ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.

Перший курс

1. Які значення може приймати вираз $ab + cd$ за умови, що $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ і $ac + bd = 0$?

2. Знайти геометричне місце точок на площині, координати (x, y) яких задовольняють рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos(x+y) \\ \cos x & 1 & \cos y \\ \cos(x+y) & \cos y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Знайти кількість розв'язків в цілих числах рівняння

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2012^{2014}.$$

4. Нехай $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — гіперболічний тангенс x. Знайти область визначення та побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{th} nx)^{2^n+n}.$$

5. Числову послідовність $(a_n, n \geq 0)$ задано рівностями

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = a_{n-1}^3 + 3a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Довести, що для деякого дійсного числа φ число a_n може бути знайдено за формулою $a_n = \left[\varphi^{3^n}\right]$, де $[\cdot]$ позначає цілу частину. Знайти число φ.

6. Функцію $y(x)$, $x \geq 0$, задано неявно рівністю $x + x^p = y + y^q$, де $0 < p < q < 1$ — фіксовані параметри. Знайти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y^q - x^q}{x^{2q-1}}.$$

7. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, $x > 0$, які задовольняють функціональне рівняння

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

8. Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх інтегровних функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, які для будь-яких $x, y \in [0,1]$ задовольняють нерівність $xf(y) + yf(x) \leq 1$. Довести, що

$$\max_{f\in\mathcal{K}} \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.

Старші курси

1. Позначимо через $\nu(n)$ кількість цифр у десятковому запису числа n. Дослідити на збіжність ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(n)^{\nu(n)}}.$$

2. Знайти геометричне місце точок в просторі, координати (x, y, z) яких задовольняють рівняння
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos(x+y) & \cos(x+y+z) \\ \cos x & 1 & \cos y & \cos(y+z) \\ \cos(x+y) & \cos y & 1 & \cos z \\ \cos(x+y+z) & \cos(y+z) & \cos z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Обчислити суму ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2}.$$

4. Знайти всі функції y, які задовольняють умови
$$\begin{cases} y''(x) + y(x) + y(-x) = 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

5. Послідовність многочленів $\big(P_n(x), n \geq 0\big)$ задано рівностями
$$\begin{cases} P_0(x) = x, \\ P_n(x) = P_{n-1}^3(x) + 3P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Довести, що для деякого дійсного числа φ суму всіх коефіцієнтів S_n многочлена $P_n(x)$ може бути знайдено за формулою $S_n = \left[\varphi^{3^n}\right]$, де $[\cdot]$ позначає цілу частину. Знайти число φ.

6. Функцію $y(x)$, $x \geq 0$, задано неявно рівністю $x + x^p = y + y^q$, де $0 < p < q < 1$ — фіксовані параметри. Знайти
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y^q - x^q}{x^{2q-1}}.$$

7. Знайти всі неперервні функції $f(x)$, $x > 0$, які задовольняють функціональне рівняння
$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

8. Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх інтегровних функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, які для будь-яких $x, y \in [0,1]$ задовольняють нерівність $xf(y) + yf(x) \leq 1$. Довести, що
$$\max_{f \in \mathcal{K}} \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$