



Дифузійні процеси та їх властивості

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

– Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Другий (магістерський)</i>
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>I курс магістратури, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	150 годин (36 годин – Лекції, 36 години – Практичні, 108 годин – СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен/модульна контрольна робота, домашня контрольна робота
Розклад занять	http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: д.ф.-м.н., проф. А.Ю.Пилипенко Pilipenko.ay@gmail.com Практичні / Семінарські: д.ф.-м.н., проф. А.Ю.Пилипенко Pilipenko.ay@gmail.com
Розміщення курсу	https://us04web.zoom.us/j/3254950308?pwd=NTdJNTdwcGNvVG1RK0xVVGZWN0lvZz09

– Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

1.1. Мета навчальної дисципліни.

Броунівський рух та інші процеси дифузії описують рух частинок у випадковому середовищі. Цей рух описується за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь. Крім того, багато моделей фінансового ринку також є дифузійними процесами. Тому вивчення даного курсу є корисним як студентам, що вивчають математичну фізику, так і актуарну та фінансову математику.

В результаті вивчення курсу студенти повинні знати поняття броунівського руху, Стохастичного інтеграла Іто, формулу Іто. Вміти розв'язувати стохастичні диференціальні рівняння; знати ймовірнісне зображення параболічних та еліптичних рівнянь, властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

1.2. Основні завдання навчальної дисципліни.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти після засвоєння навчальної дисципліни мають продемонструвати такі результати навчання

знання:

- побудову та властивості інтегралу Іто;
- теорем існування та єдиності рівнянь з Інтегралом Іто;
- Ймовірнісне зображення параболічних та еліптичних рівнянь;
- Властивості траєкторій дифузійних процесів.

уміння:

- Знаходити стохастичні диференціали,
- Розв'язувати стохастичні рівняння,
- Досліджувати властивості дифузійних процесів,
- досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних рівнянь;
- Знаходити різноманітні числові характеристики пов'язані з дифузіями.

досвід:

- здатність виявляти наукову сутність проблем у професійній сфері, знаходити адекватні шляхи щодо їх розв'язання
- здатність досліджувати проблеми із використанням аналізу, синтезу та інших методів
- здатність аналізувати, верифікувати, оцінювати повноту інформації в ході професійної діяльності, при необхідності доповнювати й синтезувати відсутню інформацію й працювати в умовах невизначеності
- здатність пропонувати концепції, моделі, винаходити й апробувати способи й інструменти професійної діяльності з використанням природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів компетентностей:

Загальні компетентності	
ЗК1	Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики
ЗК6	Здатність розробляти науково-інноваційні проекти та керувати ними
ЗК7	Здатність до виконання дослідницької роботи з елементами наукової новизни
Фахові компетентності	
ФК2	Здатність застосовувати міждисциплінарні підходи при критичному осмисленні математичних проблем
ФК5	Спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти
ФК7	Здатність самостійно розробляти наукові та інноваційні проекти шляхом творчого застосування існуючих та генерування нових математичних ідей
ФК8	Здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань

ФК10	Здатність розв'язувати прикладні задачі аналізу даних математичними методами та методами комп'ютерної статистики і обирати для цього адекватні математичні засоби
ФК11	Здатність відтворювати знання фундаментальних розділів математики й страхової та фінансової математики оцінюючи ризики в тих предметних областях, де проводяться дослідження
ФК12	Здатність проводити обчислення в рамках математичних моделей та застосовувати для цього необхідні та адекватні математичні та комп'ютерні методи, здібність пояснювати у математичних термінах результати, отримані під час підрахунків, та інтерпретувати їх у рамках даної предметної області
ФК13	Здатність формувати у слухачів уявлення про класичні та сучасні математичні теорії, взаємозв'язок та різницю між ними і застосування їх у природничих, економічних та технічних науках, в банківській та фінансовій сферах
ФК16	Володіння знаннями та здатність ініціювати й проводити наукові дослідження у спеціалізованій області математики
Програмними результатами навчання є наступні:	
РН2	Відтворювати знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії
РН5	Володіти знаннями грамотної побудови комунікації в освітньому і науковому процесі, відбору вихідних даних дослідження, складання списку використаних джерел, опису наукових результатів
РН6	Доносити професійні знання, власні обґрунтування і висновки до фахівців і широкого загалу
РН14	Знати головні результати та сфери застосувань основних математичних теорій, що використовуються при математичному моделюванні: фінансової та актуарної математики, методів математичної економіки та імітаційного моделювання, комп'ютерної статистики
РН15	Знати спеціальні математичні дисципліни для оцінки ризиків у банківській та фінансовій сферах і страхуванні: фінансову математику фондового ринку, стохастичні диференціальні рівняння, ланцюги та процеси Маркова, аналіз часових рядів, правильно змінні функцій у теорії ймовірностей, прикладні моделі нелінійного регресійного аналізу

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: Дисципліна «Дифузійні процеси та їх застосування» викладається в другому семестрі першого курсу підготовки магістрів і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра», «Теорія ймовірностей», «Диференціальні рівняння», які вивчаються на бакалаврському рівні вищої освіти за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика» та курсі «Ланцюги та процеси Маркова», який вивчається на магістерському рівні.

Постреквізити: Дисципліна «Дифузійні процеси та їх застосування» передуює освітнім компонентам «Наукова робота за темою магістерської дисертації» (ПО7), «Практика» (ПО8) і вивченню вибірових дисциплін «Процеси Леві у моделях фінансової математики».

3. Зміст навчальної дисципліни

4. Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>Розділ 1. Стохастичне інтегрування.</i>				
<i>Тема 1.1. Броунівський рух</i>	16	4	4	8
<i>Тема 1.2. Інтеграл Іто</i>	24	6	6	12
Разом за розділом 1	40	10	10	20
<i>Розділ 2. Властивості розв'язків дифузійних рівнянь</i>				
<i>Тема 2.1. Теорема існування</i>	14	6	6	2
<i>Тема 2.2. Теорема єдиності</i>	22	6	5	11
<i>Контрольна робота з розділу 2</i>	4		1	3
Разом за розділом 2	40	12	12	16
<i>Розділ 3. Дифузії та рівняння в частинних похідних</i>				
<i>Тема 3.1. Параболічні рівняння та перехідна щільність</i>	21	6	3	12
<i>Тема 3.2. Функції Гріна та моменти виходу з області</i>	17	8	3	6
Разом за розділом 3	38	14	6	18
<i>Розділ 4. Лінійні дифузії</i>				
<i>Тема 4.1. Шкала, міра швидкості та їх застосування</i>	21	5	4	12
<i>Тема 4.2. Точна асимптотика дифузій</i>	24	4	4	16
Разом за розділом 4	35	9	8	18
МКР				
РГР				15
Екзамен	30			30
Всього годин	150	36	36	78

5. Навчальні матеріали та ресурси

Базова

1. Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations: an introduction with applications. Springer

2. Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V. (2007). Stochastic differential equations. In The Theory of Stochastic Processes III. Springer, Berlin, Heidelberg.
3. А.В. Скороход. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. Посібник. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
4. Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V. (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg
5. Д.В. Гусак, О.Г. Кукуш, О.М. Кулик, Ю.С. Мішура, А.Ю. Пилипенко Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 398 с.

10.2. Допоміжна

1. Ikeda, N., & Watanabe, S. (2014). Stochastic differential equations and diffusion processes. Elsevier.
2. Pilipenko, A. (2014). An introduction to stochastic differential equations with reflection (Vol. 1). Universitätsverlag Potsdam.

– Навчальний контент

6. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

№ з/п	Назва теми лекції/практичного заняття та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	Броунівський рух. Властивості. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 5-31.
2	Інтегрування за семімартигалом <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 38-49
3	Розширення стохастичного інтегрування на клас узгоджених процесів з інтегрованими з квадратом траєкторіями. Приклади. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 49-55.
4	Інтеграл Іто як функції верхньої межі. Мартингали та їх застосування. <i>Рекомендована література:</i> [4], с. 137-162.
5	Формула Іто. Приклади застосування. Оцінки математичних сподівань оцінки стохастичних інтегралів. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.163-181.
6	Марковські моменти. Означення та властивості. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.163-181.
7	Розв'язок стохастичного диференціального рівняння. Приклади. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.223-231. Умови існування та єдиності розв'язків. Лема Гронуола-Беллмана. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.231-250.

8	Локалізація розв'язків. Послабшення умов існування та єдиність розв'язків дифузійних рівнянь. <i>Рекомендована література:</i> [4], с. 250-261.
9	Моментні оцінки розв'язків. Залежність від початкових даних у просторі L_p . <i>Рекомендована література:</i> [4], с.261-273. Наближення розв'язків чисельними схемами. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.429-438.
11	Дифузії в багатовимірному просторі Марковська властивість розв'язку с.д.р. <i>Рекомендована література:</i> [2], с.482-489.
12	Перехідна щільність дифузій та фундаментальний розв'язок параболічних рівнянь. <i>Рекомендована література:</i> [2], с.234-240; [3], с.433-437. Формула Фейнмана-Каца. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.355-365; [2], с.230-240; [3], с.437-443.
13	Еліптичні рівняння та розподіл дифузії в моменти виходу з області. <i>Рекомендована література:</i> [2], с.355-375. Лінійні дифузії а) розподіл в момент виходу з інтервала б) математичне сподівання та дисперсія часу до виходу з інтервала. Приклади. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.365-376; [2], с.245-253; [3], с.454-456, 469-474
14	Броунівський рух в R^n . Гранична поведінка. Дослідження рекурентності. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.385-394; [2], с. 295-309; [3], с.515-521.
15	Стохастичні потоки. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.428-462.
16	Властивості траєкторій багатовимірного броунівського руху. Бесселівські процеси. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.376-385; [2], с.259-278.
17	Строго марковська властивість. Гранична поведінка дифузій <i>Рекомендована література:</i> [2], с.376-385; [4], с.259-278.
18	Асимптотична поведінка рекурентних та нерекурентних дифузій. <i>Рекомендована література:</i> [4], с.109-146.

7. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання домашньої контрольної роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка презентацій доповідей;
- підготовка до екзамену.

– Політика та контроль

8. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою,

підготовку до занять, виконання домашньої контрольної роботи, підготовку до МКР, ділової гри та заліку/екзамену.

- *правила відвідування занять (як лекцій, так і практичних/лабораторних): студент має відвідувати всі заняття*
- *правила поведінки на заняттях: на практичне заняття студент має зробити домашню роботу та вивчити матеріал лекції;*
- *правила призначення заохочувальних та штрафних балів: викладач може додавати заохочувальні бали на свій розсуд за активність студента*
- *політика дедлайнів та перескладань: завдання, які здані після дедлайнів не приймаються та перескладання таких завдань не передбачені.*

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

9. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Оцінка студента складається з (а) відповідей на практичних заняттях (30%), (б) контрольних заходах протягом семестру (30%), (в) екзамену (40%). Рейтинг за кожну складову дорівнює середньому арифметичному відповідних оцінок. Наприклад, якщо оцінки за практичні дорівнювали 100%, 0%, 60%, 0%, то середня оцінка дорівнює $(100\% + 0\% + 60\% + 0\%) / 4 = 40\%$. В загальний рейтинг від практичних в цьому разі записується $40 * 0,3 = 12$ балів. Якщо студент не відвідує практичні заняття чи контрольний захід без поважних причин, то він одержує 0 балів за ці заняття. Довідка про відсутність має бути доведена до викладача не більше ніж за 2 тижня після відповідного заняття. Невиконане вчасно домашнє завдання означає 0 балів за відповідь на занятті. Відсутність на занятті не позбавляє студента від відповідальності зробити домашню роботу. Викладач може поставити оцінку за домашню роботу замість відповіді на практичному.

Студент допускається до екзамену, якщо він сумарно набрав не менше 50% від всіх оцінювальних заходів протягом семестру. В супротивному разі студент має добрати додаткові бали. В цьому разі викладач має право не ставити оцінку вище ніж «Достатньо» за предмет.

В деяких випадках викладач має право, але не зобов'язаний, запропонувати студентам оцінки за предмет по результатам семестрового контролю.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

10. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено:

Професор кафедри МАтаТЙ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Пилипенко А.Ю.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол № 11 від 4.06.2021 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 13 від 22.06.2021 р.)