ФІОТ НТУУ "КПІ"
СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.

Перший курс

Задача 1. Дослідити систему на сумісність та знайти загальний розв'язок

$$\begin{cases} (2\lambda-3)x+(\lambda-1)y+z=\lambda \\ (\lambda-1)x+(\lambda-1)y+z=2 \\ x+y+(\lambda-1)z=2 \end{cases}$$

1. Запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda-3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right) \mathrm{II}+\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 4 \\ 1 & 1 & \lambda-1 & 2 \end{array}\right) \mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 4 \end{array}\right).$$

Розглянемо можливі випадки:

I. Якщо $\lambda=2$, то розширена матриця системи прийме вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Відповідно, система сумісна і невизначена, тобто має безліч розв'язків. Її загальний розв'язок буде мати вигляд

$$\begin{cases} x=2-s-t, \\ y=s, \\ z=t, \end{cases} \qquad s,t\in\mathbb{R}$$

II. Якщо $\lambda = 0$, тоді розширена матриця системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

тобто система не має розв'язків.

III. Якщо $\lambda \neq 0$ та $\lambda \neq 2$, то розширену матрицю системи можна переписати у вигляді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{\lambda}-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \frac{4}{\lambda}-2 \end{array}\right).$$

Записавши відповідну систему будемо мати

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + (\lambda - 1)z = 1 \\ z = \frac{2}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2-\lambda}{\lambda} \\ z = \frac{2}{\lambda} \end{cases}.$$

<u>Відповідь:</u> Якщо $\lambda = 0$, то система розв'язків не має; якщо $\lambda = 2$ система має безліч розв'язків, загальтий розв'язок

$$x = 2 - s - t,\ y = s,\ z = t,\ s, t \in \mathbb{R};$$

якщо $\lambda \neq 0$ та $\lambda \neq 2$, то система має єдиний розв'язок

$$x = 1,\ y = \frac{2-\lambda}{\lambda},\ z = \frac{2}{\lambda}.$$

<u>Задача 2.</u> На площині задано дві точки $A(-2;2)$, $B(2;5)$ та точку C взято на кривій $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$. Яке найбільше значення може мати площа ΔABC? Знайти координати точки C.

<u>2.</u> Помітимо, що точка C буде лежати на колі $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, з центром в точці $O'(1,-2)$.

Площа ΔABC $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$ буде максимальною при найбільшій довжині висоти, оскільки AB – фіксоване. Довжина висоти CH буде найбільшою, якщо вона буде проходити через центр кола.

Знайдемо рівняння висоти. Для цього спочатку визначимо рівняння прямої AB, як прямої, що проходить через точки A та B:

$$AB: \ \frac{x+2}{2+2} = \frac{y-2}{5-2} \ \Leftrightarrow \ 3x - 4y + 14 = 0.$$

Тоді рівняння CH, як прямої, яка проходить через O' перпендикулярно до AB буде мати вигляд

$$CH: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} \ \Leftrightarrow \ 4x + 3y + 2 = 0.$$

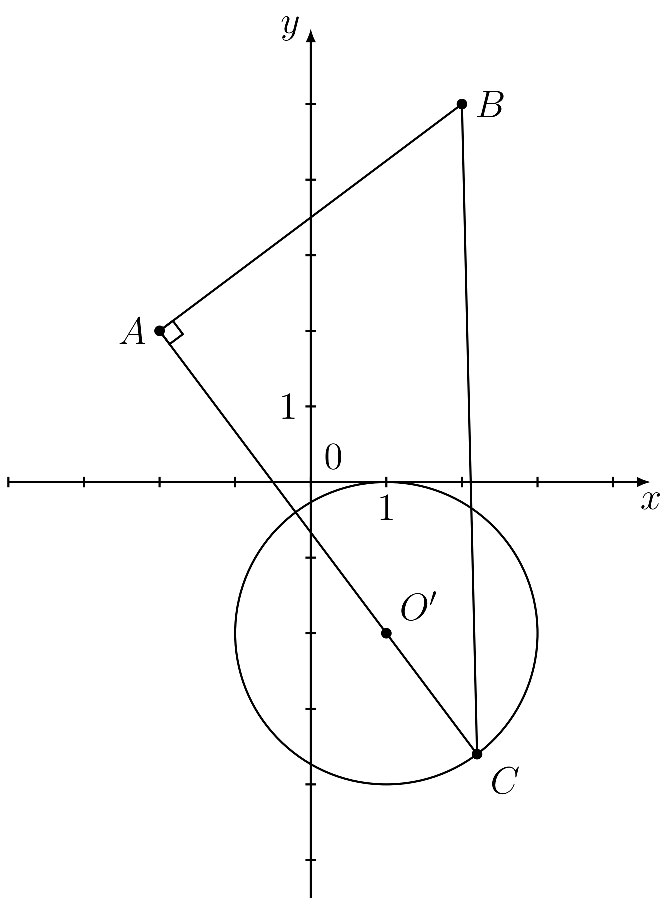

Рис. 1.

Помітимо, що точкою перетину AB і CH є точка A, тобто H співпадає з A і висота буде CA (Див. Рис. 1).

Щоб знайти координати точки C знайдемо точку перетину прямої CA з колом, тобто розв'яжемо наступну систему

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} \\ (y+2)^2 = \frac{64}{25} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y \\ \left[\begin{array}{l} y = -\frac{2}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{array} \right. \end{cases}.$$

В результаті отримаємо дві точки $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ та $\left(\frac{11}{5}, -\frac{18}{5}\right)$. Очевидно, що шукана точка $C\left(\frac{11}{5}, -\frac{18}{5}\right)$.

Легко отримати, що $CA = 7$, $AB = 5$ і, відповідно, найбільша площа дорівнює $S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = \frac{35}{2}$.

Відповідь: $S_{\max} = \frac{35}{2}$, $C\left(\frac{11}{5}, -\frac{18}{5}\right)$.

Задача 3. Побудувати графік функції

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}.$$

3. Розглянемо можливі випадки:

I. Якщо $|x| \leq 1$, то $1 \leq \sqrt[2n]{1+x^{2n}} \leq \sqrt[2n]{2}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n}} = 1$, отримаємо $y = 1$;

II. Якщо $|x| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[2n]{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = \boxed{\left|\frac{1}{x}\right| < 1} = |x|.$$

Відповідь: $y = \begin{cases} -x, & x < -1, \\ 1, & x \in [-1, 1], \\ x, & x > 1. \end{cases}$

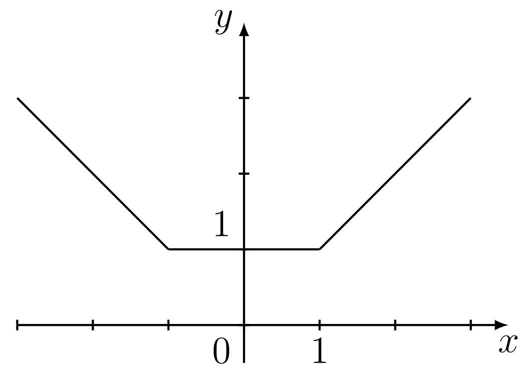

Рис. 2.

Задача 4. Про функції f, g та $\dfrac{f}{g}$ відомо, що значення їх похідних в точці $x = 2013$ однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число $f(2013)$?

4. Нехай $f'(2013) = g'(2013) = \left(\frac{f}{g}\right)'(2013) = A \neq 0$. Розглянемо,

$$A = \left(\frac{f}{g}\right)'(2013) = \frac{f'(2013)g(2013) - f(2013)g'(2013)}{g^2(2013)} = \frac{AX - BA}{X^2},$$

де $X = g(2013)$, $B = f(2013)$. Отримаємо рівняння

$$X^2 - X + B = 0,$$

яке повинно мати розв'язки. Таким чином, $\mathcal{D} = 1 - 4B \geq 0$ або $B \leq \frac{1}{4}$.

За умовою $\left(\frac{f}{g}\right)'(2013) \neq 0$, а тому $X \neq B$. Перевіримо, чи всі значення підійдуть. Розглянемо,

$$X = B \;\Leftrightarrow\; \frac{1 \pm \sqrt{1-4B}}{2} = B \;\Leftrightarrow\; 2B - 1 = \pm\sqrt{1-4B} \;\Leftrightarrow\; B = 0.$$

Якщо $B = 0$, то $X = 0$ або $X = 1$. Значення $X = 1 = g(2013)$ є підходящим, тобто $B = 0$ належить цьому проміжку.

Відповідь: $f(2013) \leq \frac{1}{4}$.

Задача 5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

5. Позначимо через $L_n,\ n \geq 3$, кількість способів здійснити відповідне розфарбування для правильного n-кутника. Ясно, що у випадку $n = 3$ існують 4 способи (в білий колір можна пофарбувати або першу вершину, або другу, або третю, або взагалі жодної), і тому $L_3 = 4$. Аналогічно $L_4 = 7$.

Покажемо тепер, що для $n \geq 5$ має місце співвідношення $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Дійсно, розглянемо колір n-ої вершини в правильному розфарбуванні n-кутника. Якщо він є білим, то перша та $(n-1)$-ша вершини мають бути чорними. Видаляючи n-ту та $(n-1)$-шу вершини, одержимо правильне розфарбування $(n-2)$-кутника, в якому перша вершина має чорний колір. Навпаки, кожному правильному розфарбуванню $(n-2)$-кутника з чорною першою вершиною відповідає рівно одне правильне розфарбування n-кутника з білою n-ою вершиною – достатньо після першої чорної вставити ще білу й чорну. Підсумок цим міркуванням підведемо у вигляді наступної формули

$$\begin{aligned} &L_n(\text{з додатковою умовою, що } n\text{-та вершина є білою}) = \\ &\quad = L_{n-2}(\text{з додатковою умовою, що перша вершина є білою}). \end{aligned} \tag{1}$$

Якщо ж колір n-ої вершини в правильному розфарбуванні n-кутника був чорним, то, прибравши цю вершину, отримаємо $(n-1)$-кутник з першою та $(n-1)$-шою вершинами довільних кольорів. Якщо серед цих двох вершин є принаймні одна чорна, то розфарбування цього $(n-1)$-кутника є правильним. Якщо ж вони обидві є білими, то, прибравши ще й $(n-1)$-шу вершину, отримаємо правильне розфарбування $(n-2)$-кутника з білою першою вершиною. Всі ці міркування можуть бути проведені й в обернений бік. Підсумок підведемо у вигляді такої формули:

$$\begin{aligned} &L_n(\text{з додатковою умовою, що } n\text{-та вершина є чорною}) = \\ &\quad = L_{n-1} + L_{n-2}(\text{з додатковою умовою, що перша вершина є білою}). \end{aligned} \tag{2}$$

Додаючи тепер співвідношення (1)та (2), одержуємо формулу $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Отримати значення L_{13} тепер зовсім нескладно, записуючи послідовні значення L_n:

$$L_{13} = 521.$$

Відповідь: 521.

Задача 6. Числову послідовність $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}},\ n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n.

6. Випишемо декілька перших значень нашої послідовності

$$1,\ 1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{15}{8},\ \frac{48}{15},\ \frac{105}{48},\ \ldots\ .$$

За цією послідовністю можна вгадати таку закономірність:

$$a_n = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}.$$

Перевірка проводиться методом математичної індукції:

$$a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!} + \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{(n+1)!!}{n!!} = a_{n+2}.$$

Відповідь: $a_n = \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}$.

ФІОТ НТУУ "КПІ"
СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.

Старші курси

<u>**Задача 7.**</u> Дослідити систему на сумісність та знайти загальний розв'язок

$$\begin{cases} (2\lambda - 3)x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \\ (\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y + z = 2 \\ x + y + (\lambda - 1)z = 2 \end{cases}$$

<u>**7.**</u> Див. розв'язок Задачі 1.

<u>**Задача 8.**</u> Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xdy - \left(2y + x^2 \operatorname{tg} \frac{y}{x^2}\right) dx = 0.$$

<u>**8.**</u> Зробимо заміну змінних $u = \frac{y}{x^2}$. Тоді $y = ux^2$, $y' = u'x^2 + 2ux$, і рівняння прийме вигляд

$$u'x = \operatorname{tg} u.$$

Легко показати, що $\sin u = 0$ є розв'язком рівняння. Нехай $\sin u \neq 0$, тоді рівняння перепишеться

$$\operatorname{ctg} u du = \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln|\sin u| = \ln|\tilde{c}x| \;\Leftrightarrow\; \sin u = cx,\; c = \pm\tilde{c},\; c \neq 0.$$

Очевидно, отриманий розв'язок можна доповнити значенням $c = 0$, оскільки $\sin u = 0$ є розв'язком. Знайдемо явний вигляд розв'язку

$$u = (-1)^k \arcsin cx + \pi k,\; k \in \mathbb{Z} \text{ або } y = x^2 \left((-1)^k \arcsin cx + \pi k\right),\; k \in \mathbb{Z}.$$

<u>**Відповідь:**</u> $y = x^2 \left((-1)^k \arcsin cx + \pi k\right),\; k \in \mathbb{Z},\; c \in \mathbb{R}$.

<u>**Задача 9.**</u> Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

<u>**9.**</u> Розглянемо степеневий ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\; x \in (-1, 1).$$

Тоді $S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$. Знайдемо $S(x)$.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

З останнього легко отримати, що $S(x)=-\ln(1-x),\ x\in(-1,1)$.

Підставивши $x=\frac{1}{2}$ будемо мати $S\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$.

Відповідь: $\ln 2$.

Задача 10. Про функції f, g та $\dfrac{f}{g}$ відомо, що значення їх похідних в точці $x=2013$ однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число $f(2013)$?

10. Див. розв'язок Задачі 4.

Задача 11. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

11. Див. розв'язок Задачі 5.

Задача 12. Нехай $\mathcal{A}(a_1,\ldots,a_n)$ та $\mathcal{H}(a_1,\ldots,a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел $a_1,\ldots,a_n$. Які значення може набувати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathcal{A}(a_1,\ldots,a_n)}{\mathcal{H}(a_1,\ldots,a_n)},$$

якщо числова послідовність $(a_n,\ n\in\mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?

12. Якщо всі елементи прогресії однакові, то границя, очевидно, дорівнює 1. Нехай елементи різні, і $a_n=a_1+d(n-1)$, причому $d\neq 0$. Тоді задача полягає в знаходженні границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+(a_1+d(n-1))}{n\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot(a_1+d(n-1))}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\frac{d(n-1)}{2}}{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot(a_1+d(n-1))}}=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a_1}{dn}\left(\frac{a_1}{dn}+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{a_1}{dn}+\frac{n-1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Позначивши через $\mathcal{L}$ границю в знаменнику, маємо:

$$\ln\mathcal{L}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{a_1}{dn}+\frac{k}{n}\right).$$

Якщо $a_1 = d$, то границею буде, очевидно, інтеграл

$$\int_0^1 \ln x dx = -1.$$

Насправді, якщо навіть $a_1 \neq d$, відповідь буде така сама. Це випливає з того, що різниця між відповідними границями є нульовою:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{a_1}{dn} + \frac{k}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{k + \frac{a_1}{d}}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{k + \frac{a_1}{d}}{k+1}\right) = 0.$$

В передостанній рівності використаний відомий факт: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, якщо остання границя існує.

Таким чином, $\ln \mathcal{L} = -1$, і наша границя дорівнює $\frac{e}{2}$.

Відповідь: 1 або $\frac{e}{2}$.