# РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ, РТФ та ФЕЛ, НТУУ «КПІ», 2014/15 н.р.

## *Перший курс*

**Задача 1.** Знайти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 + ... + \operatorname{tg}(n-1) \cdot \operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} n - n \cdot \operatorname{tg} 1}$$

*Розв'язання.* Оскільки

$$\operatorname{tg} 1 = \operatorname{tg}\left(k - (k-1)\right) = \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{1 + \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1)},$$

то

$$\operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1} - 1.$$

Тому

$$\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 + ... + \operatorname{tg}(n-1) \cdot \operatorname{tg} n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \left(\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1\right) - (n-1) = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \operatorname{tg} n - n.$$

Отже

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 + ... + \operatorname{tg}(n-1) \cdot \operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} n - n \cdot \operatorname{tg} 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} 1} \operatorname{tg} n - n}{\operatorname{tg} n - n \cdot tg1} = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} = \operatorname{ctg} 1.$$

■

**Відповідь:** $\operatorname{ctg} 1$.

**Задача 2.** Знайти всі дійсні корені рівняння

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0.$$

*Розв'язання.* Розглянемо функцію

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x^2}{2} - 1.$$

Оскільки $f'(x) = x\left(1 - e^{-x}\right) > 0$ при всіх дійсних $x \neq 0$, то функція $f$ монотонно зростає для всіх дійсних $x$. Більше того $f(0) = 0$. Тому $x = 0$ – єдиний нуль функції $f$. ■

**Відповідь:** $x = 0$.

**Задача 3.** Нехай $I_n$– квадратна матриця розміру $n \times n$, всі елементи якої дорівнюють 1. Довести, що

$$(E - I_n)^{-1} = E - \frac{1}{n-1} I_n.$$

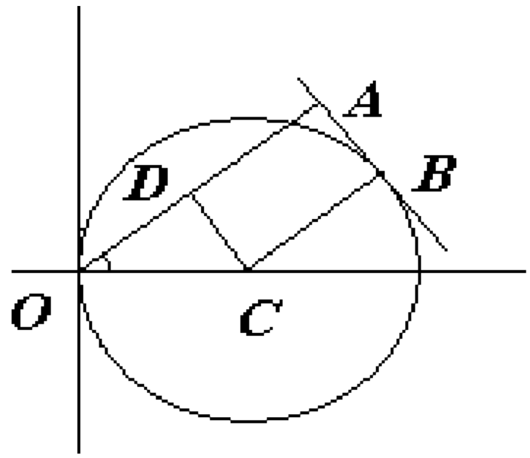
*Доведення.* Безпосереднім множенням матриць перевіряється, що $I_n^2 = n \cdot I_n$. Тому

$$\begin{aligned}(E - I_n) \cdot \left(E - \frac{1}{n-1} I_n\right) = \left(E - \frac{1}{n-1} I_n\right) \cdot (E - I_n) = \\ = E - \frac{1}{n+1} I_n - I_n + \frac{n}{n-1} I_n = E.\end{aligned}$$

Що і треба було довести. ■

**Задача 4.** З початку координат опущені перпендикуляри на всеможливі дотичні до кола $x^2 + y^2 = 2x$. Записати рівняння кривої, яку утворюють основи цих перпендикулярів.

*Розв'язання.*




Запишемо полярне рівняння кривої, яку утворюють основи перпендикулярів, тобто точки . Маємо коло з центром в точці $(1, 0)$ та радіусом $R = 1$. Оскільки

$$AD = BC = R = 1$$

та

$$OD = OC \cdot \cos\varphi = R \cdot \cos\varphi = \cos\varphi,$$

то $OA = 1 + \cos\varphi$. Отримали рівняння кардіоїди $\rho = 1 + \cos\varphi$.

■

**Відповідь:** $\rho = 1 + \cos\varphi$.

**Задача 5.** Числову послідовність $(x_n,\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - x_n) = \pi^2$.

*Доведення.* Розв'язок ґрунтується на наступній ідеї: якщо $x = \cos^2 t$ для деякого $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{\sqrt{x}+1}{2} = \cos^2 \frac{t}{2}$.

Оскільки $x_1 = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}$, то $x_n = \cos^2 \frac{\pi}{2^n}$. Тому при $n \to \infty$

$$1 - x_n = \sin^2 \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi^2}{4^n}.$$

■

**Задача 6.** В кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Починаючі свою подорож з точки $A_1$, він за кожну хвилину переповзає в будь-яку іншу точку. Скільки різних маршрутів тривалістю $n$ хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку $A_1$?

*Розв'язання.* Можна запропонувати багато способів розв'язання цієї задачі. Розглянемо розв'язок, що ґрунтується на операціях з матрицями. Для цього нам знадобиться одне елементарне твердження.

**Лема.** Якщо елементи $a_{ij}$ матриці $A$ задають кількість маршрутів довжини $m$ з вершини $i$ у вершину $j$, а елементи $b_{ij}$ матриці $B$ задають кількість відповідних маршрутів довжини $n$, то елементи $c_{ij}$ матриці $C = AB$ будуть задавати кількість таких маршрутів довжини $m+n$.

*Доведення.* Позначатимемо через $\mathfrak{L}(l,p,q)$ кількість маршрутів довжини $l$ з вершини $p$ у вершину $q$. Тоді $\mathfrak{L}(m+n,i,j) = \sum\limits_k \mathfrak{L}(m,i,k)\mathfrak{L}(n,k,j) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, що узгоджується з означенням матричного добутку. ■

Оскільки за один крок жук може (єдиним способом) переповзти у будь-яку *іншу* вершину, то матриця переходів за один крок має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = U - E,$$

де через $U$ позначено матрицю, що складається з одиниць, а через $E$ — одиничну матрицю. (Всі матриці, звичайно, мають розмірність $k \times k$.) Тому шукана кількість шляхів буде визначатися лівим верхнім елементом матриці $A^n = (U-E)^n$.

Тепер зауважимо, що $U^l = k^{l-1}U$ і $E^l = E$ при $l \in \mathbb{N}$ і $U^0 = E$. Тому за формулою бінома Ньютона

$$(U-E)^n = (-1)^n E + \sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l}U,$$

а відтак кількість шляхів становить

$$\sum_{l=1}^{n} C_n^l k^{l-1}(-1)^{n-l} + (-1)^n = \frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big).$$

■

**Відповідь:** $\frac{1}{k}\big((k-1)^n + (k-1)(-1)^n\big)$.

## *Старші курси*

**Задача 1.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

*Розв'язання.* Маємо

$$\frac{1}{\ln(n!)} = \frac{1}{\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n} > \frac{1}{n \ln n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ є розбіжним (інтегральна ознака Коші), тому $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ є розбіжним за 1 ознакою порівняння. ■

**Відповідь:** Ряд є розбіжним.

**Задача 2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(y^4 - 3x^2\right) dy + xydx = 0.$$

*Розв'язання.* Після заміни $y = \sqrt{z}$ рівняння зводиться до однорідного

$$(z^2 - 3x^2)dz + 2xzdx = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $z^3 = c\left(z^2 - x^2\right)$. Тому загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд $y^6 = c\left(y^4 - x^2\right)$. ■

**Відповідь:** $y^6 = c\left(y^4 - x^2\right)$.

**Задача 3.** Обчислити
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(1-e^z)^{2014}}.$$

*Розв'язання.*
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(1-e^z)^{2014}} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0),$$
де $f(z) = \dfrac{1}{(1-e^z)^{2014}}$.

Розглянемо функції $f_n(z) = \dfrac{1}{(1-e^z)^{2014}}$ та числа $R_n = \operatorname{res} f_n(0)$, $n \geq 1$. Розглянемо розклад в ряд Лорана функції $f_n(z)$ та продиференціюємо його почленно. Тоді розклад в ряд Лорана функції $f_n'(z)$ не буде містити доданка з $\frac{1}{z}$, а тому $\operatorname{res} f_n'(0) = 0$. Оскільки
$$f_n'(z) = \frac{ne^z}{(1-e^z)^{n+1}} = -\frac{n}{(1-e^z)^n} + \frac{n}{(1-e^z)^{n+1}} = n\left(f_{n+1}(z) - f_n(z)\right),$$
то $R_{n+1} = R_n$, $n \geq 1$. Тому $R_{2014} = R_1 = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = -1$.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(1-e^z)^{2014}} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(0) = -2\pi i.$$

■

**Відповідь:** $-2\pi i$.

**Задача 4.** Знайти
$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \end{pmatrix}^n.$$

*Розв'язання.* Нехай
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \end{pmatrix}.$$
Можна показати, методом математичної індукції, що
$$A^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot A.$$
З останнього випливає, що
$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} e^x & e^x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

**Відповідь:** $\begin{pmatrix} e^x & e^x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Задача 5.** Функціональну послідовність $(f_n(x),\ n \geq 1)$ задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{\sqrt{f_n(x)} + 1}{2}. \end{cases}$$

Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \left(1 - \int\limits_0^1 f_n(x)dx\right) = \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

*Доведення.* Знову використовуючи підстановку $x = \cos^2 t$, маємо:

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - \int_0^1 \cos^2 \frac{\arccos\sqrt{x}}{2^{n-1}}\,dx = 1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,d\cos^2 t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin^2 \frac{t}{2^{n-1}}\,dt.$$

Зауважимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$(1-\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}} \leq \sin\frac{t}{2^{n-1}} \leq (1+\varepsilon)\frac{t}{2^{n-1}}, \qquad \forall n \geq N,\ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тому при $n \to \infty$

$$1 - \int_0^1 f_n(x)\,dx \sim 2^{2-2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t\,dt = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

■

**Задача 6.** Двічі диференційована функція $(f(x),\ x \in [0,1])$ для всіх $x \in [0,1]$ задовольняє умови $f(0) = f(1) = 0$ та нерівність

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0.$$

Які значення може набувати $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$?

*Розв'язання.* За правилом Лейбниця

$$(e^x f(x))'' = e^x(f''(x) + 2f'(x) + f(x)).$$

Тому $(e^x f(x))'' \geq 0$, і функція $e^x f(x)$ є опуклою. Тоді за означенням опуклості для будь-якого $x \in [0,1]$ має місце нерівність

$$e^x f(x) = e^{(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0)} f(x \cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \leq xe^1 f(1) + (1-x)e^0 f(0),$$

що за умовою задачі дорівнює 0. Таким чином, $f(x) \leq 0$ при $x \in [0,1]$. Оскільки значення 0 досягається (в точках 0 та 1), то $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$. ■

**Відповідь:** $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$.