РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ВІДКРИТОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ, 2014 р.

Перший курс

Задача 1. Точки $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^2$ мають таку властивість: для кожної точки $B \in \mathbb{R}^2$ серед відстаней $BA_i,\ i = 1, \dots, n$, є принаймні одна ірраціональна. Яке найменше значення може набувати число n?

Розв'язання: Якщо є лише одна точка A_1, то завжди знайдеться така точка B, що $BA_1 \in \mathbb{Q}$. Тому $n \geq 2$.

Двох точок також буде не достатньо. Дійсно, для будь-якої точки B, що належить серединному перпендикуляру до A_1 та A_2, відстані BA_1 та BA_2 збігаються, а отже значення можуть бути раціональними одночасно.

В той же час, завжди можна побудувати три точки із вказаною властивістю. Дійсно, розглянемо точки $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$ та $A_3(\pi, 0)$, а також довільну точку $B(b_1, b_2)$. Якщо $BA_1,\ BA_2 \in \mathbb{Q}$, то $b_1^2 + b_2^2 \in \mathbb{Q}$ і $(b_1 - 1)^2 + b_2^2 \in \mathbb{Q}$, звідки $b_1 \in \mathbb{Q}$. Якщо до того ж і $BA_3 \in \mathbb{Q}$, то $\pi^2 - (2b_1)\pi + (b_1^2 + b_2^2) = (b_1 - \pi)^2 + b_2^2 \in \mathbb{Q}$. Тому π виявляється коренем квадратного рівняння з раціональними коефіцієнтами, що неможливо. Таким чином, $\rho(B, A_3) \notin \mathbb{Q}$.

Відповідь: 3.

Задача 2. Орбітою $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y})$ векторів $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ назвемо множину всіх векторів вигляду $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$, де $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Також назвемо множину $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ замкненою відносно орбіт, якщо $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y}) \subset \mathcal{M}$ для будь-яких $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{M}$.

Нехай $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ — два фіксованих вектори. Знайти найменшу замкнену відносно орбіт множину $\mathcal{M}$, яка містить $\vec{x}_0$ та $\vec{y}_0$.

Розв'язання: Дослідимо властивості множини $\mathcal{M}$ замкненої відносно орбіт.

Оскільки при $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ величина $\alpha + \beta$ набуває всіх значень з відрізку $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, то для будь-якого $\vec{x} \in \mathcal{M}$ має місце включення

$$\{c\vec{x} \colon c \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\} = \{\alpha\vec{x} + \beta\vec{x} \colon \alpha^2 + \beta^2 = 1\} = \mathcal{O}(\vec{x}, \vec{x}) \subset \mathcal{M}.$$

Повторюючи ці міркування n разів, одержимо $\{c\vec{x} \colon c \in [-(\sqrt{2})^n, (\sqrt{2})^n]\} \subset \mathcal{M}$. Спрямовуючи n до нескінченності, маємо $\{c\vec{x} \colon c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}$.

Крім того, для будь-яких $x, y \in \mathcal{M}$ виконується $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} \in \mathcal{M}$. Тому (за доведеним вище) $\vec{x}+\vec{y} \in \mathcal{M}$. Таким чином, $\mathcal{M}$ є лінійним підпростором $\mathbb{R}^2$. Обернене твердження (кожний лінійний підпростір в $\mathbb{R}^2$ є замкненим відносно орбіт) є очевидним.

Тому найменшою множиною $\mathcal{M}$, що включає вектори $\vec{x}_0$ та $\vec{y}_0$, буде їх лінійна оболонка.

Відповідь: лінійна оболонка векторів $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, тобто множина

$$\{C_1\vec{x}_0 + C_2\vec{y}_0,\ \text{де } C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Задача 3. Квадратна матриця A порядку n має ранг r. Які значення в залежності від n та r може набувати ранг приєднаної матриці (тобто матриці, складеної з її алгебраїчних доповнень)?

Розв'язання: Якщо $r = n$, то існує обернена матриця A^{-1}, і $A^* = \det A \cdot (A^{-1})^T$. При цьому $\operatorname{rank} A^* = \operatorname{rank} A^{-1} = n$.

Якщо $r \le n-2$, то всі мінори порядку $n-1$ дорівнюють нулеві. Тому $A^* = O$, і $\operatorname{rank} A^* = 0$.

Розглянемо, нарешті, випадок $r = n-1$. Тоді $\det A = 0$, і тому для будь-якого $i = 1, \dots, n$ маємо $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = 0$. Більш того, для будь-якого фіксованого $k = 1, \dots, n$, $k \ne i$, також $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = 0$. Це стає очевидним, якщо в матриці A замість i-го рядка повторно записати k-ий і розкласти визначник одержаної матриці (рівний нулеві внаслідок наявності двох однакових рядків) за k-им рядком. Таким чином, рядки матриці A^* виявляються лінійно залежними, а лінійні комбінації, які реалізують цю лінійну залежність, визначаються будь-яким рядком матриці A. Оскільки серед рядків матриці A є $n-1$ лінійно незалежний, то $\operatorname{rank} A^* \le 1$. В той же час, він не може бути нульовим, оскільки в цьому випадку було б $A^* = O$, хоча серед мінорів $(n-1)$-го порядку матриці A є принаймні один ненульовий. Отже, $\operatorname{rank} A^* = 1$.

Відповідь: $\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r \le n-2, \\ 1, & \text{якщо } r = n-1, \\ n, & \text{якщо } r = n. \end{cases}$

Задача 4. Які значення може набувати визначник

$$\begin{vmatrix} S(A) & S(A \cap B) \\ S(A \cap B) & S(B) \end{vmatrix},$$

де A та B — підмножини одиничного круга, а через $S(\cdot)$ позначено площу?

Розв'язання: Позначимо

$$a = S(A \setminus B),\ b = S(B \setminus A),\ c = S(A \cap B).$$

Ясно, що $a, b, c \ge 0$, $a + b + c \le \pi$. Тоді шуканий визначник Δ допускає явне обчислення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+c & c \\ c & b+c \end{vmatrix} = ab + ac + bc.$$

З нерівності між середнім арифметичним та середнім квадратичним маємо:

$$0 \le \Delta = \frac{1}{2}\big((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\big) \le \frac{\pi^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3} \le \frac{\pi^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Значення $\Delta = \frac{\pi^2}{3}$ дійсно досягається при $a = b = c = \frac{\pi}{3}$. Рівномірно зменшуючи множини A та B (наприклад, шляхом гомотетії), можемо одержати будь-яке інше значення Δ в проміжку $\left[0, \dfrac{\pi^2}{3}\right]$.

Відповідь: Будь-яке значення з відрізку $\left[0, \dfrac{\pi^2}{3}\right]$.

Задача 5. Знайти всі неперервні функції двох змінних $\big(f(x,y),\ \ x,y \in \mathbb{R}^2\big)$, які задовольняють функціональне рівняння

$$f(5x,5y) + f(4x-3y,3x+4y) = x+y.$$

Розв'язання: Спочатку знайдемо частковий розв'язок у вигляді $f(x,y) = ax+by$. Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$f(x,y) = \frac{x+2y}{15}.$$

Нехай $g(x,y) = f(x,y) - \frac{x+2y}{15}$, тоді

$$g(5x,5y) + g(4x-3y,\ 3x+4y) = 0.$$

Оскільки в $\mathbb{R}^2$ точка з координатами $(4x-3y,\ 3x+4y)$ отримується з точки з координатами $(5x,5y)$ поворотом на кут $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$, то при повороті на кут α знак функції змінюється на протилежний, відповідно при повороті на кут 2α (а отже і на кут $2\alpha k$, $k \in \mathbb{Z}$) значення функції не змінюється.

З того, що $\frac{2\alpha}{2\pi}$ є ірраціональним числом випливає, що множина точок, утворена поворотом деякої точки $(x,y) \neq (0,0)$ на кути $2\alpha k$, $k \in \mathbb{Z}$, буде щільною на колі радіуса $R = \sqrt{x^2+y^2}$ з центром у початку координат. Це означає, що для будь-якого околу довільної точки цього кола існує таке значення $k \in \mathbb{Z}$, що точка отримана поворотом точки (x,y) на кут $2\alpha k$, буде належати вказаному околу. З останнього випливає, що неперервна функція $g(x,y)$ буде сталою на будь якому колі з центром у початку координат.

Покажемо, що $g(x,y) \equiv 0$. Очевидно, що $g(0,0) = 0$. Нехай для деякої точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ $g(x,y) = C \neq 0$. Тоді значення функції g на всьому колі радіуса $R = \sqrt{x^2+y^2}$ з центром у початку координат дорівнює C. Але в точці, яка отримується з (x,y) поворотом на кут α, значення функції g дорівнює $-C \neq C$, протиріччя. Отже, $g(x,y) \equiv 0$ і, відповідно, $f(x,y) \equiv \frac{x+2y}{15}$.

Відповідь: $f(x,y) \equiv \dfrac{x+2y}{15}$.

Задача 6. Нехай $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$, а

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ разів}}(x)\ldots)).$$

Знайти область визначення та побудувати графік функції $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Розв'язання: Позначимо $f_\infty(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Переходячи до границі при $n \to \infty$ в рівності

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)),$$

маємо $f_\infty(x) = f(f_\infty(x))$. Рівняння $f(z) = z$ має лише три розв'язки:

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ z_3 = 1.$$

Розглянемо тепер різні варіанти взаємного розташування x та точок z_1, z_2, z_3. При цьому ми будемо постійно використовувати те, що функція f є неспадною на $\mathbb{R}$.

а) $x > z_3$. Тоді $x < f(x) < f(f(x)) < \ldots$ Оскільки на інтервалі $(z_3, +\infty)$ немає жодного кандидата на роль границі, то $f_\infty(x) = \infty$.

б) $x = z_3$. Тоді $z_3 = x = f(x) = f(f(x)) = \ldots$ Тому $f_\infty(x) = z_3$.

в) $z_2 < x < z_3$. Тоді $x > f(x) > f(f(x)) > \ldots > z_2$. Тому $f_\infty(x) = z_2$.

г) $x = z_2$. Тоді $z_2 = x = f(x) = f(f(x)) = \ldots$ Тому $f_\infty(x) = z_2$.

д) $z_1 < x < z_2$. Тоді $x < f(x) < f(f(x)) < \ldots < z_2$. Тому $f_\infty(x) = z_2$.

е) $x = z_1$. Тоді $z_1 = x = f(x) = f(f(x)) = \ldots$ Тому $f_\infty(x) = z_1$.

є) $x < z_1$. Тоді $x > f(x) > f(f(x)) > \ldots$ Оскільки на інтервалі $(-\infty, z_1)$ немає жодного кандидата на роль границі, то $f_\infty(x) = -\infty$.

Відповідь: Область визначення $\mathcal{D}(f) = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 1\right]$. Сама функція задається співвідношенням

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, & x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

.

Задача 7. Нехай $q_1, \ldots, q_n$ — фіксовані невід'ємні числа, сума яких дорівнює 1. За яких невід'ємних чисел $p_1, \ldots, p_n$, сума яких також дорівнює 1, добуток $\prod\limits_{i=1}^{n} {p_i}^{q_i}$ набуває максимального значення?

Розв'язання: Покажемо, що максимум досягається при $p_i = q_i$, тобто що при довільному іншому наборі $\{p_i\}$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{n} {p_i}^{q_i} < \prod_{i=1}^{n} {q_i}^{q_i}.$$

Якщо при деякому i $q_i \neq 0$, $p_i = 0$, то ліва частина дорівнює 0 і нерівність очевидна. Якщо при деякому i $p_i = q_i = 0$, то нерівність скорочується на відповідний множник. Отже можна вважати, що для всіх i $p_i \neq 0$.

Оскільки функція $\ln x$ монотонна, логарифмуючи, зведемо нерівність до рівносильної:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \ln p_i \ < \sum_{i=1}^{n} q_i \ln q_i\ .$$

Скористаємося нерівністю $\ln x \leq x-1$, де рівність досягається тільки при $x=1$:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \ln p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i \ln q_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \ln \frac{p_i}{q_i} \leq \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{p_i}{q_i} - \sum_{i=1}^{n} q_i = 0,$$

причому рівність досягається тільки при $\frac{p_i}{q_i}=1$ для всіх i, що й треба було довести.

Задача 8. Знайти всі функції $\big(f(x), x \in \mathbb{R}\big)$, які для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, задовольняють співвідношення

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Розв'язання: Якщо покласти $a=\alpha-x,\ b=\alpha+x$, то (1) перепишеться у вигляді

$$2xf(\alpha) = \int\limits_{\alpha-x}^{\alpha+x} f(t)dt.$$

Звідси, зокрема, випливає, що функція f є диференційовною. Диференціюючи це співвідношення за x, одержуємо:

$$2f(a) = f\,(a+x) + f\,(a-x)\,.$$

Знову диференціюючи за x, маємо

$$f'\,(a+x) = f'\,(a-x)\,.$$

В силу довільності вибору a та x, одержуємо, що $f'(x) \equiv \mathrm{const}$. Тому f є лінійною функцією, тобто$f(x)=ax+b$.

Відповідь: лінійні функції вигляду $f(x)=ax+b$.

Задача 9. Довести, що при $x>0$

$$1+\sqrt{1+x^2} < xe^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання: Роблячи заміну $x=\frac{1}{t}$, перейдемо до нерівності $e^t > t+\sqrt{1+t^2}$, яка є очевидною, оскільки для $x>0$

$$e^t > 1+t+\frac{t^2}{2} = t+\sqrt{1+t^2+\frac{t^4}{4}} > t+\sqrt{1+t^2}.$$

Старші курси

Задача 1. Точки $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d$ мають таку властивість: для кожної точки $B \in \mathbb{R}^d$ серед відстаней $BA_i,\ i = 1, \ldots, n$, є принаймні одна ірраціональна. Яке найменше значення може набувати число n в залежності від d?

Розв'язання: Якщо є лише одна точка A_1, то завжди знайдеться така точка B, що $BA_1 \in \mathbb{Q}$. Тому $n \geq 2$ для будь-якого d.

Якщо $d = 1$, то достатньо двох точок A_1 та A_2, наприклад з координатами 0 та π. Дійсно, тоді серед відстаней $BA_1 = |b - 0| = |b|$ та $BA_2 = |b - \pi|$ принаймні одна обов'язково ірраціональна.

Якщо $d \geq 2$ то двох точок вже не буде достатньо. Дійсно, для будь-якої точки B, що належить серединному перпендикуляру до A_1 та A_2, відстані BA_1 та BA_2 збігаються, а отже можуть бути раціональними одночасно.

В той же час, завжди можна побудувати три точки із вказаною властивістю. Дійсно, розглянемо в $\mathbb{R}^d$ точки $A_1(0, 0, \ldots, 0)$, $A_2(1, 0, \ldots, 0)$ та $A_3(\pi, 0, \ldots, 0)$, а також довільну точку $B(b_1, b_2, \ldots, b_d)$. Якщо $BA_1, BA_2 \in \mathbb{Q}$, то

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_d^2 \in \mathbb{Q} \text{ і } (b_1 - 1)^2 + b_2^2 + \ldots + b_d^2 \in \mathbb{Q},$$

звідки $b_1 \in \mathbb{Q}$. Якщо до того ж і $BA_3 \in \mathbb{Q}$, то

$$\pi^2 - (2b_1)\pi + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_d^2) = (b_1 - \pi)^2 + b_2^2 + \ldots + b_d^2 \in \mathbb{Q}.$$

Тому π виявляється коренем квадратного рівняння з раціональними коефіцієнтами, що неможливо. Таким чином, $BA_3 \notin \mathbb{Q}$.

Відповідь: 2 при $d = 1$ та 3 при $d \geq 2$.

Задача 2. Орбітою $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y})$ векторів $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ назвемо множину всіх векторів вигляду $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$, де $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Також назвемо множину $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ замкненою відносно орбіт, якщо $\mathcal{O}(\vec{x}, \vec{y}) \subset M$ для будь-яких $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{M}$.

Нехай $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$ — n фіксованих векторів. Знайти найменшу замкнену відносно орбіт множину $\mathcal{M}$, яка містить всі ці вектори.

Розв'язання: Покажемо, що множина $\mathcal{M}$ замкнена відносно орбіт тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{M}$ є лінійним підпростором простору $\mathbb{R}^d$.

Оскільки при $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ величина $\alpha + \beta$ набуває всіх значень з відрізку $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, то для будь-якого $\vec{x} \in \mathcal{M}$ має місце включення

$$\{c\vec{x}\colon c \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\} = \{\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}\colon \alpha^2 + \beta^2 = 1\} = \mathcal{O}(\vec{x}, \vec{x}) \subset \mathcal{M}.$$

Повторюючи ці міркування n разів, одержимо $\{c\vec{x}\colon c \in [-(\sqrt{2})^n, (\sqrt{2})^n]\} \subset \mathcal{M}$. Спрямовуючи n до нескінченності, маємо $\{c\vec{x}\colon c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}$.

Крім того, для будь-яких $x, y \in \mathcal{M}$ виконується $\frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} \in \mathcal{M}$. Тому (за доведеним вище) $\vec{x}+\vec{y} \in \mathcal{M}$. Таким чином, $\mathcal{M}$ є лінійним підпростором $\mathbb{R}^d$. Обернене твердження (кожний лінійний підпростір в $\mathbb{R}^d$ є замкненим відносно орбіт) є очевидним.

Тому найменшою множиною $\mathcal{M}$, що включає вектори $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, буде їх лінійна оболонка.

Відповідь: лінійна оболонка векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, тобто множина

$$\{C_1\vec{a}_1 + \ldots + C_n\vec{a}_n, \text{ де } C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}\}.$$

Задача 3. Квадратна матриця A порядку n має визначник d і ранг r. Скільки існує таких матриць X, що $(X^*)^* = A$? Тут через X^* позначено матрицю, приєднану до матриці X (тобто складену з її алгебраїчних доповнень).

Розв'язання: Якщо $\operatorname{rank} X = n$, то існує X^{-1}, і $X^* = \det X \cdot (X^{-1})^T$. Звідси випливає, що $\det X^* = (\det X)^{n-1}$. Тому

$$(X^*)^* = \det X^* \cdot \left((X^*)^{-1}\right)^T = (\det X)^{n-2} \cdot X. \tag{$*$}$$

Ця формула залишається справедливою і при $\operatorname{rank} X \le n-1$. Це можна показати двома способами. По-перше, цей факт безпосередньо випливає з задачи 3 для першого курсу. По-друге, його можна довести, скориставшися тим, що до будь-якої виродженої матриці X можна "підібратися" по деяким невиродженим матрицям X_k: $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X$. Оскільки формула $(*)$ виконується для матриць X_k, а операції знаходження приєднаної матриці та взяття детермінанта є неперервними відносно елементів матриці, то формула $(*)$ виконується також для матриці X.

З формули $(*)$ безпосередньо випливає, що рівняння має нескінченну кількість розв'язків при $r = 0$ (розв'язком є будь-яка вироджена матриця X) і не має жодного розв'язку при $1 \le r \le n-1$.

Нехай тепер $r = n$. З формули $(*)$ випливає, що кількість розв'язків рівняння визначається кількістю значень, які може набувати число $(\det X)^{n-2}$ для заданої матриці $A = (X^*)^*$. Але $\det A = \det(X^*)^* = (\det X)^{(n-1)^2}$. Тому при непарних n визначник $\det X$, а отже й число $(\det X)^{n-2}$ може набувати два різних значення при $\det A > 0$ і жодного значення при $\det A < 0$. Якщо ж n є парним, то $(\det X)^{n-2}$ визначається однозначно незалежно від знаку $\det A$.

Відповідь: 2 при $r = n$, n — непарне, $d > 0$; 1 при $r = n$, n — парне; 0 при $1 \le r \le n-1$, а також при $r = n$, n — непарне, $d < 0$; нескінченно багато при $r = 0$.

Задача 4. Випадкова величина ξ має математичне сподівання 1 та дисперсію 5. Які значення може набувати ймовірність події $\{\xi = 2\}$?

Розв'язання: Через $\mathbb{I}(A)$ будемо позначати індикатор випадкової події A.

З нерівності Коші-Буняковського маємо:

$$1 = (-1)^2 = \left(\mathbb{E}(\xi-2)\right)^2 = \left(\mathbb{E}\left((\xi-2)\mathbb{I}(\xi\neq 2)\right)\right)^2 \le \mathbb{E}(\xi-2)^2 \cdot \mathbb{P}\{\xi \neq 2\} =$$
$$= (\mathbb{D}(\xi-2) + (\mathbb{E}\xi - 2)^2) \cdot \left(1 - \mathbb{P}\{\xi = 2\}\right) = 6\left(1 - \mathbb{P}\{\xi = 2\}\right).$$

Звідси $\mathbb{P}\{\xi = 2\} \le \frac{5}{6}$. Рівність досягається на величині ξ, для якої $\mathbb{P}\{\xi = 2\} = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}\{\xi = -4\} = \frac{1}{6}$. Інша крайня ситуація з $\mathbb{P}\{\eta = 2\} = 0$ досягається на розподілі $\mathcal{N}(1, 5)$. Будь-яке проміжне значення ймовірності можна одержати на суміші цих двох розподілів, тобто на випадковій величині θ, яка дорівнює ξ з ймовірністю p та η з ймовірністю $1 - p$.

Відповідь: Будь-яке значення з відрізку $[0, 5/6]$.

Задача 5. Знайти всі неперервні функції двох змінних $\big(f(x, y),\ x, y \in \mathbb{R}^2\big)$, які задовольняють функціональне рівняння

$$f(5x, 5y) + f(4x - 3y, 3x + 4y) = xy.$$

Розв'язання: Спочатку знайдемо частковий розв'язок у вигляді

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$f(x, y) = \frac{-3x^2 + 8xy + 3y^2}{400}.$$

Нехай $g(x, y) = f(x, y) - \frac{-3x^2+8xy+3y^2}{400}$, тоді

$$g(5x, 5y) + g\,(4x - 3y,\ 3x + 4y) = 0.$$

Оскільки в $\mathbb{R}^2$ точка з координатами $(4x - 3y,\ 3x + 4y)$ отримується з точки з координатами $(5x, 5y)$ поворотом на кут $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$, то при повороті на кут α знак функції змінюється на протилежний, відповідно при повороті на кут 2α (а отже і на кут $2\alpha k$, $k \in \mathbb{Z}$) значення функції не змінюється.

З того, що $\frac{2\alpha}{2\pi}$ є ірраціональним числом випливає, що множина точок, утворена поворотом деякої точки $(x, y) \neq (0, 0)$ на кути $2\alpha k$, $k \in \mathbb{Z}$, буде щільною на колі радіуса $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ з центром у початку координат. Це означає, що для будь-якого околу довільної точки цього кола існує таке значення $k \in \mathbb{Z}$, що точка отримана поворотом точки (x, y) на кут $2\alpha k$, буде належати вказаному околу. З останнього випливає, що неперервна функція $g(x, y)$ буде сталою на будь якому колі з центром у початку координат.

Покажемо, що $g(x, y) \equiv 0$. Очевидно, що $g(0, 0) = 0$. Нехай для деякої точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ $g(x, y) = \ \neq 0$. Тоді значення функції g на всьому колі радіуса $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ з центром у початку координат дорівнює . Але в точці, яка отримується з (x, y) поворотом на кут α, значення функції g дорівнює $- \neq$, протиріччя. Отже, $g(x, y) \equiv 0$ і, відповідно, $f(x, y) = \frac{-3x^2+8xy+3y^2}{400}$.

Відповідь: $f(x, y) \equiv \dfrac{-3x^2 + 8xy + 3y^2}{400}$.

Задача 6. Послідовність додатних чисел $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ має таку властивість: для будь-якого n має місце нерівність $a_n < a_{n+1} + a_{n^2}$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Розв'язання: З умови випливає, що

$$a_2 < a_3 + a_4 < a_4 + a_5 + a_9 + a_{16} < a_5 + a_6 + a_{10} + a_{16} + a_{17} + a_{25} + a_{81} + a_{256} < a_6 + \ldots$$

Якщо вдасться довести, що в жодній сумі немає однакових індексів, то звідси для будь-якого $n \geq 3$ буде випливати нерівність $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k > a_2$. З цього випливатиме розбіжність ряду.

Покажемо, що в жодній вищевказаній сумі немає однакових індексів. Нехай це не так, і вони вперше з'являються в сумі $a_k + \ldots$ Більш точно, будемо вважати, що деякий доданок a_{n^2} з цієї суми породжується одночасно двома доданками з попередньої суми — a_n та a_{n^2-1}. Оскільки n^2-1 не є повним квадратом, то він породжується a_{n^2-2}. Але й n^2-2 не є повним квадратом і має породжуватися n^2-3. Ці міркування можна повторювати, поки ми не дійдемо до a_{n^2-2n+1}. Тому $k - 2n + 1 \geq 2$, тобто $k \geq 2n+1$. З іншого боку, як вже було відзначено, в сумі $a_{k-1} + \ldots$ є доданок a_n. Тому $n \geq k-1$. З цих двох нерівностей $k \leq 1$, що неможливо (навіть перша "сума" починається з a_2 і містить лише його).

Задача 7. Знайти функції, які визначені на всій дійсній осі та задовольняють диференціальному рівнянню

$$xy'' + (2x+2)(y' + y + 1) = 0.$$

Розв'язання: Зробимо на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ заміну $y = \frac{p}{x}$. Після підстановок та скорочення прийдемо до рівняння

$$p'' + 2p' + 2p + 2(x+1) = 0$$

з загальним розв'язком

$$p(x) = -x + e^{-x}(a\cos x + b\sin x),\ \ y(x) = -1 + \frac{e^{-x}}{x}(a\cos x + b\sin x).$$

Якщо $a \neq 0$, то функція не має границі в точці 0, тому $a = 0$. В силу неперервності $y\,(0) = b - 1$. Отримана функція

$$y = \left\{ \begin{array}{c} -1 + be^{-x}\frac{\sin x}{x},\ \ x \neq 0 \\ b-1,\ \ x = 0 \end{array} \right. ,$$

є, як неважко показати, двічі неперервно диференційованою на $\mathbb{R}$ і задовольняє умову задачі.

<u>**Відповідь:**</u> $y = \left\{ \begin{array}{c} -1 + be^{-x}\frac{\sin x}{x},\ \ x \neq 0 \\ b-1,\ \ x = 0 \end{array} \right. .$

Задача 8. Нехай $p \in [0,1]$ — фіксоване число, $q = 1-p$. Визначити всі такі функції $\big(f(x), x \in \mathbb{R}\big)$, які для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, задовольняють співвідношення

$$f\,(pa + qb) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Розв'язання: Оскільки $p(a-qx)+q(a+px)=a$, ми можемо переписати умову у вигляді

$$xf(a)=\int\limits_{a-qx}^{a+px} f(t)\,dt.$$

Звідси, зокрема, випливає, що функція f є диференційовною. Диференціюючи це співвідношення за x, одержуємо:

$$f(a)=pf(a+px)+qf(a-qx).$$

Знову диференціюючи за x, маємо

$$p^2f'(a+px)=q^2f'(a-qx). \qquad (*)$$

Якщо $p\neq\frac{1}{2}$, то, покладаючи $x=0$, маємо $f'(a)=0$. Зважаючи на довільність вибору a, одержуємо, що $f\equiv\text{const}$.

Якщо ж $p=q=\frac{1}{2}$, то з $(*)$ маємо $f'(a+px)=f'(a-qx)$. Зважаючи на довільність вибору a та x, одержуємо, що $f'\equiv\text{const}$. Тому f — лінійна функція вигляду $ax+b$.

Відповідь: лінійні функції вигляду $f(x)=ax+b$ при $p=\frac{1}{2}$; константи $f(x)=c$ при $p\neq\frac{1}{2}$.

Задача 9. Будемо вважати, що для довільних $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$

$$z_1\leq z_2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\operatorname{Re}z_1\leq\operatorname{Re}z_2,\\ \operatorname{Im}z_1\leq\operatorname{Im}z_2.\end{cases}$$

Функцію $f\ :\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ будемо називати неспадною, якщо для довільних $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ з $z_1\leq z_2$ випливає, що $f(z_1)\leq f(z_2)$. Знайти всі диференційовні неспадні функції.

Розв'язання: Нехай $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, тоді за умовою функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ є неспадними за кожним аргументом при фіксованому іншому, тобто часткові похідні $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ є невід'ємними, а оскільки за умовою Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

то $\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0$, звідки функція $u(x,y)=u(x)$ не залежить від y, а $v(x,y)=v(y)$ не залежить від x. Також за умовою Коші-Рімана для кожних $x,y\in\mathbb{R}$ виконується

$$\frac{du(x)}{dx}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{dv(y)}{dy},$$

звідки $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=c\geq 0$, оскільки частинні похідні невід'ємні. Тому $u(x,y)=cx+a$, $v(x,y)=cy+b$ і

$$f(z)=z+(a+bi)=cz+d,\ c\geq 0,\ d\in\mathbb{C}.$$

Така функція, очевидно, задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(z)=cz+d$, $c\geq 0$, $d\in\mathbb{C}$.