



# ФУНКЦІЇ КАРАМАТИ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни	
Рівень вищої освіти	Другий (магістерський)
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	«Страхова та фінансова математика»
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна
Рік підготовки, семестр	1 курс, весняний семестр
Обсяг дисципліни	150 годин (36 годин – Лекції, 36 години – Практичні, 78 годин – СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен/модульна контрольна робота, РГР
Розклад занять	<a href="http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx">http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач., Павленков Володимир Володимирович <a href="mailto:pavlenkov@matan.kpi.ua">pavlenkov@matan.kpi.ua</a> ; Практичні / Семінарські: канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач., Павленков Володимир Володимирович <a href="mailto:pavlenkov@matan.kpi.ua">pavlenkov@matan.kpi.ua</a> .
Розміщення курсу	<a href="https://campus.kpi.ua">https://campus.kpi.ua</a>

## Програма навчальної дисципліни

### Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

<p><b>Цілі дисципліни</b></p>	<p>Метою кредитного модуля є формування у студентів здатностей:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– до логічного мислення, формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей;</li> <li>– до необхідної інтуїції та ерудиції у питаннях застосування математики, виховання у студентів прикладної математичної культури;</li> <li>– перевіряти, чи належить задана функція до класу функцій Карамати;</li> <li>– використовувати властивості функцій із класу Карамати до різних математичних задач;</li> <li>– відрізнити різні класи функцій, що узагальнюють функції Карамати;</li> <li>– самостійно використовувати і вивчати літературу з математики, здатності до розвитку гнучкості мислення, творчої самостійності та дій.</li> </ul>
<p><b>Предмет навчальної дисципліни</b></p>	<p>Предмет навчальної дисципліни – клас функцій Карамати; класи функцій, що узагальнюють функції Карамати; верхня та нижня граничні функції; інтегральні представлення функції Карамати та її граничних функцій, рівномірна збіжність, зв'язок з рівнянням Коші, всюди щільними множинами, застосування функції Карамати до задач теорії ймовірностей, теорії рекордів, якісної теорії диференціальних рівнянь.</p>
<p><b>Компетентності</b></p>	<p>Метою навчальної дисципліни є формування у студентів компетентностей: ЗК1, ЗК5, ЗК6, ЗК7, ФК1, ФК3, ФК5, ФК9, ФК10, ФК14, ФК15, ФК18</p> <p>Детальний опис компетентностей можна знайти в Освітньо-науковій програмі  <a href="http://osvita.kpi.ua/sites/default/files/opfiles/111_ONPM_SFM_2021.pdf">http://osvita.kpi.ua/sites/default/files/opfiles/111_ONPM_SFM_2021.pdf</a></p>
<p><b>Програмні результати навчання</b></p>	<p>Студенти після засвоєння матеріалу дисципліни мають продемонструвати такі результати навчання:</p> <p><b>знати:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– означення функції Карамати та головні її властивості;</li> <li>– теорію функціонального рівняння Коші;</li> <li>– концепції функціонального аналізу типу базису Гамеля;</li> <li>– головні результати стосовно граничних переходів для інтегралів зі змінними верхніми межами;</li> <li>– теореми Тауберова та Абелева типу для перетворення Лапласа функції Карамати;</li> <li>– способи доведення рівномірної збіжності для правильно змінних функцій;</li> </ul> <p><b>уміти:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– перевіряти властивості функцій Карамати;</li> <li>– доводити найпростіші властивості для функцій з класу Карамати;</li> <li>– знаходити інтегральні представлення функцій Карамати;</li> <li>– будувати правильно змінні функції Карамати для задач теорії ймовірностей;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- будувати монотонні еквівалентні функції до заданих функцій Карамати;</li> <li>- досліджувати множини на властивість всюди щільності;</li> <li>- навчитися працювати самостійно з навчальними посібниками, довідниками та іншими інформаційними ресурсами;</li> <li>- ефективно використовувати методи теорії правильно змінних функцій при розв'язанні задач теорії ймовірностей.</li> </ul>
--	---

**Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

**Пререквізити:** Дисципліна «Функція Карамати і її застосування» викладається у другому семестрі першого курсу навчання магістрів та базується на знаннях, здобутих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Функціональний аналіз», «Теорія міри та інтегралу».

**Постреквізити:** Дисципліна «Функція Карамати і її застосування» передує освітньому компоненту «Наукова робота за темою магістерської дисертації» (ПО9).

**Зміст навчальної дисципліни**

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичн і	СРС
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<b>Розділ 1. Результати теорії функції Карамати</b>				
<b>Тема 1.</b> Клас функцій Карамати.	5	2	1	2
<b>Тема 2.</b> Теореми про лінійні перетворення функцій Карамати.	5	2	1	2
<b>Тема 3.</b> Верхня та нижня граничні функції, лема про їх зв'язок.	7	2	2	3
<b>Тема 4.</b> Теорема про інтегральне зображення.	7	2	2	3
<b>Тема 5.</b> Теореми Карамати Таубероного та Абелевого типу.	7	2	2	3
Разом за розділом 1	<b>31</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>13</b>
<b>Розділ 2. Результати з математичного аналізу, пов'язані з функціями Карамати</b>				
<b>Тема 6.</b> Найпростіші функції Карамати.	8	2	2	4
<b>Тема 7.</b> Необхідні результати для загальної теорії RV та ORV функцій.	8	2	2	4
<b>Тема 8.</b> Теорема Кронекера.	7	2	2	3
<b>Тема 9.</b> Мультиплікативні групи.	7	2	2	3

<b>Тема 10.</b> Мультиплікативна група додатної міри Лебега.	7	2	2	3
Разом за розділом 2	<b>37</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>14</b>
<b>Розділ 3. Рівняння Коші</b>				
<b>Тема 11.</b> Рівняння, пов'язані з рівнянням Коші.	8	2	2	4
<b>Тема 12.</b> Невимірні розв'язки рівняння Коші.	7	2	1	4
<b>Тема 13.</b> Теорема Феллера.	7	2	1	4
Разом за розділом 3	<b>22</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>12</b>
<b>Розділ 4. Основні застосування функції Карамати</b>				
<b>Тема 14.</b> Застосування в теорії ймовірностей.	7	2	1	3
<b>Тема 15.</b> Монотонні аналоги функції Карамати.	7	2	1	3
<b>Тема 16.</b> Застосування в теорії рекордів.	7	2	1	3
<b>Тема 17.</b> Застосування в теорії диференціальних рівнянь.	7	2	1	3
<b>Тема 18.</b> Застосування в теорії стохастичних диференціальних рівнянь.	7	2	1	0
Разом за розділом 4	<b>30</b>	<b>10</b>	<b>5</b>	<b>15</b>
МКР			<b>1</b>	
<i>Розрахункова робота</i>	10			10
<i>Екзамен</i>	30			30
<b>Всього годин</b>	<b>150</b>	<b>36</b>	<b>36</b>	<b>78</b>

### Навчальні матеріали та ресурси

#### Базова література

1. Valerij V. Buldygin, Karl-Heinz Indlekofer, Oleg I. Klesov, Josef G. Steinebach Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes // Springer, 2018, - 480 p.
2. Клесов О. І. Застосування правильно змінних функцій у теорії ймовірностей // Клесов О. І. – (електронний конспект лекцій), 2016. – 90 с.

#### Додаткова література

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции // Сенета Е. – Москва: «Наука», 1985. – 160с.
2. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation // Bingham N. H. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 491p.
3. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers // Hardy G. H. – Oxford: Oxford University Press, 1979. – 438p.

## Навчальний контент

### Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### Очна/дистанційна форма

#### Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1.	Клас функцій Карамати. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
2.	Теореми про лінійні перетворення функцій Карамати. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
3.	Верхня та нижня граничні функції, лема про їх зв'язок. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
4.	Теорема про інтегральне зображення. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
5.	Теореми Карамати Таубероного та Абелевого типу. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
6.	Найпростіші функції Карамати. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
7.	Необхідні результати для загальної теорії RV та ORV функцій. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
8.	Теорема Кронекера. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
9.	Мультиплікативні групи. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
10.	Мультиплікативна група додатної міри Лебега. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
11.	Рівняння, пов'язані з рівнянням Коші. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
12.	Невимірні розв'язки рівняння Коші. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
13.	Теорема Феллера. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
14.	Застосування в теорії ймовірностей.

	<i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
15.	Монотонні аналоги функції Карамати. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
16.	Застосування в теорії диференціальних рівнянь. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
17.	Застосування в теорії рекордів. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].
18.	Застосування в теорії стохастичних диференціальних рівнянь. <i>Рекомендована література:</i> [1], [2].

### Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1-4.	Функції Карамати, приклади. Сума, добуток, частка, композиція функцій Карамати. Знаходження індексу функції. Завдання СРС: [2]
5.	Знаходження верхньої та нижньої граничних функцій. Завдання СРС: [2]
6.	Група регулярних точок. Завдання СРС: [2]
7.	Зображення функцій Карамати та граничних функцій. Завдання СРС: [2]
8-9.	Побудова інтегрального зображення для функції Карамати. Завдання СРС: [2]
10.	Функціональне рівняння Коші. Завдання СРС: [2]
11.	Побудова розривного розв'язку функціонального рівняння. Завдання СРС: [2]
12.	Теорема Банаха-Серпінського. Завдання СРС: [2]
13.	Рівняння, пов'язані з рівнянням Коші Завдання СРС: [2]
14.	Центральна гранична теорема та функції Карамати. Завдання СРС: [2]
15.	Рекорди. Завдання СРС: [2]
16.	Еквівалентні розв'язки задачі Коші. Завдання СРС: [2]

17.	Монотонні версії функції Карамати. Завдання СРС: [2]
18.	Написання МКР.

### Самостійна робота студента/аспіранта

На самостійне опрацювання виносяться декілька важливих тем, з якими можна ознайомитись за підручником [1], [2] але дозволяється використовувати інші джерела для поглибленого вивчення того чи іншого питання. Також передбачені індивідуальні завдання для студентів за темою дисципліни, які виконуються самостійно, результатом такого завдання є доповідь на практичному занятті.

## Політика та контроль

### Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота.

### Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO) (очна\дистанційна форма)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навч. час		Розподіл навчальних годин			Контрольні заходи		
	Кредити	Акад. год.	Лекції	Практичні	СРС	МКР	РГР	Семестр. атест.
1	5	150	36	36	78	1	1	екзамен

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання [https://document.kpi.ua/files/2020\\_1-273.pdf](https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf).

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, РГР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>.

Рейтингова система оцінювання включає всі види тестування: контрольні роботи, якість виконання РГР. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали складається з балів, які він отримує за:

- роботу на практичних заняттях;

- написання модульної контрольної роботи;
- виконання розрахункової роботи (РГР);
- написання екзаменаційної роботи.

#### Відповіді під час практичних занять

Сюди входить робота студента на практичному занятті (усні відповіді, розв'язання задач біля дошки), виконання домашніх завдань, доповіді за темами індивідуальних завдань. Максимальна кількість балів – 20.

#### Модульна контрольна робота

Модульна контрольна робота поділена на 2 частини, вона пишеться перед календарним контролем (атестацією) за пройденим на момент написання матеріалом. Кожна частина модульної контрольної оцінюється максимально в 10 балів. Переписування контрольної роботи з метою підвищення балу не передбачене.

#### Розрахункова робота

Виконується протягом семестру за запропонованими викладачем практичних занять завданнями. За її виконання можна заробити 10 балів.

#### Форма семестрового контролю – екзамен

Екзамен проводиться в письмовій формі. Кожний білет містить 5 завдань, серед яких два теоретичних запитання та три задачі. Ваговий бал кожного запитання – 10.

Критерії оцінювання запитань:

- повна відповідь на всі завдання (не менше 90% потрібної інформації; повне, безпомилкове розв'язування завдань) 9 – 10 балів;
  - достатньо повна відповідь (не менше 75% потрібної інформації) або є незначні неточності 7 – 8 балів;
  - неповна відповідь на завдання (не менше 60%) та є помилки і певні недоліки 5 – 6 балів;
  - відповідь не відповідає умовам до «задовільно» (незадовільна відповідь, неправильний метод розв'язування) 0 – 4 бали.
- Максимальний бал  $10 \times 5 = 50$ .

**Розмір стартової шкали  $R_C = 50$  балів. Розмір екзаменаційної шкали  $R_E = 50$  бали.**

**Розмір шкали рейтингу  $R = R_C + R_E = 100$  балів.**

Умови позитивної проміжної атестації.

Для отримання “зараховано” з першої (8 тиждень) та другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен мати не менше ніж 50% можливих балів на момент проведення календарного контролю.

Перескладання позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.

**Студент допускається до екзамену**, якщо його рейтинг семестру не менший 30 балів, при цьому він повинен мати зараховані модульні контрольні роботи та РГР (виконано не менше, ніж на 60%).

Студенти, які в кінці навчального семестру мають стартовий рейтинг  $R_C < 20$  балів до екзамену не допускаються і повинні виконати додаткові завдання до першого перескладання.

Студенти з рейтингом  $20 \leq R_C < 30$  мають можливість добрати бали до 30 допускових, шляхом виконання додаткових завдань.

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:**

Кількість балів	Оцінка
-----------------	--------



100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

**Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компоненту)**

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom. Поточний контроль та написання іспиту може бути проведено письмово або усно із залученням платформи Zoom для контролю. За бажанням лектора екзамен може бути проставлений автоматом (шляхом подвоєння семестрового рейтингу  $R_c$  студента), цей принцип може бути застосований не до всіх студентів.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено:**

Ст. викладач кафедри МАтаТЙ, канд. фіз.-мат. наук, Павленков В.В.

**Ухвалено** кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей (протокол № 11 від 04.06.2021р.)

**Погоджено** Методичною комісією ФМФ (протокол № 13 від 22.06.2021 р.)