РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, ІТС та ФАКС, НТУУ «КПІ», 2014/15 н.р.

Перший курс

Задача 1. Для всіх значень параметра розв'яжіть систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: Якщо $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$, тоді $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$;
якщо $\lambda = 1$, тоді $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = 1 - c_1 - c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Побудуйте графік функції

$$y = \lim_{n\to\infty} (x-1)\operatorname{arctg}(x^n).$$

Відповідь: $y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x-1), & x > 1, \\ 0, & -1 < x \leq 1, \\ \text{не існує}\,, & x \leq -1 \end{cases}$

Задача 3. Задано трикутник ABC. Нехай $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{c}$. Доведіть, що

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) < 0,$$

де $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ — скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$.

Доведення. Оскільки $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ є сторонами трикутника, то

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2 = \\ &= (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) + 2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + 2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + 2(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}). \end{aligned}$$

З останнього випливає, що

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -\frac{1}{2}(|\overrightarrow{a}|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 + |\overrightarrow{c}|^2) < 0.$$

■

Задача 4. Знайдіть усі функції $f(x)$, такі що, для будь-яких x та y виконано нерівність

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3$$

і $f(0) = 1$.

Розв'язання. З

$$0 \leq \lim_{(x-y)\to 0} \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right)^2 \leq \lim_{(x-y)\to 0} |x - y| = 0$$

випливає, що $f'(x) = 0$, а отже $f(x) = C = const$. Використовуючи те, що $f(0) = 1$ отримуємо, що $f(x) \equiv 1$. ■

Відповідь: $f(x) \equiv 1$.

Задача 5. Числову послідовність $(x_n,\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - x_n) = \pi^2$.

Доведення. Розв'язок ґрунтується на наступній ідеї: якщо $x = \cos^2 t$ для деякого $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\sqrt{x}+1}{2} = \cos^2 \frac{t}{2}$.

Оскільки $x_1 = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}$, то $x_n = \cos^2 \frac{\pi}{2^n}$. Тому при $n \to \infty$

$$1 - x_n = \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi^2}{4^n}.$$

■

Задача 6. В кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок A_1, A_2, $\ldots$, A_k. Починаючі свою подорож з точки A_1, він за кожну хвилину переповзає в будь-яку іншу точку. Скільки різних маршрутів тривалістю n хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку A_1?

Розв'язання. Можна запропонувати багато способів розв'язання цієї задачі. Розглянемо розв'язок, що ґрунтується на операціях з матрицями. Для цього нам знадобиться одне елементарне твердження.

Лема. Якщо елементи a_{ij} матриці A задають кількість маршрутів довжини m з вершини i у вершину j, а елементи b_{ij} матриці B задають кількість відповідних маршрутів довжини n, то елементи c_{ij} матриці $C = AB$ будуть задавати кількість таких маршрутів довжини $m + n$.

Доведення. Позначатимемо через $\mathfrak{L}(l, p, q)$ кількість маршрутів довжини l з вершини p у вершину q. Тоді $\mathfrak{L}(m + n, i, j) = \sum\limits_{k} \mathfrak{L}(m, i, k)\mathfrak{L}(n, k, j) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, що узгоджується з означенням матричного добутку. ■

Оскільки за один крок жук може (єдиним способом) переповзти у будь-яку *іншу* вершину, то матриця переходів за один крок має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = U - E,$$

де через U позначено матрицю, що складається з одиниць, а через E — одиничну матрицю. (Всі матриці, звичайно, мають розмірність $k \times k$.) Тому шукана кількість шляхів буде визначатися лівим верхнім елементом матриці $A^n = (U - E)^n$.

Тепер зауважимо, що $U^l = k^{l-1}U$ і $E^l = E$ при $l \in \mathbb{N}$ і $U^0 = E$. Тому за формулою бінома Ньютона

$$(U - E)^n = (-1)^n E + \sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1} (-1)^{n-l} U,$$

а відтак кількість шляхів становить

$$\sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1} (-1)^{n-l} + (-1)^n = \frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big).$$

■

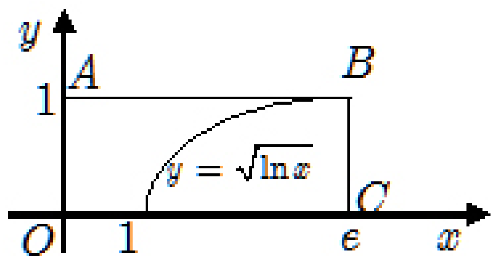
Відповідь: $\frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big)$.

Старші курси

Задача 1. Обчисліть

$$\int_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int_0^1 e^{x^2}dx.$$

Розв'язання. Підінтегральні функції взаємно обернені. Тому два інтеграли виражають площу прямокутника $OABC$



■

Відповідь: e.

Задача 2. Обчисліть

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \sin(x^2)\cos(y^2)dxdy.$$

Розв'язання. Нехай

$$f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2),$$

D – круг $x^2 + y^2 \le R^2$, а $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Область інтегрування D не зміниться, якщо поміняти місцями x та y. Тому

$$2I = \iint\limits_D (f(x,y) + f(y,x))\,dxdy = \iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \sin\rho^2 d\rho = \pi(1-\cos R^2).$$

■

Відповідь: $\frac{\pi}{2}(1-\cos R^2)$.

Задача 3. Складіть диференціальне рівняння для функції, яка для будь-якого x справджує рівність

$$f'(x) = f(-x)$$

і знайдіть $f(x)$, якщо $f(0) = 1$.

Розв'язання. Продиференціюємо тотожність $f'(x) = f(-x)$, одержимо

$$f''(x) = -f'(-x).$$

Отже, функція задовольняє диференціальне рівняння $f''(x) = -f(x)$ або

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

Звідси $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Після підстановки у задане рівняння : $c_1 = c_2$. З початкової умови одержимо $f(x) = \cos x + \sin x$. ■

Відповідь: диференціальне рівняння $f'' + f = 0$, розв'язок $f(x) = \cos x + \sin x$.

Задача 4. Знайдіть x з рівняння

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n x}{n!}.$$

Розв'язання. Рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{4}{3+x^2} = \frac{1}{x}, \quad |x| < \sqrt{3}.$$

Розв'язавши дане рівняння отримаємо, що $x = 1$. ■

Відповідь: $x = 1$.

Задача 5. Функціональну послідовність $(f_n(x),\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \left(1 - \int\limits_0^1 f_n(x)dx\right) = \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

Доведення. Знову використовуючи підстановку $x = \cos^2 t$, маємо:

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - \int_0^1 \cos^2 \frac{\arccos\sqrt{x}}{2^{n-1}}\,dx = 1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,d\cos^2 t =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$(1-\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}} \leq \sin\frac{t}{2^{n-1}} \leq (1+\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \geq N,\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тому при $n \to \infty$

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx \sim 2^{2-2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t\,dt = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

■

Задача 6. Двічі диференційована функція $(f(x),\ x \in [0,1])$ для всіх $x \in [0,1]$ задовольняє умови $f(0) = f(1) = 0$ та нерівність

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0.$$

Які значення може набувати $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$?

Розв'язання. За правилом Лейбниця

$$(e^x f(x))'' = e^x(f''(x) + 2f'(x) + f(x)).$$

Тому $(e^x f(x))'' \geq 0$, і функція $e^x f(x)$ є опуклою. Тоді за означенням опуклості для будь-якого $x \in [0,1]$ має місце нерівність

$$e^x f(x) = e^{(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0)} f(x \cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \leq x e^1 f(1) + (1-x)e^0 f(0),$$

що за умовою задачі дорівнює 0. Таким чином, $f(x) \leq 0$ при $x \in [0,1]$. Оскільки значення 0 досягається (в точках 0 та 1), то $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$. ■

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$.