Факультетська олімпіада НТУУ «КПІ» 2014

РТФ, ФЕЛ

Перший курс

1. Знайти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg1\cdot tg2+tg2\cdot tg3+...+tg(n-1)\cdot tgn}{tgn-n\cdot tg1}.$$

2. Знайти всі дійсні корені рівняння

$$xe^{-x}+e^{-x}+\frac{x^2}{2}-1=0.$$

3. Нехай I_n – квадратна матриця розміру $n\times n$, всі елементи якої дорівнюють 1. Довести, що

$$\left(E-\mathrm{I}_n\right)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n.$$

4. З початку координат опущені перпендикуляри на всеможливі дотичні до кола $x^2+y^2=2x$. Записати рівняння кривої, яку утворюють основи цих перпендикулярів.

5. Числову послідовність $(x_n, n\ge 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1=0, \\ x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{x_n}+1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)=\pi^2$.

6. В кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Починаючі свою подорож з точки A_1, він за кожну хвилину переповзає в будь-яку *іншу* точку. Скільки різних маршрутів тривалістю *n* хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку A_1?

Факультетська олімпіада НТУУ «КПІ» 2014

РТФ, ФЕЛ

Старші курси

1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(y^4 - 3x^2\right)dy + xydx = 0.$$

3. Обчислити

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(1-e^z\right)^{2014}}.$$

4. Знайти

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \end{pmatrix}^n.$$

Тут границю послідовності матриць розуміють як матрицю границь відповідних елементів.

5. Функціональну послідовність $(f_n(x), n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)}+1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n \left(1 - \int_0^1 f_n(x)dx\right) = \dfrac{\pi^2 - 4}{2}.$

6. Двічі диференційована функція $\left(f(x), x \in [0,1]\right)$ для всіх $x \in [0,1]$ задовольняє умови $f(0) = f(1) = 0$ та нерівність $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0$. Які значення може набувати $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$?