат.

Вважаємо, що точки A і B лежать на колі (точка B від точки A за годинниковою стрілкою, тобто справа). На колі проти годинникової стрілки, тобто зліва від точки A, відкладаємо кут $3\alpha \leq \pi/2$, ($\alpha > 0$ – довільний гострий кут).

Точки на колі в $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ радіанів, позначимо через A_1, A_2, A_3; проведемо хорду A_3A і промені з точки O через точки A_1, A_2, A_3; точки перетину радіусів OA_1 і OA_2 з хордою A_3A позначимо через C_1, C_2. Таким чином отримали трафарет поділу дуги A_3A (кута AOA_3) на 3(три) рівні частини і **«лінійну пам'ять»** цього поділу на хорді A_3A. Проведемо хорди AB і A_3B; через точки C_1, C_2, що лежать на хорді A_3A, проведемо прямі паралельні до A_3B (пропорціональні відношення) і одержимо точки їх перетину з хордою AB: C^*_1, C^*_2; з точки O через точки C^*_1, C^*_2 проведемо промені до перетину з колом і одержимо точки B_1, B_2; точки C^*_1, C^*_2 належать і радіусам OB_1, OB_2 і відрізки OC^*_1, OC^*_2 також пропорціональні відповідним відрізкам OC_1, OC_2; в силу цього дуги: $AB_1 = B_1B_2 = {=}B_2B$, відповідно і кути: $B_1OA = B_2OB_1 = BOB_2$.

Зауважимо, що така побудова можлива в силу постійної кривизни ліній: прямої ($\rho = 0$) і кола ($\rho = 1/R$) і центральної проекції. Такий поділ кутів на рівні частини, за допомогою попередньої заготовки (побудови) відповідного трафарету (зразка), можна виконати за допомогою циркуля і лінійки для довільного (в межах розумного) цілого n ≥ 2. Крім того, таким методом можна ділити кути в заданій пропорції. Кути, які більші за $\frac{\pi}{2}$ (тупі кути), можна спочатку розділити пополам і потім ділити, за схемою, одну половину на n частин. За допомогою одного трафарету можна поділити зразу ж декілька кутів різної величини.

Як бачимо, поділ кутів на n рівних частин, схожий з поділом відрізка прямої на n рівних частин, тільки при поділі кутів присутні елементи центральної проекції.

Поділом кута $\pi/2$ на n рівних частин можна скористатись для вписування в коло правильних n-кутників. Точність результату поділу залежить від того, наскільки точно виконується побудова на всіх етапах. Запропонований метод поділу гострих кутів на n ≥ 2 рівних частин за допомогою циркуля і лінійки легко перевірити при поділі стандартних кутів.

Такий алгоритм поділу довільних кутів на довільне число n рівних частин можна легко запрограмувати для розрахунків і виконання креслень на ЕОМ.

Список літератури

Тесленко, І. Ф. (1973). *Елементарна математика. Геометрія*. Київ: Вища школа.

Фільчаков П. Ф. (ред.) (1974). *Довідник з елементарної математики для вступників до вузів*. Київ: Наукова думка.

ПРО ЗАПРОВАДЖЕННЯ ПОНЯТЬ «ІНВАРІАНТ» ТА «НАПІВІНВАРІАНТ» ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ ФРЕЙМ-ПІДХОДУ В ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН СТУДЕНТАМ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

В. В. Тихонова[1], О. Л. Лещинський[1], В. В. Монастирська[1], Т. Ю. Бохонова[2], О. П. Томащук[3], В. А. Гроза[3]

[1] *Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету,*
[2] *НТУУ «Київський політехнічний інститут»,*
[3] *Національний авіаційний університет, Київ, Україна*
valentina.groza@gmail.com

Вивчаючи зміст та структуру математичної освіти молодших спеціалістів комп'ютерно-орієнтовних спеціальностей, автори дійшли висновку про запровадження до розгляду практичних вправ дисципліни «Математика», яка вивчається на першому курсі, класу задач, що передбачають послідовну зміну стану заданої системи, множини об'єктів, і необхідно визначити певну характеристику їх кінцевого стану. При цьому повністю прослідкувати за всіма переходами або дуже складно, або просто неможливо. Майбутнім програмістам корисно знати, що при розв'язанні таких задачі можна зробити спробу знайти й обчислити деяку величину, яка характеризує стан системи (або множини) і залишається незмінною при всіх її переходах. Таку величину називають *інваріантом* даної системи. Ідея розв'язку задач такого класу ґрунтується на доведеному факті, що значення інваріанта на початковому і кінцевому станах рівні. У процесі розгляду вказаних задач має сенс пояснити, що часто поняття інваріанта набуває більш широкого змісту. Інваріантом системи називають не тільки їх кількісну характеристику, а і якісну характеристику, що має властивість зберігатись при вказаних перетвореннях системи. До якісних характеристик в елементарних задачах можна віднести: парність; чергування (у загальнішому сенсі періодичність); різні ознаки подільності (властивості залишків від ділення); наявність або відсутність монотонності; властивості подібних фігур; відповідність властивостям однієї з прогресій; відповідність заданим властивостям деякої множини тощо.

Задачі елементарної математики, в яких можливе використання інваріантів (ЗІ), можна умовно згрупувати у дві сукупності:

ЗАДАЧІ

у яких необхідно довести деякий, явно визначений інваріант

у яких необхідно відчути інваріант, неочевидний на початку розв'язання

Окремо має сенс про класифікувати задачі (ЗІ) наступним чином:

ЗІ

- арифметичні алгебраїчні комбінаторні
- елементарної геометрії
- аналітичної геометрії, початків аналізу

Можна навести кілька задач з системи вправ вказаного класу.

Задача 1. Члени арифметичної прогресії є натуральними числами. Суми цифр її членів утворюють нову послідовність $\left\{\sum a_n\right\}$. Чи буде ця послідовність зростаючою?

Розв'язок. Перший член a_i і різниця d арифметичної прогресії є обмеженими, тому існує k, таке що $a_1 < 10^k$, $d < 10^k$. Тоді для будь-якого $n \geq k$ виконується рівність $a_{10^n+1} = a_1 + d \cdot 10^n$. Інваріантом в цій задачі буде якраз сума цифр цих членів прогресії:

$$\sum(a_i) + \sum d = const.$$

Приклад. $a_1 < 10^2$, $k = 2$, $d < 10^2$. Нехай $a_1 = 21$, $d = 2$.

21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
3	5	7	9	11	4	6	8	10	12	5	7	9
47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71
11	13	6	8	10	12	14	7	9	11	13	15	8
73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97
10	12	14	16	9	11	13	15	17	10	12	14	16
99	101	103	105	107	109							
18	2	4	6	8	10							

$$a_{10^3+1} = a_1 + d \cdot 10^3 = 21 + 2000 = 2021,$$

$$a_{10^4+1} = a_1 + d \cdot 10^4 = 21 + 20000 = 20021,$$

Даний приклад прогресії з одного боку ілюструє підпослідовність

$$\left\{a_l = a_{10^n+1}\right\},$$

а з іншого боку, уточнює умову задачі, яку можна тлумачити наступним чином: Чи існує арифметична прогресія з натуральними членами, для якої послідовність сум цифр її членів є зростаючою? Відповідь: ні.

Задача 2. У послідовності з $3n + 2$ елементів сума послідовних трьох чисел дорівнює S. Перший елемент дорівнює a, останній b. Знайти інші $3n$ елементів.

Розв'язок. У цій задачі інваріант заданий умовою — сума трьох сусідніх чисел: $x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, 3n$. Тоді, очевидно, $x_k = x_{k+3}$, тобто другий інваріант — періодичне повторення перших трьох чисел x_1, x_2, x_3. З вказаних міркувань випливає

$$x_{3k+1} = x_1 = a,$$
$$x_{3k+2} = x_{3n+1} = S,$$
$$x_{3k} = S - (a + b),$$
$$(k = 0,1,\ldots,n, n \in \mathbb{N}).$$

Задача 3. Множина функцій породжується многочленами $f(x)$ та $g(x)$ і складається з самих многочленів, їх добутку, доданого до них, суму та різницю двох з них. Чи містить ця множина x, якщо

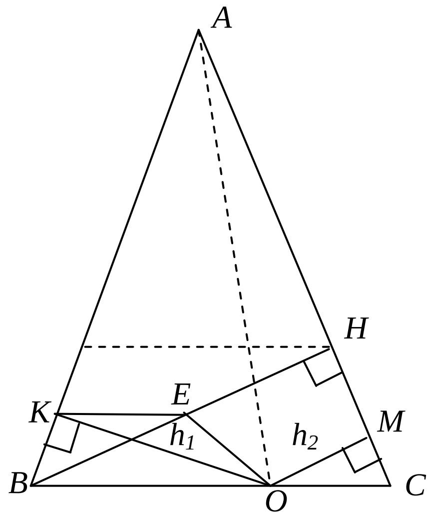
а) $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = x^2 + 2$;

б) $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = x^2 - 2$?

Розв'язок. а) $f(-1) = 0$; $g(-1) = 3$. Усі многочлени цієї множини, на відміну від $\phi(x) = x$, у точці -1 діляться на 3 (ця властивість є інваріантом). Тому в цьому випадку вказана множина не містить многочлена $\phi(x) = x$.

б) $x = (f - g)^2 - (f - g) - f$ — це інваріант.

Задача 4. З точки *O* на основі *BC* рівнобедреного трикутника *ABC* проведені перпендикуляри *OK* (на сторону *AB*) і *OM* (на сторону *AC*). Довести, що периметр чотирикутника *AMOK* не залежить від вибору точки *O*.



Розв'язання задачі може складатись із двох кроків.

1-й крок. Визначення інваріанту: для будь-якої точки основи рівнобедреного трикутника сума її відстаней до бічних сторін постійна і рівна висоті трикутника, проведеній до бічної сторони.

Доведення. Нехай O — довільна точка основи рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Нехай $h_1 = OK, \quad h_2 = OM$ — відстані від неї до бічних сторін.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot h_1,\ S_{\Delta ACO} = \frac{1}{2}AB \cdot h_2, \quad (AC = AB),$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot (h_1 + h_2) = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta ACO},$$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BH$, отже $BH = h_1 + h_2 = const$ для фіксованого трикутника *ABC*.

2-й крок. Проведемо $OE \| AC, KE \| BC$ (доведення існування такої точки E з одного боку — ознака математичної культури студента, а з іншого боку не являє собою складної процедури). Чотирикутник $OEHM$ є прямокутником, $HM = EO, EH = OM$. $BKEO$ — рівнобедрена трапеція і $BE = KO, EO = KB$. Тому шуканий периметр дорівнює

$$AK + AM + OM + OK = AK + KB + AH + NE + BE =$$

$$= AB + AH + BH = P_{\Delta ABH},$$

який не залежить від вибору точки *O*, що і треба було довести.

Задача 5. Дотична до кривої $y = x^2 - 2ax$ перетинає пряму $y = -a^2$ при $x = a + b$. Знайти абсцису точки дотику.

Розв'язок. Інваріантна властивість параболи $y = kx^2$: абсциса точки перетину дотичної з віссю *OX* дорівнює половині абсциси точки дотику.

Доведення. Дотична у точці (x_0, y_0) визначається рівнянням:

$$y - y_0 = y'(x - x_0),$$

$$y - y_0 = 2kx_0(x - x_0),$$

$$y_0 = kx_0^2,$$

$y = 2kx_0x - kx_0^2$ — рівняння дотичної.

Нехай дотична перетинає вісь абсцис у точці x_1. Тоді $y_1 = 0$, $2kx_0x_1 = kx_0^2$, звідки $x_1 = \dfrac{1}{2}x_0$.

Довільна парабола з віссю, паралельною осі ординат, отримується з параболи $y = kx^2$ зсувом на вектор $(a; c)$, де $(a; c)$ — координати вершини параболи. Для довільної параболи інваріант наступний:

Нехай x_0 — абсциса точки дотику, x_1 — абсциса точки перетину дотичної з прямою $y = c$. Тоді $2(x_1 - a) = x_0 - a$. З умови задачі випливає, що $x_1 - a = b$. Тому

$$x_0 - a = 2b,\ x_0 = a + 2b.$$

Список літератури

Федак, І. В. (2003). *Готуємося до олімпіади з математики*. Чернівці.

Конет, І. М., Радченко, В. М., Теплінський, Ю. В. (2010). *Обласні олімпіади з математики*. І. М. Конет (ред.). Кам'янець-Подільський: Абетка.

Фоминых, Ю. Ф. (1998). Инварианты. *Математика в школе,* (5), 78—83.

ІСТОРІЯ СТАНОВЛЕННЯ ЧИСЛА ПІ

Ю. Р. Трухан, Т. І. Цюпій
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна
kafedra333@meta.ua

Упродовж тисячоліть людство своєю напруженою працею виробляло основні поняття математики. До таких понять належить поняття про число.

Оскільки числа є мірилом кількісних відношень у всіх проявах життя, що нас оточує, то вивчаючи розвиток математичних понять, ми повинні зробити головним питання про розвиток числа, оскільки кількісні змінювання превалюють у більшості математичних обчислень.

Вивчення та встановлення числових закономірностей розширює наукові можливості людини, допомагає їй більш глибоко проникати до світу чисел та сприяє розвитку логічного мислення.

Історія чисел налічує не одне тисячоліття. Нам відомо багато різноманітних чисел, які заслуговують ретельного вивчення. Але особливе місце серед таких чисел посідає число π.

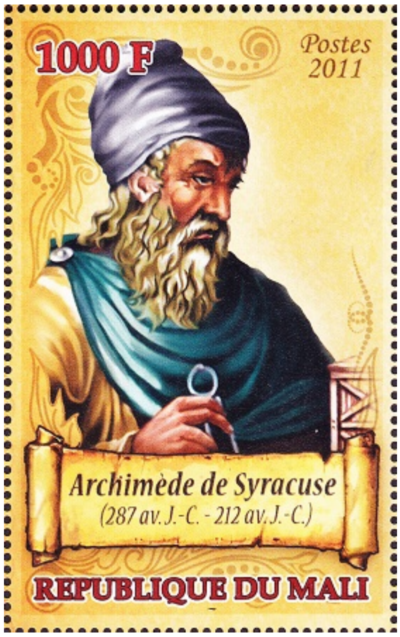
Першим джерелом, у якому містяться відомості про число π є єгипетський папірус папірус Райнда. Таку назву цей папірус отримав від імені свого першого володаря А. Райнда, який купив його в Луксорі, а потім передав його до Британського музею.

Папірус Райнда, або, як його ще називають, папірус Ахмеса (вважають, що він був написаний біля 1800 р. до н. е. єгипетським писарем Ахмесом; хоча можливо, що він є лише копією іншого документа, який був створений біля 3000 років до н. е.) містить відомості сільськогосподарського характеру, а також наповнений математичним матеріалом, зокрема в папірусі ми знаходимо достатньо складні обчислення, які здійснюються не тільки з цілими, а й з дробовими числами. Також ми знаходимо відомості, які можна віднести до алгебраїчних та багато задач геометричного характеру. В папірусі зустрічається багато задач, пов’язаних з визначенням площ та об’ємів сільськогосподарських споруд та розмірів полів.

Очевидно, єгиптяни володіли точними методами для визначення площ та об’ємів основних геометричних фігур, але часто вдавались до наближених обчислень, при яких користувались неправильними співвідношеннями.

У папірусі Райнда добре проведено обчислення площі круга. Автор папірусу поділяє діаметр кола на дев’ять рівних частин і будує квадрат, сторона якого дорівнює вісьмом таким частинам. Побудований таким способом квадрат вважається рівновеликим даному колу. Таке визначення площі за своїми результатами відрізняється від сучасного тим, що число π приймається за 3,16.

Досліджуючи число π не можна не згадати ім'я грецького математика Архімеда з міста Сіракузи, що жив в III ст. до н. е. Він належав до видатних математиків так званого «золотого століття». У своїх геометричних працях Архімед використовував два методи: механічний та вичерпний.



Найбільш просте застосування вичерпного методу наведено Архімедом в його праці, що носить назву «Про вимір кола». Саме в цій праці Архімед вперше в історії математики поставив задачу про вимір довжини кола і про визначення наближеного значення числа π, що є відношенням довжини кола до його діаметру; причому він навіть встановив межі припустимої при цьому похибки.

До довжини кола Архімед підходив з двох сторін, тобто він обчислював периметри вписаних та описаних навколо цього кола правильних многокутників. Він почав з трикутників, а потім, подвоюючи кількість сторін, Архімед дійшов до правильних 96-кутників. При цьому він встановив, що периметр правильного 96-кутника, що вписаний в коло, діаметр якого дорівнює одиниці, більший за $3\frac{10}{71}$, а периметр правильного 96-кутника, що описаний навколо того ж самого кола менший за $3\frac{1}{7}$. Звідки випливає, що значення числа π дорівнює $\frac{22}{7}$. Це значення ми часто застосовуємо при наближених обчисленнях; воно носить назву «архімедове число» .

Вперше позначення «числа пі» грецькою буквою π було використано англійським вчителем математики Уільямом Джонсом в 1706-му році у праці "Synopsis Palmoriorium Matheseos" («Огляд досягнень математики»), але поширюватись воно почалось тільки після того, як його почав використовувати в своїх працях Леонард Ойлер. Можна сказати, що загальноприйнятим позначення числа π стає тільки починаючи з 1736 року.

У XVIII ст. було доведено, що число π не є раціональним, а вже в 1982-му році німецький математик Ф. Ліндеман довів, що воно є трансцендентним (тобто не може бути коренем ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами).

У 1597-му році голландський математик Адріан фон Роомен опублікував свою працю, в якій він обчислив число π з точністю до 17-ти десяткових знаків. Для цього йому знадобилось декілька років.

Ще більш наполегливим виявився професор Лейденського університету Лудольф ван Цейлен, який, застосувавши метод Архімеда, обчислив 20 точних десяткових знаків числа π. Для цього йому знадобилось 10 років.

У 1794-му році австрійський математик Г. Вега вказав значення числа π з точністю до 200 знаків; англійські математики Д. Резерфорд та У. Шенкс обчислили 440 та 527 знаків числа π відповідно.

Поява та вдосконалення комп'ютерів привела до зростання темпів пошуку точних десяткових знаків числа π. В 1949-му році американські вчені під керівництвом Джона фон Неймана на одній з перших обчислювальних машин обчислили 2037 правильних знаків числа π.

А в 1973-му році вчені вже подолали межу в 1 000 000 знаків. Говорячи про компʽютерні обчислення, не можна не згадати про вчених Токійського університету Я. Канада та Д. Такахаші, які в 1999-му році обчислили 206 158 430 000 знаків числа π.

Число π, що використовується в у багатьох формулах математики, постійно розвивається та вдосконалюється, і ми маємо надію, що в цій галузі будуть зроблені нові відкриття, що збагатять сучасну математику.

Список літератури

Болгарский, Б. В. (1979). *Очерки по истории математики*. Минск: Вышэйшая школа.
Бурау И. Я. (сост.) (1997). *Загадки мира чисел*. Донецк: Сталкер.
Гуменяк, О. В. Світ чисел (2011). Львів: Каменяр.
Жуков, А. В. (2007). *Вездесущее число «пи»*. (2-е изд.). Москва: URSS, ЛКИ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ САМООБРАЗОВАНИЯ, КАК ОДНОЙ ИЗ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ

А. Е. Филиченок, И. Е. Ругалева
Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
aeev@tut.by

В настоящее время на рынке труда требуются специалисты, способные обучаться и переобучаться, творческие, готовые к профессиональному самосовершенствованию. Изменяющиеся экономические и общественные процессы, способствуют проявлять активную жизненную позицию, становиться конкурентоспособным в своей профессиональной деятельности. И высшее образование должно являться первым шагом к повышению конкурентоспособности будущего специалиста. То есть не только обеспечить студентов определенными профессиональными знаниями, а учить быть мобильными и уметь приспосабливаться к изменяющимся условиям жизни, способных к анализу экономических и производственных проблем, принимать новые решения, понимающих, что учиться надо на протяжении всей жизни.

Критериями конкурентоспособности являются: трудолюбие, целеустремленность, креативность, независимость, лидерство, способность к риску, критичность, стремление к непрерывному образованию.

Необходимо сделать акцент в сторону саморазвития, самоуправления, самоконтроля личности студентов, основы которых закладываются в период обучения в университете и являются основами профессионализма. Следовательно, кроме передачи знаний и умений, преподавателю следует стимулировать студента к самообразованию, обучать основам научной организации умственного труда, контролю и планированию самообразовательной деятельности.

Необходимо, чтобы произошла переоценка результатов образования от понятия «образованность» к понятию «компетентность» обучающегося. И при отборе и формировании учебного материала, учитывать те особенности жизнедеятельности, с которыми выпускники встретятся в первые годы самостоятельной профессиональной и социальной жизни. Введение дополнительных образовательных программ, направленных не только на профессиональное, но и социальное становление специалиста может способствовать готовности к выполнению различных ролей в социуме. В программу обучения можно ввести такие курсы, как «Управление личной карьерой», «Стратегия профессионального роста», «Основы социальной компетентности» и другие. Во внеучебной деятельности — организовать клубы по интересам, способствующих готовности к выполнению социальных или профессиональных функций, подготовленности в сферах делового этикета и семейной жизни.

Самый лучший путь в образовании «Учить учиться». Обучение на практических занятиях должно проходить фактически самостоятельно. Преподаватели должны разбирать примеры, выдавать задания, консультировать и контролировать знания за выполненную работу. Студентам могут выдаваться электронные конспекты, которые они могут изучать самостоятельно. Студент должен сам заниматься в библиотеке, интернете и т.д. Другими словами, в образовании довольно эффективной будет система коучинга, когда студент учиться сам, а преподаватель его направляет, в большей степени выступает как консультант. Преподаватель в этом плане может рассматриваться как руководитель или менеджер учебного процесса и обучаемого, который планирует учебный процесс, обучает, выдает задания, проверяет и оценивает их выполнение, то есть выполняет функции управления процессом обучения.

В настоящее время коучинг — это отдельное направление в консультировании, которое имеет определенные методы работы, высокоэффективные технологии для решения задач. Коучинг учитывает личные особенности человека и более эффективен, чем классический курс обучения. Ключевое отличие коучинга от всех обучающих программ выражается словами «Придется делать» [3].

Взаимодействие коуча и клиента (или в нашем случае преподавателя и студента) имеет следующие цели — стимулировать деятельность и углубить обучение. Вербальное взаимодействие в коучинге отличается от других практик тем, что оно не предназначено для объяснения, предоставления информации, исправления или развлечения; его цель - порождать действие и обучение [2]. В коучинге — действие — особенно привлекательно. А также эффективная система подотчетности. Когда человек, обладающий достаточно высокими моральными качествами, дает кому-то обещание, он гораздо больше старается справиться с задачей.

Коучинг может проходить спонтанно, продолжаясь одну минуту или час. Взаимодействие преподавателя со студентом может заключаться всего в одном предложении — например, вопросе. Предположим, студент работает над заданием, которое получил по определенному предмету. Столкнувшись с проблемой он обращается к преподавателю, что сделал все, как учили, но у него ничего не получается. Можно ответить: «Наверное, ты что-то сделал не так. Сделай так-то…». Здесь нет коучинга. А можно ответить: «Попробуй определить, где и когда именно происходит сбой, а я потом помогу тебе найти решение». Далее, скорее всего, проблема будет решена студентом самостоятельно. Последняя фраза преподавателя отражает два основных принципа коучинга: осознание и ответственность. Кроме того, преподаватель не стал раздражаться и обвинять студента, а выступил в роли партнера, при этом можно сказать студенту о том, что он самостоятельно решил проблему и способен на большее.

Первым ключевым элементом в коучинге является *осознание*, которое становится результатом усиления внимания, концентрации и четкости. Осознание — это способность отбирать и ясно воспринимать относящиеся к делу факты и информацию, определяя их важность. Оно включает в себя и самосознание, помогает сохранять уверенность в себе, полагаться на собственные силы и брать на себя ответственность.

Ответственность — еще одна цель коучинга. Когда мы сознательно принимаем ответственность за свои действия и поступки, наша преданность им повышается, а вместе с ней и эффективность исполнения. Если же нас вынуждают принять ответственность, то вынужденные действия не оптимизируют наше исполнение. Чтобы чувствовать себя ответственным, нужно иметь выбор.

Вопросы лучше всего помогают добиться *осознания* и *ответственности*.

Чаще всего звучит указание: «Следите за ходом решения задачи!» Если бы все студенты действительно следили, то многие добились бы хороших результатов.

«Ты следишь за ходом решения задачи?» (Или «Ты меня внимательно слушаешь?») Как мы на это ответим? Вероятно, будем защищаться и, скорее всего, соврем, как в школе, когда учитель спрашивал, внимательно ли мы его слушаем.

«Ты почему не следишь за решением?» Защитная реакция при таком вопросе еще больше усилится, или возможен некоторый анализ, если вы склоняетесь к этому пути: «Я смотрю», «Не знаю», «Потому что я думал о том, …» Такие вопросы не очень эффективны, поэтому рассмотрим воздействие следующих.

«В какой из предложенных задач ты применил бы данный способ?», «Можно ли упростить решение задачи?», «После выполнения данного действия, какой получится результат?» Подобные вопросы требуют ответов, содержащих описание, а не осуждение. Они концентрируют внимание и вносят ясность.

Эффективные в коучинге вопросы [1, 2].

- «Что еще?» Такой вопрос в конце самого ответа сделает его еще полнее. Часто с такой же целью можно использовать паузу, дающую преподавателю время подумать.
- «Если бы ты знал ответ, то что бы сказал?» Такой вопрос устраняет ограничения для подопечного.
- «Какие могут быть последствия для тебя и других?»
- «Какими критериями ты пользуешься?»
- «Что для тебя в этом самое трудное?»
- «Что бы ты посоветовал другому, окажись он на твоем месте?»
- «Я не знаю, что делать дальше. А ты?»
- «В чем ты выиграешь (проиграешь), если так сделаешь (скажешь)?»
- «Если бы так сказал (сделал) кто-то другой, что бы ты подумал (сделал)?».

Занятия (урок) начинается с определения *целей самого занятия*. Если студент пришел на занятие, ему нужно четко определить, чего он хочет от этого занятия получить. Для этого можно задать подобные вопросы.

- Чего ты ждешь от этого занятия?
- У нас есть полчаса; что бы ты хотел успеть сделать за это время?
- Что было бы для тебя самым полезным на этом занятии?

Ответы на эти вопросы могут быть такими.

- Разработать план.

• Получить четкое представление о том, какими будут два моих последующих действия.

• Принять решение, в каком направлении двигаться.

• Определить, что имеет принципиальное значение.

Само определение исполнения, с точки зрения коучинга, подразумевает обучение и удовольствие. Удовольствие доставляет нам и полное раскрытие своего потенциала. Каждый раз, когда мы себя преодолеваем, чтобы достичь того, чего никогда не имели прежде — старания, умения, активности, эффективности исполнения, то поднимаемся к новым высотам, что можно назвать «наивысшим опытом».

Список литературы

1. Уитмор, Дж. (2005). *Коучинг высокой эффективности*. (Пер. с англ.). Москва: Международная академия корпоративного управления и бизнеса.

2. Уитворт, Л., Кимси-Хаус, Г., Сэндал, Ф. (2004). *Коактивный коучинг*. (Пер. с англ.). Москва: Центр поддержки корпоративного управления и бизнеса.

3. сайт Дмитрия Волкова, коучинг, URL: http://www.yxp.ru/home.htm

4. Андреев, В. И. (1994). *Проверь себя: десять тестов оценки интеллигентности, конкурентоспособности и творческого потенциала личности*. Москва: Журн. «Нар. образование». (Библиотека журнала «Народное образование»; №3).

5. Методы коучинга и профессиональное самоопределение личности. *Ольга Нау*, коуч, профориентолог. , URL: http://naupro.ru/metodyi-kouchinga-i-professionalnoe-samoopredelenie-lichnosti/

6. Самообразование студента: почему это сейчас очень важно? URL: http://советстуденту.рф/view_post.php?id=75

РОЗПОДІЛ ПУАССОНА В ІСТОРИЧНОМУ ВИМІРІ

Н. В. Філоненко
Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди, Україна
pif-mim@ukr.net

У величезній науковій спадщині Пуассона істотне місце займають праці, присвячені теорії ймовірностей та математичній статистиці. Зокрема, у математичній статистиці з іменем Пуассона пов'язаний один з розподілів, першим дослідником якого він був (1837). Згідно теореми Пуассона, розподіл Пуассона — це граничний випадок біномного розподілу, коли

$$p \to 0,\ n \to \infty,\ \text{і}\ np = \lambda = const\,.$$

За цим законом розподіляються числа так званих рідкісних явищ. Формальною ознакою належності розподілу до цього виду є наближена рівність середнього арифметичного, середнього квадратичного відхилення та третього центрального моменту.

Уперше відкрив факт існування статистичних розподілів, подібних розподілу Пуассона, статистик і економіст В. Й. Борткевич. Він назвав цей факт «законом малих чисел». Борткевич Владислав Йосипович (07.08.1868, Петербург, — 15.07.1931, Берлін) підданий російської імперії, за походженням був поляк, закінчив юридичний факультет Петербурзького університету. Ще будучи студентом, Борткевич написав дослідження про смертність і довговічність православного населення Європейської Росії, яке містило, крім таблиць смертності, загальний опис основ теорії вимірювання смертності. Ця праця була представлена автором в Геттінгенський університет в якості докторської дисертації [5].

З 1901 року і до кінця життя Борткевич працював професором Берлінського університету, викладаючи статистику і суміжні дисципліни. Відомі роботи Борткевича з математичної статистики, теорії ймовірностей, дослідження дисперсії, стійкості статистичних рядів, застосування статистико-математичних методів в соціальних дослідженнях, зокрема демографічних, а також праці з теоретичної економіки.

На даний час існує велика кількість статистичних розподілів, що відповідають закону Пуассона. Це стосується, зокрема, демографічних розподілів — статистики народження трієнь, числа смертей від рідкісних причин, в статистичній фізиці — при вимірюванні радіоактивних процесів, в біологічній статистиці — розподіл колоній бактерій, що припадають на одиницю об'єму. У всіх цих задачах ми маємо велике число n незалежних випробувань, малу ймовірність «успіху» в будь-якому даному випробуванні, і необхідно визначити ймовірність отримання x «успіхів» в n випробуваннях.

Розподіл Пуассона має вигляд

$$\psi(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

Таблиці для функції $\psi(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ вперше були опубліковані Борткевичем у 1898 році [2] у вигляді 4- значних таблиць для значень λ від 0,1 до 10.

У 1914 році Сопер опублікував більш повні 6-значні таблиці для λ від 0,1 до 15 і для x від 0 до 37 [8].

Нове дослідження розподілу Пуассона було здійснене П. Л. Чебишовим. Професор В. С. Немчинов у своїй праці «Полиномы Чебышева и математическая статистика» [2] детально обґрунтував вклад видатного російського математика Панфутія Львовича Чебишова у розвиток теорії ймовірностей та математичної статистики. Зокрема, Чебишов був основоположником теорії найкращого наближення функцій многочленами. У праці «О разложении функции одной переменной» [4] Чебишов дослідив функцію ke^{-kx} і показав, що вона може бути розкладена в ряд при допомозі його інтерполяційної формули, визначивши при цьому і необхідні поліноми.

Як відмічає Немчинов, поліноми, описані Чебишовим у роботі [4], отримали в математиці назви поліномів Ерміта та поліномів Лагерра, хоча насправді поліноми Ерміта та Лагерра є лише окремими випадками поліномів Чебишова, причому Ерміт отримав свої поліноми у 1864 році, Лагерр у 1879 році, а Чебишов дав їх більш загальний вигляд у 1859 році [2, С.78].

Свій вклад у розвиток знань про розподіл Пуассона внесли також видатні математики Шарльє [6], Жордан [7], Романовський [3].

Жордан та Романовський вказали поліноми G для функції

$$\frac{m^x e^m}{m!} \text{при } x = 0.1,2,3,\ldots.$$

Дослідження Чебишова про розклад функції однієї змінної отримало широке практичне застосування після появи робіт Шарльє. Запропонована Шарльє формула для узагальненого розподілу Пуассона отримала назву «крива Пуассона — Шарльє» (тип «В»). Узагальнений ряд розподілу Пуассона широко використовується в статистиці у вигляді кривих Шарльє типу «В». Як відмітив в [2] В. С. Немчинов, при обчисленні узагальненої кривої Пуассона замість скінченних різниць зручно користуватись поліномами G.

Список літератури

1. Бородін, О. І., Бугай, А. С. (1973). *Біографічний словник діячів у галузі математики*. Київ: Радянська школа.
2. Немчинов, В. С. (1946). *Полиномы Чебышева и математическая статистика*. Москва: Издание Московской сельхозакадемии им. К. А. Тимирязева.
3. Романовский, В. И. (1938). *Математическая статистика*. Москва.
4. Чебышев, П. Л. (1859). О разложении функции одной переменной. В кн. Собр. соч. т. 1, С. 501—508.
5. Bortkewitsch, L. (1893). Die mittlere Lebensdauer. Die Methoden ihrer Bestimmung und ihr Verhältnis zur Sterblichkeitsmessung. Jena: Gustav Fischer.
6. Charlier, C. V. (1905). Uberdus Fehlergezetz.
7. Jordan, C. (1927). *Statistique mathematique*. Paris.
8. Soper, H. E. (1914). Tables of Poission's binomial limit. *Biometrika*, *10* (1), 25–35.

ПРО ІСТОРІЮ ДОВЕДЕННЯ РОЗБІЖНОСТІ ГАРМОНІЧНОГО РЯДУ

Л. Цуканова, З. П. Ординська
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
Zoya.ord@gmail.com

В історії математики немало таких випадків, коли поставлена математична задача залишалась нерозв'язною протягом десятиліть, а іноді навіть і століть.

До таких відноситься так звана Базельська задача — задача про суму ряду обернених квадратів натуральних чисел, поставлена як виклик для європейських математиків в 1644 році. Лише в 1734 році молодий Леонард Ойлер знайшов відповідь на цю задачу.

Базельська задача формулюється просто: знайти значення суми ряду

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Виникає питання: чи є цей ряд збіжним?

Відомо було, що гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

є розбіжним. Відносно ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ було раніше показано його збіжність до числа <2, але точне значення суми не було знайдено.

Першими математиками світового рівня, що намагалися розв'язати Базельську задачу, були брати Якоб (1654—1703) та Йоган Бернуллі (1667—1748), які народились в Швейцарії (в Базелі). Вони були одними з перших, хто зрозумів і почав застосовувати нове числення, про яке вони дізнались від Ґотфріда Лейбница (1646—1716). Протягом багатьох років брати Бернуллі намагались розв'язати задачу про суму ряду обернених квадратів, проте не досягли успіху. Ґ. Лейбниц теж працював над цією проблемою протягом багатьох років і також не отримав ніякого результату.

Нарешті, в 1734 році, майже через 100 років, Базельську задачу було розв'язано Леонардом Ойлером. Леонард Ойлер (1707—1786) народився в Базелі, і так буває, що його батько знав Йогана Бернуллі. Коли Леонарду було 14 років, його батько попросив Йогана, щоб той навчав сина математиці. Йоган незабаром зрозумів, що його учень має надзвичайні математичні здібності, і учитель та учень помінялись ролями. Йоган рекомендував батькові Леонарда відмовитись від ідеї зробити із сина міністра, і запропонував Леонарду стати математиком. До честі батька, він з ним погодився.

Через декілька років Ойлер був запрошений у Санкт-Петербург, в Росію. І саме там в 1734 р. Ойлер знайшов розв'язок Базельської задачі та здобув славу провідного математика Європи.

Наведемо нестроге пояснення розв'язання задачі.

Розглянемо алгебраїчне рівняння наприклад четвертого степеня:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Припустимо, що його корені b, c, d та e.

Розклад многочлена на лінійні множники

$$(b-x)(c-x)(d-x)(e-x) = 0.$$

Якщо жоден з коренів b, c, d, e не дорівнює нулю, то маємо можливість записати також таку рівність:

$$\frac{(b-x)(c-x)(d-x)(e-x)}{bcde} = (1-\frac{x}{b})(1-\frac{x}{c})(1-\frac{x}{d})(1-\frac{x}{e}) = 0.$$

Скористаємось відомим рядом, що разом з іншими був одержаний Ньютоном:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Нулі синуса $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Першою ідеєю Ойлера було припущення, що теорема про розклад на множники має місце і для нескінченних поліномів.

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

Очевидно, кожна пара множників

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

тому рівність запишеться у вигляді

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Отже, Ойлер одержав, що нескінченна сума дорівнює нескінченному добутку. Звертаємо увагу на той факт, що знаменники в цьому добутку містять ряд квадратів, помножених на π^2.

Постараємось визначити, який коефіцієнт буде при кожному степені x:

Розглянемо скінчений добуток (наприклад, з трьох співмножників)

$$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf.$$

При розкритті дужок кожен елемент добутку, наприклад ace, дорівнює добутку доданків, що беруться від кожної дужки зліва по одному. Так Ойлер замітив, що в нашому нескінченому добутку член, що містить x^2, дорівнюватиме

$$\left(-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-...\right)\frac{1}{\pi^2}x^2.$$

Так як нескінчений добуток дорівнює нескінченому ряду для

$$\frac{\sin x}{x},$$

то коефіцієнт при x^2 має бути

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти та множимо одержану рівність на $-\pi^2$, одержимо

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{6}=1,644934066848...$$

Отже, через 90 років було знайдено відповідь на цю задачу.

У своїй історичній роботі Л. Ойлер встановив ще деякі цікаві результати подібним методом, а саме:

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...=\frac{\pi^4}{90},$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+...=\frac{\pi^6}{945}.$$

Виникає питання: а як з непарними степенями обернених чисел? Виявляється, що подібні методи не працюють для непарних степенів. Протягом всього життя Л. Ойлер намагався знайти ці суми, але так і не зумів цього зробити. Врешті, він сказав «Задача виявляється складною». І сьогодні, понад 300 років потому, ці суми не знайдені.

Виникає питання: чи вартий цей результат, що не має очевидної практичної користі, тих зусиль, які були затрачені. Відповідь проста — це задача з теорії чисел, а в теорії чисел такі питання не виникають.

Прикладом шляху теорії чисел в реальний світ є мала теорема Ферма (1640р), на якій основано алгоритм криптографії і т.д.

Кілька зауважень про розбіжність гармонічного ряду, кожен член якого, починаючи з другого, є середнє гармонічне двох сусідніх його членів:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Якоб Бернуллі довів, що ця сума нескінченна.

Цей ряд може бути розділено на групи доданків

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{5^2}\right)+...$$

Він припустив, що в кожній групі сума доданків рівна одиниці або більше. Якщо так, то сума гармонічного ряду нескінчена, так як вона дорівнює сумі нескінченого числа доданків, кожен з яких одиниця або більше (груп нескінченно багато). Для доведення розглянемо одну групу без першого доданку

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k^2}.$$

Кількість доданків у цій групі $k^2 - k$. Найменший доданок — останній, так що

$$(k^2 - k)\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k^2},$$

або

$$1 - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k^2}.$$

Додаючи до обох частин рівності $\frac{1}{k}$, одержуємо наш результат.

Список літератури

Архипов, Г. И., Садовничий, В. А., Чубариков, В. Н. (1999). *Лекции по математическому анализу. Учебник для университетов и пед. вузов*. Под редакцией В.А. Садовничего. Москва: Высшая школа.

Выгодский, М. Я. (2010). *Справочник по высшей математике*. Москва: Астрель.

Данко, П. Е., Попов, А. Г., Кожевников, Г. Я., Данко, С. П. (2008). *Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов*. Москва: Оникс.

Шипачев, В. С. (2009). *Курс высшей математики*. Под ред. А.Н. Тихонова. Москва: Оникс.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН СТУДЕНТАМ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Т. І. Цюпій

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна

kafedra333@meta.ua

Завданням сучасної економічної науки є широке застосування математичних методів, що разом із глибоким економічним аналізом дає змогу досліджувати процеси та явища, які відбуваються в економіці, передбачати та прогнозувати їхній розвиток, для того щоб приймати обґрунтовані рішення.

Сучасний етап розвитку математики та економіки потребує професіоналів – аналітиків, які повинні володіти не тільки прийомами економіко-математичних методів, а й економічним мисленням; добре знати економічну сторону проблеми, уміти вносити необхідні корективи, доповняти та вдосконалювати розрахунково-аналітичні процеси.

Провідне значення має фундаментальна підготовка студентів економічних спеціальностей, яка забезпечує певний обсяг знань, умінь та навичок, якими вони повинні володіти.

Основними задачами вищого навчального закладу, що відповідає за підготовку фахівців у галузі економіки, є формування у студентів чіткого логічного мислення, яке забезпечить свідомий підхід до отримання знань; навчити студентів самостійно здобувати необхідні їм знання, навчити постійно підвищувати свій кваліфікаційний рівень відповідно до економічних потреб.

Сьогодні неможливо задовольнити все більші потреби до рівня підготовки студентів вищих навчальних закладів, що готують економістів, без поглибленого вивчення таких дисциплін вищої математики, як лінійна алгебра , аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальні рівняння та інші.

Під час складання програми математичної підготовки економістів будь-якого профілю, необхідно враховувати, що кінцева мета такої підготовки, надати спеціалісту з економіки знання та навики для повноцінного виконання професійних обов’язків, яке неможливо без оволодіння сучасними економіко-математичними методами.

Для студентів економічного спрямування паралельно з вивченням розділів лінійної алгебри необхідно вивчати таки питання, як матричні обчислення (зокрема модель міжгалузевого балансу Леонтьева); вивчаючи розділи математичного аналізу, в якому розглядаються функції багатьох змінних, необхідно також розглянути виробничі функції.

При вивченні розділу диференціальних рівнянь необхідно також розглядати динамічні системи в економічних задачах, розглядати різницеві рівняння.

Крім того, важливу роль у загальноосвітній підготовці сучасної людини відіграють також знання з таких дисциплін, як теорія ймовірності та математична статистика.

Без знань з вищезгаданих дисциплін важко сприймати соціальну, політичну, економічну інформацію та приймати на їх основі обґрунтовані рішення.

Теорія ймовірності слугує підґрунтям для математичної та прикладної статистики, які у свою чергу використовуються при плануванні й організації підприємств, при аналізі технологічних процесів, попереджувальному та приймальному контролі якості продукції та для багатьох інших цілей.

Теорія ймовірності та математична статистика, подібно до інших розділів математики, розвивалась з потреб практики; в абстрактній формі вона відображає закономірності притаманні випадковим подіям масового характеру. Ці закономірності відіграють виключно важливу роль у різних галузях природознавства, техніці та економіці.

В останній час в зв'язку з широким розвитком підприємств, що виготовляють масову продукцію результати теорії ймовірності та математичної статистики використовуються не тільки для якісної оцінки вже виготовленої продукції, але що важливіше, для організації самого процесу підприємства (статистичний контроль на підприємстві).

У вищих навчальних закладах з економічним напрямом освіти математичний аналіз, теорію ймовірності та математичну статистику доцільно розглядати як апарат для дослідження економічних явищ і процесів.

Для цього необхідно доповнювати матеріали, що вивчаються студентами, прикладними задачами різних типів фінансово-економічного змісту і тим самим реалізувати прикладну спрямованість цих дисциплін.

Важливо, щоб викладання навчального матеріалу економістам з курсу вищої математики, теорії ймовірності та математичної статистики супроводжувалось достатньою кількістю задач, узятих з життя та зразків їх розв'язання.

Потрібно, щоб таки математичні дисципліни, як математичний аналіз, теорія ймовірності та математична статистика і надалі займали одне із провідних місць у системі вищої освіти.

Сьогодення вимагає впровадження новітніх навчальних технологій у вищих навчальних закладах, що мають економічне спрямування. Тому неможливо розв'язувати численні задачі, що виникають при вивченні більшості економічних дисциплін без використання комп'ютерних технологій. Для цього необхідно створювати нові комп'ютерні курси, розробляти системи, що орієнтовані на використання комп'ютера.

Спеціалісти, що мають добру математичну та економічну підготовку, знають математичні та економічні закони, але не вміють реалізувати їх на комп'ютері, не можуть вважатися спеціалістами сучасного рівня.

Фундаментальні математичні та економічні дисципліни необхідно постійно доповнювати новими методами, розділами, напрямами; тому, що вони відіграють важливу роль в розвитку особистості та дозволяють створювати нові технології, будувати нові економічні моделі.

ПРО ПІФАГОРОВІ ЧИСЛА

Л. М. Чубик, В. О. Гайдей
НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
lida.chkpi@gmail.com

Числа Піфагора або **Піфагорова трійка** — це трійка натуральних чисел $a,\ b$ і c, яка справджує умову теореми Піфагора

$$a^2 + \ b^2 \ = \ c^2.$$

Ці числа зазвичай записують у вигляді $(a,\ b,\ c)$, і найвідоміший приклад — $\left(3,4,5\right)$.

Піфагор був одним із найвпливовіших, геніальних і загадкових постатей свого часу. Він був легендою і джерелом дискусій уже в стародавні часи. Саме завдяки цьому генію і мудрецю, числа перестали використовувати тільки для числення та обчислення, а були вперше оцінені по достоїнству.

Проте найважливішим зв'язком між числами і природою виявилося співвідношення, яке називається теоремою Піфагора.

Хоча теорема, про яку іде мова, назавжди пов'язана з іменем Піфагора, оскільки саме він довів її універсальну істину, стародавні цивілізації використовували частинні випадки цього співвідношення значно раніше.

Наша мова буде іти про прямокутний трикутник зі сторонами $\left(3,\ 4,\ 5\right)$. За однією з версій в стародавньому Єгипті, для побудови прямого кута використовували розділений на 12 рівних частин замкнутий шнур, натягуючи його між трьома кілками так, щоб укладені між кілками частини шнура перебували в співвідношенні $3:4:5$. Мабуть, з тих пір трикутник зі сторонами $\left(3,\ 4,\ 5\right)$ називають єгипетським. Архітектори і будівельники тисячі років використовували ці пропорції при зведенні храмів в Єгипті, Вавилоні, Китаї та інших країнах. В одному з найвидатніших пам'ятників світової архітектури — Піраміді Хеопса.

Ця трійка (3, 4, 5) чисел має декілька чудових властивостей. Наприклад, площа єгипетського трикутника дорівнює 6 — ідеальному числу, безпосередньо наступного за 3, 4, 5. Периметр єгипетського трикутника дорівнює 12 — числу, яке вважалося символом щастя, достатку, повноти (згадаємо 12 місяців року, 12 знаків Зодіаку, 12 апостолів Христа, 12 книг діалогу Платона «Закони»). Трійка (3, 4, 5) — єдина піфагорова трійка, що складається з трьох послідовних натуральних чисел. Більш того, вона — єдина трійка послідовних натуральних чисел, сума кубів яких дорівнює кубу наступного за ними числа:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Рівняння $3^a + 4^b = 5^c$ не має інших натуральних розв'язків, крім

$$a = b = c = 2.$$

Ця трійка не була єдиною, яка була відомою стародавньому народу. В одній з месопотамських глиняних таблиць, датованої приблизно 18 століттям до н.е., міститься математичний текст, який історики науки називають «Plimpton-322» — імені Плімптоновської бібліотеки Колумбійського університету в Нью-Йорці, де вона зберігається. В цій табличці наводиться ряд з 15 трійок чисел виду a^2+b^2, a^2-b^2, $2ab$, які свідчать про те, піфагоровими числами займались ще в глибокій стародавності. Пізніше цими числами зацікавилися Діофант і Ферма.

Щоб отримати піфагорові трійки стародавні математики використовували різні арифментичні тотожності. Піфарог, у свою чергу, використовував тотожність:

$$\left(2n+1\right)^2+\left(2n^2+2n\right)^2=\left(2n^2+2n+1\right)^2,$$

вказавши формули

$$\left(2n+1{,}2n\left(n+1\right){,}2n\left(n+1\right)+1\right),$$

які описують усі піфагорові трійки, що містять два послідовних числа, одне з яких — гіпотенуза.

Платон використав таку тотожність

$$\left(m^2-1\right)^2+\left(2m\right)^2=\left(m^2+1\right)^2,$$

і отримав формули

$$(m^2-1{,}2m{,}m^2+1),$$

які дозволили описати, при парних m, всі піфагорові трійки, в яких гіпотенуза і один із катетів — послідовні непарні числа.

Евклід і Діофант, які використовууючи тотожність

$$\left(m^2-n^2\right)^2+\left(2mn\right)^2=\left(m^2+n^2\right)^2,$$

для взаємно простих чисел $m>n$, розглянули формули

$$(m^2-n^2{,}2mn{,}m^2+n^2),$$

які описували точно один раз кожну піфагорову трійку $(a,\ b,\ c)$ з умовою НСД($a,\ b)\geq 2$.

Але жодна з цих трійок не є універсальною, хоча вони дозволяють отримати нескінченно багато піфагорових чисел.

Якщо $(a,\ b,\ c)$числа Піфагора, то $\forall k\in\mathbb{N}$ числа $(ka,\ kb,\ kc)$ теж піфагорова трійка. *Примітивними Піфагоровими числами* називають взаємно прості $a,\ b$ і c. Для $c\leq 100$ є лише 16 примітивних Піфагорових трійок:

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)
(9, 40, 41)	(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 84, 85)
(16, 63, 65)	(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)	(65, 72, 97)

Неважко перевірити, що $\forall m,n \in \mathbb{N},\ m > n$ числа

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$$

є числами Піфагора. Зауважимо, що тільки якщо min — взаємно прості і одне із них парне, то числа $a,\ b$ і c будуть примітивними. З іншого боку можна довести, що всі примітивні числа Піфагора можна задати подібним чином. Справді, нехай $a,\ b,c$ — деякі примітивні числа Піфагора. Вочевидь, два з них мають бути непарними, а одне — парним. Доведемо, що випадок, коли $a,\ b$ — непарні, а c — парне неможливий. Справді, якщо c є парним, то c^2 ділиться на 4, тоді як

$$a^2 + b^2 = \left(2p+1\right)^2 + \left(2q+1\right)^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1$$

при діленні на 4 дає в остачі 2. Отже, припустимо, що $a,\ c$ - непарні, а b - парне. Записавши $a^2 - c^2 = b^2$ і враховуючи $a^2 - c^2 = \left(a+c\right)\left(a-c\right)$ ділячи на 4 остаточно одержуємо:

$$\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2} = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

У попередній формулі множники в лівій частині є взаємно простими. Інакше їх спільний дільник був би спільним дільником і для $a,\ c$, а значить і для b, що неможливо. Оскільки два множники взаємно прості, а їх добуток є квадратом цілого, то кожне з цих чисел є квадратом цілого. Поклавши, що:

$$\frac{c+a}{2} = m^2,\ \ \frac{c-a}{2} = n^2$$

і виразивши a,b,c через m,n одержуємо необхідні формули.

Першим методом отримання нескінченної кількості прямокутних трикутників зі сторонами, вираженими натуральними числами, вважається метод Піфагора, що складається в наступному: візьмемо непарне число і зробимо його меншим катетом; візьмемо його квадрат, віднімемо з отриманого числа одиницю і половину отриманої різниці зробимо другим катетом; нарешті, додавши одиницю до отриманого числа, отримаємо гіпотенузу. Тобто

$$\left(k,\frac{(k^2-1)}{2},\frac{\left(k^2+1\right)}{2}\right)$$

з непарним k.

Не залишимо без уваги цікаві властивості піфагорових трикутників. А саме:

•рівно один з катетів примітивного піфагорового трикутника ділиться на 3. І це справді так, бо як ми знаємо остача від ділення на 3 може бути тільки 0,1, 2, то квадрати натуральних чисел можуть давати остачу 0 і 1:

$$0^2 \equiv 0\left(mod 4\right),\ 1^2 \equiv 1\left(mod 4\right) \text{ і } 2^2 \equiv \left(-1\right)^2 \equiv 1\left(mod 4\right).$$

Якщо ні один із катетів на 3 не ділиться, то сума їх квадратів дає 2 при діленні на 3, що не може бути квадратом цілого числа.

•Рівно один із катетів цього трикутниука ділиться на 4. Тут можна скористатись ознакою ділення на 4 або якщо уважно подивитись, то число $2mn$ завжди ділиться на 4, бо одне із чисел m, n — парне.

•Рівно одна із сторін цього трикутника ділиться на 5. Тут міркування аналогічні, як при діленні на 3.

•Оскільки одна із сторін піфагорового трикутника ділиться на 4, то з цього випливає, що не існує піфагорового трикутника, всі стронони якого були б простими числами.

•Оскільки числа (3, 4, 5) попарно взаємно прості, то це означає, що добуток катетів будь-якого піфагорового трикутника ділиться на 12, а добуток всіх сторін ділиться на 60.

•А з цього випливає, що площа будь-якого такого трикутника — натуральне число, яке ділиться на 6.

•Теорема Ферма. Для кожного натурального числа n існує n піфагорових трикутників, які мають однакові площі, але попарно різні гіпотенузи.

•Два піфагорові трикутники, які мають однакові площі і однакові гіпотенузи, рівні.

•Нема піфагорових трикутників, у яких хоча б дві сторони були б квадратами.

•У 1643 році в листі до Мерсенна Ферма описав найменший такий трикутник,у якого гіпотенуза і сума катетів — квадрати, сторони яких дорівнюють

$$x = 4565486027761,\ y = 1061652293520\ ,\ z = 4687208610289\ ,$$

де $z = 2165 = 17^2$,$x + y = 2372159^2$.

Таким чином, в основі доповіді лежить теорема Піфагора — фундаментальне геометричне твердження, яке закарбувалося в мозку мільйонів, а то й мільярдів, людей: в будь-якому прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах. Незважаючи на простоту формулювання і доказу, теорема Піфагора є найбільш важливим з усіх взаємозв’язків між числами і природою, отриманих членами піфагорійського братства: вона дає нам співвідношення, яке виконується для всіх прямокутних трикутників і, отже, визначає прямий кут; в свою чергу, прямий кут визначає перпендикуляр, тобто відношення вертикалі до горизонталі, а в кінцевому рахунку — відношення між трьома вимірами нашого світу, тобто саму структуру простору, в якому ми живемо.

Список літератури

Деза, О. И. (2011). *Специальные числа натурального ряда*. Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ».
Серпинский, В. (1959). *Пифагоровы треугольники*. Москва.

О ПОВЫШЕНИИ КВАЛИФИКАЦИИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Э. В. Шалик
Институт повышения квалификации и переподготовки Белорусского государственногоь педагогического университета имени Максима Танка, Минск, Беларусь
shalik_ella@mail.ru

Совершенствование системы образования в современных условиях означает подготовку специалиста, способного осуществлять социальный заказ общества. Одним из путей достижения такой цели служит профильное обучение на III ступени общего среднего образования в учреждениях общего среднего образования. Профильное обучение предусматривает изучение учебных предметов на повышенном уровне и проведение факультативных занятий, которые призваны углублять, расширять и корректировать знания учащихся по учебным предметам, повышать качество образования.

Особую роль в школьном курсе играет математика как учебный предмет. На уроках математики обучающиеся осваивают методы познания окружающего мира — анализ, дедукцию, индукцию, обобщения, аналогии. Для успешного внедрения системы профильного обучения, на наш взгляд, необходимо уделить внимание применению аппарата математического анализа при решении школьных задач.

В связи с эти актуальным является эффективная организация курсов повышения квалификации учителей математики, которые проводятся на базе Института повышения квалификации и перподготовки Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка.

Например, важным представляется рассмотрение вопросов, связанных с применением производной при решении школьных задач. Очень широка область применения производной. Это задачи на преобразование алгебраических выражений и разложение на множители, доказательство тождеств и неравенств, вычисление сумм, решение уравнений, неравенств и систем неравенств, решение задач с параметрами, на оптимизацию и другие.

При организации курсов повышения квалификации нужно учесть, что актуальным является повторение тех тем, опредлений, теорем, которые положены в основу решения перечисленных задач. Поэтому тематическое планирование таких курсов повышения квалификации может состоять из трех главных частей.

В первой части занятий предлагается повторение основных понятий. Для решения практико-ориентированных задач по теме «Производная» нужно знать понятия «функция», «непрерывность», «дифференцируемость», «производная», «монотонная функция», «касательная», «экстремум», знать теоремы о среднем значении для дифференцируемых функций.

Во второй части занятий предлагается вспомнить фундаментальные теоремы математического анализа.

1. Если функция f дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и $f(x) = g(x)$ на интервале (a,b), то $f'(x) = g'(x)$ на интервале (a,b).

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и $f'(x) = g'(x)$ на интервале (a,b), то $f(x) = g(x) + C$ на интервале (a,b).

4. Если функция f определена на некотором промежутке X, во внутренней точке $x_0 \in X$ — дифференцируема и принимает наибольшее (наименьшее) значение, тогда $f'(x_0) = 0$.

5. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и на концах интервала $f(a) = f(b)$, тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

6. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a,b), тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

7. Если функция f дифференцируема на интервале (a,b) и $x_0 \in X$ является точкой локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$.

8. Если функция f непрерывна на промежутке X и имеет единственную точку экстремума $x_0 \in X$, тогда, если x_0 — точка максимума (минимума), то в ней функция принимает наибольшее (наименьшее) значение $f(x_0)$на промежутке X.

После повторения теоретических знаний можно приступать к решению задач.

Приведем несколько примеров из разработанной нами системы задач, которую можно предложить для проведения, например, факультативных занятий по математике.

Необходимо доказать при $x \geq 0$ неравенство

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$. Неравенство будет доказано, если доказать, что при $x > 0$ $f'(x) = -\sin x + x > 0$. Так как $\sin x < x$ при $x > 0$, то справедливость последнего неравенства очевидна. Значит, функция

$f(x)$ возрастает на интервале $(0;+\infty)$. Так как $f(0)=0$ и функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(0;+\infty)$, то $f(x)>0$ для всех $x>0$, следовательно,

$$\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}.$$

С помощью теории экстремумов можно достаточно просто доказывать неравенства типа:

$$\left|a\sin x+b\cos x\right| \leq \sqrt{a^2+b^2};$$

$$x^m(a-x)^m \leq \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+1}}a^{m+n},\ \ m>0, n>0, 0\leq x\leq a.$$

Интересными являются задачи на оптимизацию. Например, из 54π квадратных метров металла необходимо сделать цилиндрический бак. Какими должны быть диаметр и высота бака, чтобы его объём был наибольшим?

Можно предложить задачи на движение. Приведём пример. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки берега A. Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от A. Лодка проплывает по 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какой точке берега должна приплыть лодка, чтобы пассажир достиг села B в кратчайшее время?

Геометрический смысл производной позволяет решать разнообразные геометрические задачи. Например, можно доказать, что кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через постоянную точку есть окружность.

Используя физический смысл производной, можно решать задачи из разных предметных областей. Например, круглый металический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на $0,01$ см/сек. С какой скоростью увеличивается его площадь в тот момент, когда его радиус равен 2 см?

Такого рода задачи повышают профессиональные компетенции педагогов. С другой стороны, умение применять понятия математического анализа позволит учителю расширить знания учеников по математике, повысить математическую культуру и качество обучающихся в рамках школьного курса.

Список литературы

Вавилов, В. В., Мельников, И. И., Олехник, С. Н., Пасиченко, П. И. (1990). *Задачи по математике. Начала анализа* : *справ. пособие*. Москва: Наука.

Петровская, И. Г., Шалик, Э. В. (2012). Подготовка слушателей переподготовки к проведению факультативных занятий по математике. В кн. *Повышение квалификации и переподготовка педагогов: тенденции и перспективы развития : Материалы Респ. науч.-практ. конф., г. Минск, 17 октября 2012 г.* Минск : БГПУ, С.153 (электронное издание).

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ТЕХНІЧНИХ ВИШІВ

І. Л. Шинковська, І. П. Заєць, О. Є. Запорожченко
Національна металургійна академія України, Дніпропетровськ, Україна
kmatem393@gmail.com

Сучасні концепції освіти вимагають нових підходів до викладання математики, направлених на активізацію пізнавальної діяльності студентів і формуванню в них вмінь, пов'язаних із практичним застосуванням отриманих знань. Від молодих спеціалістів чекають не тільки спеціальних професійних знань та вміння працювати з новітніми технічними засобами, але й спроможності аналізувати інформацію, прогнозувати результати своєї діяльності, швидко адаптуватися до нових умов, приймати рішення.

У зв'язку з цим підсилюється роль фундаментальних наук, акцентується увага на їх прикладної спрямованості. Математика, як універсальне приладдя для майбутніх інженерів, мова інженерних досліджень, призвана вирішувати професійні задачі, чим пояснюється необхідність тісного зв'язку викладання математики з потребами майбутньої професійної діяльності.

Під професійною направленістю навчання математики студентів хіміко-технологічних спеціальностей будемо вважати дидактичний принцип, який полягає в цілеспрямованому корегуванні програми і змісту предмета з урахуванням аналізу застосування математичних знань у хімічних технологіях, використання спеціально дібраних педагогічних прийомів та методів, що мають ціллю сформувати математичну готовність майбутнього хіміка-технолога до професійної діяльності.

Зазначимо декілька, на наш погляд, дуже важливих моментів, які б могли привести до комплексної реалізації професійної направленості. Перш за все, на рівні викладання теоретичного курсу математики, необхідно знайомити студентів з аспектами використання математики в майбутній професії, наводити приклади практичних ситуацій, пов'язаних із професійною діяльністю, встановлювати відповідність між суто математичними поняттями та їх інтерпретацією в загальнотехнічних дисциплінах (фізика, фізична хімія, теоретична механіка, електротехніка) та спеціальних дисциплінах (хімічні технології, теплотехніка, прилади і процеси хімічного виробництва), використовувати не тільки аналітичні, але і якісні, чисельні методи.

Зважаючи на це, можна виділити ті розділи вищої математики, які найчастіше використовуються в хімічних технологіях (лінійна і векторна алгебри, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та математична статистика), а також більш професійно вагомі теми відповідних розділів (вектори, градієнт, похідна, визначені та невласні інтеграли, диференціальні рівняння, функції розподілу та інші).

Важливу роль відіграють пропедевтика знань як у самому курсі вищої математики, так і на міжпредметному рівні, організація самостійної роботи студентів із використанням дидактичних матеріалів професійної спрямованості, тестові та контрольні завдання для перевірки знань.

Більш ефективному та глибокому вивченню математики, розумінню причинно-наслідкових зв'язків, а, звідси, підвищенню якості підготовки майбутніх фахівців-хіміків, сприятиме використання задач прикладного характеру.

Будемо вважати, що прикладна задача — це задача, що поставлена за межами предмету математики, але розв'язується математичними методами і засобами. Зауважимо, що прикладна задача повинна відповідати вимогам:

— зміст задачі та її розв'язання мають демонструвати тісний зв'язок між поставленою проблемою професійного змісту та математичним апаратом;

— методи розв'язання необхідно спрямувати на використання теоретичних знань до проблем виробництва;

— задачі повинні відповідати цілям курсу вищої математики.

Наприклад, тема «Похідна та диференціал функції» є однією з центральних в курсі вищої математики. Для відпрацювання навичок обчислення похідних та правил диференціювання, усвідомлення змісту похідної, знаходження найбільшого та найменшого значень, можна запропонувати наступні задачі:

1. Кількість речовини $Q\left(\tau\right)$, що отримується в результаті протікання деякої хімічної реакції за момент часу τ, змінюється за законом $Q\left(\tau\right) = 3\tau^3 - 2\tau^2 + 1$. Визначте швидкість реакції через 5 с від її початку.

2. Реакційний апарат має форму відкритого циліндра. Якими мають бути розміри циліндра, щоб витрати матеріалу при його виготовленні були найменшими?

3. Процес сульфування органічних сполук вимагає використання світла. Визначте висоту, на якій слід розмістити джерело світла, щоб освітленість майданчика була максимальною. Вважати освітленість обернено пропорційною квадрату відстані від джерела світла і прямо пропорційною косинусу кута падіння світлових променів.

Велика кількість задач, пов'язаних з хімічними технологіями, вимагає вміння складати і розв'язувати диференціальні рівняння. В процесі викладання лекційного курсу «Диференціальні рівняння» необхідно надати студентам інформацію про застосування диференціальних рівнянь в якості математичних моделей задач хімічної технології, про етапи математичного моделювання хімічних процесів та навести відповідні приклади:

1. У резервуар, який вміщує 20 л води безперервно зі швидкістю 5 л/хв вливається розчин, кожен літр якого містить 0,2 кг солі. Після перемішування розчин вибігає з резервуара з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в резервуарі через 4 хвилини?

2. Під час хімічної реакції з двох речовин A і B утворюється речовина C. Швидкість реакції постійна і пропорційна добутку кількостей речовин A і B. Визначте закон зміни кількості речовини C.

3. Рідкий бензол підлягає хлоруванню в апараті періодичної дії. Реактор обладнаний пристроєм , який забезпечує повне витрачання хлору, що поступає. Визначте кількість хлору, необхідного для отримання максимального виходу монохлорбензола (вважати, що газ, який виділяється з апарату — тільки хлористий водень).

Нерідко майбутньому інженеру-хіміку доводиться стикатися з виявленням закономірностей в певних процесах, відокремлюючи їх характерні особливості і абстрагуючись від зайвих, несуттєвих деталей. Перед ним постане задача розрізнення випадкових і невипадкових подій, систематизації і опрацьовування результатів спостережень. В цьому випадку першорядне значення мають знання з теорії ймовірностей і математичної статистики. При вивченні цих тем можна використати такі задачі:

1. Скільки існує різних галогенопохідних метану виду $\mathrm{CH_2XY}$, де $\mathrm{X, Y}$ — атоми галогенів.

2. Скільки трипептидів, що містять 3 різних амінокислотних залишків, можна скласти з двох амінокислот?

3. Шість однакових молекул розподілені по двом вічкам. Яка ймовірність, що всі шість опиняться в одному вічку? хоча б 2 опиняться в одному вічку?

4. Перевіркою встановлено, що сірчана кислота, яка надходить до заводу-споживача, в 96 випадках зі 100 є кондиційною, причому в 70% кондиційних партій кислота має концентрацію 76%. Знайти ймовірність, що в наступній партії завод отримає 76% кислоту.

5. Імовірність безвідмовної роботи двох апаратів з перегону спирту на протязі однієї години складає 0,75 і 0,8 відповідно. Яка ймовірність, що обидва апарати працюватимуть без відмов на протязі трьох годин?

Розглядаючи тему «Повторні випробування», радимо скористатися наступними прикладами:

1. Перевіркою встановлено, що в партії з 100 ампул з рідиною 75 не мають дефектів. Знайти ймовірність того, що з узятих навмання 6 ампул 4 не матимуть дефектів. Знайти найімовірніше число придатних ампул серед взятих шести.

2. Зерна порошку в кількості N штук розсипані в безпорядку на поверхні площею S. Знайти ймовірність того, що на поверхні площею a одиниць знаходиться m зерен.

3. При етоксилюванні нітрохлорбензола на виробництві одна з кожних 20 серій може дати недоброякісний нітрофенетол. Скільки серій слід передбачити в проекті, щоб 500 з них виявилися вдалими, забезпечивши таким чином проекту потужність доброякісного продукту?

Вивчення випадкових величин та їх числових характеристик може супроводжуватися розв’язанням таких задач:

1. Ситовий аналіз руди виявив наступні дані:

Крупність зерна, мкм	<100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	>700
Вихід, %	4,9	8,7	38,5	23,1	11,5	6,6	4,1	3,6

Випадкова величина X — розмір зерна. Знайти моду, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини. Дати практичне тлумачення отриманих результатів.

2. Швидкість мономолекулярної хімічної реакції характеризується рівнянням $V = \frac{dx}{d\tau} = -kx$, де x — концентрація речовини, яка зменшується в результаті реакції, τ — час, k — константа швидкості реакції. Знайти середню концентрацію речовини за час від τ_1 до τ_2, якщо його концентрація в момент часу τ_1 була x_1.

Вивчаючи залежності між величинами та ступінь впливу однієї на іншу, розглянемо застосування методів дисперсійного та кореляційного аналізу до розв'язування задач.

1. На рівні значущості $\alpha = 0{,}1$ з'ясувати істотність впливу вмісту каталізатора C на час хімічної реакції τ за даними чотирьох спостережень:

C,%	τ, c			
	1	2	3	4
5	6,3	6,5	5,9	6,8
10	7,4	7,3	7,8	7,0
15	10,2	9,8	9,5	9,6

2. Сировина, що надходить на завод з кар'єру, містить два корисні компонента — мінерали А і В. При цьому в партіях сировини з підвищеним вмістом А зазвичай виявляється і більш високий вміст мінералу В. Аналіз 10 зразків сировині, поставлених на завод в різний час з різних місць кар'єру, наведено в таблиці:

№ зразка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% А	67	54	72	64	39	22	58	43	46	34
% В	24	15	23	19	16	17	20	16	17	13

Чи існує зв'язок між вмістом мінералів A та B? Якщо так, встановити вид цього зв'язку і його тісноту.

Таким чином, професійна направленість навчання вищої математики є пріоритетною у вирішенні проблеми підготовки фахівців. Комплексний підхід до викладання, який передбачає пропедевтику, наповнення змісту дисципліни прикладними задачами та окремими питаннями, які є професійно значущими, організацію самостійної навчальної та дослідницької роботи студентів, в значній мірі сприяє здійсненню цієї направленості і, тим самим, підвищенню якості майбутніх спеціалістів хімічної галузі.

ПРО НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК «КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ»

В. Т. Яцюк

НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна

Теми, викладені в посібнику мають глибокі застосування в багатьох розділах фізики і техніки. Вони складні для розуміння студентами і, в той же час, недостатньо докладно висвітлені в доступній математичній літературі. Стає очевидним, що для кращого засвоєння цього матеріалу студентами, потрібні підручники і навчально-методичні посібники з більш повним і детальним викладом теорії та дохідливою демонстрацією методів розв'язування задач з цих тем.

Анонсований посібник складається з семи параграфів, кожен з яких присвячений одній із традиційних тем вищої математики:

подвійні,
потрійні,
криволінійні (1-го та 2-го родів),
поверхневі (1-го та 2-го родів) інтеграли
і теорія поля.

По кожній темі приведено в доступній формі теоретичний матеріал та розв'язано достатнє число (біля 50) прикладів з необхідними рисунками і поясненнями. Деякі приклади розв'язані різними методами, що дає можливість порівнювати їх ефективність.

У § 6 приведені схеми зведення поверхневих інтегралів 2-го роду до одного подвійного інтеграла в залежності від однозначного проектування поверхні інтегрування на одну з координатних площин. Ці методи рідко зустрічаються в навчальній літературі, а тому будуть корисними при розв'язуванні задач цього типу.

Слід відзначити теоретичну частину § 7 (Теорія поля). Тут, крім традиційного викладу, приведені (з простими доведеннями) теореми про рівносильність у векторному полі таких тверджень:

1. Поле вектора $\overline{a} = P\left(x,y,z\right)\overline{i} + Q\left(x,y,z\right)\overline{j} + R\left(x,y,z\right)\overline{k}$ потенціальне в деякій області $G \subset \mathrm{R}^3$;

2. В області G існує однозначна потенціальна функція $U\left(x,y,z\right)$;

3. $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$ для всіх $L \subset G$;

4. Криволінійний інтеграл $\int\limits_l Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми кривої $l \subset G$;

5. Область G — однозв'язна, $\mathrm{rot}\,\overline{a} = 0$.

Зроблено спробу «Теорію поля» (§ 7) викласти в закінченому вигляді при допомозі формулювання поняття про обернену задачу теорії поля і відповідної теореми (без доведення).

До кожної з семи тем складено по 30 оригінальних завдань для розрахункової роботи. Ці завдання мають служити для самостійної роботи студентів і кращого засвоєння матеріалу з відповідного модуля. Їх можна використовувати також для контрольних робіт.

Маємо надію, що посібник буде корисним як студентам інженерних спеціальностей, так і викладачам вищої математики.

Список літератури

Кузьма, О. В., Яцюк, В. Т. (2016). *Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Основи теорії поля. Навчально-методичний посібник*. Київ: НТУУ «КПІ».

ЗМІСТ

Секція IV. Історія та методика математики

Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

СІМНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

19–20 травня 2016 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

III

Теорія ймовірностей та математична статистика.
Історія та методика математики

Підписано до друку 13.05.2016.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 22.

Зам. № . Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б