# РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, ФБМІ, НТУУ «КПІ», 2014/15 н.р.

**Задача 1.** Доведіть нерівність

$$2013^{2015} \cdot 2015^{2013} < 2014^{4028}.$$

*Доведення.*

$$2013^{2015} \cdot 2015^{2013} = 2013^{2014} \cdot 2015^{2014} \frac{2013}{2015} < (2013 \cdot 2015)^{2014} =$$
$$= \left(2014^2 - 1\right)^{2014} < \left(2014^2\right)^{2014} = 2014^{4028}.$$

■

**Задача 2.** Знайдіть $f(x)$, якщо

$$\frac{df(\operatorname{tg} x)}{dx} = \operatorname{tg} x.$$

*Розв'язання.* Нехай $\operatorname{tg} x = z$. Тоді

$$\frac{df(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{df(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{df(z)}{dz}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{df(z)}{dz}\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = \frac{df(z)}{dz}\left(1 + z^2\right).$$

Маємо рівняння

$$\frac{df(z)}{dz}\left(1 + z^2\right) = z, \text{ або } \frac{df(z)}{dz} = \frac{z}{1+z^2},$$

розв'язком якого є

$$f(z) = \int \frac{zdz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + z^2\right) + C.$$

■

**Відповідь:** $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C.$

**Задача 3.** Обчисліть $f^{(2014)}(0)$, якщо

$$f(x) = x^{2014} e^x \cos x.$$

*Розв'язання.* За формулою Лейбніца

$$\begin{aligned} f^{(2014)}(x) = & C_{2014}^0 \left(x^{2014}\right)^{(2014)} e^x \cos x + C_{2014}^1 \left(x^{2014}\right)^{(2013)} (e^x \cos x)' + \ldots + \\ & + C_{2014}^{2014} \left(x^{2014}\right) (e^x \cos x)^{(2014)} = \\ = & 2014! e^x \cos x + 2014 \, (2014 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x) \, (e^x \cos x)' + \ldots + \\ & + x^{2014} \, (e^x \cos x)^{(2014)} . \end{aligned}$$

У точці $x = 0$ маємо:

$$f^{(2014)}(0) = 2014! e^0 \cos 0 + 0 + \ldots + 0 = 2014!.$$

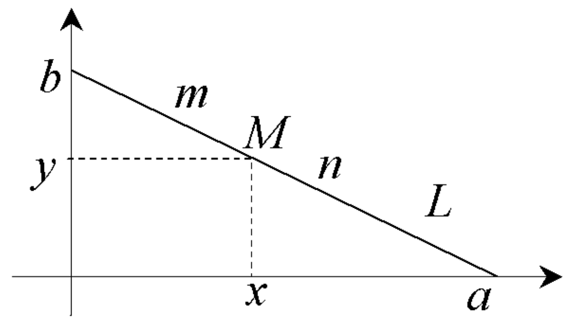
■

**Відповідь:** 2014!.

**Задача 4.** Відрізок певної довжини ковзає своїми кінцями вздовж сторін прямого кута. Визначити криву, яку описує довільна точка заданого відрізка.

*Розв'язання.*

Нехай сторони прямого кута є осями координат, а довжина відрізка дорівнює $L$. Зафіксуємо точку $M$ на цьому відрізку та припустимо, що вона ділить відрізок у відношенні $\frac{m}{n}$.




Розглянемо довільне положення відрізка. Припустимо, що точки дотику із осями є $(a, 0)$ та $(0, b)$, а $M(x, y)$. Тоді

$$x = \frac{m}{m+n}a, \quad y = \frac{n}{m+n}b.$$

Оскільки $L^2 = a^2 + b^2$, маємо

$$\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 x^2 + \left(\frac{m+n}{n}\right)^2 y^2 = L^2,$$

або

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 L^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{n}{m+n}\right)^2 L^2} = 1.$$

Тобто точка описує еліпс. $\blacksquare$

**Відповідь:** Еліпс.

**Задача 5.** Числову послідовність $(x_n,\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що $\lim\limits_{n \to \infty} 4^n (1 - x_n) = \pi^2$.

*Доведення.* Розв'язок ґрунтується на наступній ідеї: якщо $x = \cos^2 t$ для деякого $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\sqrt{x}+1}{2} = \cos^2 \frac{t}{2}$.

Оскільки $x_1 = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}$, то $x_n = \cos^2 \frac{\pi}{2^n}$. Тому при $n \to \infty$

$$1 - x_n = \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi^2}{4^n}.$$

$\blacksquare$

**Задача 6.** В кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$. Починаючі свою подорож з точки $A_1$, він за кожну хвилину переповзає в будь-яку іншу точку. Скільки різних маршрутів тривалістю $n$ хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку $A_1$?

*Розв'язання.* Можна запропонувати багато способів розв'язання цієї задачі. Розглянемо розв'язок, що ґрунтується на операціях з матрицями. Для цього нам знадобиться одне елементарне твердження.

**Лема.** Якщо елементи $a_{ij}$ матриці $A$ задають кількість маршрутів довжини $m$ з вершини $i$ у вершину $j$, а елементи $b_{ij}$ матриці $B$ задають кількість відповідних маршрутів довжини $n$, то елементи $c_{ij}$ матриці $C = AB$ будуть задавати кількість таких маршрутів довжини $m+n$.

*Доведення.* Позначатимемо через $\mathfrak{L}(l,p,q)$ кількість маршрутів довжини $l$ з вершини $p$ у вершину $q$. Тоді $\mathfrak{L}(m+n,i,j) = \sum\limits_{k} \mathfrak{L}(m,i,k)\mathfrak{L}(n,k,j) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, що узгоджується з означенням матричного добутку. ■

Оскільки за один крок жук може (єдиним способом) переповзти у будь-яку *іншу* вершину, то матриця переходів за один крок має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = U - E,$$

де через $U$ позначено матрицю, що складається з одиниць, а через $E$ — одиничну матрицю. (Всі матриці, звичайно, мають розмірність $k \times k$.) Тому шукана кількість шляхів буде визначатися лівим верхнім елементом матриці $A^n = (U-E)^n$.

Тепер зауважимо, що $U^l = k^{l-1}U$ і $E^l = E$ при $l \in \mathbb{N}$ і $U^0 = E$. Тому за формулою бінома Ньютона

$$(U-E)^n = (-1)^n E + \sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l}U,$$

а відтак кількість шляхів становить

$$\sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l} + (-1)^n = \frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big).$$

■

**Відповідь:** $\frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big)$.