Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів

з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра»

Криві другого порядку та перетворення прямокутної системи координат на площині

Для студентів першого курсу технічних факультетів

Київ 2013

Криві другого порядку та перетворення прямокутної системи координат на площині: методичні вказівки до самостійної роботи для студентів з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра». Для студентів першого курсу технічних факультетів / Уклад.: О.В. Мулик. – К.: НТУУ «КПІ», 2013.- 68 с.

Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»

(*Протокол № від –.--.2012*)

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів

з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра»

Криві другого порядку та перетворення прямокутної

системи координат на площині

Для студентів першого курсу технічних факультетів

Укладач: *Мулик Олена Василівна*, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний

редактор *Л.А. Репета*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *В.В. Листопадова*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

За редакцією укладача

Електронна версія

Київ 2012

Геометричний зміст алгебричних рівнянь у прямокутній Декартовій системі координат (ПДСК) на площині

У будь-якій ПДСК пряма задається рівнянням першого порядку вигляду $ax+by+c=0$.

Рівняння 2-го порядку і вище можуть визначати реальні криві, сукупності кривих, точки (вироджені криві) або порожню множину (уявні криві). Рівняння 2-го порядку в загальному вигляді записують у вигляді

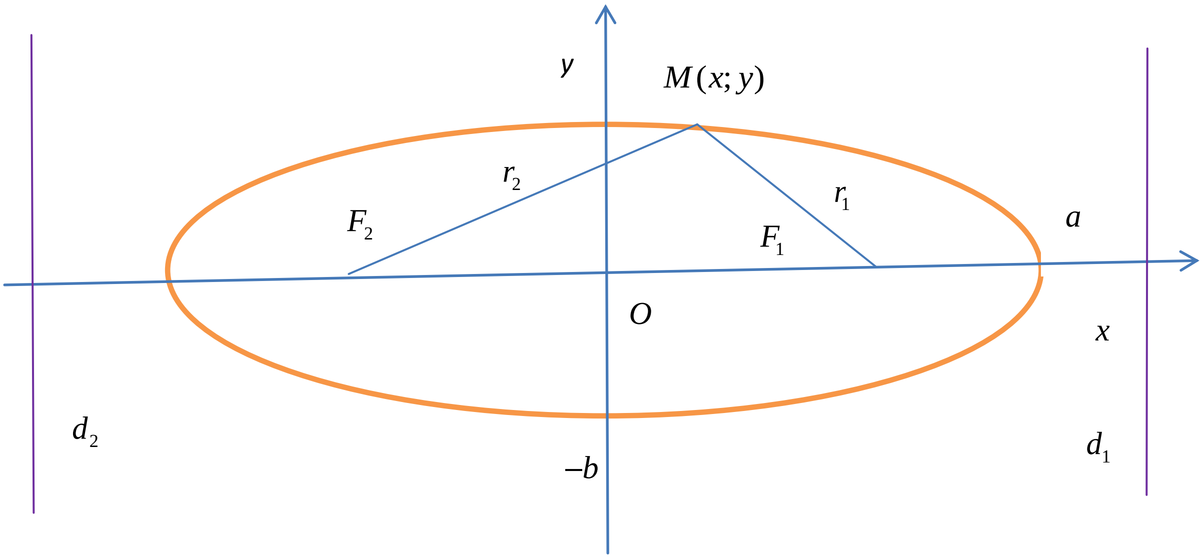
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Твердження. Лінія, яку описує алгебричне рівняння n-го степеня в заданій ПДСК, в будь якій іншій ПДСК буде також описане рівнянням n-го степеня. Тобто характеристики кривої не змінюються при зміні системи координат і залежать від самої кривої (інваріантні щодо системи).

Означення 1. Лінією 2-го порядку на площині називають множину точок площини, прямокутні координати яких справджують алгебричне рівняння 2-го порядку: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, де a_{11},a_{12},a_{22} одночасно не дорівнюють нулю. До таких кривих відносять коло, еліпс, гіперболу і параболу. Кожна з цих ліній має рівняння в певній (канонічній) ПДСК, яке називається канонічним (найпростіше).

Еліпс

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок – фокусів еліпса є величина стала і більша за відстань між фокусами. Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в канонічній системі координат.



Фокуси еліпса позначають літерами F_1 і F_2, а суму відстаней точок еліпса до фокусів через $2a$. Якщо точка $M(x;y)$ належить еліпсу, то за означенням маємо

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Відстань між фокусами позначають через $2c$.

Виведемо канонічне рівняння еліпса. Для цього виберемо так систему координат, щоб фокуси F_1 і F_2 лежали на осі Ox, а вісь Oy проходила через середину відрізка F_1F_2. Тоді фокуси мають координати $F_1(-c;0)$, $F_2(0;c)$. За означенням сума відстаней довільної точки $M(x;y)$ до фокусів дорівнює

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\ .$$

Спростимо це рівняння. Піднесемо до квадрата обидві частини рівності і розкриємо дужки

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

звідки

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Знову піднесемо до квадрата і після спрощення маємо

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Оскільки за означенням $2a>2c$, то різницю у дужках можна позначити $a^2-c^2=b^2$. Тоді остання рівність матиме вигляд

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

або після спрощення

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Величину a називають великою піввіссю еліпса, b – малою піввіссю еліпса, c – половина відстані між фокусами. Ці величини пов'язані між собою співвідношенням $a^2=b^2+c^2$.

Відстань між фокусами $|F_1F_2|$ називають фокусною відстанню: $|F_1F_2|=2c$. Відстань деякої точки еліпса до фокуса називають фокальним радіусом цієї точки: $r_2=a+\varepsilon x$ – лівий фокальний радіус, $r_1=a-\varepsilon x$– правий фокальний радіус. За означенням еліпса для будь-якої його точки: $r_1+r_2=2a>2c$. Прямі d_1 і d_2, перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від початку координат називають директрисами еліпса і задають рівняннями $d=\pm\frac{a}{\varepsilon}$. Віддалі деякої точки еліпса $M(x;y)$ до директрис можна знайти за формулами:

$$\begin{aligned} d_1&=\left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right|=\frac{|a+\varepsilon x|}{\varepsilon}=\frac{r_1}{\varepsilon} \\ d_2&=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|=\frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}=\frac{r_2}{\varepsilon} \end{aligned}.$$

Твердження: Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Еліпс має центральну та осьову симетрії.

Оптична властивість еліпса: якщо помістити в один з фокусів точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі.

При використанні фокального параметра $p = \frac{b^2}{a}$, можна записати рівняння еліпса в полярних координатах. Полюс полярної системи координат вибирають у лівому фокусі еліпса, тоді рівняння еліпса буде мати вигляд $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$.

Параметричне рівняння еліпса: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in 0; 2\pi$.

Приклад 1. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$, знайти ексцентриситет та директриси еліпса.

Розв'язання. Зробимо тотожні перетворення заданого рівняння:

$$9(x^2 - 2x + 1) + 4y^2 = 27 \Leftrightarrow 9(x-1)^2 + 4y^2 = 36.$$

Запишемо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Мала піввісь $b = 3$, велика піввісь $a = 2$, фокусна відстань $2c = 2\sqrt{5}$. Координати фокусів будуть $F_1(1; \sqrt{5}), F_2(1; -\sqrt{5})$. Ексцентриситет еліпса обчислимо, за формулою $\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Рівняння директрис – $d = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Тоді $d = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Приклад 2. Скласти канонічне та полярне рівняння еліпса, якщо відомий ексцентриситет та точка $A(-6; 0)$, що належить еліпсу.

Розв'язання. Оскільки ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$ і координати точки A задовольняють рівняння еліпса, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \\ \frac{36}{a^2} = 1 \end{cases},$$

звідки $a = 6, \quad b^2 = 20$. Тоді фокальний параметр $p = \frac{b^2}{a} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$. Канонічне рівняння даного еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$, полярне рівняння еліпса

$$\rho = \frac{10/3}{1 - 2/3 \cos\varphi} \Rightarrow \rho = \frac{10}{3 - 2\cos\varphi}.$$

Задачі для самостійної роботи:

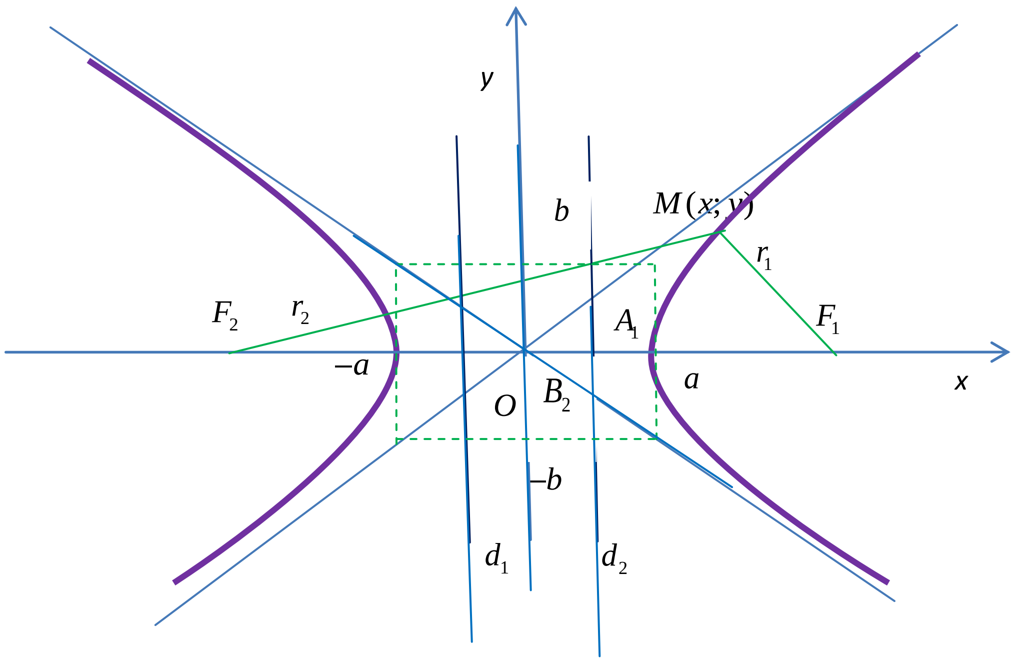
1. На еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ знайти таку точку, різниця фокальних радіус-векторів якої дорівнювала б 6,4.
2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через лівий фокус і нижню вершину еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
3. Скласти рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет $e = 3/5$ і відома точка $M(1;1)$, через яку проходить еліпс.
4. На прямій $x + 5 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від лівого фокуса і верхньої вершини еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.
5. Користуючись означенням еліпса скласти його рівняння, якщо відомо, що точки $F_1(0;0)$ та $F_2(1;1)$ є фокусами еліпса, а довжина великої осі дорівнює 2.

Відповіді:

1. $(4;1,8); (4;-1,8); (-4;1,8); (-4;-1,8)$.
2. $4x + 3y + 12 = 0$.
3. $16x^2 + 25y^2 = 0$.
4. $M(-5;7)$.
5. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$.

Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, які є фокусами, буде величиною сталою (її позначають $2a$) і меншою за відстань між фокусами.



Фокуси гіперболи позначають літерами F_1 і F_2, відстань між фокусами позначають через $2c$, а різницю відстаней точок гіперболи до фокусів через $2a$.

Виведемо канонічне рівняння гіперболи . Для цього виберемо так систему координат, щоб фокуси F_1 і F_2 лежали на осі Ox, а вісь Oy проходила через середину відрізка F_1F_2. Тоді фокуси мають координати $F_1(-c;0)$, $F_2(0;c)$. Якщо точка $M(x;y)$ належить гіперболі, то за означенням маємо

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Після піднесення до квадрату і тотожних перетворень маємо:

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Позначимо через $b^2 = c^2 - a^2$(за означенням $2a < 2c$), і після спрощення отримаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Вершини гіперболи A_1 і A_2 лежать у точках з координатами $(\pm a; 0)$. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають дійсною (фокальною) віссю гіперболи, число b, що входить у рівняння гіперболи називають її уявною піввіссю. Відрізок $B_1B_2 = 2b-$ уявна вісь гіперболи. Вітки гіперболи не перетинають уявну вісь. Точка O є її центром симетрії.

Гіпербола має асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$. Дійсно, якщо розглянути різницю ординат правої гілки гіперболи і прямої $y = \frac{b}{a}x$, то при $x \to \infty$ вона буде прямувати до нуля.

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{\frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})\frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{\frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2})}.$$

Границя даного виразу $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{b}{a}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$.

Асимптоти є діагоналями прямокутника, утвореного дійсною та уявними осями гіперболи, центр якого збігається з центром гіперболи.

Відстані від деякої точки гіперболи $M(x; y)$ до фокусів називають фокальними радіусами точки гіперболи. Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ правої гілки гіперболи обчислюють за формулою $r = \varepsilon x \pm a$, причому $r_1 = \varepsilon x - a-$ правий фокальний радіус, $r_2 = \varepsilon x + a$ – фокальний радіус для лівого фокусу. Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ лівої гілки гіперболи обчислюють за формулами

$$r_1 = -\varepsilon x + a \text{ і } r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Прямі d_1 і d_2, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від її центру називають директрисами гіперболи. Рівняння директрис $d = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Твердження: відношення відстані будь-якої точки гіперболи до фокуса і відповідної директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету. Тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon .$$

Ексцентриситет гіперболи завжди більше одиниці: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Дві вітки гіперболи пов'язані між собою оптичною властивістю: якщо в один з фокусів гіперболи помістити точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса.

Якщо $a = b$ тоді гіпербола називається рівнобічною і її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$. Її асимптоти утворюють прямий кут.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (чи $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$) також є рівнянням гіперболи, але дійсною віссю цієї гіперболи буде відрізок осі Oy довжини $2b$. Дві гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ мають одні й ті самі півосі й одні й ті самі асимптоти, але дійсна вісь одної слугує уявною віссю іншої і навпаки. Такі гіперболи називають спряженими.

Оптична властивість гіперболи: якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса.

Якщо полюс полярної системи координат вибирати у фокусі правої гілки гіперболи, тоді її рівняння буде мати вигляд $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$.

Параметричне рівняння гіперболи: $\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = \pm a \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Скласти канонічне та полярне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(9;8)$, а рівняння її асимптоти $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} x$.

Розв'язання. Підставимо координати точки $M(9;8)$ в рівняння гіперболи $\frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1$та скористаємось рівнянням асимптоти правої гілки гіперболи $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи є числа $a = 3$ і $b = 2\sqrt{2}$, які є дійсною та уявною півосями гіперболи. А її канонічне рівняння запишемо так

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Полярне рівняння гіперболи запишемо, коли знайдемо ексцентриситет ε та фокальний параметр p :

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{17}}{3}, \ p = \frac{b^2}{a} = \frac{8}{3}, \ \rho = \frac{8}{3 - \sqrt{17}\cos\varphi}.$$

Приклад 4. Через точку $M(0;-1)$ та праву вершину гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведено пряму. Знайти другу точку перетину прямої і гіперболи.

Розв'язання. З канонічного рівняння гіперболи знаходимо величини півосей гіперболи $a = 2, b = \sqrt{3}$, тоді координата правої вершини гіперболи буде

$A(2;0)$. Запишемо рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$. Знайдемо другу точку перетину гіперболи з прямою: $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1, \\ 3x^2-4y^2=12. \end{cases}$ Розв'язавши систему отримаємо другу точку $N(-4;-3)$.

Приклад 5. Кут між асимптотами гіперболи дорівнює $\pi/3$. Обчислити ексцентриситет гіперболи.

Розв'язання. Оскільки кут між асимптотами гіперболи $\pi/3$, то кут нахилу однієї з асимптот буде $\pi/6$, відповідно тангенс кута нахилу $1/\sqrt{3}$. Тоді

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Для розв'язку задачі кут між асимптотами гіперболи взятий в напрямку осі OX.

Задачі для самостійної роботи:

1. Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$. Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.
2. Знайти рівняння гіперболи, вершини і фокуси якої знаходяться у відповідних фокусах і вершинах еліпса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$.
3. Через точку $M(0;-1)$ і праву вершину гіперболи $3x^2-4y^2=12$ проведено пряму. Знайти другу точку перетину прямої з гіперболою.
4. Задано гіперболу $x^2-y^2=8$. Знайти рівняння еліпса, який проходить через точку $M(4;6)$ при умові, що його фокуси співпадають з фокусами гіперболи.
5. На лівій гілці гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, для якої правий фокальний радіус-вектор дорівнює 18.

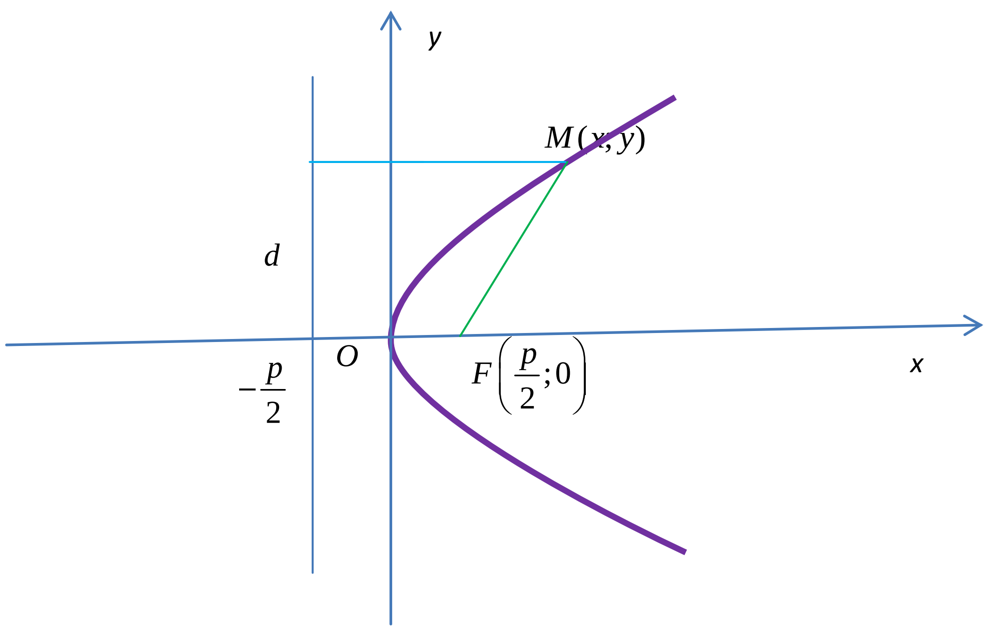
   Відповіді:

1. $x^2-y^2=1$.
2. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

3. $(-4;-3)$.
4. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.
5. $(-8;0)$.

Парабола

Параболою називають геометричне місце всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки, яку називають фокусом і даної прямої, яку називають директрисою. Якщо директрисою d параболи є пряма $x=-\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F(\frac{p}{2};0)$, тоді рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$, де p – фокальний параметр. Така парабола симетрична відносно осі Ox. У випадку, якщо директрисою d параболи є пряма $y=-\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F(0;\frac{p}{2})$,



тоді рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$ і парабола симетрична відносно осі Oy. Параметр може приймати тільки додатні значення. арабола може бути обернена в додатну чи від'ємну сторону осі. Фокальний радіус параболи $y^2 = 2px$ визначається за формулою

$$r = x + \frac{p}{2}, \quad (p > 0),$$

його величина дорівнює відстані до директриси d, звідки випливає, що ексцентриситет параболи дорівнює одиниці. Тому, якщо полюс помістити в фокус параболи, полярну вісь спрямувати вздовж осі симетрії параболи, тоді її полярне рівняння запишеться у вигляді: $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$.

Оптична властивість параболи: якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи – ця властивість називається оптичною властивістю параболи.

Приклад 6. Скласти канонічне та полярне рівняння параболи, якщо її директриса $d\ :\ y = 3$.

Розв'язання. В даному випадку директриса $d:\ -\frac{p}{2} = 3$, рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$ і парабола симетрична відносно осі Oy. Отже канонічне рівняння буде $x^2 = -12y$. Полярне рівняння даної параболи буде: $\rho = \dfrac{6}{\cos\varphi - 1}$.

Приклад 7. Скласти канонічне та полярне рівняння параболи, якщо її вісь симетрії Oy і точка $A(2;-3\sqrt{2})$ належить параболі.

Розв'язання. Підставимо в рівняння параболи $x^2 = 2py$ координати точки A, тоді $p = \sqrt{2}/3$. Тоді канонічне рівняння параболи: $x^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}y$, полярне рівняння даної параболи: $\rho = \frac{\sqrt{2}}{3(c\,os\varphi - 1)}$.

Задачі для самостійної роботи:

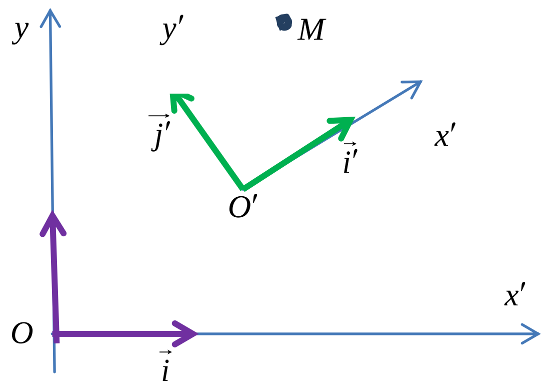
1. На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, відстань від директриси якої дорівнює 4.
2. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричної відносно осі Ox, яка відтинає хорду довжиною $4\sqrt{2}$ від прямої $y = x$.
3. Парабола $y^2 = 2x$ відтинає від прямої, що проходить через початок координат, хорду довжиною $3/4$. Скласти рівняння цієї прямої.
4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо довжина хорди, яка перпендикулярної осі симетрії і ділить навпіл відстань між фокусом і вершиною, дорівнює 1.
5. На параболі $y^2 = 32x$ знайти точку, відстань якої від прямої $4x + 3y + 10 = 0$ дорівнює 2.

Відповіді:

1. $M_1(2;4)\ i\ M_2(2;-4)$.
2. $y^2 = 4x\ i\ y^2 = -4x$.
3. $y = \pm 2\sqrt{2}x$.
4. $y^2 = \sqrt{2}x$.
5. $M(0;0)$, $M(18;-24)$

Перетворення прямокутної системи координат на площині (ПДСК)

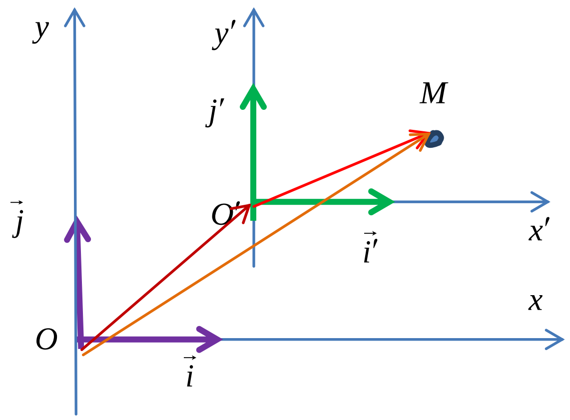
На площині будь-які два не колінеарних вектора утворюють базис. Нехай задано дві прямокутні Декартові системи координат (ПДСК) OXY і $O'X'Y'$ з базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}$, $\vec{i}', \vec{j}'$ відповідно. Нехай точка M у цих системах має координати $M(x;y)$ і $M(x';y')$. Встановимо зв'язок між системами координат.



Якщо ПДСК $O'X'Y'$ одержана з ПДСК OXY паралельним перенесенням, то базисні вектори $\vec{i}=\vec{i}', \vec{j}=\vec{j}'$, а початки координат не співпадають. Вектор $\overrightarrow{OM}$ є сумою векторів $\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}$ або в координатному вигляді:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OO'}&=a\vec{i}+b\vec{j}\\ \overrightarrow{O'M}&=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'\\ \overrightarrow{OM}&=x\vec{i}+y\vec{j}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+a\vec{i}+b\vec{j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=x'+a\\ y=y'+b\end{cases}, \text{ чи } \begin{cases}x'=x-a\\ y'=y-b\end{cases}.$$



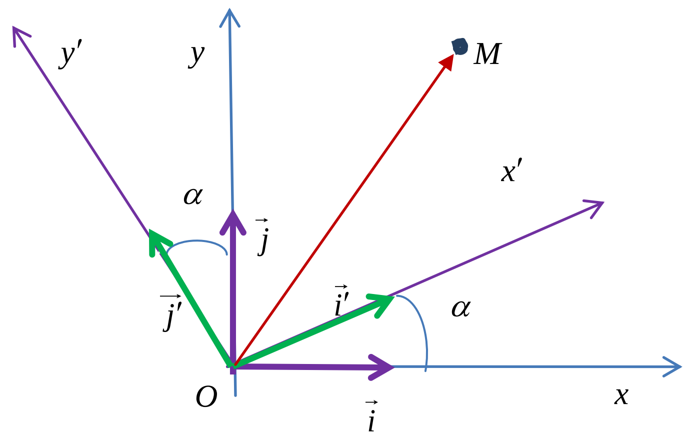
У разі, якщо системи координат мають спільний початок, вектори $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M}$ і координатні осі Ox' та Oy' повернуті на деякий кут α відносно осей Ox та Oy, то орти координатних осей не однакові і їх можна знайти за правилом паралелограма:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha \\ \vec{j}' = -\vec{i}\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \vec{j}\cos\alpha \end{cases}.$$

Знайдемо орти ПДСК OXY через ПДСК

$$O'X'Y': x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = x'(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + y'(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha) = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\vec{i} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\vec{j}.$$



Запишемо для кожної координати відповідну рівність:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}. \tag{1}$$

якщо змінити α на $-\alpha$, знайдемо нові координати через старі,що означає поворот в протилежному напрямку:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}. \tag{2}$$

Твердження: Будь-яке перетворення ПДСК (зі збереженням масштабу) можна подати як послідовність перенесень, повертань, переорієнтувань.

Тобто знаходження координат точки M, яка має координати $(x; y)$ в ПДСК OXY відносно координат $(x'; y')$ в ПДСК $O'X'Y'$ здійснюється рівностями:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases} \tag{3}$$

Запишемо матрицю даної системи: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Її називають ***матрицею переходу***.

Приклад 7. Звести до канонічного вигляду рівняння:
$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$.

Розв'язання. Наявність члена $4xy$ вказує на поворот системи координат на кут α, вільний член 5 означає паралельне перенесення системи координат. Скористаємось формулою (1), підставимо в задане рівняння:

$$5(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+$$
$$+8(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+14(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+5=0. \qquad (*)$$

Зробимо тотожні перетворення:

$$(5\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+(5\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha)y'^2+$$
$$+(6\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha))x'y'+(8\cos\alpha+14\sin\alpha)x'+(14\cos\alpha-8\sin\alpha)y'+5=0. \qquad (**)$$

Коефіцієнт при множнику $x'y'$ дорівнює нулеві, оскільки в канонічне рівняння кривої член axy не входить. Тому:

$$6\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0 \Rightarrow 2\,\mathrm{tg}^2\alpha-3\,\mathrm{tg}\,\alpha-2=0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=2,\ \mathrm{tg}\,\alpha=1/2.$$

Розв'язком рівняння будуть значення кутів, які відповідають двом взаємно перпендикулярним напрямкам. Нехай $\mathrm{tg}\,\alpha=2$, тоді $\sin\alpha=\pm 2/\sqrt{5},\ \cos\alpha=\pm 1/\sqrt{5}$. Візьмемо додатні значення $\sin\alpha=2/\sqrt{5},\ \cos\alpha=1/\sqrt{5}$ і підставимо в (**), маємо:

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0.$$

Виділимо повні квадрати:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Маємо рівняння еліпса з центром в точці $O\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$. Для того, щоб записати його в канонічному вигляді, позначимо паралельне перенесення осей координат: $x'=x''+\frac{2}{\sqrt{5}},\ y'=y''+\frac{1}{4\sqrt{5}}$, тоді рівняння буде мати вигляд

$$\frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1.$$

Задачі для самостійної роботи:

1. Систему координат повернули на кут $\alpha = \pi/6$. Визначити нові координати точки $M(\sqrt{3};3)$.
2. Записати канонічне рівняння параболи $y = 9x^2 - 6x + 2$.
3. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$.
4. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.
5. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

Відповіді:

1. $M' \;\; M(3;\sqrt{3})$.
2. $(x-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}(y-1)$, параметр $p = \frac{1}{18}$, вершина параболи знаходиться в точці $O_1(\frac{1}{3};1)$.
3. $\frac{x''^2}{1/4} + \frac{y''^2}{9/16} = 1$ (рівняння еліпса).
4. $x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$ (рівняння гіперболи).
5. $y''^2 = 4\sqrt{2}x''$ (рівняння параболи).

Лінійне перетворення на площині

Нехай на площині задано базис з двох довільних не колінеарних векторів $\{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$. Розглянемо вектори $\vec{x} = (x_1;x_2)$ та $\vec{y} = (y_1;y_2)$ в цьому базисі.

Означення 1. Перетворення вектора

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} = \vec{x}_{\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}}$$

у вектор

$$\vec{y} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} = \vec{y}_{\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}}$$

означене співвідношенням

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

називають лінійним перетворенням площини, а матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицею перетворення. Векторний вигляд лінійного перетворення: $\vec{y} = A\vec{x}$. Таке лінійне перетворення площини переводить вектори базису $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ у вектори

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} \text{ і } \vec{a_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2}.$$

Тобто стовпці матриці лінійного перетворення є координатами образів базисних векторів. Якщо розглянути поворот ПДСК $O'X'Y'$ на кут α відносно ПДСК OXY тоді базис $\{\vec{i};\vec{j}\}$ переходить у базис $\{\vec{i}';\vec{j}'\}$ і матриця лінійного перетворення

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Визначник даного перетворення $\det A = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Запишемо матрицю переходу базису $\{\vec{i}';\vec{j}'\}$ в базис $\{\vec{i};\vec{j}\}$ (див. (1),(2)):

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A^{-1} = A^T.$$

Квадратні матриці, для яких виконується рівність $A^{-1} = A^T$ називають ***ортогональними***. Вони задають ортогональні перетворення, які зберігають довжини і кути. Визначник таких матриць дорівнює ±1.

У $n-$вимірному просторі $\mathbb{R}^n$ з базисами $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots\vec{e_n}$ і $\vec{e_1'},\vec{e_2'},\ldots\vec{e_n'}$ зв'язок між ними можна записати в матричному вигляді:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{n1}\overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{e_2'} = c_{12}\overrightarrow{e_1} + c_{22}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{n2}\overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{e_3'} = c_{13}\overrightarrow{e_1} + c_{23}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{n3}\overrightarrow{e_n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \overrightarrow{e_n'} = c_{1n}\overrightarrow{e_1} + c_{2n}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{nn}\overrightarrow{e_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1'} \\ \overrightarrow{e_2'} \\ \overrightarrow{e_3'} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \\ \cdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{pmatrix},$$

де матриця перетворення: $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$.

Тоді, якщо відомі координати вектора $\vec{x}$ в цих базисах:

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n} \text{ і } \vec{x} = x_1'\overrightarrow{e_1} + x_2'\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n'\overrightarrow{e_n},$$

то перехід від одного базису до іншого можна записати в матричному вигляді:

$$X = CX' \Rightarrow X' = C^{-1}X.$$

Простір $n-$вимірних векторів $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$ і $\vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + y_n\overrightarrow{e_n}$ є Евклідовим, якщо ввести у ньому операцію скалярного добутку за формулою:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \tag{4}$$

Означення 2: Лінійний простір E називають ***Евклідовим***, якщо кожній парі векторів $\vec{x}, \vec{y}$ з E поставлено у відповідність дійсне число $\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$, яке називають скалярним добутком, що справджує аксіоми:

1. Симетричності: $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{y}, \vec{x}\right)$.

2. Однорідності за першим множником: $\left(\alpha\vec{x}, \vec{y}\right) = \alpha\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$.

3. Лінійності за першим множником: $\left(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}\right) = \left(\vec{x}, \vec{z}\right) + \left(\vec{y}, \vec{z}\right)$.

4. Додатна визначеність: $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = \left|\vec{x}\right|^2 \geq 0, \left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Означення 3. ***Нормою*** (довжиною) вектора $\vec{x} \in \mathrm{E}$ називають число:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\left(\vec{x}, \vec{x}\right)}.$$

Наслідком є формула довжини вектора $n-$вимірного простору $\mathbb{R}^n$:

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2}\ .$$

Для норми вектора і векторів $\vec{x}, \vec{y}$ з E та числа $\lambda \in \mathbb{R}$, справджуються наступні твердження:

1. $\left\|\vec{x}\right\| \geq 0,\ \left\|\vec{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.

2. $\left\|\overrightarrow{\lambda x}\right\| = |\lambda| \left\|\vec{x}\right\|$.

3. Нерівність трикутника: $\left|\left(\overrightarrow{x, y}\right)\right| \leq \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$.

4. Нерівність Коши-Буняковського: $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| \leq \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$.

Вектори $\vec{x}, \vec{y}$ ортогональнимі, якщо їх скалярний добуток $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 0$. Для них справджується « теорема Піфагора»: $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| = \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$.

Кут між двома ненульовими векторами $\vec{x}$ та $\vec{y}$ знаходять за формулою

$$(\vec{x} \,{}^\wedge\, \vec{y}) = \arccos \frac{\left(\vec{x}, \vec{y}\right)}{\left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\|}\ .$$

Систему векторів називають ***ортонормованою***, якщо вектори ортогональні та їх довжина дорівнює одиниці. Наприклад, ПДСК є ортонормованою системою з ортонормованим базисом $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Теорема 1: В будь якому $n-$вимірному Евклідовому просторі E^n можна побудувати ортонормований базис.

Теорема 2: Будь яка ортонормована система з n векторів утворює ортонормований базис простору E^n.

Доведення. Нехай $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots \overrightarrow{x_n} -$ ортонормована система з n векторів Запишемо критерій лінійної незалежності для системи з n векторів:

$$\lambda_1 \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \overrightarrow{x_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{x_n} = 0\ .$$

Якщо дана рівність виконується тільки, коли всі λ_i дорівнюють нулю, тоді вектори $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots \overrightarrow{x_n}$ утворюють базис. Помножимо рівність скалярно на $\overrightarrow{x_j},\ j = \overline{1, n}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots \overrightarrow{x_n}$ ортогональні, то всі скалярні добутки $\left(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_j}\right) = 0$, залишаться лише $\lambda_j\left(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_j}\right)=0$. Тоді λ_j має дорівнювати нулю, що й означає лінійну незалежність даної системи векторів.

Отже ортонормована система з n векторів утворює ортонормований базис простору E^n і будь яку лінійно незалежну систему можна перетворити в ортонормований базис. Процес побудови ортонормованого базису називається ортогоналізацією: нехай вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots\overrightarrow{a_n}$ утворюють базис, перетворимо його в ортогональний. Зробимо дії:

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{a_1}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|},$$

$$\overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{b_2}}{\left|\overrightarrow{b_2}\right|},\ \overrightarrow{b_2}=\overrightarrow{a_2}-\left(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{e_1}\right)\cdot\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3}=\frac{\overrightarrow{b_3}}{\left|\overrightarrow{b_3}\right|},\ \overrightarrow{b_3}=\overrightarrow{a_3}-\left(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{e_1}\right)\cdot\overrightarrow{e_1}-\left(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\overrightarrow{e_2},$$

……………………………………………………………..…,

$$\overrightarrow{e_n}=\frac{\overrightarrow{b_n}}{\left|\overrightarrow{b_n}\right|},\ \overrightarrow{b_n}=\overrightarrow{a_n}-\left(\overrightarrow{a_n},\overrightarrow{e_1}\right)\cdot\overrightarrow{e_1}-\left(\overrightarrow{a_n},\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\overrightarrow{e_2}-\ldots-\left(\overrightarrow{a_n},\overrightarrow{e_{n-1}}\right)\cdot\overrightarrow{e_{n-1}}.$$

Перехід від одного ортонормованого базису до іншого називається ***ортогональним перетворенням***. Раніше було показано, що матриця ортогонального перетворення є квадратною і $\det A\neq 0,\ A^{-1}=A^T$.

Зведення рівнянь ліній 2-го порядку до канонічного вигляду

Для дослідження ліній і поверхонь другого порядку в аналітичній геометрії застосовують теорію квадратичних форм. Для кривої другого порядку

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

вводять поняття квадратичної форми:

Означення 4. Вираз $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ називають ***квадратичною формо***ю змінних x і y. Симетричну матрицю $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$ називають матрицею квадратичної форми.

Матриця A задає певне лінійне перетворення $\vec{Y}=A\vec{X}$. Змінні x і y будуть координатами вектора $\vec{X}$ в двомірному ортонормованому базисі $\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right\}$, тобто

$\vec{X} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ і квадратична форма буде числовою функцією векторного аргументу $\vec{X}$.

Приклад 8: Знайти матрицю A квадратичної форми $Q(x, y) = x^2 - 5xy + 4y^2$.

Розв'язання. Коефіцієнти квадратичної форми $a_{11} = 1, a_{12} = -\frac{5}{2}, a_{22} = 4$, тоді матриця квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$.

Якщо матриця A у деякому базисі має діагональний вигляд $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, тобто $a_{11} = \lambda_1, a_{12} = a_{21} = 0, a_{22} = \lambda_2$, то відповідне рівняння кривої 2-го порядку $Q(x, y)$ буде канонічним.

Твердження: Для будь якої $Q(\vec{X})$ існує базис, де вона має канонічний вигляд.

Власні вектори і власні числа

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Означення 5: Ненульовий стовпець $\vec{X}$ називають ***власним вектором*** квадратної матриці $A_{n\times n}$, якщо існує таке число λ, відмінне від нуля, що $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$. Число λ називають ***власним числом*** матриці A, що відповідає власному вектору $\vec{X}$. Матричне рівняння $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$, $(A - \lambda E_n)\vec{X} = 0$ еквівалентне однорідній системі алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} . \tag{5}$$

Однорідна система матиме ненульові розв'язки, якщо $rang(A - \lambda E_n) < n$. Матрицю системи (5) називають характеристичною матрицею, визначник цієї матриці називають ***характеристичним многочленом*** матриці $(A-\lambda \mathrm{E}_n)$. Вираз $|A-\lambda \mathrm{E}_n|=0$ називають ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Твердження. Власні числа матриці A є коренями характеристичного многочлена $|A-\lambda \mathrm{E}_n|$ цієї матриці. Власні вектори є ненульовими розв'язками однорідної СЛАР (5).

Кількість власних чисел матриці A скінченна і залежить від розміру самої матриці A. Кількість власних векторів є нескінченною, оскільки нескінченна множина розв'язків у однорідної виродженої системи рівнянь.

Приклад 9: Знайти власні числа ї власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

і знайдемо його корені:

$$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+2-2+3-\lambda-8+2\lambda-4+2\lambda=0,\ \lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=5.$$

Підставимо значення власного числа $\lambda_1=1$ в характеристичний многочлен :

$$\begin{vmatrix} 4-1 & -2 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ 1 & -2 & 2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=x_2, \\ x_1=x_3. \end{cases}$$

Відповідно власний вектор має вигляд $\overrightarrow{X_1}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1\in\mathbb{R}$.

Аналогічно для $\lambda_2=3, \lambda_3=5$.

Для $\lambda_2=3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0, \\ -x_1-x_3=0, \\ x_1-2x_2-x_3=0. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0, \\ x_1+x_3=0. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=x_2, \\ x_1=-x_3. \end{cases}$$

Власний вектор: $\overrightarrow{X_2} = C_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, C_2 \in \mathbb{R}$.

Для $\lambda_3 = 5$:

$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\-1 & -2 & -1\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0,\\-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0,\\x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\\x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = x_3,\\x_2 = -x_3.\end{cases}$ Власний вектор $\overrightarrow{X_3} = C_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, C_3 \in \mathbb{R}$.

Алгоритм зведення рівнянь другого порядку до канонічного вигляду.

1. Записують квадратичну форму.

2. Квадратичній формі ставиться у відповідність симетрична матриця.

3. Знаходять ортонормований базис з власних векторів.

4. Записують квадратичну форму в канонічному вигляді.

Приклад 10: Звести до канонічного вигляду рівняння:
$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

Розв'язання. Квадратична форма рівняння має вигляд $Q(x,y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2$; матриця квадратичної форми $A = \begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}$. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\5 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2.$$

Знайдемо власні вектори з розв'язку системи:

$\begin{pmatrix}3-8 & 5\\5 & 3-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -5x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, власний вектор $\overrightarrow{X_1} = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, C_1 \in \mathbb{R}$;

$\begin{pmatrix}3-(-2) & 5\\5 & 3-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 5x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$,

власний вектор $\overrightarrow{X_2} = C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, C_2 \in \mathbb{R}$.

Нормуємо вектори $|\overrightarrow{x_1}| = |\overrightarrow{x_2}| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{X_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$.

Тоді новий базис буде мати вигляд: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}$.

$$3\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')^2 + 10\frac{1}{2}(x' + y')(x' - y') + 3y^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') - 14\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') - 13 = 0,$$

$$\frac{3}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{10}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Після тотожних перетворень маємо:

$$8x'^2 - 2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Виділимо повні квадрати: $8(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2(y' + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 8$, та введемо нові змінні:

$$x = x' - \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Одержимо канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Задачі для самостійної роботи:

1. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.
2. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 225 = 0$.
3. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$.
4. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.
5. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку: $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

Відповіді:

1. $\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{4}=1$ (рівняння еліпса).

2. $y''^2=10x''$ (рівняння параболи).

3. $\frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{4}=1$ (рівняння еліпса).

4. $\frac{x''^2}{25}-\frac{y''^2}{9}=1$ (рівняння гіперболи).

5. $y''^2=2\sqrt{2}x''$ (рівняння параболи).

Список використаної літератури

1. *Ильин В.А.* Аналитическая геометрия [Текст]: учеб. / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М.: Физматлит, 2007. - 224 с. - ISBN 978-5-9221-0511-8.

2. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] / Д. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2008. – 608 с. –ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

3. *Лінійна* алгебра та аналітична геометрія: Навч. Посібник / В.В. Булдигін, І.В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О.О. Диховичний, Н.Р. Коновалова, Л.Б. Федорова; за ред. проф. В.В. Булдигіна. – К.: ТВіМС, 2009. - 224 с.

4. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1: Учеб. Пособие для втузов. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1999. – 304 с. – ISBN 5-06-003070-9.

5. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия [Текст]: учеб. / И. И. Привалов. – М.: Физматлит, 1960. – 299 с.