



Національний технічний університет України  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



Кафедра  
математичного аналізу  
та теорії ймовірностей

# Гауссові міри та гауссові випадкові процеси

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Третій (освітньо-науковий)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>111 Математика</i>
Освітня програма	<i>Математика</i>
Статус дисципліни	<i>Вибіркова</i>
Форма навчання	<i>Очна (денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>2 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>4 кредити ЕКТС</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен</i>
Розклад занять	<i><a href="http://rozklad.kpi.ua">rozklad.kpi.ua</a></i>
Мова викладання	<i>Українська/Англійська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Канд. фіз.-мат. наук, доцент Василик О.І. Електронна адреса: <a href="mailto:vasylyk@matan.kpi.ua">vasylyk@matan.kpi.ua</a>
Розміщення курсу	Електронний кампус КПІ <a href="https://campus.kpi.ua/">https://campus.kpi.ua/</a> , сайт кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей ФМФ <a href="http://matan.kpi.ua/uk/">http://matan.kpi.ua/uk/</a>

## Програма навчальної дисципліни

### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

<b>Цілі дисципліни</b>	<i>Метою дисципліни є ознайомлення майбутніх фахівців-математиків з сучасним станом теорії гауссових мір та гауссових випадкових процесів, розвиток вміння застосовувати отримані знання і навички для розв'язання прикладних задач, оскільки це область на перетині теорії випадкових процесів, функціонального аналізу і математичної фізики, тісно пов'язана з різноманітними застосуваннями в квантовій теорії поля, статистичній фізиці, фінансовій математиці та інших галузях природничих наук.</i>
<b>Компетентності</b>	<p><i>ФК1: Здатність самостійно виконувати науково-дослідну діяльність у галузі математики та статистики з використанням сучасних теорій, методів та інформаційно-комунікаційних технологій і дотриманням належної академічної доброчесності</i></p> <p><i>ФК2: Здатність адаптувати і узагальнювати результати сучасних досліджень в галузі математики та статистики для вирішення наукових і практичних проблем</i></p> <p><i>ФК5: Здатність застосовувати теоретико-ймовірнісні методи і методи фінансової математики, топологічні, алгебраїчні, комбінаторні, категорні методи та методи теорії узагальнених функцій, стохастичного аналізу, інтегральних та диференціальних рівнянь і математичного аналізу для досліджень в сучасній математиці</i></p>
<b>Програмні результати навчання</b>	<p><i>РН1: Знати сучасні тенденції, напрямки та закономірності розвитку світової та вітчизняної науки, наукові концепції світової та вітчизняної науки, математичні та статистичні наукові школи, їх теоретичні та прикладні розробки</i></p> <p><i>РН2 Володіти найбільш передовими концептуальними та методологічними знаннями в галузі науково-дослідної та професійної діяльності і на межі предметних галузей</i></p> <p><i>РН12 Уміти формулювати і перевіряти гіпотези; використовувати для обґрунтування висновків належні докази, зокрема, результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень і математичного та/або комп'ютерного моделювання, наявні літературні дані</i></p> <p><i>РН13 Уміти організовувати і проводити науково-дослідну, інноваційну та освітню діяльність в обраній науковій спеціальності – математиці та статистиці</i></p> <p><i>РН14 Уміти розв'язувати теоретичні та прикладні математичні проблеми з використанням базових знань математики та статистики та базових загальних знань з різних природничих та соціальних наук</i></p> <p><i>РН17 Уміти адаптувати, інтерпретувати та узагальнювати результати сучасних математичних та статистичних досліджень для розв'язання теоретичних та прикладних проблем</i></p>

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

*Освітній компонент “Гауссові міри та гауссові випадкові процеси” є одним із завершальних курсів професійної підготовки докторів філософії спеціальності “Математика”.*

*Цей курс розширює раніше прочитані спеціальні дисципліни в напрямку теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів і дає систематизоване детальне викладання основ теорії гауссових мір та гауссових випадкових процесів. Ця дисципліна має глибокі логічні зв'язки з попередніми дисциплінами навчального плану підготовки бакалаврів, магістрів та докторів філософії, такими як ПОЗ(б) “Теорія ймовірностей”, ПО5(б) “Теорія міри та інтеграла”, ПО8(б) “Основи теорії випадкових процесів”, ЗО16(б) “Функціональний аналіз”.*

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

*Кредитний модуль включає наступні теми*

### **Розділ 1. Гауссові випадкові процеси**

*Тема 1.1. Вінерівський процес, або броунівський рух*

*Тема 1.2. Гауссові випадкові процеси*

### **Розділ 2. Скінченновимірні гауссові розподіли**

*Тема 2.1. Гауссові міри на прямій*

*Тема 2.2. Багатовимірні гауссові розподіли*

*Тема 2.3. Многочлени Ерміта*

*Тема 2.4. Півгрупа Орнштейна-Уленбека*

*Тема 2.5. Класи Соболева*

### **Розділ 3. Нескінченновимірні гауссові міри**

*Тема 3.1. Основні означення і приклади*

*Тема 3.2. Простір Камерона-Мартіна*

*Тема 3.3. Еквівалентність і сингулярність*

*Тема 3.4. Вимірні півнорми*

*Тема 3.5. Вимірні лінійні функціонали*

### **Розділ 4. Опуклість гауссових мір**

*Тема 4.1. Гауссівська симетризація*

*Тема 4.2. Опуклі та Ліпшицеві функціонали*

*Тема 4.3. Великі відхилення*

### **Розділ 5. Нелінійні перетворення гауссових мір**

*Тема 5.1. Допоміжні результати*

*Тема 5.2. Лінійні та нелінійні перетворення*

*Тема 5.3. Скінченновимірні відображення*

*Тема 5.4. Метод Маллявена*

*Заплановано **індивідуальні заняття** для поглибленого вивчення окремих розділів курсу та практичні заняття, на яких аспіранти навчаються розв'язувати задачі з відповідних тем курсу.*

## **4. Навчальні матеріали та ресурси**

### **1. Базова література**

- 1. V.I. Bogachev, Gaussian Measures, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.*
- 2. M.A. Lifshits, Gaussian random functions, Kluwer Academic Publications, Dordrecht, 1995.*
- 3. Takeyuki Hida, Masuyuki Hitsuda. Gaussian Processes. American Mathematical Soc., 2007.*

## 2. Допоміжна література

1. H.-H. Kuo. *Gaussian Measures in Banach Spaces. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1975.*
2. M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian Analysis, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1994), 165–294, Lecture Notes in Math. 1648, Springer, Berlin, 1996.*
3. W.V. Li, Q.M. Shao, *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications, Stochastic Processes: Theory and Methods, Handbook of Statistics vol. 19, 533–597, Elsevier, Amsterdam 2001.*

## Навчальний контент

### 4. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Основні теми навчального плану можуть бути освоєні за такими джерелами.

Розділ 1. [3], стор 1 – 40; електронний конспект лекцій

Розділ 2. [1], pp. 1 – 15; електронний конспект лекцій.

Розділ 3. [1], pp. 39 – 83.

Розділ 4. [1], pp. 157 – 197.

Розділ 5. [1], pp. 279 – 320.

### 5. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- самостійне опрацювання окремих тем;
- підготовка до індивідуальних та практичних занять,
- виконання розрахункової роботи,
- виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка до іспиту.

## Політика та контроль

### 6. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичному занятті та при виконанні домашніх робіт

Аспіранту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, модульної контрольної роботи та до іспиту.

#### Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

#### Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### 7. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання [https://document.kpi.ua/files/2020\\_1-273.pdf](https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf)

Зокрема, рейтинг здобувача з освітнього компонента формується як сума балів поточної успішності навчання – стартового рейтингу (максимально 50 балів) та екзаменаційних балів (максимально 50 балів).

Поточний контроль: фронтальний (усний\письмовий), МКР; індивідуальне заддання.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог програми результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>.

Рейтингова система оцінювання включає всі види тестування: контрольні роботи, виконання індивідуального завдання, відповідь на екзамені. Кожний здобувач отримує свій підсумковий рейтинг по дисципліні.

Рейтинг здобувача з кредитного модуля складається з балів, які він отримує за:

- роботу на практичних заняттях
- написання модульної контрольної роботи;
- виконання індивідуального завдання (РГР);
- відповіді на екзамені (письмової екзаменаційної роботи).

Відповіді під час практичних занять

Ваговий бал 1 (може бути відкорегований в залежності від кількості запланованих занять)

- якщо задача повністю розв'язана, то здобувач отримує максимальну кількість запланованих балів;
- якщо відповідь правильна, але у розв'язку є неточності, то здобувач отримує 0,5 запланованих балів;
- якщо незадовільна відповідь, метод розв'язування задачі неправильний – 0 балів;

Максимальний бал 10.

Модульна контрольна робота

Ваговий бал 20

Критерії оцінювання

- повна відповідь на всі завдання (більше 90% матеріалу) 18 – 20 балів;
- неповна відповідь на завдання (від 50 до 90% матеріалу) - 10 – 17 балів;
- відповідь містить менше 50 % необхідної інформації – 0-9 балів;

Максимальний бал 20

Індивідуальне завдання (Розрахунково-графічна робота)

Ваговий бал 20

Критерії оцінювання

- повна відповідь на всі завдання (більше 90% матеріалу) 18 – 20 балів;
- неповна відповідь на завдання (від 50 до 90% матеріалу) - 10 – 17 балів;
- відповідь містить менше 50 % необхідної інформації – 0-9 балів;

Виконання РГР може бути замінено на підготовку тез на наукову конференцію.

Максимальний бал 20

Умови допуску до екзамену.

Умовою допуску до екзамену є стартовий рейтинг не менше 30 балів. Здобувач, який в кінці навчального семестру мають менше балів до екзамену не допускаються і повинні виконати додаткові завдання до першого перскладання.

Форма семестрового контролю – іспит

На екзамені студенти виконують письмову контрольну роботу. Кожне завдання містить два теоретичних запитання (завдання) і одне практичне. Кожне теоретичне запитання (завдання) оцінюється у 15 балів, а практичне у 20 балів за такими критеріями:

- «відмінно», повна відповідь, не менше 90% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до рівня «умінь», (повне, безпомилкове розв'язування завдання) – 14-15; 18-20 балів;
- «добре», достатньо повна відповідь, не менше 75% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до рівня «умінь» або є незначні неточності (повне розв'язування завдання з незначними неточностями) – 11-13; 16-17 балів;
- «задовільно», неповна відповідь, не менше 60% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до рівня «умінь» та деякі помилки (завдання виконане з певними недоліками) – 9-10; 10-15 балів
- «незадовільно», відповідь не відповідає умовам до «задовільно» – 0 балів.

Сума стартових балів та балів за екзамен переводиться до екзаменаційної оцінки згідно з таблицею:

100...95	Відмінно
94...85	Дуже добре

84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Стартовий рейтинг менше 30 балів	Не допущено

У випадку дистанційної форми навчання у PCO відбуваються наступні зміни:

- Контрольні заходи проводяться дистанційно із застосуванням електронної пошти, Telegram, Zoot та освітньої платформи Moodle, зокрема у вигляді тестових контрольних робіт.
- Максимальну суму вагових балів контрольних заходів протягом семестру  $R_C$  встановлюється на рівні 50 балів.
- Допусковий бал до екзамену  $R_D$  встановлюється на рівні 30 балів.
- Сума балів  $R_I$ , набрана протягом семестру згідно затвердженого PCO, повідомляється на останньому практичному занятті.
- У разі не отримання студентом допускового балу, йому надається можливість підвищити  $R_I$  шляхом проведення додаткових контрольних заходів до допускового
- Рівень набуття передбачених навчальною програмою компетентностей визначається на підставі проведених заходів поточного контролю.
- Екзаменаційна оцінка може бути виставлена «автоматом» за формулою шляхом перерахунку стартових балів за 100-бальною шкалою:

$$R = 60 + \frac{40(R_I - R_D)}{R_C - R_D}$$

Переводиться до екзаменаційної оцінки згідно з таблицею

100...95	Відмінно
94...85	Дуже добре
84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

### Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено доц. **Василик О.І.**

Ухвалено кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей (протокол № 1 від 27.08.2020 р.)

Погоджено Методичною комісією факультету ФМФ (протокол № 1 від 02.09.2020 р.)