

**ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ»  
З МАТЕМАТИКИ, 2014 р.**

*Перший курс*

1. Точки  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^2$  мають таку властивість: для кожної точки  $B \in \mathbb{R}^2$  серед відстаней  $BA_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , є принаймні одна ірраціональна. Яке найменше значення може набувати число  $n$ ?

2. Орбітою  $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y})$  векторів  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$  назвемо множину всіх векторів вигляду  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ , де  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Також назвемо множину  $M \subset \mathbb{R}^2$  замкненою відносно орбіт, якщо  $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y}) \subset M$  для будь-яких  $\vec{x}, \vec{y} \in M$ .

Нехай  $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^2$  — два фіксованих вектори. Знайти найменшу замкнену відносно орбіт множину  $M$ , яка містить  $\vec{x}_0$  та  $\vec{y}_0$ .

3. Квадратна матриця  $A$  порядку  $n$  має ранг  $r$ . Які значення в залежності від  $n$  та  $r$  може набувати ранг приєднаної матриці (тобто матриці, складеної з її алгебраїчних доповнень)?

4. Які значення може набувати визначник

$$\begin{vmatrix} S(A) & S(A \cap B) \\ S(A \cap B) & S(B) \end{vmatrix},$$

де  $A$  та  $B$  — підмножини одиничного круга, а через  $S(\cdot)$  позначено площу?

5. Знайти всі неперервні функції двох змінних  $(f(x, y), x, y \in \mathbb{R}^2)$ , які задовольняють функціональне рівняння

$$f(5x, 5y) + f(4x - 3y, 3x + 4y) = x + y.$$

6. Нехай  $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$ , а

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n \text{ разів}}.$$

Знайти область визначення та побудувати графік функції  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

7. Нехай  $q_1, \dots, q_n$  — фіксовані невід'ємні числа, сума яких дорівнює 1. За яких невід'ємних чисел  $p_1, \dots, p_n$ , сума яких також дорівнює 1, добуток  $\prod_{i=1}^n p_i^{q_i}$  набуває максимального значення?

8. Знайти всі функції  $(f(x), x \in \mathbb{R})$ , які для всіх  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , задовольняють співвідношення

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

9. Довести, що при  $x > 0$

$$1 + \sqrt{1+x^2} < xe^{\frac{1}{x}}.$$

**ВІДКРИТА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ»  
З МАТЕМАТИКИ, 2014 р.**

*Старші курси*

1. Точки  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^d$  мають таку властивість: для кожної точки  $B \in \mathbb{R}^d$  серед відстаней  $BA_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , є принаймні одна ірраціональна. Яке найменше значення може набувати число  $n$  в залежності від  $d$ ?

2. Орбітою  $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y})$  векторів  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$  назвемо множину всіх векторів вигляду  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ , де  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Також назвемо множину  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$  замкненою відносно орбіт, якщо  $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y}) \subset \mathcal{M}$  для будь-яких  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{M}$ .

Нехай  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$  —  $n$  фіксованих векторів. Знайти найменшу замкнену відносно орбіт множину  $\mathcal{M}$ , яка містить всі ці вектори.

3. Квадратна матриця  $A$  порядку  $n$  має визначник  $d$  і ранг  $r$ . Скільки існує таких матриць  $X$ , що  $(X^*)^* = A$ ? Тут через  $X^*$  позначено матрицю, приєднану до матриці  $X$  (тобто складену з її алгебраїчних доповнень).

4. Випадкова величина  $\xi$  має математичне сподівання 1 та дисперсію 5. Які значення може набувати ймовірність події  $\{\xi = 2\}$ ?

5. Знайти всі неперервні функції двох змінних  $(f(x, y), x, y \in \mathbb{R}^2)$ , які задовольняють функціональне рівняння

$$f(5x, 5y) + f(4x - 3y, 3x + 4y) = xy.$$

6. Послідовність додатних чисел  $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  має таку властивість: для будь-якого  $n$  має місце нерівність  $a_n < a_{n+1} + a_n^2$ . Довести, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  розбігається.

7. Знайти функції, які визначені на всій дійсній осі та задовольняють диференціальному рівнянню

$$xy'' + (2x + 2)(y' + y + 1) = 0.$$

8. Нехай  $p \in [0, 1]$  — фіксоване число,  $q = 1 - p$ . Визначити всі такі функції  $(f(x), x \in \mathbb{R})$ , які для всіх  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , задовольняють співвідношення

$$f(pa + qb) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

9. Будемо вважати, що для довільних  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \leq z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

Функцію  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  будемо називати неспадною, якщо для довільних  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  з  $z_1 \leq z_2$  випливає, що  $f(z_1) \leq f(z_2)$ . Знайти всі диференційовні неспадні функції.