F_n, $k < n$, имели бы общий делитель m, то согласно формуле (7) число m было бы делителем двойки. Значит $m = 1$ или $m = 2$. Первый случай означает, что F_k и F_n взаимно просты, а второй случай невозможен, так как любое число Ферма является нечетным.

Поскольку все числа Ферма взаимно просты, то их разложения на простые сомножители не пересекаются. В каждом из разложений имеется хотя-бы один сомножитель, отличный от единицы (если какое-либо число F_n простое — то такой сомножитель действительно один). Следовательно простых чисел бесконечно много, так как чисел Ферма бесконечно много.

4.2. Ряд Эйлера. Еще одно доказательство бесконечности множества простых чисел основано на расходимости ряда

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Первым, кто установил это, был Эйлер. Ниже приведено другое доказательство, принадлежащее Эрдешу.

Пусть $\{p_n\}$ — это последовательность простых чисел, записанных в порядке возрастания. Предположим, что ряд $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1}$ сходится. Тогда существует натуральное число k, для которого $\sum_{i\geq k+1} p_i^{-1} < \frac{1}{2}$. Назовем числа $p_1, \ldots, p_k$ *малыми*, а числа $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ — *большими*. Для любого натурального N получаем

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}. \tag{9}$$

Пусть N_b обозначает количество натуральных $n \leq N$, которые делятся на хотя-бы одно большое простое число; пусть также N_s — это количество натуральных $n \le N$, которые имеют только малые делители. Мы покажем сейчас, что для специально подобранного N

$$N_b + N_s < N, \tag{10}$$

что и будет противоречием, поскольку по определению $N_b + N_s = N$.

Чтобы оценить N_b, заметим, что $[N/p_i]$ — это количество целых чисел $n \le N$, которые имеют делителем p_i. Следовательно, из (9) получаем

$$N_b \le \sum_{i \ge k+1} \left[\frac{N}{p_i}\right] < \frac{N}{2}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь N_s. Представим каждое $n \le N$, имеющее только малые делители, в виде $n = a_n b_n^2$, где b_n^2 — это наибольший квадрат, делящий n, а a_n — соответствующее "дополнение" (конечно, случай $b_n = 1$ также возможен). Значит a_n — это произведение *разных* малых простых чисел. Записывая a_n в виде $a_n = p_1^{\varepsilon_1} \dots p_k^{\varepsilon_k}$, где каждое ε_i либо 0, либо 1, замечаем, что a_n может иметь 2^k разных значений. Поскольку $b_n \le \sqrt{n} \le \sqrt{N}$, то существует не более $\sqrt{N}$ значений для b_n^2. Применяя основное правило комбинаторики, оцениваем

$$N_s \le 2^k \sqrt{N}.$$

Поскольку неравенство (11) выполнено для любого N, то оно выполнено и для N, для которого $2^k\sqrt{N} \le \frac{N}{2}$ или $2^{k+1} \le \sqrt{N}$. Именно для $N = 2^{2k+2}$ мы и получаем противоречие (10).