Перший курс

1. Запишемо $\overrightarrow{BD}$ у вигляді $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. α знайдемо з умови $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow$
$\overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{AC} = 0 = \alpha \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \alpha = \dfrac{(\vec{c}\vec{b})}{\vec{b}^2} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{(\vec{c}\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b} - \vec{c}$

З властивості бісектриси випливає, що $\overrightarrow{BM} = \lambda(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot (1+\lambda) = \lambda \overrightarrow{BC} = \lambda(\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow$
$\overrightarrow{BM} = \dfrac{(\vec{b} - \vec{c})\mathrm{c}}{(b+c)}$. Тоді $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \dfrac{(\mathrm{c}\vec{b} + b\vec{c})}{(\mathrm{b}+\mathrm{c})}$

Відповідь: $\overrightarrow{BD} = \dfrac{(\vec{c}\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{(\mathrm{c}\vec{b} + b\vec{c})}{(\mathrm{b}+\mathrm{c})}$

2. Безпосереднім множенням матриць перевіряється, що $\mathrm{I}_n{}^2 = n \cdot \mathrm{I}_n$. Тому

$$(E - \mathrm{I}_n) \cdot \left(E - \frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n\right) = \left(E - \frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n\right) \cdot (E - \mathrm{I}_n) = E - \frac{1}{n+1}\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n + \frac{n}{n-1}\mathrm{I}_n = E.$$

Що і треба було довести.

3. Застосуємо правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{a}e^{ax} - \mathrm{b}/(\mathrm{e} + \mathrm{bx}))/(2\mathrm{x}) = 1$. Оскільки знаменник $2x \to 0$ та границя зліва існує, то чисельник теж має прямувати до 0, тобто $a \cdot 1 - by = 0$. Застосувавши другий раз правило Лопіталя, отримаємо $a^2 = 1$. Тому $a = 1, b = e$ або $a = -1, b = -e$.

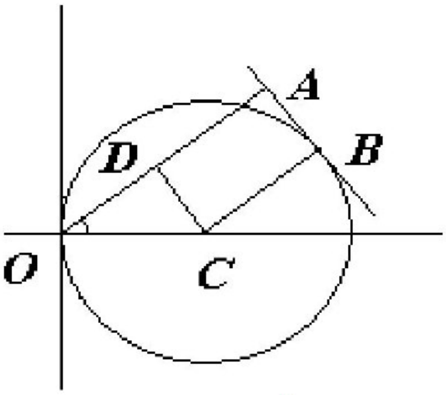
4. Розглянемо функцію $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - 1$. Оскільки $f'(x) = x(1 - e^{-x}) > 0$ при всіх дійсних $x \neq 0$, то функція f монотонно зростає для всіх дійсних x. Більше того $f(0) = 0$. Тому $x = 0$ --- єдиний нуль функції f.

Старші курси

1. Нехай $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n}\end{pmatrix}$. Тоді $A^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot A$ (можна перевірити по індукції).

$$\lim_{n\to\infty}A^n=\begin{pmatrix}e^x & e^x\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2.



Запишемо полярне рівняння кривої, яку утворюють основи перпендикулярів, тобто точки A. Маємо коло з центром в точці $C(1,0)$ та радіусом $R=1$. Оскільки $AD=BC=R=1$ та $OD=OC\cdot\cos\varphi=R\cdot\cos\varphi=\cos\varphi$, то $OA=1+\cos\varphi$. Отримали рівняння кардіоїди $\rho=1+\cos\varphi$.

---

3. Після заміни $y=\sqrt{z}$ рівняння зводиться до однорідного

$$(z^2-3x^2)dz+2xzdx=0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $z^3=c\left(z^2-x^2\right)$. Тому загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд $y^6=c\left(y^4-x^2\right)$.

---

4. Нехай перший студент(A) підкинув монету 2014 разів, а другий (B) теж 2014 разів. Тоді реалізується одна з 3-хможливостей:
(>) у B орлів більше, ніж уA;
(=) у A іB однакове число орлів;
(<) у B орлів менше, ніж у A.
Позначимо їх ймовірності через $P>$, $P=$ и $P<$. Зауважимо, що $P> = P<$. НехайтеперB підкинув монету останнії, 2015й раз. Якщо буласитуація (>), то у B орлів більше, ніж уA, незалежно відостаннього підкидання. Якщо була ситуація (=), то з ймовірністю 1/2 число орлів у B перевищить число орлів у A. Якщо була (<), то незалежно від останнього підкидання монети у B орлів не більше, ніж уA. Отже, ймовірність того, що у B число орлів більше, ніж уA, рівна$P> + 1/2\ P= = 1/2\ (P> + P< + P=) = 1/2$.

Задача 5 для першого курсу.

Розв'язок ґрунтується на наступній ідеї: якщо $x = \cos^2 t$ для деякого $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\sqrt{x}+1}{2} = \cos^2 \frac{t}{2}$. Оскільки $x_1 = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}$, то $x_n = \cos^2 \frac{\pi}{2^n}$. Тому при $n \to \infty$

$$1 - x_n = \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi^2}{4^n}.$$

Задача 5 для старших курсів.

Знову використовуючи підстановку $x = \cos^2 t$, маємо:

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 - \int_0^1 \cos^2 \frac{\arccos \sqrt{x}}{2^{n-1}}\, dx = 1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\, d\cos^2 t =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin^2 \frac{t}{2^{n-1}}\, dt.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$(1-\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}} \le \sin \frac{t}{2^{n-1}} \le (1+\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \ge N,\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тому при $n \to \infty$

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\, dx \sim 2^{2-2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t\, dt = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

Задача 6 для першого курсу.

Можна запропонувати багато способів розв'язання цієї задачі. Розглянемо розв'язок, що ґрунтується на операціях з матрицями. Для цього нам знадобиться одне елементарне твердження.

Лема. Якщо елементи a_{ij} матриці A задають кількість маршрутів довжини m з вершини i у вершину j, а елементи b_{ij} матриці B задають кількість відповідних маршрутів довжини n, то елементи c_{ij} матриці $C = AB$ будуть задавати кількість таких маршрутів довжини $m + n$.

Доведення. Позначатимемо через $\mathfrak{L}(l, p, q)$ кількість маршрутів довжини l з вершини p у вершину q. Тоді $\mathfrak{L}(m+n, i, j) = \sum_k \mathfrak{L}(m, i, k)\mathfrak{L}(n, k, j) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, що узгоджується з означенням матричного добутку.

Оскільки за один крок жук може (єдиним способом) переповзти у будь-яку *іншу* вершину, то матриця переходів за один крок має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = U - E,$$

де через U позначено матрицю, що складається з одиниць, а через E — одиничну матрицю. (Всі матриці, звичайно, мають розмірність $k \times k$.) Тому шукана кількість шляхів буде визначатися лівим верхнім елементом матриці $A^n = (U - E)^n$.

Тепер зауважимо, що $U^l = k^{l-1}U$ і $E^l = E$ при $l \in \mathbb{N}$ і $U^0 = E$. Тому за формулою бінома Ньютона

$$(U - E)^n = (-1)^n E + \sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1} (-1)^{n-l} U,$$

а відтак кількість шляхів становить

$$\sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1} (-1)^{n-l} + (-1)^n = \frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big).$$

Задача 6 для старших курсів.

За правилом Лейбниця $(e^x f(x))'' = e^x (f''(x) + 2f'(x) + f(x))$. Тому $(e^x f(x))'' \geq 0$, і функція $e^x f(x)$ є опуклою. Тоді за означенням опуклості для будь-якого $x \in [0, 1]$ має місце нерівність

$$e^x f(x) = e^{(x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0)} f(x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0) \leq x e^1 f(1) + (1-x) e^0 f(0),$$

що за умовою задачі дорівнює 0. Таким чином, $f(x) \leq 0$ при $x \in [0, 1]$. Оскільки значення 0 досягається (в точках 0 та 1), то $\max_{x \in [0,1]} f(x) = 0$.