



Ланцюги та процеси Маркова

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

• Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Другий (магістерський)</i>
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Нормативна
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>I курс магістратури, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	120 годин (36 годин – Лекції, 36 години – Практичні, 48 годин – СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен/модульна контрольна робота, домашня контрольна робота
Розклад занять	http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: д.ф.-м.н., проф. А.Ю.Пилипенко Pilipenko.ay@gmail.com Практичні / Семінарські: д.ф.-м.н., проф. А.Ю.Пилипенко Pilipenko.ay@gmail.com
Розміщення курсу	https://campus.kpi.ua/ https://us04web.zoom.us/j/3254950308?pwd=NTdJNTdwcGNvVG1RK0xVWGZWN0lvZz09

• Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Цей курс призначений для знайомства з основними поняттями теорії марковських процесів на прикладі випадкових блукань з дискретним та неперервним часом та процесу броунівського руху.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студенти повинні вміти знаходити розподіли марковських моментів, стаціонарні розподіли для процесів з дискретним та неперервним часом; формулювати та розв'язувати граничні задачі для рівнянь в частинних похідних, розв'язками яких є ймовірності виходу та досягнення марковським процесом деякої множини, математичні сподівання моментів зупинки і т.п.; формулювати та розв'язувати задачі про оптимальну зупинку для ланцюгів Маркова.

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів компетентностей:

Загальні компетентності	
ЗК1	Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики
ЗК3	Здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу та прогнозу
ЗК5	Здатність генерувати нові ідеї й нестандартні підходи до їх реалізації
ЗК8	Здатність спілкуватися державною мовою і усно, і письмово
Фахові компетентності	
ФК1	Знання на рівні новітніх досягнень, необхідні для дослідницької та/або інноваційної діяльності у сфері математики та її практичних застосувань
ФК3	Здатність до використання принципів, методів та організаційних процедур дослідницької та/або інноваційної діяльності
ФК4	Спроможність розуміти наукові проблеми та виділяти їх суттєві риси
ФК6	Здатність доводити знання та власні висновки до фахівців та нефаківців
ФК8	Здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань
ФК11	Здатність відтворювати знання фундаментальних розділів математики й страхової та фінансової математики оцінюючи ризики в тих предметних областях, де проводяться дослідження
ФК13	Здатність формувати у слухачів уявлення про класичні та сучасні математичні теорії, взаємозв'язок та різницю між ними і застосування їх у природничих, економічних та технічних науках, в банківській та фінансовій сферах
Програмними результатами навчання є наступні:	
РН1	Знати та розуміти фундаментальні і прикладні аспекти наук у сфері математики
РН2	Відтворювати знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії
РН7	Ініціювати і проводити наукові дослідження у спеціалізованій області математики та/або розв'язувати задачі в інших галузях знань методами математичного моделювання
РН11	Усно й письмово спілкуватися рідною та іноземною мовами в науковій, виробничій та соціально-суспільній сферах діяльності із професійних питань; читати спеціальну літературу; знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел
РН12	Використовувати раціональні способи пошуку та використання науково-технічної інформації, включаючи засоби електронних інформаційних мереж; застосовувати інформаційні ресурси, у тому числі електронні, для пошуку відповідних математичних моделей
РН13	Дотримуватися норм етичної поведінки стосовно інших людей, адаптуватися та комунікувати
РН15	Знати спеціальні математичні дисципліни для оцінки ризиків у банківській та фінансовій сферах і страхуванні: фінансову математику фондового ринку, стохастичні диференціальні рівняння, ланцюги та процеси Маркова, аналіз часових рядів, правильно змінні функції у теорії ймовірностей, прикладні моделі нелінійного регресійного аналізу

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: Дисципліна «Ланцюги та процеси Маркова» (ПО5) викладається в першому семестрі першого курсу підготовки магістрів і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра», «Теорія ймовірностей», «Диференціальні рівняння», які вивчаються на бакалаврському рівні вищої освіти за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика».

Постреквізити: Дисципліна «Ланцюги та процеси Маркова» (ПО5) передуватиме освітнім компонентам «Наукова робота за темою магістерської дисертації» (ПО7), «Практика» (ПО8) і вивченню вибіркових дисциплін «Методи Монте-Карло», «Комп'ютерна статистика», «Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування», «Процеси Леві у моделях фінансової математики».

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Ланцюги Маркова

Тема 1.1. Скінченновимірні розподіли ланцюгів Маркова. Означення. Марковська властивість. Однорідні ланцюги Маркова. Скінченновимірні розподіли. Матриця перехідних ймовірностей. Матриця перехідних ймовірностей за n кроків.

Тема 1.2. Класифікація станів. Істотні стани, зворотні стани, сполучні стани. Період стану. Граф, що відповідає ланцюгу Маркова. Зв'язок між зворотністю та істотністю. Критерій зворотності. Зворотність, істотність, період сполучних станів. Теорема про кількість повернень для зворотного стану. Зворотність в ланцюгах зі скінченною кількістю станів.

Тема 1.3. Граничні розподіли ланцюга Маркова.

Стаціонарний розподіл ланцюга Маркова. Теорема Маркова. Загальна гранична теорема для перехідних ймовірностей. Процеси народження та загибелі, стаціонарний розподіл процесів народження та загибелі.

Тема 1.4. Генератриси.

Означення. Властивості. Обчислення математичного сподівання, дисперсії, моментів. Формула відновлення розподілу. Генератриса суми незалежних величин. Генератриси основних дискретних розподілів (біноміального, геометричного, пуассонового). Сума випадкової кількості доданків: генератриса, математичне сподівання, дисперсія. Розв'язок однорідних рекурентних рівнянь: характеристичний многочлен, різні корені, кратні корені. Розв'язок неоднорідних рекурентних рівнянь. Приклади. Застосування генератрис до дослідження випадкових блукань.

Розділ 2. Процеси Маркова з дискретною кількістю станів

Тема 2.1. Рівняння Колмогорова.

Перехідні ймовірності. Скінченновимірні розподіли. Рівняння Колмогорова-Чепмена. Інтенсивність переходу. Рівняння Колмогорова. Приклади. Процес Пуассона. Сума пуассонівських процесів. Проріджування пуассонівського процесу

Тема 2.2. Строго марковська властивість. Вкладені ланцюги Маркова

Розподіл часу до виходу із стану. Вкладений ланцюг Маркова. Ймовірність переходу в момент виходу із стану в термінах інтенсивності переходу. Моделювання ланцюгу Маркова. Рівняння для ймовірності відвідання множини станів до моменту t . Рівняння для ймовірності потрапляння в множини. Рівняння для ймовірності потрапляння в одну множини раніше ніж в другу.

Тема 2.3. Стаціонарний розподіл

Стаціонарний розподіл. Ергодична теорема. Процес розмноження та загибелі.

Розділ 3. Теорія масового обслуговування

Тема 3.1. Основні моделі теорії масового обслуговування.

Модель АТС та формули Ерланга, модель серверів з буфером, обслуговування з нетерплячими вимогами, обслуговування верстатів працівниками, системи з гістерезисним керуванням, багатофазне обслуговування, системи з різними типами пріоритетів.

Тема 3.2. Формула Літгла та її застосування

Тема 3.3. Система M/G/1

Генератриса для стаціонарного розподілу системи M/G/1. Формула Поллачека-Хінчина. Залишковий час. Вкладений ланцюг Маркова. Середня довжина черги. Приклади.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова

1. Kelbert, M. Y., & Sukhov, Y. M. (2010). Probability and statistics in examples and problems. Vol. II: Markov chains as a starting point for the theory of random processes.
2. Feller, W. (2008). An introduction to probability theory and its applications, vol 1, 2. John Wiley & Sons.
3. A.N. Shiryaev. Probability (Graduate Texts in Mathematics): Springer; 2nd edition, 1995.
4. Д.В. Гусак, О.Г. Кукуш, О.М. Кулик, Ю.С. Мішура, А.Ю. Пилипенко Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 398 с.
5. Norris J.R.-Markov Chains. Cambridge University Press (1997)

Допоміжна

1. Kemeny, J. G., & Snell, J. L. (1983). Finite Markov chains: with a new appendix. Springer.
2. Kemeny, J. G., Snell, J. L., & Knapp, A. W. (2012). Denumerable Markov chains: with a chapter of Markov random fields by David Griffeath (Vol. 40). Springer Science & Business Media.
3. Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич. Теоремы и задачи о процессах Маркова.–М.: Наука, 1967.
4. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. 1963, 860 с.
5. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения, 1975, 172 с.
6. Дынкин Е.Б. Основы теории марковских процессов, 1959, 226 с.

● Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

№ з/п	Назва теми лекції/практичного заняття та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	Скінченновимірні розподіли ланцюгів Маркова. Означення. Марковська властивість. Однорідні ланцюги Маркова. Скінченновимірні розподіли. Матриця перехідних ймовірностей. Матриця перехідних ймовірностей за n кроків. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 1-37; [2], с.62-85.
2	Класифікація станів. Істотні стани, зворотні стани, сполучні стани. Період стану. Граф, що відповідає ланцюгу Маркова. Зв'язок між зворотністю та істотністю. Критерій зворотності. Зворотність, істотність, період сполучних станів. Теорема про кількість повернень для зворотного стану. Зворотність в ланцюгах зі скінченною кількістю станів. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 38-89; [2], с.86-127.
3	Випадкові блукання. Скінченновимірні розподіли. Зворотність випадкового блукання на прямій в площині та просторі.

	<i>Рекомендована література:</i> [1], с.79-89; [2], с.120-127.
4	Числові характеристики ланцюгів Маркова. Ймовірність досягнення множини. Ймовірність досягнення однієї множини раніше ніж іншої. Математичне сподівання часу досягнення множини.
5-6	Гранична поведінка ланцюгів Маркова. Стаціонарний розподіл ланцюга Маркова. Теорема Маркова. Загальна гранична теорема для перехідних ймовірностей. Процеси народження та загибелі, стаціонарний розподіл процесів народження та загибелі. <i>Рекомендована література:</i> [1], с.78-90; [2], с.128-144.
7-8	Генератриса. Означення. Властивості. Обчислення математичного сподівання, дисперсії, моментів. Формула відновлення розподілу. Генератриса суми незалежних величин. Генератриса основних дискретних розподілів (біноміального, геометричного, пуассонового). Сума випадкової кількості доданків: генератриса, математичне сподівання, дисперсія.
9	Рекурентні рівняння. Розв'язок однорідних рекурентних рівнянь: характеристичний многочлен, різні корені, кратні корені. Розв'язок неоднорідних рекурентних рівнянь. Приклади. Застосування генератрис до дослідження випадкових блукань.
10-11	Ланцюги Маркова з неперервним часом. Перехідні ймовірності. Скінченновимірні розподіли. Рівняння Колмогорова-Чепмена. Інтенсивність переходу. Рівняння Колмогорова. Приклади. Процес Пуассона. Сума пуассонівських процесів. Проріджування пуассонівського процесу. <i>Рекомендована література:</i> [1], с.91-103; [2], с. 145-151.
12	Строго марковська властивість. Розподіл часу до виходу із стану. Вкладений ланцюг Маркова. Ймовірність переходу в момент виходу із стану в термінах інтенсивності переходу. Моделювання ланцюгу Маркова. Рівняння для ймовірності відвідання множини станів до моменту t . Рівняння для ймовірності потрапляння в множину. Рівняння для ймовірності потрапляння в одну множину раніше ніж в другу. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 103-111, [2]; с.152-166.
13	Гранична поведінка процесів Маркова. Стаціонарний розподіл. Ергодична теорема. Процес розмноження та загибелі. <i>Рекомендована література:</i> [1], с.112-120; [2], с.167-178.
14-15	Марковські моделі масового обслуговування. Модель АТС та формули Ерланга, модель серверів з буфером, обслуговування з нетерплячими вимогами, обслуговування верстатів працівниками, системи з гістерезисним керуванням, багатофазне обслуговування, системи з різними типами пріоритетів.
16	Формула Літгла та наслідки з неї.
17-18	Система M/G/1. Генератриса для стаціонарного розподілу системи M/G/1. Формула Поллачека-Хінчина. Залишковий час. Вкладений ланцюг Маркова. Середня довжина черги. Приклади.

6. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання домашньої контрольної роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка презентацій доповідей;
- підготовка до екзамену.

● Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання домашньої контрольної роботи, підготовку до МКР, ділової гри та заліку/екзамену.

- *правила відвідування занять (як лекцій, так і практичних/лабораторних): студент має відвідувати всі заняття*
- *правила поведінки на заняттях: на практичне заняття студент має зробити домашню роботу та вивчити матеріал лекції;*
- *правила призначення заохочувальних та штрафних балів: викладач може додавати заохочувальні бали на свій розсуд за активність студента*
- *політика дедлайнів та перескладань: завдання, які здані після дедлайнів не приймаються та перескладання таких завдань не передбачені.*

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Оцінка студента складається з (а) відповідей на практичних заняттях (30%), (б) контрольних заходах протягом семестру (30%), (в) екзамену (40%). Рейтинг за кожну складову дорівнює середньому арифметичному відповідних оцінок. Наприклад, якщо оцінки за практичні дорівнювали 100%, 0%, 60%, 0%, то середня оцінка дорівнює $(100\% + 0\% + 60\% + 0\%) / 4 = 40\%$. В загальний рейтинг від практичних в цьому разі записується $40 * 0,3 = 12$ балів. Якщо студент не відвідує практичні заняття чи контрольний захід без поважних причин, то він одержує 0 балів за ці заняття. Довідка про відсутність має бути доведена до викладача не більше ніж за 2 тижня після відповідного заняття. Невиконане вчасно домашнє завдання означає 0 балів за відповідь на занятті. Відсутність на занятті не позбавляє студента від відповідальності зробити домашню роботу. Викладач може поставити оцінку за домашню роботу замість відповіді на практичному.

Студент допускається до екзамену, якщо він сумарно набрав не менше 50% від всіх оцінювальних заходів протягом семестру. В супротивному разі студент має добрати додаткові бали. В цьому разі викладач має право не ставити оцінку вище ніж «Достатньо» за предмет.

В деяких випадках викладач має право, але не зобов'язаний, запропонувати студентам оцінки за предмет по результатам семестрового контролю.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено:

Професор кафедри МАтаТЙ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Пилипенко А.Ю.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол № 11 від 4.06.2021 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 13 від 22.06.2021 р.)