Студентська математична олімпіада

ФАКС, ІТС – 2014

1-й курс

1. (5 балів). Для всіх значень параметра розв'яжіть систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

2. (5 балів). Побудуйте графік функції $y = \lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}(x^n)$.

3. (5 балів). Задано трикутник ABC. Нехай $\overline{AB} = \overline{a}, \overline{BC} = \overline{b}, \overline{CA} = \overline{c}$. Доведіть, що

$$(\overline{a}, b) + (\overline{b}, c) + (\overline{a}, \overline{c}) < 0,$$

де $(\overline{a}, \overline{b})$ — скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

4. (5 балів). Знайдіть усі функції $f(x)$, такі що, для будь-яких x та y виконано нерівність

$$(f(x) - f(y))^2 \le \left|x - y\right|^3$$

і $f(0) = 1$.

5. (7 балів). Числову послідовність $(x_n, n \ge 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n} + 1}{2}. \end{cases}$$

Доведіть що $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - x_n) = \pi^2$.

6. (7 балів). У кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Починаючі свою подорож з точки A_1, він за кожну хвилину переповзає в будь-яку *іншу* точку. Скільки різних маршрутів тривалістю n хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку A_1?

Студентська математична олімпіада

ФАКС, ІТС – 2014

Старші курси

1. (5 балів). Обчисліть $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$

2. (5 балів). Обчисліть $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \sin(x^2)\cos(y^2)dxdy.$

3. (5 балів). Складіть диференціальне рівняння для функції, яка для будь-якого x справджує рівність

$$f'(x) = f(-x)$$

і знайдіть $f(x)$, якщо $f(0) = 1$.

4. (5 балів). Знайдіть x з рівняння

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^n x}{n!}.$$

5. (7 балів). Функціональну послідовність $(f_n(x), n \ge 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1 \quad x \quad = x, \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)}+1}{2}. \end{cases}$$

Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \left(1 - \int_0^1 f_n(x)dx\right) = \frac{\pi^2-4}{2}.$$

6. (7 балів). Двічі диференційовна функція $f(x), x \in [0,1]$ для всіх $x \in [0,1]$ справджує умови $f(0) = f(1) = 0$ і нерівність

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) \ge 0.$$

Які значення може набувати $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$?