Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ – 2010

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання

Київ
НТУУ «КПІ»
2011

Математичні олімпіади – 2010 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання/ Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2011. - 36 с.

Навчальне видання

Математичні олімпіади – 2010

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання

Укладачі: *Булдигін Валерій Володимирович*
Ільєнко Андрій Борисович
Орловський Ігор Володимирович

Відповідальний редактор *З.П. Ординська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *І.Ю. Каніовська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Передмова

У березні 2010 року в НТУУ «КПІ» відбулася традиційна щорічна олімпіада з математики, яка проводиться в рамках I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для студентів вищих навчальних закладів. Оргкомітет олімпіади очолював перший проректор НТУУ «КПІ» Ю.І. Якименко.

У ній взяли участь 375 студентів різних курсів 22-х факультетів та інститутів. Численні делегації представили факультети з високим рівнем математичної підготовки: ІПСА, ФІОТ, ФЕЛ, ФММ, ІТС.

Переможцями та призерами олімпіади в офіційному заліку стали: Ф.І. Зубач (V курс ФТІ, гр. ФІ-52) — I місце в абсолютному заліку та I місце серед студентів старших курсів; К.В. Моравецька (II курс ІПСА, гр. КА-83) та Ю.О. Шишацький (КНУ ім.Т.Шевченка, мех.-мат. ф-т) — II місце в абсолютному заліку та II місце серед студентів старших курсів; С.С. Могильний (II курс ІПСА, гр. КА-81), О.О. Слюсаренко (III курс ІПСА, гр. КА-71), В.В. Ключніков (V курс ФТІ, гр. ФІ-51) — III місце в абсолютному заліку та III місце серед студентів старших курсів; К.О. Голоднов (II курс ІПСА, гр. КА-81), В.В. Мельник (III курс ІПСА, гр. КА-71), Ю.С. Семікіна (КНУ ім. Т.Шевченка, мех.-мат. ф-т), О.В. Сівченко (II курс ІПСА, гр. КА-82) — зайняли призові заохочувальні місця. Переможцями та призерами олімпіади серед студентів першого курсу стали: А.С. Мазур (ІПСА, гр. КА-92) — I місце; Т.Ю. Каламбет (ІПСА, гр. КА-93), І.Д. Мусіч (ІПСА, гр. КА-92), К.В. Фуйор (ФПМ, гр. КМ-91) — II місце; М.М. Древаль (ІПСА, гр. КА-92), Д.Я. Трінчук (ФЕА, гр. ЕМ-91) — III місце. А.В. Терентьєв (ІПСА, гр. КА-92), А.В. Шелест (ІПСА, гр. КА-93) — зайняли призові заохочувальні місця. Серед студентів технічних факультетів розподіл місць такий: Нго Ван Мао (III курс ФЕЛ, гр. ДЗ-71) — I місце; Д.Я. Трінчук (I курс ФЕА, гр. ЕМ-91) — II місце; О.С. Чегренець (I курс ФІОТ, гр. ІС-91) — III місце.

З переможців I етапу було сформовано збірні університету для участі в II етапі Всеукраїнської олімпіади серед технічних ВНЗів в м. Севастополі. У фіналі взяли участь понад 150 студентів з різних вузів України, переможців та призерів I туру олімпіади. Наш університет представляли три команди.

Студенти КПІ гідно виступили в Севастополі, показавши такі результати. У загальному заліку серед усіх учасників олімпіади наші студенти посіли перше та друге місця: Ф.І.Зубач (ФТІ, 5-й курс) — перше місце та С.С.Могильний (ІПСА, 2-й курс) — друге місце. У категорії "М" (факультети та інститути з поглибленим вивченням математичних дисциплін) студенти НТУУ «КПІ» посіли всі призові місця: Ф.І.Зубач (ФТІ, 5-й курс) — перше місце, С.С.Могильний (ІПСА, 2-й курс) — друге місце та К.В.Моравецька (ІПСА, 2-й курс) — третє місце. У категорії "Т" (технічні факультети та інститути) третє місце посів Нго Ван Мао (ФЕЛ, 3-й курс).

Оргкомітет Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (м. Севастополь) нагородив команду НТУУ «КПІ» грамотою за активну участь в олімпіаді та високий рівень підготовки серед команд провідних вищих навчальних закладів України.

Журі I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики в НТУУ «КПІ» вирішило видати навчальний посібник з задачами I етапу олімпіади та їх розв'язками. Наведені також умови задач II фінального етапу олімпіади, який проходив у м. Севастополі в травні 2010 р., а також розв'язки задач фінального етапу Всеукраїнської олімпіади 2009 р.

Це видання продовжує серію збірників олімпіадних задач з математики [1–7]. Такі збірники будуть корисними при роботі математичних гуртків, для студентів і школярів, які цікавляться математикою.

1. Студентська олімпіада НТУУ "КПІ" з математики 2010 року

Умови задач

Перший курс

Задача 1.1. Які значення може приймати границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n},$$

де $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — деяка сюр'єкція (тобто функція, область значень якої — вся множина $\mathbb{N}$)?

Задача 1.2. Для кожного $\alpha\in\mathbb{R}$ знайти всі функції $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, які мають таку властивість: для будь-якої трикутної піраміди $ABCD$ виконується рівність $f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=\alpha f(P)$, де P — центр кулі, описаної навколо цієї піраміди.

Задача 1.3. Про дві неперервні періодичні (можливо, з різними періодами) функції $f,g\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ відомо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Довести, що $f(x)=g(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Задача 1.4. Довести, що множина

$$\Big\{a^2+(a+1)^2+\ldots+(b-1)^2+b^2\colon\ a,b\in\mathbb{N},\ b-a\geq 6\Big\}$$

не містить простих чисел.

Задача 1.5. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{k^2+12k+10}{k^2+21k+110}.$$

Задача 1.6. З одного з фокусів еліпса з ексцентриситетом ε під деяким ненулевим кутом до більшої осі випускають світловий промінь. Промінь на протязі нескінченного часу рухається внутрішньою частиною еліпса, віддзеркалюючись від його границі. При n-ому перетині більшої осі еліпса вимірюють значення гострого кута α_n між променем та цією віссю. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}$.

Задача 1.7. Які значення може приймати

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\left(f_1^2\right)''' & \left(f_1f_2\right)''' & \cdots & \left(f_1f_{10}\right)''' \\ \left(f_2f_1\right)''' & \left(f_2^2\right)''' & \cdots & \left(f_2f_{10}\right)''' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(f_{10}f_1\right)''' & \left(f_{10}f_2\right)''' & \cdots & \left(f_{10}^2\right)'''\end{pmatrix},$$

де $f_1, f_2, \ldots, f_{10}$ — деякі тричі диференційовні функції?

Задача 1.8. Знайти інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2010x)\cos^{2008} x\, dx.$$

Задача 1.9. Довести, що для будь-якого $p \geq \frac{1}{2}$ має місце нерівність

$$\frac{1 - e^{-\frac{1}{p}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{p}.$$

Старші курси

Задача 1.10. Чи може збігатися ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2},$$

де f — взаємно-однозначне відображення з $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$?

Задача 1.11. Див. **1.2.**

Задача 1.12. Див. **1.3.**

Задача 1.13. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$T_k = \Big\{a^k + (a+1)^k + \ldots + (b-1)^k + b^k\colon\ a, b \in \mathbb{N},\ b - a \geq (k+1)!\Big\}.$$

Довести, що множина $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k$ не містить простих чисел.

Задача 1.14. Знайти суму ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k^2 + 12k + 10}{k^2 + 21k + 110}.$$

Задача 1.15. Тіло, обмежене поверхнями $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ та $z = h$, зроблено з однорідного матеріалу. При якому співвідношенні між параметрами a, b та h це тіло, поставлене на вершину, не втратить рівноваги й не перекинеться.

Задача 1.16. Випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона з параметром $\frac{\pi}{2}$. Знайти всі $x \in \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$\mathbf{M}\, \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} \sin(\cos x) = 0.$$

Задача 1.17. Знайти інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2012x)\cos^{2010} x\, dx.$$

Задача 1.18. Функція $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє умову

$$\int_0^{+\infty} y''(x)\, y^2(t)\, dt = \int_0^{+\infty} y'(x)\, y(t)\, dt.$$

Які значення може приймати число $y'(0)$?

Відповіді та розв'язки

1.1. По-перше покажемо, що будь-яке число α з проміжку $[0,1]$ може бути границею виразу $\frac{f(n)}{n}$ при $n \to \infty$ для деякої сюр'єктивної функції $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Дійсно, в якості прикладу такої функції можна взяти $f(n) = [\alpha n]$ для $\alpha \in (0,1]$ та $f(n) = [\sqrt{n}]$ для $\alpha = 0$, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Тепер покажемо, що жодне число $\alpha > 1$ не може бути такою границею. Припустимо супротивне: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \alpha > 1$. Тоді $1 < \frac{\alpha+1}{2} < \alpha$, і за означенням границі $f(n) > \frac{n(\alpha+1)}{2}$ для всіх достатньо великих n. Зокрема, ми можемо взяти n настільки великим, щоб виконувалася нерівність $\frac{n(\alpha+1)}{2} \geq n+1$. Тоді для всіх $m \geq n$ маємо:

$$f(m) > \frac{m(\alpha+1)}{2} \geq \frac{n(\alpha+1)}{2} \geq n+1.$$

В той же час, при різних $m < n$ функція f може набути не більше $n-1$ різних значень, тобто не покриє всі значення від 1 до n. Інакше кажучи, деяке число $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ не увійде в область значень функції f. Але це суперечить її сюр'єктивності.

Відповідь: Будь-яке значення з проміжку $[0,1]$.

1.2. Покажемо, що для будь-яких двох точок $A', A'' \in \mathbb{R}^3$ має місце рівність $f(A') = f(A'')$. Для цього розглянемо будь-яку сферу $\mathcal{S}$, що проходить через дві ці точки, та виберемо на ній додатково точки B, C, D так, щоб ані A', B, C, D, ані A'', B, C, D не належали б одній площині. Тоді з умови задачі маємо

$$f(A') + f(B) + f(C) + f(D) = \alpha f(P) = f(A'') + f(B) + f(C) + f(D),$$

де P — центр сфери $\mathcal{S}$. Звідси $f(A') = f(A'')$.

Тому $f \equiv C$ для деякого $C \in \mathbb{R}$. При $\alpha \neq 4$ з умови задачі додатково маємо $4C = \alpha C$, звідки $C = 0$. Знайдені розв'язки, очевидно, задовольняють умову.

Відповідь: $f \equiv C$ для деякого $C \in \mathbb{R}$ при $\alpha = 4$; $f \equiv 0$ при $\alpha \neq 4$.

1.3. Хід розв'язку залежить від того, чи є відношення періодів T_f та T_g функцій f та g раціональним або ірраціональним числом.

В першому випадку $\left(\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}\right)$ функції f та g мають спільний період $T = $ НСК(T_f, T_g). Тому для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+nT)}{g(x+nT)} = 1.$$

В другому випадку $\left(\frac{T_f}{T_g} \notin \mathbb{Q}\right)$ функції f та g не мають спільного періоду. Тоді можна підібрати зростаючі послідовності натуральних чисел $(m_k, k \in \mathbb{N})$ та $(n_k, k \in \mathbb{N})$ такі, що $|m_k T_f - n_k T_g| \to 0$ при $k \to \infty$. Тепер внаслідок неперервності функцій f та g маємо:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x)}{g(x+m_kT_f - n_kT_g)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x+m_kT_f)}{g(x+m_kT_f)} = 1.$$

<u>1.4.</u> Див. розв'язок **1.13.**

<u>1.5.</u> Спочатку розкладемо раціональний дріб, що стоїть під знаком суми, на елементарні. Легко отримати, що

$$\frac{k^2+12k+10}{k^2+21k+110} = 1 - \frac{10}{k+10} + \frac{1}{k+11}.$$

Використовуючи отримане, суму можна розписати, як

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k^2+12k+10}{k^2+21k+110} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(-\frac{10}{k+10} + \frac{1}{k+11}\right) = S_{1n} + S_{2n}.$$

Розпишемо другу суму, відмітивши групування доданків,

$$S_{2n} = \frac{10}{11} - \left(\frac{1}{12} + \frac{10}{2!\cdot 12}\right) + \left(\frac{1}{2!\cdot 13} + \frac{10}{3!\cdot 13}\right) + \frac{1}{3!\cdot 14} + \ldots -$$
$$- \frac{(-1)^{n-1}10}{(n-1)!(n+9)} + \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(n+10)} - \frac{(-1)^n 10}{n!(n+10)}\right) + \frac{(-1)^n}{n!(n+11)}.$$

Зводячи вирази в дужках до спільного знаменника отримуємо (строге доведення вимагає застосування методу математичної індукції)

$$S_{2n} = \frac{10}{11} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!(n+11)} = -\frac{1}{11} - S_{1n} + \frac{(-1)^n}{n!(n+11)}.$$

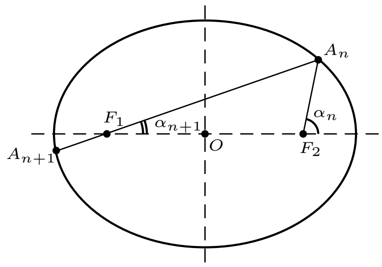
Таким чином,

$$S_n = -\frac{1}{11} + \frac{(-1)^n}{n!(n+11)},$$

і, остаточно, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\dfrac{1}{11}$.

__**Відповідь:**__ $-\frac{1}{11}$.

__**1.6.**__ Нехай $A_n(x_n, y_n)$ — точка n-ого віддзеркалювання траєкторії променя від границі еліпса. Як відомо з теорії кривих другого порядку, фокальні радіуси F_1A_n та F_2A_n мають довжини $a + \varepsilon x_n$ та $a - \varepsilon x_n$ відповідно (через a ми, як звичайно, позначаємо довжину більшої півосі).



Тому з теореми синусів, застосованої до трикутнику $F_1A_nF_2$, маємо:

$$\frac{\sin\alpha_{n+1}}{\sin\alpha_n} = \frac{F_2A_n}{F_1A_n} = \frac{a - \varepsilon x_n}{a + \varepsilon x_n}.$$

Неважко бачити (обов'язково проведіть строгі викладки!), що з ростом n точки A_n будуть наближатися до правої або лівої вершини еліпса: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ і $\lim_{n\to\infty} |x_n| = a$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} = $$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha_{n+1}}{\sin\alpha_n} = \frac{a - \varepsilon a}{a + \varepsilon a} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

__**Відповідь:**__ $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

__**1.7.**__ Зауважимо, що i, j-ий елемент матриці може бути записано в такому вигляді: $\big(f_i f_j\big)''' = f_i''' f_j + 3f_i'' f_j' + 3f_i' f_j'' + f_i f_j'''$. Це означає, що всі стовпчики матриці лінійно виражаються через такі чотири стовпчики:

$$\begin{pmatrix} f_1''' \\ f_2''' \\ \ldots \\ f_{10}''' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \ldots \\ f_{10}'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \ldots \\ f_{10}' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_{10}. \end{pmatrix},$$

Тому ранг матриці не може бути більше 4. В той же час цей ранг може приймати будь-яке значення з множини $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Для того, щоб в цьому переконатися достатньо розглянути такі набори функцій: $f_1 = \ldots = f_{10} = 0$ (rang $= 0$), $f_1 = e^x, f_2 = \ldots = f_{10} = 0$ (rang $= 1$), $f_1 = e^x, f_2 = e^{2x}, f_3 = \ldots = f_{10} = 0$ (rang $= 2$), $f_1 = e^x, f_2 = e^{2x}, f_3 = e^{3x}, f_4 = \ldots = f_{10} = 0$ (rang $= 3$), і, нарешті, $f_1 = e^x, f_2 = e^{2x}, f_3 = e^{3x}, f_4 = e^{4x}, f_5 = \ldots = f_{10} = 0$ (rang $= 4$). Відповідні матриці матимуть вказані ранги, наприклад, при $x = 0$.

1.8. В узагальнення цієї задачі покажемо, що для будь-якого $\alpha \geq 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha x)\cos^{\alpha-2} x\,dx = 0.$$

Дійсно, це випливає з наступних рівностей:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha x)\cos^{\alpha-2} x\,dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha-1)x \sin x \cos^{\alpha-2} x\,dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1} x\,dx + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha-1)x\,d(\cos^{\alpha-1} x) = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1} x\,dx + \frac{1}{\alpha-1}\sin(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \\
&- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1} x\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Відповідь: 0.

1.9. Зробимо заміну змінних $t = \frac{1}{p}$. Тоді задача зведеться до наступної: довести, що для довільного $t \in (0, 2]$ має місце нерівність

$$\frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \geq t.$$

Розглянемо функцію $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$. Для доведення нерівності достатньо показати, що дана функція монотонно спадає при $t \in (0, 2]$ і $f(2) > 1 - e^{-\frac{1}{2}}$.

Знайдемо похідну: $f'(t) = \dfrac{e^{-t}(t+1) - 1}{t^2}$. Покажемо, що $f'(t) < 0$ при $t > 0$. Для цього розв'яжемо нерівність

$$\frac{e^{-t}(t+1) - 1}{t^2} < 0.$$

При $t > 0$ ця нерівність еквівалентна наступній:

$$e^{-t}(t+1) - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t + 1 < e^t.$$

Виконання останньої нерівності легко перевіряється.

Для завершення доведення залишилось помітити, що $f(2) > 1 - e^{-\frac{1}{2}}$.

<u>**1.10.**</u> Розглянемо суму двох довільних членів ряду. Для цього зафіксуємо довільні $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Подивимось, що станеться з цією сумою, якщо ми поміняємо місцями чисельники. Розглянемо різницю

$$\left(\frac{f(m)}{m} + \frac{f(n)}{n}\right) - \left(\frac{f(n)}{m} + \frac{f(m)}{n}\right) =$$
$$= \frac{f(m) - f(n)}{m} - \frac{f(m) - f(n)}{n} = \frac{(n-m)\,(f(m) - f(n))}{mn}.$$

З отриманого можна заключити, що якщо $m < n$ та $f(m) < f(n)$, тоді при перестановці чисельників сума може лише збільшуватись.

Використовуючи отримане, доведемо, що для будь якого взаємно-однозначного відображення f ряд буде розбігатися. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай таке відображення f існує. Розглянемо ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$. Оскільки f взаємно-однозначне відображення, тоді існує такий номер l_1 такий, що $f(l_1) = 1$. Розглянемо нову функцію

$$f_1(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ f(1), & n = l_1; \\ f(n), & n \in \mathbb{N} \backslash \{1, l_1\}. \end{cases}$$

Отримана функція задовольняє умові задачі, причому ряд

$$S_1 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^2} = 1 + R_1$$

буде збіжним (оскільки від початкового від відрізняється лише двома членами). Крім того $S_1 < S$ (в силу доведеного на початку). Далі, для ряду S_1 існує l_2 таке, що $f(l_2) = 2$ і повторимо процедуру, задавши, аналогічним чином функцію f_2. В результаті отримаємо збіжний ряд

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f_2(n)}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + R_2,$$

для якого $S_2 < S_1 < S$. Продовжуючи дану процедуру на m-му кроці, отримаємо

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_m(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} + R_m,$$

для якого $S_m < S$ и т.д.

В силу збіжності ряду S будемо мати, що $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$ і переходячи до границі в нерівності $S_m < S$ отримаємо

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}.$$

З припущення про збіжність ряду S випливає, що гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є збіжним. Отримали протиріччя, тобто такі ряди завжди розбіжні.

Відповідь: Ні.

1.11. Див. розв'язок **1.2.**
1.12. Див. розв'язок **1.3.**
1.13. Зафіксуємо $a, b \in \mathbb{N}$ і покажемо, що

$$S_k := a^k + \ldots + b^k = \frac{(b-a+1)q_k}{(k+1)!},$$

де q_k — деяке натуральне число. Цього буде достатньо для розв'язання задачі (продумайте чому!).

Доведення проведемо індукцією за k. При $k = 0$ твердження очевидне. Припустимо, що воно вірно для $l = 0, \ldots, k$, і покажемо, що воно залишиться справедливим при $l = k+1$.

З рівності

$$(x+1)^{k+2} - x^{k+2} = C_{k+2}^{k+1} x^{k+1} + C_{k+2}^{k} x^k + \ldots + C_{k+2}^{1} x + 1$$

маємо:

$$\begin{aligned}
(b+1)^{k+2} - a^{k+2} &= \sum_{x=a}^{b} \big((x+1)^{k+2} - x^{k+2}\big) = \\
&= \sum_{x=a}^{b} C_{k+2}^{k+1} x^{k+1} + \sum_{x=a}^{b} C_{k+2}^{k} x^k + \ldots + \sum_{x=a}^{b} C_{k+2}^{1} x + \sum_{x=a}^{b} 1 = \\
&= C_{k+2}^{k+1} S_{k+1} + C_{k+2}^{k} S_k + \ldots + C_{k+2}^{1} S_1 + S_0.
\end{aligned}$$

Тому за припущенням індукції

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} \cdot \big((b+1)^{k+2} - a^{k+2} - C_{k+2}^{k} S_k - \ldots - C_{k+2}^{1} S_1 - S_0\big) = \\
&= \frac{b-a+1}{k+2} \cdot \left(\frac{(b+1)^{k+2} - a^{k+2}}{b+1-a} - C_{k+2}^{k} \frac{q_k}{(k+1)!} - \ldots - C_{k+2}^{1} \frac{q_1}{2!} - \frac{q_0}{1!}\right),
\end{aligned}$$

причому $\frac{(b+1)^{k+2}-a^{k+2}}{b+1-a}$ — ціле число (доведіть індукцією за k). Звідси й випливає твердження.

1.14. Див. розв'язок **1.5.**

1.15. Позначимо тіло через D і знайдемо його центр мас $M(x_M, y_M, z_M)$. З міркувань симетрії зрозуміло, що $x_M = y_M = 0$. Координату z_M може бути знайдено за формулою

$$z_M = \frac{\iiint\limits_D z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_D dx\,dy\,dz} = \frac{\pi abh^3/3}{\pi abh^2/2} = \frac{2h}{3}.$$

(Ми пропускаємо елементарне обчислення потрійних інтегралів.)

Положення рівноваги буде стійким, якщо локальний екстремум функції

$$f(x,y) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2h}{3}\right)^2$$

в точці $O(0,0)$ буде мінімумом, де f — це квадрат відстані між точкою на поверхні параболоїда та центром мас M. (Уважно продумайте цей момент!) Тому, перевіряючи стандартні умови на матрицю других похідних, отримаємо нерівності $h < \frac{3a^2}{4}$, $h < \frac{3b^2}{4}$.

Відповідь: $h < \frac{3}{4}\min\{a^2, b^2\}$.

1.16. Для будь-якої аналітичної функції f

$$\mathbf{M}\,\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k}{k!}f^{(k)}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)\left(\frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} = e^{-\frac{\pi}{2}}f\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big).$$

Тому задача зводиться до розв'язання рівняння $\sin(\cos(x+\pi/2)) = 0$, розв'язками якого є числа πk, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1.17. Див. розв'язок **1.8.**

1.18. Перепишемо рівняння в наступному вигляді

$$y''(x)\int\limits_0^{+\infty} y^2(t)\,dt = y'(x)\int\limits_0^{+\infty} y(t)\,dt.$$

Помітимо, що обидва інтеграла, які входять у рівняння є певними константами, тому позначимо їх

$$A = \int\limits_0^{+\infty} y^2(t)\,dt \geq 0, \quad B = \int\limits_0^{+\infty} y(t)\,dt.$$

Розглянемо два випадки:

1) $A = 0$. З цього випливає, в силу неперервності функції y, що $y(x) = 0$, $x \geq 0$, а відповідно $y'(0) = 0$.

2) $A \geq 0$. Тоді отримуємо лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$Ay'' - By' = 0$$

розв'язком якого буде функція вигляду $y = c_1 + c_2 e^{-Cx}$, де $C = -\frac{B}{A}$.

Зі збіжності інтегралів випливає, що $c_1 = 0$. Розглянемо випадок, коли $c_2 \neq 0$, оскільки в протилежному випадку $y = 0$, а цей випадок розглянуто в першому пункті. Тоді виходить, що $C > 0$. Підставимо отриманий розв'язок $y = c_2 e^{-Cx}$ в початкове рівняння та знайдемо c_2

$$C^2 c_2 e^{-Cx} \int\limits_0^{+\infty} c_2^2 e^{-2Ct} dt = -C c_2 e^{-Cx} \int\limits_0^{+\infty} c_2 e^{-Ct}\, dt \;\Leftrightarrow\; c_2 = -\frac{2}{C}.$$

Таким чином, розв'язок має вигляд $y = -\frac{2}{C} e^{-Cx}$, звідки $y'(0) = 2$.

<u>**Відповідь:**</u> $y'(0) = 0$ або $y'(0) = 2$.

2. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2009 р.)

II етап Всеукраїнської студентської олімпіади у м. Севастополі проводився у трьох категоріях:

– *Категорія "М":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за спеціальностями, що потребують поглибленого вивчення математики;

– *Категорія "Т":* до цієї категорії відносили студентів технічних спеціальностей;

– *Категорія "С":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за економічними та аграрними спеціальностями.

В цьому розділі подано завдання всіх категорій олімпіади 2009 р. з розв'язками.

Умови задач

Категорія "М"

Задача 2.1. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = n+1-i, \\ b & \text{при } j < n+1-i, \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n. \\ a & \text{при } j > n+1-i, \end{cases}$$

Задача 2.2. Вектори $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ ..., \ \vec{a}_n$ n- вимірного лінійного простору лінійно незалежні. Довести, що вектори $\vec{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) \, \vec{a}_j, \ i = 1, \ 2, \ ..., \ n,$ також лінійно незалежні.

Задача 2.3. Довести, що крива $\vec{r} = \left\{ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t, \ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t, \ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \right\}$ лежить на конусі $x^2 + y^2 = z^2$. Під яким кутом вона перетинає його прямолінійні твірні?

Задача 2.4. Не використовуючи таблиць і калькулятора, порівняти числа

$$2010^{2009} \cdot 2008^{2008} \text{ і } 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}.$$

Задача 2.5. Знайти кількість упорядкованих наборів $(A_1, \ A_2, \ ..., \ A_m)$ множин, що задовольняють умови:

1) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = \{1, \ 2, \ ..., \ n\}$;

2) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m = \emptyset$, де $m, \ n \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$.

Задача 2.6. Нехай $f(x)$ – многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами, який має n дійсних коренів (не обов'язково різних). Довести, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$f(x) \cdot f''(x) \leq \left(f'(x)\right)^2.$$

Задача 2.7. Знайти суму числового ряда

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} + ... \ .$$

Задача 2.8. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx.$$

Задача 2.9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь :

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}.$$

Задача 2.10. Знайти всі диференційовні функції $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, які задовольняють рівняння

$$f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}, \text{ де } a > 0.$$

Категорія "Т"

Задача 2.11. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = i, \\ a & \text{при } j < i, \ \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq n. \\ b & \text{при } j > i, \end{cases}$$

Задача 2.12. Вектори $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3$ не компланарні. Довести, що вектори $\vec{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)\, \vec{a}_j, \ i = 1, \ 2, \ 3$, також не компланарні.

Задача 2.13. Пряма перетинає рівнобічну гіперболу в точках A и B, а її асимптоти – в точках C і D. Знайти відношення $\frac{AC}{BD}$.

Задача 2.14. Не використовуючи таблиць і калькулятора, довести, що

$$2010^{2009} \cdot 2008^{2008} > 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}.$$

Задача 2.15. Знайти кількість упорядкованих наборів (A_1, A_2, A_3, A_4) множин, що задовольняють умови:

1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$.

Задача 2.16. Див. **2.6**.

Задача 2.17. Знайти суму числового ряда

$$\frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} + ... \ .$$

Задача 2.18. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\, e^x dx}{(x+1)^3}.$$

Задача 2.19. Див. **2.9**.

Задача 2.20. Знайти всі диференційовні функції $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, які задовольняють рівняння

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}.$$

Категорія "C"

Задача 2.21. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = i, \\ i & \text{при } j \neq i, \end{cases} \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n.$$

Задача 2.22. Див. **2.12**.

Задача 2.23. Пряма перетинає рівнобічну гіперболу в точках A и B, а її асимптоти – в точках C і D. Довести, що $AC = BD$.

Задача 2.24. Не використовуючи таблиць і калькулятора, порівняти числа

$$\log_{2008} 2009 \text{ і } \log_{2009} 2010.$$

Задача 2.25. Знайти число упорядкованих наборів (A_1, A_2, A_3) множин, що задовольняють умови:
1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Задача 2.26. Див. **2.6**.

Задача 2.27. Знайти суму числового ряда

$$\frac{2}{3!} - \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} + ... \ .$$

Задача 2.28. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{xe^x dx}{(x+1)^2}$.

Задача 2.29. Знайти інтегральну криву рівняння

$$\left(2x^3y^2 - y\right) dx + \left(2x^2y^3 - x\right) dy = 0,$$

що проходить через точку (1; 1).

Задача 2.30. Чи існують функції $f(x)$ и $g(x)$, які не дорівнюють константі і задовольняють в деякому проміжку умові

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g'(x).$$

Відповіді та розв'язки

2.1. Даний визначник має вигляд

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b & b & ... & b & b & 0 \\ b & b & ... & b & 0 & a \\ b & b & ... & 0 & a & a \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b & 0 & ... & a & a & a \\ 0 & a & ... & a & a & a \end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями стовпці з номерами j и $n+1-j$, тобто перший і останній стовпці, другій і передостанній тощо. В результаті дістанемо

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 0 & b & b & ... & b & b \\ a & 0 & b & ... & b & b \\ a & a & 0 & ... & b & b \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & 0 & b \\ a & a & a & ... & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Тому (див. розв'язання задачі **2.11**)

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n+1}ab\left(a^{n-2} + a^{n-3}b^1 + a^{n-4}b^2 + a^{n-5}b^3 + ... + b^{n-2}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}ab\left(a^{n-2} + a^{n-3}b^1 + a^{n-4}b^2 + a^{n-5}b^3 + ... + b^{n-2}\right).$$

Відповідь: $\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}ab\ \left(a^{n-2} + a^{n-3}b^1 + a^{n-4}b^2 + a^{n-5}b^3 + ... + b^{n-2}\right)$.

2.2. Припустимо, що вектори $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ ...,\ \vec{b}_n$ лінійно залежні. Тоді знайдуться дійсні числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля і такі, що

$$\alpha_1\vec{b}_1+\alpha_2\vec{b}_2+...+\alpha_n\vec{b}_n=\vec{0}.$$

Це означає, що

$$\alpha_1\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_j\right)\ \vec{a}_j+\alpha_2\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_j\right)\ \vec{a}_j+...+\alpha_n\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{a}_n\cdot\vec{a}_j\right)\ \vec{a}_j=\vec{0}$$

або

$$\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_1\right)\vec{a}_1+\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_2\right)\vec{a}_2+...+\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_n\right)\vec{a}_n=\vec{0}, \tag{1}$$

де $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$.

Оскільки вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$, лінійно незалежні, то $\vec{c}\neq\vec{0}$, і з (1) випливає, що

$$\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_1\right)=0,\ \left(\vec{c}\cdot\vec{a}_2\right)=0,\ \ldots,\ \left(\vec{c}\cdot\vec{a}_n\right)=0.$$

З чого виходить, що

$$\begin{aligned}\vec{c}^{\,2}&=\left(\vec{c}\cdot\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n\right)=\\&=\alpha_1\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_1\right)+\alpha_2\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_2\right)+...+\alpha_n\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_n\right)=0.\end{aligned}$$

Тобто $\vec{c}=\vec{0}$. Прийшли до протиріччя. Отже, вектори $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ ...,\ \vec{b}_n$ лінійно незалежні, що й потрібно було довести.

2.3. Неважко переконатися, що координати довільної точки даної кривої $x=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t,\ y=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t,\ z=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$ задовольняють рівняння конуса, тобто дана крива лежить на конусі.

Візьмемо довільну точку $M\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t,\ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t,\ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\right)$ кривої й знайдемо кут φ, під яким дана крива перетинає твірну конуса в точці M, тобто кут між твірною конуса та дотичною до кривої в точці M.

За напрямний вектор твірної можна взяти вектор колінеарний до вектора $\overrightarrow{OM}$, наприклад, вектор $\vec{u}_1=(\cos t,\ \sin t,\ 1)$, а за напрямний вектор дотичної до кривої в точці M – вектор, колінеарний до вектора $\vec{r}\,'=\left(\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t\right)',\ \left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t\right)',\ \left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\right)'\right)$, наприклад, вектор $\vec{u}_2=\left(\cos t-\sqrt{2}\sin t,\ \sin t+\sqrt{2}\cos t,\ 1\right)$.

Оскільки $|\vec{u}_1|=\sqrt{2}$, $|\vec{u}_2|=2$, $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)=2$, то

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Звідси $\varphi=45^\circ$.

Відповідь: 45°.

2.4. Поділимо кожне з даних чисел на додатне число $2008^{2008} \cdot 2009^{2009}$ і порівняємо одержані числа $\left(\frac{2010}{2009}\right)^{2009}$ и $\left(\frac{2009}{2008}\right)^{2008}$. Подамо ці числа у вигляді:

$$\left(\frac{2010}{2009}\right)^{2009} = \left(1+\frac{1}{2009}\right)^{2009}, \quad \left(\frac{2009}{2008}\right)^{2008} = \left(1+\frac{1}{2008}\right)^{2008}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $x > 0$. Покажемо, що похідна цієї функції

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) > 0, \ x \geq 1.$$

Дійсно, функція $g(x) = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}$ задовольняє умови:

1) $g(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$;

2) $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

3) $g(x)$ є спадною на проміжку $[1;\ +\infty)$, оскільки $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} < 0$ $x \in [1;\ +\infty)$.

Тому $\forall x \in [1;\ +\infty)$ $g(x) > 0$, і, відповідно, $f'(x) > 0$.

Отже, функція $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ зростає на проміжку $[1;\ +\infty)$. Тому $\left(1+\frac{1}{2009}\right)^{2009} > \left(1+\frac{1}{2008}\right)^{2008}$, звідки випливає, що

$$2010^{2009} \cdot 2008^{2008} > 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}.$$

Відповідь: $2010^{2009} \cdot 2008^{2008} > 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}$.

2.5. З умови задачі випливає, що кожне з чисел 1, 2, ... , n є елементом хоча б однієї із множин $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ і жодне з цих чисел не є елементом відразу всіх множин $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$. Тому кількість способів, яким можна розмістити кожне із чисел 1, 2, ... , n у множини $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$, дорівнює

$$C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} = 2^m - 2.$$

Отже, згідно з правилом добутку маємо $(2^m-2)^n$ шуканих упорядкованих наборів множин $(A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m)$.

Відповідь: $(2^m-2)^n$.

2.6. Нехай многочлен $f(x)$ має корені $x_1,\ x_2\ ,...,\ x_k$ кратності $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_k$ відповідно ($x_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ k$; $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$). Тоді

$$f(x) = A\,(x-x_1)^{\alpha_1}\,(x-x_2)^{\alpha_2} ... (x-x_k)^{\alpha_k}.$$

Розглянемо два випадки.

1). Якщо $x = x_i$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ k$, то дана нерівність є очевидно вірною.

2). Нехай $x \neq x_i$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ k$. Тоді

$$\begin{aligned} f'(x) =& A\big[\alpha_1 (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} + \\ & + \alpha_2 (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} + \dots + \\ & + \alpha_k (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k - 1}\big] = \\ =& f(x)\left(\frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{x - x_k}\right), \end{aligned}$$

або

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{x - x_k}.$$

Диференціюючи обидві частини даної рівності за x, дістаємо

$$\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = -\left(\frac{\alpha_1}{(x - x_1)^2} + \frac{\alpha_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{(x - x_k)^2}\right).$$

Звідси $f''(x)f(x) - (f'(x))^2 < 0$.

Таким чином, нерівність $f(x) \cdot f''(x) \leq (f'(x))^2$ виконується $\forall x \in \mathbb{R}$, що й треба було довести.

2.7. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

тоді для $x \neq 0$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots .$$

Продиференцюювавши останню рівність з урахуванням, що даний степеневий ряд можна почленно диференціювати, отримаємо

$$\frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{2x}{3!} + \frac{3x^2}{4!} + \dots + \frac{(n-1)\,x^{n-2}}{n!} + \dots .$$

Покладаючи в цієї рівності $x = 1$, остаточно дістаємо

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} + \dots = 1.$$

Відповідь: 1.

2.8.

$$I=\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{arctg} x,\ \ x=\operatorname{tg} t \\ x=0\to t=0, \\ x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\operatorname{tg} t+1\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}dt=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt,$$

Помітимо, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\left|\begin{array}{l} t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-u,\ \ u=\frac{\pi}{4}-t; \\ t=0\to u=\frac{\pi}{4},\ t=\frac{\pi}{4}\to u=0\end{array}\right|=$$

$$=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos u du=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt.$$

Звідки випливає, що $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Відповідь: $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

2.9. Перепишемо дану систему у вигляді

$$\left\{\begin{array}{l} \left(y^2-xy\right)dx=(xz-xy)\,dy, \\ \left(y^2-xy\right)dz=\left(y^2-xz\right)dy, \end{array}\right. \tag{2}$$

де $x\neq 0,\ \ y\neq 0,\ \ y\neq x,\ \ z\neq y,\ \ y^2\neq xz$.

Додамо ліву і праву частини першого рівняння системи (2) відповідно до лівої і правої частин другого рівняння цієї системі. В результаті дістанемо:

$$\left(y^2-xy\right)(dz+dx)=\left(y^2-xy\right)dy.$$

Звідки $d(z+x-y)=0$ або

$$z+x-y=C_1, \tag{3}$$

де C_1 - довільна стала.

Співвідношення (3) – перший інтеграл системи (2). Для того, щоб знайти ще один перший інтеграл даної системи, перетворимо друге рівняння цієї системі:

$$y^2\left(dz-dy\right)=xydz-xzdy,\quad \text{або}\quad \frac{d\left(z-y\right)}{x}=\frac{ydz-zdy}{y^2}.$$

Враховуючи (3) рівняння можна звести до $-\frac{dx}{x}=d\left(\frac{z}{y}\right)$, звідки

$$\ln|x|+\frac{z}{y}=C_2, \tag{4}$$

де C_2 - довільна стала.

Очевидно, що перший інтеграл (3) і перший інтеграл (4) незалежні. Отже, система (3), (4) утворює загальній інтеграл даної системи диференціальних рівнянь.

Відповідь: $z+x-y=C_1, \quad \ln|x|+\frac{z}{y}=C_2.$

2.10. Дане рівняння
$$f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)} \tag{5}$$
можна переписати у вигляді
$$f'(x)=\frac{a}{xf\left(\frac{a}{x}\right)}, \tag{6}$$
звідки випливає, що
$$xf\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{a}{f'(x)}. \tag{7}$$
Продиференціюємо обидві частини рівняння (6) за x:
$$f''(x)=-\frac{a}{\left(xf\left(\frac{a}{x}\right)\right)^2}\left[f\left(\frac{a}{x}\right)-\frac{a}{x}f'\left(\frac{a}{x}\right)\right]. \tag{8}$$
З урахуванням (5) і (7) рівняння (8) можна перетворити до вигляду
$$xf''(x)=-f'(x)+\frac{x\left(f'(x)\right)^2}{f(x)} \quad \text{або} \quad x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f(x)}.$$
Інтегруючи, дістаємо $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{C_1}{x}$, звідки
$$f(x)=C_2x^{C_1}, \tag{9}$$
де C_1, C_2 - довільні сталі. Оскільки з умови задачі випливає, що $f(x)>0$ і $f'(x)>0$, то $C_1>0$ і $C_2>0$.

Підставимо (9) у вихідне рівняння. В результаті дістанемо
$$C_1C_2\frac{a^{C_1-1}}{x^{C_1-1}}=\frac{x}{C_2x^{C_1}}.$$
Звідси $C_2=\frac{1}{\sqrt{C_1a^{C_1-1}}}$.

Отже, всі функції, що задовольняють умови задачі, можна записати у вигляді $f(x)=\frac{x^C}{\sqrt{Ca^{C-1}}}$, де $C>0$.

Відповідь: $f(x)=\frac{x^C}{\sqrt{Ca^{C-1}}}$, $C>0$.

<u>2.11.</u> Даний визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & b & b & \ldots & b & b \\ a & 0 & b & \ldots & b & b \\ a & a & 0 & \ldots & b & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & 0 & b \\ a & a & a & \ldots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від першого рядка другий, від другого рядка – третій, ..., від передостаннього рядка – останній. Отримаємо:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a & b \\ a & a & a & \ldots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник Δ_n за елементами першого стовпця, дістанемо рекурентну формулу

$$\Delta_n = -a \cdot \Delta_n - 1 + (-1)^{n+1} a b^{n-1}.$$

Застосовуючи дану формулу $(n-2)$ рази, виразимо визначник Δ_n через визначник Δ_2:

$$\begin{aligned} \Delta_n =& - a \cdot \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} a b^{n-1} = -a\left(-a \cdot \Delta_{n-2} + (-1)^n a b^{n-2}\right) + \\ &+ (-1)^{n+1} a b^{n-1} = a^2 \Delta_{n-2} + (-1)^{n+1}\left(a^2 b^{n-2} + a b^{n-1}\right) = \\ =& a^2\left(-a \cdot \Delta_{n-3} + (-1)^{n-1} a b^{n-3}\right) + (-1)^{n+1}\left(a^2 b^{n-2} + a b^{n-1}\right) = \\ =& - a^3 \cdot \Delta_{n-3} + (-1)^{n+1}\left(a^3 b^{n-3} + a^2 b^{n-2} + a b^{n-1}\right) = \ldots = \\ =& (-1)^{n-2} a^{n-2} \Delta_2 + (-1)^{n+1}\left(a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + a^{n-4} b^4 + \ldots + a b^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Оскільки $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -a & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = -ab$, то

$$\begin{aligned} \Delta_n =& (-1)^{n+1}\left(a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + a^{n-4} b^4 + \ldots + a b^{n-1}\right) = \\ =& (-1)^{n+1} a b\left(a^{n-2} + a^{n-3} b^1 + a^{n-4} b^2 + a^{n-5} b^3 + \ldots + b^{n-2}\right). \end{aligned}$$

<u>Відповідь:</u> $\Delta_n = (-1)^{n+1} a b\left(a^{n-2} + a^{n-3} b^1 + a^{n-4} b^2 + a^{n-5} b^3 + \ldots + b^{n-2}\right)$..

<u>2.12.</u> У розв'язку задачі **2.2** покласти $n = 3$.

<u>2.13.</u> Виберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб оси Ox і Oy були асимптотами рівнобічної гіперболи. Тоді рівняння цієї гіперболи буде мати вигляд $y = \frac{a}{x}$. Якщо x_1 и x_2 – абсциси точок A и B, то $A\left(x_1,\ \frac{a}{x_1}\right)$, $B\left(x_2,\ \frac{a}{x_2}\right)$.

Складемо рівняння прямої AB:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - \frac{a}{x_1}}{\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}} \quad \text{або} \quad x - x_1 = -\frac{(x_1 y - a)\, x_2}{a}.$$

Пряма AB перетинає вісь Ox в точці $D\,(x_1 + x_2,\ 0)$ та вісь Oy в точці $C\left(0,\ \frac{a(x_1+x_2)}{x_1 x_2}\right)$. Тоді

$$\overrightarrow{AC} = \left(0 - x_1,\ \frac{a\,(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} - \frac{a}{x_1}\right) = \left(-x_1,\ \frac{a}{x_2}\right),$$
$$\overrightarrow{BD} = \left(x_1 + x_2 - x_2,\ 0 - \frac{a}{x_2}\right) = \left(x_1,\ -\frac{a}{x_2}\right).$$

З чого випливає, що $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD}$, а це означає, що $\frac{AC}{BD} = 1$.

<u>Відповідь:</u> 1.

<u>2.14.</u> Див. розв'язок **2.4**.

<u>2.15.</u> У розв'язку задачі **2.5** покласти $m = 4$, $n = 10$.

<u>Відповідь:</u> 14^{10}.

<u>2.16.</u> Див. розв'язок **2.6**.

<u>2.17.</u> Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + ... ,$$

тоді

$$xe^{-x} = x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} + ... ,$$

Продиференцюювавши останню рівність з урахуванням, що даний степеневий ряд можна почленно диференціювати, отримаємо

$$e^{-x}(1 - x) = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} - \frac{4x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{(n+1)\, x^n}{n!} + ...$$

З чого отримуємо

$$1 - e^{-x}\,(1 - x) = \frac{2x}{1!} - \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{(n+1)\, x^n}{n!} + ...$$

Покладаючи в цієї рівності $x = 1$, остаточно дістаємо

$$1 = \frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!} + ...$$

Відповідь: 1.

2.18.

$$\int_0^1 \frac{(x-1)e^x dx}{(x+1)^3} = \int_0^1 \frac{(x+1-2)e^x dx}{(x+1)^3} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} - 2\int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^3} =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} + \int_0^1 e^x d\frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} + \frac{e^x}{(x+1)^2}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} = \frac{e}{4} - 1.$$

Відповідь: $\frac{e}{4} - 1$.

2.19. Див. розв'язок **2.9**.

2.20. У розв'язку задачі **2.10** покласти $a = 1$.
Відповідь: $f(x) = \frac{x^C}{\sqrt{C}}$, $C > 0$.

2.21. Даний визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & ... & 3 & 3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & n-1 & n-1 & ... & 0 & n-1 \\ n & n & n & ... & n & 0 \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Віднявши від першого рядка другий, від другого рядка – третій, ... , від передостаннього рядка – останній, матимемо

$$\Delta_n = n! \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Додамо до другого стовпця перший стовпець, після чого до третього стовпця додамо другий і т.д. В результаті дістанемо:

$$\Delta_n = n!\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\cdot n!.$$

Відповідь: $\Delta_n = (-1)^{n-1}(n-1)\cdot n!$.

2.22. У розв'язку задачі **2.2** покласти $n = 3$.

2.23. Див. розв'язок **2.13**.

2.24.
Перший спосіб. Розглянемо функцію $f(x) = \log_x(x+1),\ x > 1$.

$$(f(x))' = (\log_x(x+1))' = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)' = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} < 0,\ x > 1.$$

Отже, функція $f(x) = \log_x(x+1)$ спадає на проміжку $(1;\ +\infty)$, а тому $\log_{2008} 2009 > \log_{2009} 2010$.

Другий спосіб.

$$\log_{2008} 2009 - 1 = \log_{2008}\frac{2009}{2008} = \log_{2008}\left(1+\frac{1}{2008}\right) > \log_{2009}\left(1+\frac{1}{2008}\right) >$$
$$> \log_{2009}\left(1+\frac{1}{2009}\right) = \log_{2009}\frac{2010}{2009} = \log_{2009} 2010 - 1.$$

Таким чином, $\log_{2008} 2009 > \log_{2009} 2010$.

Відповідь: $\log_{2008} 2009 > \log_{2009} 2010$.

2.25. У розв'язку задачі **2.5** покласти $m = 3$, $n = 10$.

Відповідь: 6^{10}.

2.26. Див. розв'язок **2.6**.

2.27. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... ,$$

тоді для $x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + ... ,$$

Продиференцюювавши останню рівність з урахуванням, що даний степеневий ряд можна почленно диференціювати, отримаємо

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{2x}{3!} + \frac{4x^3}{5!} - \frac{6x^5}{7!} + ... + (-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!} + ...$$

Покладаючи в цій рівності $x = -1$, остаточно дістаємо

$$\sin 1 - \cos 1 = \frac{2}{3!} - \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} + ...$$

Відповідь: $\sin 1 - \cos 1$.

2.28.

$$\int\limits_0^1 \frac{xe^x dx}{(x+1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{(x+1-1)e^x dx}{(x+1)^2} = \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)} - \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)} + \int\limits_0^1 e^x d\frac{1}{x+1} = \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)} + \left.\frac{e^x}{x+1}\right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)} = \frac{e}{2} - 1.$$

Відповідь: $\frac{e}{2} - 1$.

2.29. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$2x^3y^2dx - ydx + 2x^2y^3dy - xdy = 0 \quad \text{або} \quad x^2y^2\left(dx^2 + dy^2\right) - dxy = 0.$$

Оскільки інтегральні криви даного рівняння $x = 0$ и $y = 0$ не проходять через точку $(1;\ 1)$, то рівняння можна перетворити до вигляду

$$d\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d(xy)}{x^2y^2} \quad \text{або} \quad d\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{xy}\right) = 0.$$

Звідси $x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = C$, де C - стала інтегрування. З умови задачі випливає, що $y = 1$ при $x = 1$. Використовуючи цю початкову умову, знаходимо, що

$C = 3$. Таким чином, рівняння шуканої інтегральної кривої може бути записано у вигляді $x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = 3$ або $xy\left(x^2 + y^2 - 3\right) + 1 = 0$.

Відповідь: $xy\left(x^2 + y^2 - 3\right) + 1 = 0$.

2.30. Будемо шукати функції $f(x)$ и $g(x)$ у вигляді $f(x) = e^{u(x)}$, $g(x) = e^{v(x)}$, де $u(x)$ и $v(x)$ – нові шукані функції, що задовольняють рівняння $u'(x) + v'(x) = u'(x) \cdot v'(x)$ або $u'(x) = \frac{v'(x)}{v'(x)-1}$. Неважко перевірити, що, наприклад, $\forall x > 1$ функції $v\left(x\right) = \frac{x^2}{2}$ і $u\left(x\right) = x + \ln\left(x - 1\right)$ задовольняють це рівняння, а тому функції $f\left(x\right) = \left(x - 1\right)e^x$ и $g\left(x\right) = e^{\frac{x^2}{2}}$ задовольняють вихідне рівняння. Очевидно, що ця пара функцій задовольняють вихідне рівняння $\forall x \in \mathrm{R}$.

Відповідь: так, існують, наприклад, $f(x) = (x-1)e^x$ і $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2010 р.)

В цьому пункті подано завдання олімпіади 2010 р.

Умови задач

Категорія "М"

Задача 3.1. Спростити матричний вираз

$$(3E - A)^{-1} + (2E + A)^{-1} - 5\left(6E + A - A^2\right)^{-1},$$

де A - квадратна матриця порядку n, E - одинична матриця того ж самого порядку; A^{-1} - матриця, обернена до матриці A.

Задача 3.2. Точки $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_{2n}$ розбивають коло діаметром 1 на $2n$ рівних дуг; B - довільна точка цього же кола. Знайти модуль суми векторів $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + ... + \overline{BA_{2n}}$.

Задача 3.3. Довести, що середини паралельних хорд гіперболи лежать на одній прямій, яка проходить через центр гіперболи. (Хордою гіперболи називається відрізок, що сполучає дві довільні точки гіперболи).

Задача 3.4. Довести, що при $a \in \left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$ послідовність

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = a + x_n^2,\ n \in \mathbb{N}$$

збігається, та знайти її границю.

Задача 3.5. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n} - \left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n} + \left(x^{n} + \frac{1}{x^{n}}\right)}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 3.6. Нехай функція $f(x)$ визначена та тричі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$. Довести, що існує точка $x_0 \in \mathbb{R}$ така, що

$$f(x_0)\, f'(x_0)\, f''(x_0)\, f'''(x_0) \geq 0.$$

Задача 3.7. Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на відрізку $[0;\ 1]$. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_0 \in [0;\ 1]$ така, що

$$\int_0^1 f(x) x^n dx = \frac{1}{n+1} f(x_0).$$

Задача 3.8. Знайти похідну розв'язку задачі Коші

$$y'' + y = \varepsilon y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

за параметром ε при $\varepsilon = 0$.

Задача 3.9. З трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок навмання складають дев'ятицифрове число. Знайти ймовірність того, що три однакові цифри не стоятимуть поряд.

Задача 3.10. Для всіх дійсних значень x дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \right)^x.$$

Категорія "T"

Задача 3.11. Спростити матричний вираз

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3\left(2E + A - A^2\right)^{-1},$$

де A - квадратна матриця порядку n, E - одинична матриця того ж самого порядку; A^{-1} - матриця, обернена до матриці A.

Задача 3.12. Точки $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_8$ розбивають коло діаметром 1 на 8 рівних дуг; B - довільна точка цього же кола. Знайти модуль суми векторів $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \ldots + \overline{BA_8}$.

Задача 3.13. Довести, що середини паралельних хорд еліпса лежать на одній прямій, яка проходить через центр еліпса. (Хордою еліпса називається відрізок, що сполучає дві довільні точки еліпса).

Задача 3.14. Див. **3.4**.

Задача 3.15. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 - \left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)}, \quad x > 0.$$

Задача 3.16. Див. **3.6**.

Задача 3.17. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}dx}{\sqrt{\sin(3-x)} + \sqrt{\sin(x+1)}}.$$

Задача 3.18. Знайти похідну розв'язку задачі Коші

$$y'' = (y')^2 + y^3; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \varepsilon$$

по параметру ε при $\varepsilon = 0$.

Задача 3.19. З двох одиниць, двох двійок та двох трійок навмання складають шестицифрове число. Знайти ймовірність того, що дві однакові цифри не стоятимуть поряд.

Задача 3.20. Для всіх дійсних значень x дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right)^{x}.$$

Категорія "C"

Задача 3.21. Знайти матрицю X, яка задовольняє рівняння

$$\left(2X^2\right)^{-1} = 2X^{-1}.$$

Задача 3.22. Точки $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_6$ розбивають коло діаметром 1 на 6 рівних дуг; B - довільна точка цього же кола. Знайти модуль суми векторів $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + ... + \overline{BA_6}$.

Задача 3.23. Довести, що середини паралельних хорд параболи лежать на одній прямій, яка паралельна до вісі параболи. (Хордою параболи називається відрізок, що сполучає дві довільні точки параболи).

Задача 3.24. З'ясувати, при яких дійсних $a > 0$ послідовність

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = a + x_n^2,\ n \in \mathbb{N}$$

збігається. У випадку збіжності послідовності знайти її границю.

Задача 3.25. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}, \quad x > 0.$$

Задача 3.26. Див. **3.6**.

Задача 3.27. Див. **3.17**.

Задача 3.28. З'ясувати, чи існують функції $f(x)$, яка не дорівнює тотожно 0, и $g(x)$, для яких в деякому проміжку виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Задача 3.29. Див. **3.19**.

Задача 3.30. Вантаж спочатку розмістили у вагони вантажністю 80 тон, але один вагон залишився завантаженим не повністю. Тоді весь вантаж переклали у вагони вантажністю 60 тон: знадобилося на 8 вагонів більше і при цьому один вагон також залишився завантаженим не повністю. Нарешті, вантаж переклали у вагони вантажністю 50 тон: знадобилося ще на 5 вагонів більше, при цьому всі вагони виявилися завантаженими повністю. Скільки тон вантажу було?

Література

[1] Булдигін В.В., Кушніревич В.А., Шкабара О.С., Ясінський В.В. *Студентські математичні олімпіади. Збірник задач.* - К.: НТУУ «КПІ». - 2002. - 175 с.

[2] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу* - Невский Диалект, БХВ-Петербург. - 2004. - ISBN: 5-7940-0104-6, 5-94157-463-0. - 624 с.

[3] Математичні олімпіади - 2007 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2007. - 28 с.

[4] Математичні олімпіади - 2008 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2008. - 40 с.

[5] Математичні олімпіади - 2009 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2010. - 45 с.

[6] Садовничий В.А., Григорьян А. А., Конягин С.В. *Задачи студенческих математических олимпиад* - Издательство Московского университета. - 1987. - 624 с.

[7] Садовничий В.А., Подколзин А.С. *Задачи студенческих олимпиад по математике: Пособие для студентов вузов* - М.: Дрофа - 2003. - ISBN: 5-7107-6958-4. - 208 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК