Mathematics in Modern Technical University
ISSN 2664-4258

Mathematics in Modern Technical University, 2020(1), 33–45
10.20535/mmtu-2020.1-033

Історія однієї формули

А. С. Ковтун, О. О. Дем'яненко

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
(Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine)

Анотація

Дана стаття має на меті продемонструвати можливості різносторонніх підходів до однієї математичної задачі. Тут наведена історія виникнення формули Муавра–Стірлінга для асимптотики $n!$. Після цього ми наводимо різні способи доведення зазначеної формули. Ці способи використовують, наприклад, означення і геометричний зміст визначеного інтегралу, розклад функцій у степеневий ряд, властивості Гамма-функції Ейлера, а також деякі частини теорії ймовірностей.

Цим прикладом ми хочемо показати різноманітність способів, які можна застосувати до певної математичної задачі, використовуючи лише базовий математичний апарат.

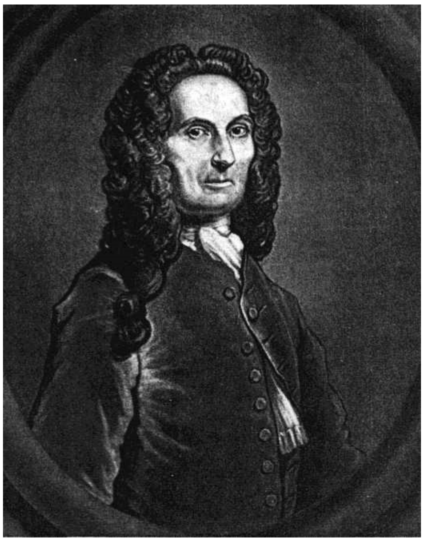
Ключові слова: формула Стірлінга; факторіал; ряд Тейлора.
MSC2010 05A10,60F05
УДК 519.21

0nkovtun0@gmail.com

Cite as: Kovtun, A. S., & Demianenko, O. O. (2020). The story of one formula. *Mathematics in Modern Technical University, 2020*(1), 33–45. 10.20535/mmtu-2020.1-033

1 Вступ

Познайомимося спершу з двома видатними математиками, в роботах яких вперше з'явилася формула, що грає головну роль в даній статті. Авраам де Муавр відомий у світі математики як вчений, що зробив значний вклад у розвиток теорії чисел, комплексного аналізу та, насамперед, теорії ймовірностей. Він є автором книги з теорії ймовірностей "The Doctrine of Chances", а також першим, хто сформулював центральну граничну теорему, одну з найважливіших теорем в теорії ймовірностей. Де Муавр був одним з перших вчених, які займалися розвитком аналітичної геометрії і теорії ймовірностей одразу після закладення фундаменту цих галузей його попередниками, зокрема Х. Гюйгенсом та декількома математиками із сім'ї Бернуллі. Він є автором другої в історії книги з теорії ймовірностей "The Doctrine of Chances: a method of calculating the probabilities of events in play" (перша книга на схожу тему була написана Дж.Кардано в 1560-их і мала назву "Liber de ludo aleae (On Casting the Die)"). Більш пізні видання цієї книги включали результат отриманий де Муавром в 1730-их роках, що полягає у наближенні біноміального розподілу функцією, яка зараз має назву Гауссівська функція.



В процесі роботи над теорією ймовірностей і зокрема властивостями біноміального розподілу, Аврааму де Муавру часто необхідно було обчислювати вирази, що утримували $n!$, наприклад, біноміальні коефіцієнти. Такі обчислення зазвичай займали багато часу, тому у вченого виникла потреба у створенні наближеного обчислення значення факторіалу натурального числа. Таким чином, в 1730 році Авраам де Муавр опублікував книгу "Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis [Analytic Miscellany of Series and Integrals]", в якій була запропонована таблиця наближених значень $\ln(n!)$ для досить великих натуральних значень аргументу. Згадаємо тепер, що в ті часи листування поміж преставниками математичного товариства було ледве не найпопулярнішим способом поширення власних відкриттів і одним з вчених, з яким Муавр вів активне листування, був математик Джеймс Стірлінг.

Джеймс Стірлінг — шотландський математик, що здебільшого працював у галузях дифференціального числення та аналітичної геометрії. Першою роботою Стірлінга була стаття "Lineae Tertii Ordinis Neutonianae" (1717), що розширювала Ньютонівську теорію про пласкі криві третього порядку (в ній Стірлінг додав 4 нових типи кривих до 72 описаних самим Ньютоном). Дана робота була видана в Окфорді і одну з її копій отримав Ісаак Ньютон. "Lineae Tertii Ordinis Neutonianae" містить також інші результати отримані Стірлінгом, одним з яких був розв'язок задачі про ортогональні траєкторії (дана задача була сформульована Лейбніцом і такі математики як Леонард Ойлер та декілька вчених з сім'ї Бернулі намагалися знайти її розв'зок, проте вдалося це зробити Джеймсу Стірлінгу в 1716 році). Незабаром після видання Муавром книги "Miscellanea Analytica de Seriebus et Quad", Джеймс Стірлінг надіслав йому листа, в якому відмічав похибку в підрахунках Муавра, що робило створену таблицю занадто грубою для застосування в процесі досліджень. Також, у цьому листі Стірлінг навів наступне співвідношення:

$$\ln n! = z\ln z - z + \ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\cdot 12z} + \frac{7}{8\cdot 360z^3} - \frac{31}{32\cdot 1260z^5} + \ldots \quad \text{де} \quad z = n + \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Муавр одразу ж впізнав у коефіцієнтах, що утримує права частина, числа Бернулі B_{2k} ($12 = 1\cdot 2\cdot 6,\quad 360 = 3\cdot 4\cdot 30,\quad 1260 = 5\cdot 6\cdot 42$) і розпочав незалежно виводити якнайбільш наближену формулу, що включає більш просту змінну n безпосередньо.

$$\ln n! = (n+\frac{1}{2})\ln n - n + 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\left(\frac{1}{n^{2k-1}} - 1\right) \quad (2)$$

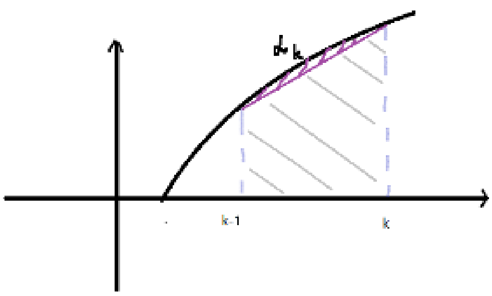
Таким чином, два різних доведення формули, що наразі має назву формула Стірлінга (або ж формула Муавра–Стірлінга), були наведені майже одночасно в книзі Стірлінга "Methodus Differentialis" та в роботі де Муавра ge "Supplementum" to

"Miscellanea Analytica" (в якій Авраам де Муавр процитував Стірлінга і навів формулу (1)).[1]

Не дивлячись на те, що історія виникнення формули Маувра–Стірлінга закінчилась більше, ніж три століття тому, впродовж довгого проміжку часу математики усього світу не тільки активно застосовували отримане наближення в своїх наукових дослідженнях, але й постійно знаходили більш прості або витончені способи доведення цієї формули. Наразі в різноманітній літературі можна налічити щонайменше декілька десятків доведень (у березні 2012 року Стівен Данбар навіть видав статтю з назвою "Десять доведень формули Стірлнга"). І хоча це явище можна розглядати як просто цікавий факт, ми ж використаємо його в констексті методики викладання математики. По-перше, за допомою декількох доведень, наведених нижче ми проілюструємо яким обсягом інформації та дієвих інструментів володіє студент, що прослухав курс математичного аналізу та, можливо суміжних математичних дисциплін (останнє з доведень, наприклад, проводиться з допомогою базових знань з теорії ймовірностей). По-друге, подальші викладки стануть яскравим прикладом того, що до багатьох задач математики завжди існує декілька способів їх розв'язати, адже розвиток нових теорій і методів, а також інтуїція і вигадливість вченого розширюють рамки уявлень про стандартні доведення. Врешті, ми розглянемо сфери застосування формули Стірлінга і зробимо деякі висновки.

2 Основна частина

У 1940 році у журналі "The American Mathematical Monthly" було опубліковано написану П.М. Хаммелем статтю [1], яка подає чітке і лаконічне доведення, яке ми розглянемо першим:



Розглянемо для $k \geqslant 2$

$$\int_{k-1}^{k} \ln x dx > \frac{1}{2}(\ln(k-1) + \ln k)$$

[1]Оригінальні доведення наведені обома вченими в сучасних нотаціях можна знайти в [1]

$$\int_{k-1}^{k} \ln x dx = \frac{1}{2}(\ln(k-1) + \ln k) + \alpha_k \tag{3}$$

Просумуємо отримані рівності для $k = 2, .., n$:

$$\int_{1}^{n} \ln x dx = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + ... + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n$$

$$n \ln n - n + 1 = \ln n! - \frac{1}{2} \ln n + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n$$

$$\ln n! = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1 - (\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n)$$

Оскільки $\forall k \quad \alpha_k > 0$, то $\ln n! < (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1$.
Отже, $n! < n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot e$. Щоб обмежити α_k знизу проінтегруємо (3):

$$\alpha_k = -1 + (k - \frac{1}{2}) \ln \frac{k}{k-1}$$

$$\int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right)^2 dx > 0$$

$$\int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{k \cdot x} + \frac{1}{k^2} \right)^2 dx = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} \cdot \ln \frac{k}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{k-1}{k^2} =$$

$$= \frac{1}{k-1} + \frac{1-k}{k^2} - \frac{2}{k} \ln \frac{k}{k-1} > 0$$

$$\ln \frac{k}{k-1} < \frac{k}{2(k-1)} + \frac{1-k}{2k}$$

$$\alpha_k < -1 + \frac{k^2}{2(k-1)} + \frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \frac{k}{4(k-1)} - \frac{1-k}{4k} < \frac{1}{4k(k-1)}$$

$$\alpha_k < \frac{1}{4k(k-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Таким чином,

$$\alpha_2 + ... + \alpha_n < \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4}.$$

Або

$$\ln n! > (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + 1 - \frac{1}{4} \Longrightarrow n! > e^{3/4} \sqrt{n} n^n \cdot e^{-n}.$$

Отже, автор отримав наближення

$$e\sqrt{n} \cdot n^n \cdot e^{-n} > n! > e^{3/4}\sqrt{n} \cdot n^n \cdot e^{-n}.$$

Тобто,

$$n! \approx C \cdot \sqrt{n} \cdot n^n e^{-n}, \quad \text{де} \quad e^{3/4} < C < e. \tag{4}$$

Таким чином, бачимо, що користуючись лише означення визначеного інтегралу та властивостями логарифму можна отримати результат (4), тобто оцінити O(n!), хоча й знайти точне значення константи C автору не вдалося. Зазначимо також, що метод оцінки залишкового члену, що був застосований, є досить ефектифним при спробі знайти деяке наближення або ж обчислити величину в граничному сенсі.

Розглянемо тепер інше доведення, що було опубліковане пізніше, у 1955 році, у тому самому журналі автором Хербертом Роббінсом [2]: Позначимо спочатку

$$S_n = \ln n! = \sum_{p=1}^{n-1} \ln(p+1)$$

$$\ln(p+1) = A_p + b_p - \epsilon_p$$

$$A_p = \int_p^{p+1} \ln x dx$$

$$b_p = \frac{1}{2}(\ln(p+1) - \ln p)$$

$$\epsilon_p = \int_p^{p+1} \ln x dx - \frac{1}{2}(\ln(p+1) - \ln p).$$

Тоді

$$S_n = \sum_{p=1}^{n-1} (A_p + b_p - \epsilon_p) = \int_1^n \ln x dx + \frac{1}{2}\ln n - \sum_{p=1}^{n-1} \epsilon_p,$$

$$\int \ln x = x \ln x - x \Longrightarrow S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \epsilon_p$$

$$\epsilon_p = \frac{2p+1}{2} \ln \frac{p+1}{p} - 1$$

Використовуючи розклад у ряд Тейлора $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...)$ для $|x| < 1$ і покладаючи

$$x = \frac{1}{2p+1} \Longrightarrow \frac{1+x}{1-x} = \frac{p+1}{p},$$

$$\epsilon_p = \frac{1}{3(2p+1)^2} + \frac{1}{5(2p+1)^4} + ... < \frac{1}{3(2p+1)^2}\left(1 + \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p+1)^4} + ...\right) =$$

$$= \frac{1}{3(2p+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2p+1)^2}} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right)$$

$$\epsilon_p > \frac{1}{3(2p+1)^2}\left(1 + \frac{1}{3(2p+1)^2} + \frac{1}{(3(2p+1)^2)^2} + ...\right) = \frac{1}{3(2p+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3(2p+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+\frac{1}{12}} - \frac{1}{p+1+\frac{1}{12}}\right).$$

Позначимо $B = \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon_p, r_n = \sum_{p=n}^{\infty} \epsilon_p$, причому $\frac{1}{13} < B < \frac{1}{12}$.

$$S_n = (n + \frac{1}{2})\ln n - n + 1 - B + r_n.$$

Або, покладаючи $C = e^{1-B}$, маємо

$$n! = C \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{r_n}, \frac{1}{12n+1} < r_n < \frac{1}{12n}, e^{11/12} < C < e^{12/13}.$$

Дане доведення використовує більш складний математичний апарат. В основі доведення – геометрична ідея: розглянути криволінійну трапецію, що утворена лініями $y = lnx, x = p, x = p+1, y = 0$ як суму прямокутника, прямокутного трикутника і частинки між хордою та кривою $y = \ln x$, тоді скориставшись властивістю логарифма і записавши $\ln n! = \sum_{p=1}^{n-1} \ln(p+1)$, утворивши відповідні до геометричної інтерпретації суми та використавши розклад логарифма в ряд Тейлора зможемо дістати результат більш точний, ніж у минулому методі, проте з все ще невизначеною константою.

Звернемось тепер до доведення приведеного на сторінках журналу у 1986р. [3]: Перепишемо, спочатку, формулу Стірлінга у термінах гама-функції:

$$\Gamma(\alpha) = \left(\frac{\alpha-1}{e}\right)^{\alpha-1} \cdot \sqrt{2\pi(\alpha-1)}, \alpha \to \infty$$

Тоді доведення:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

$$\psi_\beta \ln x - x, \beta = \alpha - 1 \Longrightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{\beta \ln x - x} dx.$$

Функція $\psi_\beta = \beta \ln x - x$ має максимум в точці $x = \beta$ і

$$\psi_\beta(\beta + y) \approx \beta \ln \beta - \beta - \frac{1}{2\beta} y^2$$

$$\Gamma(\alpha) \approx e^{\beta \ln \beta - \beta} \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2\beta} y^2} dy = \left(\frac{\beta}{e}\right)^\beta \cdot \sqrt{2\pi\beta}$$

$$\psi_\beta(\beta + y) \approx \beta \ln \beta - \beta - \beta g\left(y \frac{y}{\beta}\right), \quad \text{де} \quad g(v) = v - \ln(1 + v)$$

$$\Gamma(\alpha) = \left(\frac{\beta}{e}\right)^\beta \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta g(\frac{y}{\beta})} dy.$$

Покладемо $y = \sqrt{\beta z}$

$$\Gamma(\alpha) = \left(\frac{\beta}{e}\right)^\beta \cdot \sqrt{2\rho\beta} \cdot \Gamma_1(\beta), \quad \text{де} \quad \Gamma_1(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\beta}}^\infty e^{-\beta g(\frac{z}{\sqrt{\beta}})} dz.$$

Для подальшого доведення доведемо лему:

$$\lim_{\beta \longrightarrow \infty} \Gamma_1(\beta) = \lim_{\beta \longrightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\beta}}^\infty e^{-\beta g(\frac{z}{\sqrt{\beta}})} dz = 1.$$

Для фіксованого $L < \infty$

$$\Gamma_1(\beta) = \Gamma_L(\beta) + \tau_L(\beta)$$

$$\Gamma_L(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{-\beta g(\frac{z}{\sqrt{\beta}})} dz \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{-\frac{1}{2} z^2} dz, \quad \beta \to \infty.$$

А для малих ν виконується

$$(1 - \epsilon)\frac{1}{2}\nu^2 < g(\nu) < (1 + \epsilon)\frac{1}{2}\nu^2.$$

Залишилось оцінити $\tau_\alpha(\beta)$.Розглянемо верхній хвіст. Позначимо $h(z) = \beta g\left(\frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)$

Тоді $\int_L^\beta e^{-h(z)} dz \leqslant \frac{1}{h'(L)} \int_L^\infty h'(z) e^{-h(z)} dz = \frac{1}{h'(L)} e^{-h(L)} \xrightarrow[\beta \to \infty]{} \frac{1}{L} e^{-\frac{1}{2} L^2}$.

Перша нерівність виконується, адже $h'(z) = \frac{\sqrt{\beta} z}{\sqrt{\beta} + z}$ — зростаюча при $z > 0$.

$$\tau_L(\beta) \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{L} e^{-\frac{1}{2} L^2} + \epsilon,$$

що і завершує доведення.

Діаконіс і Фрідман у своєму варіанті доведення скористалися гама-функцією та її властивостями . Введення додаткових функцій та декілька наближень допомогли спростити подальшу процедуру доведення. Таким чином, дане доведення є більш багатим на застосування математичного інструментарію, ніж попередні.

Варто приділити увагу ще одному доведенню, що також використовує гама-функцію, але напряму:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = |x = \sqrt{n}t| = \int_{-\sqrt{n}}^\infty (n + \sqrt{n}t)^n \cdot e^{-n+\sqrt{n}t} \sqrt{n} dt =$$

$$= \frac{n^n \cdot \sqrt{n}}{e^n} \cdot \int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \cdot e^{-\sqrt{n}t} dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \cdot e^{-\sqrt{n}t} = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(|x^3|), \forall x \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\ln f_n(t)) = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} - n \cdot \frac{t^2}{2n} + n \cdot o\left(\frac{|t^3|}{n\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{-t^2}{2}$$

Отже, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Тоді,

$$n \to \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n} \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}.$$

Провівши заміну від знаком невласного інтеграла та виконавши розклад логарифма в ряд Тейлора із залишковим членом у формі Пеано, привівши наш інтеграл до Пуасонівського отримуємо формулу Стірлінга. Останнє доведення є досить чітким. Тут гама-функція виступає лише як допоміжна, все, що треба про неї знати – це лише її зв'язок із факторіалом та значення в деяких точках, решта доведення базується на вдалій заміні під знаком інтегралу, а також застосуванні формули Тейлора з залишковим членом у формі Пеано.

Ймовірнісні доведення формули Стірлінга

Наведемо спочатку нестроге доведення.

Припустимо, що $X_1, X_2, \ldots$ — незалежні пуассонівски-розподілені випадкові величини з $\lambda = 1$. Покладемо $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Тоді оскільки $\forall j \in \mathbb{N}$ $\mathbf{E}[X_j] = 1, \mathbf{D}[X_j] = 1$, то з властивостей математичного сподівання і дисперсії, а також незалежності в.в. $X_j, j \in \mathbb{N}$ випливає, що $\mathbf{E}[S_n] = n, \mathbf{D}[S_n] = n$.

Використаємо далі Центральну Граничну Теорему і розглянемо

$$\mathbf{P}[S_n = n] = \mathbf{P}[n-1 < S_n \leqslant n] = \mathbf{P}\left[-\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right] \approx$$

$$\approx \int_{-1/\sqrt{n}}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

З іншого боку S_n є є пуассонівською в.в. як сума скінченої кількості пуассонівських в.в., причому $\lambda_n = n$, тому

$$\mathbf{P}[S_n = n] = \frac{e^{-n} n^n}{n!},$$

Поєднавши дві отримані рівності отримаємо $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$. Хоча і наведений вище спосіб не може слугувати точним доведенням формули, він є чудовою ілюстрацією того, як за допомогою базових понять теорії ймовірностей можна доводити теореми математичного аналізу, а також дає ідею для подальшого більш строгого доведення.

Наведемо тепер більш строге ймовірнісне доведення формули.

Розглянемо спочатку в.в. $\theta \sim Pois(\lambda), \lambda > 0$ і згадаємо, що характеристична функція цієї в.в. має вигляд $\hat{p}(\theta, \lambda) = e^{\lambda(e^{i\theta - 1})}$. Відомо також, що характеристина функція однозначно визначає розподіл в.в., тобто розподіл ймовірностей у випадку дискретної в.в. Таким чином, використаємо обернене перетворення Фур'є

$$I_k = p(k, \lambda) = \mathbf{P}(\theta = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{k(e^{i\theta} - 1 - \theta)} d\theta, \quad k = 0, 1, 2....$$

Розглянемо також Гауссівський інтеграл вигляду

$$J_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\theta^2/2} d\theta.$$

Загальним планом є показати, що $I_k \approx J_k$ в деякому строгому сенсі.

Введемо тепер

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta| \leqslant 1} e^{k(e^{i\theta} - 1 - i\theta)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |\theta| \leqslant \pi} e^{k(e^{i\theta} - 1 - i\theta)} d\theta = I_k^{(1)} + I_k^{(2)},$$

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta| \leqslant 1} e^{k\theta^2/2} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |\theta| \leqslant \pi} e^{k\theta^2/2} d\theta = J_k^{(1)} + J_k^{(2)}.$$

Наведемо тепер декілька нерівностей, доведення яких випливає з розладу експоненти у степеневий ряд:

1. Для $A \in \mathbb{C} \quad |e^A| = e^{Re(A)}$,
2. Для $\theta \in \mathbb{R} \quad |e^{i\theta} - 1 - i\theta| \leqslant \theta^2/2$,
3. Для $\theta \in \mathbb{R} \quad |e^{i\theta} - 1 - i\theta + \frac{\theta^2}{2}| \leqslant |\theta|^3/3!$,
4. Для $A, B \in \mathbb{C} \quad |e^A - e^B| \leqslant |A - B|e^{max|Re(A),Re(B)|}$.

Використавши нерівність трикутника, отримаємо

$$I_k^{(2)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{1<|\theta|\leqslant\pi} |e^{k(e^{i\theta}-1-i\theta)}|d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{1<|\theta|\leqslant\pi} e^{k\cdot\cos\theta-1}d\theta \leqslant$$
$$e^{k\cdot(\cos 1-1)}\frac{1}{2\pi}\int_{1<|\theta|\leqslant\pi} d\theta \leqslant e^{k\cdot(\cos 1-1)}$$

Оцінимо тепер

$$J_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|>1} e^{-\frac{k\theta^2}{2}}d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|>1} |\theta|\cdot e^{-\frac{k\theta^2}{2}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{k}\cdot e^{-\frac{k}{2}}.$$

Отже, $I_k^{(2)}$ і $J_k^{(2)}$ прямують до нуля з експоненційною швидкістю.

Розглянемо $I_k^{(1)} - J_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(e^{k(e^i\theta-1-i\theta)} - e^{-\frac{k\theta^2}{2}})d\theta$.

При $|\theta| \leqslant 1$ використаємо (3) і отримаємо наступну оцінку

$$|\cos\theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}| \leqslant |\cos\theta + i\cdot\sin\theta - 1 - i\theta + \frac{\theta^2}{2}| \leqslant |e^{i\theta} - 1 - i\theta + \frac{\theta^2}{2}| \leqslant \frac{|\theta^3|}{3!} \leqslant \frac{\theta^2}{6}.$$

Тоді матимемо

$$|I_k^{(1)} - J_k^{(1)}| = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}|e^{k(e^i\theta-1-i\theta)} - e^{-\frac{k\theta^2}{2}}|d\theta \leqslant k\int_{-1}^{1}\frac{|\theta^3|}{3!}e^{-\frac{k\theta^2}{3}}d\theta = |\phi = \sqrt{k}\theta| =$$

$$= \frac{1}{6k}\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}|\phi^3|e^{\frac{\phi^3}{3}}d\phi = \frac{3}{2k} - \frac{e^{-\frac{k}{3}}}{2} - \frac{3e^{\frac{k}{3}}}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Таким чином,

$$|I_k - J_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \left|\frac{k^k e^{-k}}{k!} - \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}}{k!} = 1$$

Перше з наведених доведень, хоча й не є математично строгим, але є чудовим прикладом вдалої інтеграції суміжних галузей математики в математичний аналіз. Друге з розглянутих доведень задовольняє всі канони математичної строгості і насправді більше нагадує аналітичне доведення з ймовірнісною ідеєю, що тільки підтвержує необхідність вивчення аналізу в перші роки отримання математичної освіти.

Цікаво також, що хоча й одним зі способів доведення правильності формули є застосування ймовірнісного методу, в самій теорії йсовірностей дане наближення стає часто у нагоді (одним з прикладів є початкова ціль отримання апроксимації Стірлінга–Муавра — обчислення біноміальних коефіцієнтів, а згодом і теореми Муавра–Лапласа). Проте це наближення знаходить застосування і в інших галузях також.

3 Висновки

Історія однієї формули — формули Муавра–Стірлінга — є прикладом того, скільки різних способів існує для вирішення однієї математичної задачі. Ці способи можуть використовувати методи з різних математичних галузей; бути строгими в математичному сенсі, чи давати лише натяк на можливе доведення; давати точну відповідь на питання чи встановлювати межі, в яких цю відповідь варто шукати.

Таким чином, дана стаття ілюструє, що навіть базові математичні знання дають можливість розв'язувати непрості задачі математики.

References

Gelinas, J. (2017). Original proofs of Stirling's series for $\log(n!)$. https://arxiv.org/abs/1701.06689

Hummel, P. M. (1940). A Note on Stirling's Formula. *The American Mathematical Monthly*, 47(2), 97—99.

Robbins, H. (1955). A Remark on Stirling's Formula *The American Mathematical Monthly*, 62(1), 26–29.

Diaconis, P., Freedman, D. (1986). An Elementary Proof of Stirling's Formula *The American Mathematical Monthly*, 93(2), 123—125.

А. С. Ковтун, О. О. Дем'яненко (2020). Історія однієї формули. *Mathematics in Modern Technical University, 2020*(1), 33–45.

Submitted: 2020-02-10
Accepted: 2020-04-25

A. S. Kovtun, O. O. Demianenko (2020). The story of one formula. *Mathematics in Modern Technical University, 2020*(1), 33–45.

Abstract. This article aims to represent the diversity of approaches applicable to a certain mathematical problem – Stirling's approximation was chosen here to achieve the mentioned goal. The first section of the work gives a sight of how the formula appeared, from the derivation of an idea to a publication of the strict results. Further, we provide readers with six different proofs of the approximation. Two of them use methods from calculus and mathematical analysis such that properties of logarithmic function and definite integral as well as representing functions as power series. The other two apply the Gamma function due to its connection with the notion of the factorial, namely $\Gamma(n) = n!,\ n \in \mathbb{N}$. The last two have a probabilistic idea in their core: both of them combine Poisson distributed random variables with Central Limit Theorem to yield the desired formula. Some of the given proofs are not mathematically rigorous but rather give a sketch of a strict proof.

Having all the results we assert that this story can be a good example of the variety of methods that can be used to solve one mathematical problem, even though all the listed proofs use only basic knowledge from several mathematical courses.

Keywords: Stirling's formula; factorial; Taylor series.