РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ
ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, ФІОТ та ФМФ, НТУУ «КПІ», 2014/15 н.р.

Перший курс

Задача 1. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2015]{n^{2015}+2015\,n^{2014}x-1}-\sqrt[2015]{n^{2015}-2015\,n^{2014}x-1}\right).$$

Розв'язання. Запишемо шукану границю у вигляді різниці і скористаємося відомою еквівалентністю $(1+y)^\alpha-1\sim\alpha y$, $y\to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[2015]{1+\frac{2015x}{n}-\frac{1}{n^{2015}}}-1\right)-\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[2015]{1-\frac{2015x}{n}-\frac{1}{n^{2015}}}-1\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2015}\left(\frac{2015x}{n}-\frac{1}{n^{2015}}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2015}\left(-\frac{2015x}{n}-\frac{1}{n^{2015}}\right)=2x.$$

■

Відповідь: $2x$.

Задача 2. Побудувати графік похідної для функції $y=\arccos(\sin x)$.

Розв'язання. Перш за все зауважимо, що внаслідок формули $\arccos(\sin x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x)$ маємо $\frac{d}{dx}\arccos(\sin x)=-\frac{d}{dx}\arcsin(\sin x)$. Крім того,

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\\ \pi-x, & \text{якщо } x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\end{cases}$$

а на всю вісь $\mathbb{R}$ значення цієї функції розповсюджуються з періодом 2π. Тому

$$\frac{d}{dx}\arccos(\sin x)=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x\in(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k) \text{ для деякого } k\in\mathbb{Z},\\ 1, & \text{якщо } x\in(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k) \text{ для деякого } k\in\mathbb{Z},\\ \text{не існує}, & \text{якщо } x=\frac{\pi}{2}+\pi k \text{ для деякого } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

■

Задача 3. Який найбільший радіус може мати коло, яке лежить всередині параболи $y^2 = 6x$ та дотикається до її вершини?

Розв'язання. Задачу простіше за все розв'язати в полярній системі координат. Вказане розташування кола та параболи фактично означає, що під яким би кутом $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ми б не дивилися з початку координат на коло та параболу, коло завжди буде ближче параболи. Полярним рівнянням параболи $y^2 = 6x$ є $\rho = \frac{6\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, а рівнянням кола радіусу r з центром на осі OX, що проходить через початок координат, є $\rho = 2r\cos\varphi$. Таким чином, задача зводиться до наступної: для якого найбільшого r при всіх $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ виконується нерівність $2r\cos\varphi < \frac{6\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$? В такій формі відповідь очевидна — $r_{\max} = 3$. ■

Відповідь: $r_{\max} = 3$.

Задача 4. Суми елементів усіх рядків квадратної матриці A порядку 2014 є однаковими та дорівнюють a. Які значення може набувати число a, якщо відомо, що $A^3 + 4A^2 + A = 6E$? (Через E позначено одиничну матрицю.)

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що має місце таке елементарне твердження: якщо сума елементів кожного рядку матриці A дорівнює a, а матриці B — b, то сума елементів кожного рядку матриці $C = AB$ дорівнює ab. Цей факт випливає з рівності

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\Big(a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\Big) = ab.$$

З цього твердження безпосередньо випливає, що суми елементів усіх рядків матриці A^2 є однаковими та дорівнюють a^2, а матриці A^3 — a^3. Отже, ми приходимо до рівняння $a^3 + 4a^2 + a = 6$, звідки $a \in \{-3, -2, 1\}$. Приклади матриць $-3E$, $-2E$ та E показують, що всі ці значення є можливими. ■

Відповідь: $a \in \{-3, -2, 1\}$.

Задача 5. Числову послідовність $(x_n,\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - x_n) = \pi^2$.

Доведення. Розв'язок ґрунтується на наступній ідеї: якщо $x = \cos^2 t$ для деякого $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\sqrt{x}+1}{2} = \cos^2\frac{t}{2}$.

Оскільки $x_1 = 0 = \cos^2\frac{\pi}{2}$, то $x_n = \cos^2\frac{\pi}{2^n}$. Тому при $n \to \infty$

$$1 - x_n = \sin^2\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi^2}{4^n}.$$

■

Задача 6. В кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$. Починаючі свою подорож з точки A_1, він за кожну хвилину переповзає в будь-яку іншу точку. Скільки різних маршрутів тривалістю n хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку A_1?

Розв'язання. Можна запропонувати багато способів розв'язання цієї задачі. Розглянемо розв'язок, що ґрунтується на операціях з матрицями. Для цього нам знадобиться одне елементарне твердження.

Лема. Якщо елементи a_{ij} матриці A задають кількість маршрутів довжини m з вершини i у вершину j, а елементи b_{ij} матриці B задають кількість відповідних маршрутів довжини n, то елементи c_{ij} матриці $C = AB$ будуть задавати кількість таких маршрутів довжини $m+n$.

Доведення. Позначатимемо через $\mathfrak{L}(l,p,q)$ кількість маршрутів довжини l з вершини p у вершину q. Тоді $\mathfrak{L}(m+n,i,j) = \sum\limits_k \mathfrak{L}(m,i,k)\mathfrak{L}(n,k,j) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, що узгоджується з означенням матричного добутку. ■

Оскільки за один крок жук може (єдиним способом) переповзти у будь-яку *іншу* вершину, то матриця переходів за один крок має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = U - E,$$

де через U позначено матрицю, що складається з одиниць, а через E — одиничну матрицю. (Всі матриці, звичайно, мають розмірність $k \times k$.) Тому шукана кількість шляхів буде визначатися лівим верхнім елементом матриці $A^n = (U-E)^n$.

Тепер зауважимо, що $U^l = k^{l-1}U$ і $E^l = E$ при $l \in \mathbb{N}$ і $U^0 = E$. Тому за формулою бінома Ньютона

$$(U-E)^n = (-1)^n E + \sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l}U,$$

а відтак кількість шляхів становить

$$\sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l} + (-1)^n = \frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big).$$

■

Відповідь: $\frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big)$.

Старші курси

Задача 1. Нехай $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — інтегровна функція. Довести, що рівняння

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = 2x - 1$$

має рівно один розв'язок на $[0,1]$.

Доведення. Коли x змінюється від 0 до 1, ліва частина рівняння зростає від 0 до числа $\int\limits_0^1 f(t)\,dt \leq 1$. В той же час, права частина зростає від -1 до 1. Це означає, що рівняння має принаймні один розв'язок на $[0,1]$. Покажемо, що таких розв'язків не може бути більше.

Нехай для деяких $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$, виконується рівність

$$\int\limits_0^{x_i} f(t)\,dt = 2x_i - 1,\ \ i = 1, 2.$$

Тоді

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = 2(x_2 - x_1).$$

Але це суперечить умові $f(t) \leq 1$, $t \in [0,1]$.

Зауважимо, що для неперервної функції f можна було б просто продиференціювати інтеграл за змінною верхньою границею і таким чином одержати єдиність розв'язку без зайвих міркувань. ■

Задача 2. Знайти найбільше значення функції

$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1 - t^2)\,dt, \qquad x \geq 0.$$

Розв'язання. Максимальне значення функції досягається при $F'(x) = 0$, тобто при $x = 1$. Знайдемо це максимальне значення.

$$F_{\max} = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}(1 - t^2)\,dt = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_0^1 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \int_0^1 t\,de^{-\frac{t^2}{2}} = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

■

Відповідь: $F_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Задача 3. Позначимо через $\theta(n)$ кількість цифр в десятковому записі числа n. Визначити область збіжності та знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\theta(n)}.$$

Розв'язання.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\theta(n)} = \sum_{n=1}^{9} x + \sum_{n=10}^{99} x^2 + \sum_{n=100}^{999} x^3 + \ldots =$$
$$= 9x + 90x^2 + 900x^3 + \ldots = \frac{9x}{1-10x}, \quad |x| < 10.$$

■

Відповідь: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\theta(n)} = \frac{9x}{1-10x}, \quad |x| < 10.$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy' - y\ln y = x^2 y \sin x.$$

Розв'язання. Після заміни $y = e^v$ і множення на e^{-v} одержуємо лінійне диференціальне рівняння

$$xv' - v = x^2 \sin x.$$

Розв'язуючи його, одержуємо $v = x(C - \cos x)$, і $y = e^{x(C-\cos x)}$. ■

Відповідь: $y = e^{x(C-\cos x)}$.

Задача 5. Функціональну послідовність $(f_n(x),\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \left(1 - \int\limits_0^1 f_n(x)dx\right) = \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

Доведення. Знову використовуючи підстановку $x = \cos^2 t$, маємо:

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - \int_0^1 \cos^2 \frac{\arccos\sqrt{x}}{2^{n-1}}\,dx = 1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,d\cos^2 t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$(1-\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}} \leq \sin\frac{t}{2^{n-1}} \leq (1+\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \geq N,\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тому при $n \to \infty$

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx \sim 2^{2-2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t\,dt = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

■

Задача 6. Двічі диференційована функція $(f(x),\ x \in [0,1])$ для всіх $x \in [0,1]$ задовольняє умови $f(0) = f(1) = 0$ та нерівність

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0.$$

Які значення може набувати $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$?

Розв'язання. За правилом Лейбниця

$$(e^x f(x))'' = e^x(f''(x) + 2f'(x) + f(x)).$$

Тому $(e^x f(x))'' \geq 0$, і функція $e^x f(x)$ є опуклою. Тоді за означенням опуклості для будь-якого $x \in [0,1]$ має місце нерівність

$$e^x f(x) = e^{(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0)} f(x \cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \leq x e^1 f(1) + (1-x)e^0 f(0),$$

що за умовою задачі дорівнює 0. Таким чином, $f(x) \leq 0$ при $x \in [0,1]$. Оскільки значення 0 досягається (в точках 0 та 1), то $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$. ■

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0.$