I курс **Розв'язки олімпіадних задач з математики на ІСЗЗІ, 3.12.2014 р.**

1. Дослідити на сумісність та розв'язати систему лінійних рівнянь в залежності від параметра λ.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв.

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 13\lambda + 12 = (\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

а) Якщо $\det A = (\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-3) \neq 0$, то сист. (сумісна, визначена) має єдиний розв'язок, а саме: (метод Гаусса)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda & 6 \\ \lambda & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2-3\lambda & \lambda-3 & -3 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 3-\lambda & 6-3\lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2-3\lambda & \lambda-3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda^3-13\lambda+12 & 6\lambda^2-24\lambda+18 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{\lambda+4} \\ x_2 = \frac{3}{\lambda+4} \\ x_3 = \frac{6}{\lambda+4} \end{cases}$$

при $\lambda \neq -4; \lambda \neq 1; \lambda \neq 3.$

Перевірка

б) При $\lambda = 1$, маємо:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

тобто $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = r = 2$, система сумісна, невизначена (т. Кронекера-Капелі), $n = 3$ – кількість невідомих, тоді $d = n - r = 3 - 2 = 1$ – дефект системи, тобто вільних змінних 1, напр. $x_3 = C \in \mathbb{R}$, (x_1, x_2) – базисні (рангові) змінні, бо $M_2^{(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - C \\ x_2 = 3 - 2C \\ x_3 = C \end{cases},$$

звідки $\begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = 3 - 2C \\ x_3 = C \end{cases}$, де $C \in \mathbb{R}$, при $\lambda = 1$. Перевірка

в) При $\lambda = 3$, міркуючи аналогічно, отримаємо:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} - C \\ x_2 = \frac{3}{7} \\ x_3 = C \end{cases}, \text{ де } C \in \mathbb{R}, \text{ при } \lambda = 3.$$

Перевірка

г) При $\lambda = -4$, одержимо:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -14 & 7 & 18 \\ 0 & 14 & -7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -14 & +7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ тобто}$$

$2 = \operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}(A|B) = 3$ – сист. несумісна при $\lambda = -4$, тобто за т. Кронекера-Капелі розв'язків немає.

② Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{8+n^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n+n^2}}\right)}_{x_n}$

Розв.

Ясно, що

$$\underbrace{n\cdot\frac{1}{\sqrt{4n+n^2}}}_{y_n}<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k+n^2}}<\underbrace{n\cdot\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}}_{z_n},$$

але $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{n}+1}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4+n^2}}=1$, тому, за теоремою про границю проміжної змінної, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k+n^2}}=1. \text{ — відп.}$$

③ Знайти відстань від початку координат до центра еліпса $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$, рис.

$d=dist(0;C)$?

Розв.

Виконаємо перетворення координат, що приводять наше р-ня до канонічного виду.

а) Поворот системи на кут α (двома способами)

I сп. Щоб отримати коеф. при добутку $x'y'$ для старших членів $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ рівним нулю, треба α підібрати із умови: $tg\,2\alpha=\frac{2B}{A-C}=\frac{-4}{9-6}=-\frac{4}{3}$;

Тоді $\cos2\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+tg^2 2\alpha}}=-\frac{1\cdot3}{5}=-\frac{3}{5}$ (кут 2α – тупий).

Далі, маємо $\cos\alpha=+\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$.

Тобто, формули переходу: (*) $\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}(x'-2y')\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')\end{cases}$

II сп. (матричний). Нехай A – матриця коеф. старших членів, тобто $A=\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2\\-2&6\end{pmatrix}$, $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$, $\bar{x}\neq0$ – λ – власні числа, $\bar{x}\neq0$ – власні вектори.

Тоді $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}9-\lambda&-2\\-2&6-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda+50=0$, $\lambda_1=5,\lambda_2=10$ власні числа

Знайдемо тепер власні вектори, маємо:

1) $\lambda_1=5$, тоді $\begin{cases}\cancel{4x_1-2x_2=0}\\-2x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=C_1\\x_2=2C_1\end{cases}$ тобто $\bar{x}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}C_1\\2C_2\end{pmatrix}$, або $\bar{e}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

I. ②

2) $\lambda_2=10$, тоді $\begin{cases}-x_1-2x_2=0\\ \cancel{-2x_1-4x_2=0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-2C_2\\ x_2=C_2\end{cases}$, тобто $\overline{x}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}-2C_2\\ C_2\end{pmatrix}$, або $\overline{e}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

Таким чином, якщо $\beta=(\overline{i},\overline{j})$ – ортонормований декартів базис, то новий базис $\beta'=(\overline{e}_{\lambda_1},\overline{e}_{\lambda_2})$ теж ортонормований базис власних векторів, в якому матриця коеф. старших членів діагональна $A'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, а рівняння кривої в цьому базисі – канонічне (після ‖переносу).

Тепер, матриця переходу до нового базису β' буде:

$$T_{\beta\to\beta'}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},$$ а ф-ли переходу: $\overline{x}=T_{\beta\to\beta'}\overline{x}'$, тобто

$$\overline{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T_{\beta\to\beta'}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\ \text{або}\ \begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt5}(x'-2y')\\ y=\frac{1}{\sqrt5}(2x'+y')\end{cases}\ (**)$$, те ж саме, що і в I оп. (*)

Тепер застосуємо ф-ли $(*)\equiv(**)$, маємо:

$$9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=9\cdot\frac15(x'-2y')^2-4\cdot\frac15(x'-2y')(2x'+y')+$$
$$+6\frac15(2x'+y')^2+\frac{16}{\sqrt5}(x'-2y')-\frac{8}{\sqrt5}(2x'+y')-2=$$
$$=\frac95(x'^2\cancel{-4x'y'}+4y'^2)-\frac45(2x'^2\cancel{-3x'y'}-2y'^2)+\frac65(4x'^2\cancel{+4x'y'}+y'^2)-$$
$$-\frac{40}{\sqrt5}y'-2=5x'^2+10y'^2-\frac{40}{\sqrt5}y'-2=0.$$

б) Виконаємо паралельний перенос системи, виділивши повні квадрати, маємо:

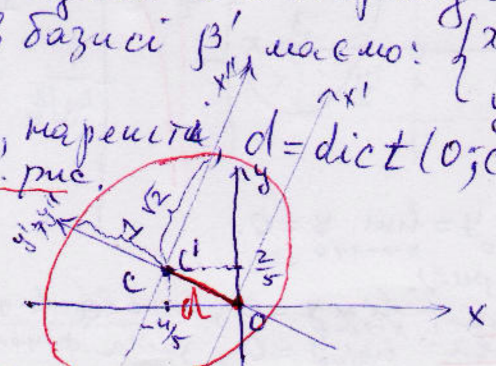
$$x'^2+2\left(y'^2-2\cdot\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac45\right)-\frac85=\frac25,\ \text{або}$$
$$x'^2+2\left(y'-\frac{2}{\sqrt5}\right)^2=2,\quad \frac{x'^2}{2}+\frac{\left(y'-\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}{1}=1,\ \text{тепер,}$$

За формулами $\begin{cases}x''=x'\\ y''=y'-\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$, маємо: $\boxed{\dfrac{x''^2}{(\sqrt2)^2}+\dfrac{y''^2}{1^2}=1,\ \text{центр: } C'=C'\left(0;\frac{2}{\sqrt5}\right).}$

в) Знайдемо C в старому базисі β, знаючи C' в базисі β', маємо: $\begin{cases}x_C=\frac{1}{\sqrt5}\left(0-2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right)=\frac{-4}{5}\\ y_C=\frac{1}{\sqrt5}\left(2\cdot 0+\frac{2}{\sqrt5}\right)=\frac25\end{cases}$; $C=C\left(-\frac45;\frac25\right)$.

Тепер, нарешті, $d=dist(O;C)=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{2}{\sqrt5}$, або $d=dist(O,C')=\sqrt{0+\frac45}=\frac{2}{\sqrt5}$

Схемат. рис.



$\boxed{\text{Відп. } d=\frac{2}{\sqrt5}}$

④ Дослідити на неперервність, та побудувати схематичний графік ф-ції в околі т. розриву.

$$y = \log_{\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}} 2$$

Розв.

1) За ф-лою $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, маємо: $y = \frac{1}{\log_2 \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}}$;

Тобто, маємо такі 3 ф-ції: $y_1 = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}$; $y_2 = \log_2 y_1$, $y = \frac{1}{y_2}$

2) Знайдемо $D(y)$: $\begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} > 0 \\ \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \neq 1 \end{cases}$; Маємо:

а) $+$ -1 $+$ 0 $-$ 1 $+$ x

б) $x^3 \neq x^3 + x^2 - x - 1$, або $x^2 - x - 1 \neq 0$; $x \neq \left[\begin{matrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{matrix}\right.$;

Тобто (y) -1, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 0, $\notin D$, 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, x

Ф-ція $y = f(x)$ – елементарна, визначена на множині

$D(y) = \{x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0) \cup (1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)\}$

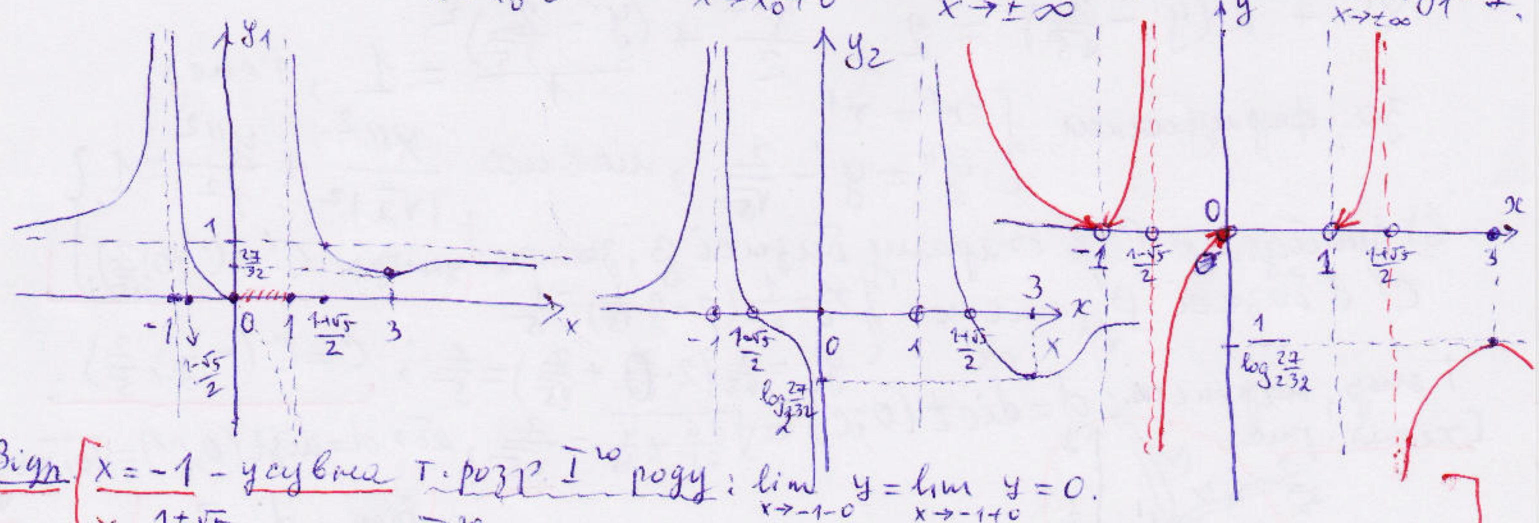
Маємо 5 точок розриву $\{-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

Для всіх точок $x \in D(y)$ – ф-ція неперервна, як елементарна.

Треба дослідити характер розриву в цих 5 точках, маємо:

3). Неважко бачити, що $y_1' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^2(x+1)^3} = 0$, тоді $\begin{cases} x = 3 - \text{т. min} \\ y_{1\,min} = y_1(3) = \frac{27}{32} < 1 \end{cases}$

4) Далі побудуємо схем. графіки y_1, $y_2 = \log_2 y_1$ та $y = \frac{1}{y_2}$, дослідивши попередньо характер т. розриву, знайшовши попередньо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, маємо: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y_1 = 1$.



Відп. $x = -1$ – усувна т. розр. $I^{го}$ роду: $\lim\limits_{x \to -1-0} y = \lim\limits_{x \to -1+0} y = 0$.

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ – т. розр. $II^{го}$ роду (нескінч. розрив).

$x = 0$ – усувна т. розр. $I^{го}$ роду зліва; $\lim\limits_{x \to 0-0} y = 0$, справа ф-ція $\nexists$.

$x = 1$ – усувна т. розр. $I^{го}$ роду справа; $\lim y = 0$, зліва ф-ція $\nexists$.

II та старші курси

①

Розв'язки олімпіадних задач з математики на ІСЗЗІ, 3.12.2014р.

① Дослідити та розв'язати сист. $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 6 \end{cases}$.

Розв.

Розв'язання та дослідж. див. І курс, ІСЗЗІ, 3.12.2014р.

② Знайти: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x - \sin x}$.

Розв.

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, розглянемо знаменник $\operatorname{tg}x - \sin x =$

$= \operatorname{tg}x(1-\cos x) = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}x \sim x \\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = x \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Для оцінки чисельника, за ф-лою Тейлора, маємо: $(x\to 0)$

$\operatorname{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) =$

$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3}{3} = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) =$

$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 2$

Відп.

③ Знайти відстань від початку координат до центра еліпсоїда $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$.

Розв.

Виконаємо перетворення координат, що приводять наше р-ня до канонічного виду.

а) Поворот системи — переходом до нового базису, в якому матриця коеф. старших членів, тобто

$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ матиме діагональну форму. Для

цього знайдемо $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ $\left[\begin{array}{l} \lambda \text{ - власні числа } A \\ \bar{x} \text{ - власні вектори.} \end{array}\right.$

Маємо $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$

характерист. р-ня.

За схемою Горнера $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)=0$,
звідки $\lambda_1=3;\ \lambda_2=6;\ \lambda_3=9$ – власні числа. Знайдемо власні вектори.

Маємо: 1) $\lambda_1=3$, тоді $\begin{cases}4x_1-2x_2=0\\ \cancel{-2x_1+3x_2-2x_3=0}\\ -2x_2+2x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1=x_2\\ x_3=x_2\\ x_2=2C\end{cases}$; $\bar{x}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}C\\2C\\2C\end{pmatrix}$; $\bar{e}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}\frac13\\ \frac23\\ \frac23\end{pmatrix}$;

2) $\lambda_2=6$, то $\begin{cases}x_1-2x_2=0\\ -2x_1-2x_3=0\\ \cancel{-2x_2-x_3=0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2x_2\\ x_3=-x_1\\ x_2=C\end{cases}$; $\bar{x}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}2C\\C\\-2C\end{pmatrix}$; $\bar{e}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$;

3) $\lambda_3=9$, то $\begin{cases}-2x_1-2x_2=0\\ \cancel{-2x_1-3x_2-2x_3=0}\\ -2x_2-4x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-x_2\\ 2x_3=-x_2\\ x_2=-2C\end{cases}$; $\bar{x}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}2C\\-2C\\C\end{pmatrix}$; $\bar{e}_{\lambda_3}=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\ \frac13\end{pmatrix}$;

Перейдемо до базису $\beta'=(\bar{e}_{\lambda_1},\bar{e}_{\lambda_2},\bar{e}_{\lambda_3})$ від базису $\beta=(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$.
$\bar{x}=T_{\beta\to\beta'}\bar{x}'$, де $\bar{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $T_{\beta\to\beta'}=\frac13\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$; $\bar{x}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, маємо

формули переходу $\begin{cases}x=\frac13(x'+2y'+2z')\\ y=\frac13(2x'+y'-2z')\\ z=\frac13(2x'-2y'+z')\end{cases}$; Підставимо в р-ня кривої, маємо:

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=$$
$$=7(x'+2y'+2z')^2\cdot\frac19+6\cdot\frac19(2x'+y'-2z')^2+5\cdot\frac19(2x'-2y'+z')^2-$$
$$-4\cdot\frac19(x'+2y'+2z')(2x'+y'-2z')-4(2x'+y'-2z')(2x'-2y'+z')\frac19-$$
$$-6\cdot\frac13(x'+2y'+2z')-24\cdot\frac13(2x'+y'-2z')+18\cdot\frac13(2x'-2y'+z')+30=$$
$$=3x'^2+6y'^2+9z'^2-6x'-24y'+18z'+30=$$
$$=3(x'^2-2x'+1)-3+6(y'^2-4y'+4)-24+9(z'^2+2z'+1)-9+30=$$
$$=3(x'-1)^2+6(y'-2)^2+9(z'+1)^2-6=0,$$ тобто $\frac{(x'-1)^2}{2}+\frac{(y'-2)^2}{1}+\frac{(z'+1)^2}{\frac23}=1$

$C'(1;2;-1)$ – центр

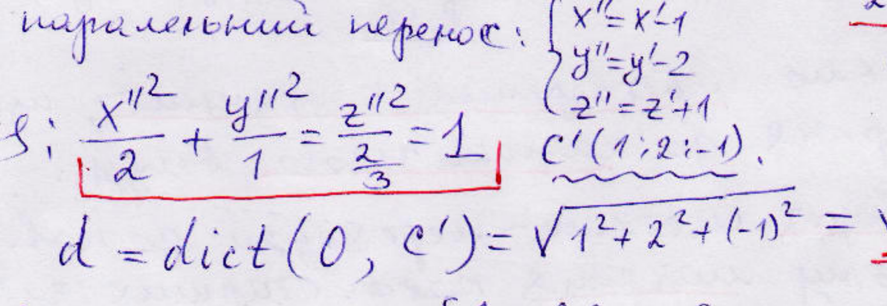
б) Виконаємо паралельний перенос: $\begin{cases}x''=x'-1\\ y''=y'-2\\ z''=z'+1\end{cases}$

тоді рівняння еліпсоїда: $\boxed{\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{1}=\frac{z''^2}{\frac23}=1}$ $C'(1;2;-1)$.

в) Нарешті $d=dist(O,C')=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$; – відп.

④ Дано: $f(x)=sgn(\cos x)=\begin{cases}1, & \cos x>0\\ -1, & \cos x<0\end{cases}$ – в ряд Фур'є. 1)

2) Знайти $S=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$. Розв



$f(x)$ – 2π-періодична, задовольняє всім умовам т. Діріхле, II.

2

тому її можна розвинути в ряд Фур'є: $f(x)$ – парна

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx; \quad b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\,dx = 0; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{4\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{\pi(2k+1)} = \dfrac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)}, & \text{при } n = 2k+1 \end{cases};$$

Маємо: $\boxed{f(x) \cong \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x = S(x)}$, де

$S(x)$ – сума ряду Фур'є – збігається до $f(x)$ в т. неперервн,

а в т. розриву до $\frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0))$.

Покладемо в цій формулі $x = 0$, тоді $f(0) = S(0) = 1$,

тому $$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos 0 \Rightarrow S = S(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \ldots = \frac{\pi}{4} \text{ – відп.}$$

5 **Дано**: $\{f_n(x)\}$: $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{f_n(x)}+1}{2}$;

Довести: $A = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4^n\left(1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx\right)\right) = \frac{\pi^2-4}{2}$.

Дов

Нехай $x \in (0;1)$, тоді $\begin{cases} 1)\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)}+1}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1 \text{ – обмежена} \\ 2)\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)}+1}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{f_n(x)}\cdot 1} = \sqrt[4]{f_n(x)} > f_n(x) \\ \text{тобто } \{f_n(x)\}\uparrow \text{ – зростає монот.} \end{cases}$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = a = 1.$ $\Leftarrow$

(за т. Вейєрштраса $\exists$ та із рекурентного співвідношення.)

Знайдемо аналітичний вираз для $f_n(x)$, маємо:

$f_1(x) = x$ (за умовою), $x \in (0;1)$.

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2} = \frac{2+2\sqrt{x}}{4} = \left|\begin{array}{l}\text{Заміна} \\ x = \cos^2\alpha \\ \alpha = \arccos\sqrt{x}\end{array}\right| = \frac{2(1+\cos\alpha)}{4} = \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$f_3(x) = \frac{2+\sqrt{2+2\sqrt{x}}}{4} = \frac{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4} = \cos^2\frac{\alpha}{2^2}.$$

$$- - - - - - - - -$$

$$f_n(x) = \cos^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}, \text{ де } \alpha = \arccos\sqrt{x}, \quad x \in (0;1).$$

Розглянемо $1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)dx = \int_0^1 \sin^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}\,dx.$

Задача 5 для першого курсу.

Розв'язок ґрунтується на наступній ідеї: якщо $x = \cos^2 t$ для деякого $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\sqrt{x}+1}{2} = \cos^2 \frac{t}{2}$. Оскільки $x_1 = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}$, то $x_n = \cos^2 \frac{\pi}{2^n}$. Тому при $n \to \infty$

$$1 - x_n = \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi^2}{4^n}.$$

Задача 5 для старших курсів.

Знову використовуючи підстановку $x = \cos^2 t$, маємо:

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - \int_0^1 \cos^2 \frac{\arccos\sqrt{x}}{2^{n-1}}\,dx = 1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,d\cos^2 t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$(1-\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}} \le \sin \frac{t}{2^{n-1}} \le (1+\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \ge N,\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тому при $n \to \infty$

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx \sim 2^{2-2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t\,dt = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

Задача 6 для першого курсу.

Можна запропонувати багато способів розв'язання цієї задачі. Розглянемо розв'язок, що ґрунтується на операціях з матрицями. Для цього нам знадобиться одне елементарне твердження.

Лема. Якщо елементи a_{ij} матриці A задають кількість маршрутів довжини m з вершини i у вершину j, а елементи b_{ij} матриці B задають кількість відповідних маршрутів довжини n, то елементи c_{ij} матриці $C = AB$ будуть задавати кількість таких маршрутів довжини $m+n$.

Доведення. Позначатимемо через $\mathfrak{L}(l,p,q)$ кількість маршрутів довжини l з вершини p у вершину q. Тоді $\mathfrak{L}(m+n,i,j) = \sum_k \mathfrak{L}(m,i,k)\mathfrak{L}(n,k,j) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, що узгоджується з означенням матричного добутку.

Оскільки за один крок жук може (єдиним способом) переповзти у будь-яку *іншу* вершину, то матриця переходів за один крок має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = U - E,$$

де через U позначено матрицю, що складається з одиниць, а через E — одиничну матрицю. (Всі матриці, звичайно, мають розмірність $k \times k$.) Тому шукана кількість шляхів буде визначатися лівим верхнім елементом матриці $A^n = (U-E)^n$.

Тепер зауважимо, що $U^l = k^{l-1}U$ і $E^l = E$ при $l \in \mathbb{N}$ і $U^0 = E$. Тому за формулою бінома Ньютона

$$(U-E)^n = (-1)^n E + \sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l}U,$$

а відтак кількість шляхів становить

$$\sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l} + (-1)^n = \frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big).$$

Задача 6 для старших курсів.

За правилом Лейбниця $(e^x f(x))'' = e^x(f''(x) + 2f'(x) + f(x))$. Тому $(e^x f(x))'' \geq 0$, і функція $e^x f(x)$ є опуклою. Тоді за означенням опуклості для будь-якого $x \in [0,1]$ має місце нерівність

$$e^x f(x) = e^{(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0)} f(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \leq x e^1 f(1) + (1-x)e^0 f(0),$$

що за умовою задачі дорівнює 0. Таким чином, $f(x) \leq 0$ при $x \in [0,1]$. Оскільки значення 0 досягається (в точках 0 та 1), то $\max_{x\in[0,1]} f(x) = 0$.