МІНІСТЕРСТВО ОБОРОНИ УКРАЇНИ

ВІЙСЬОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ ТА ІНФОРМАТИЗАЦІЇ НТУУ «КПІ»

І.А. Рудоміно-Дусятська Ю.Г. Сікорський

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

2009

УДК 517

І.А. Рудоміно-Дусятська, Ю.Г. Сікорський. Перетворення Лапласа та його застосування. Навчальний посібник.

Навчальний посібник написаний відповідно до програми дисципліни «Вища математика» розділу «інтегральні перетворення».

В даному посібнику подаються основні означення, властивості, теореми, які необхідні у підготовці до практичних занять та у виконанні завдань на самопідготовці. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами типових задач. Наведено достатню кількість задач для проведення практичних занять, а також для індивідуальної роботи студентів та курсантів.

Посібник призначений для курсантів та студентів технічних вузів.

Передмова

Даний посібник призначений вивченню дуже важливого розділу математики: операційного числення, без якого неможлива підготовка сучасного інженера. Операційне числення широко застосовується в прикладній математиці, фізиці, автоматизації та електротехніці.

Однією з особливостей перетворення Лапласа, які передбачили його широке розповсюдження в наукових і технічних розрахунках, є те, що багатьом операціям над оригіналами відповідають більш прості співвідношення над їх зображеннями.

В 1779 році з'явилась стаття П'єра Симона де Лапласа, де вказано спосіб побудови однозначної відповідності між функціями і цей метод застосовано для розв'язування диференціальних рівнянь. Але систематичне застосування операційного числення було введено в практику більш ніж через століття англійським інженером-електриком Олівером Хевісайдом, який успішно використав операційне числення при розрахунку електричних кіл.

Посібник складається з шести параграфів, а також завдань для самостійної роботи студентів. В посібнику стисло і доступно викладено основний теоретичний матеріал, передбачений програмою. До кожної теми розв'язано достатню кількість прикладів, що сприяє оволодінню матеріалу.

Завдання для самостійної роботи студентів складаються з 4 наборів завдань, кожний з яких містить 25 варіантів. Ці завдання можуть бути використані для розрахунково-графічних робіт студентів.

§ 1. Перетворення Лапласа

Перетворенням Лапласа функції дійсної змінної $f(t)$ називається функція комплексної змінної $F(p)$, яка визначається за формулою:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\,. \tag{1}$$

Невласний інтеграл в правій частині рівності (1) називають **інтегралом Лапласа**.

Для того, щоб інтеграл (1) збігався, треба на функції $f(t)$ накласти деякі умови. Будемо припускати наступне:

1) Функція $f(t)$ кусково-неперервна при $t \ge 0$, це означає, що вона або неперервна, або має скінчене число точок розриву тільки першого роду.
2) Для всіх $t < 0$ $f(t) = 0$. Оскільки в інтегралі Лапласа значення функції $f(t)$ при $t < 0$ не використовуються, то не має значення, чому вони дорівнюють. Зручно вважати, що вони дорівнюють нулю. При вивченні багатьох фізичних процесів змінна t є час і ця умова означає, що процес починається з моменту часу $t = 0$.
3) При зростанні t модуль функції $f(t)$ може зростати, але не швидше деякої показникової функції, тобто існують такі сталі M і α_0, що для всіх t

$$|f(t)| \le Me^{\alpha_0 t}\,.$$

Остання умова забезпечує збіжність інтеграла Лапласа для всіх комплексних чисел $p = \alpha + \beta j$ при $\alpha > \alpha_0$. Дійсно, нехай $|f(t)| \le Me^{\alpha_0 t}$. Оскільки $\left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-(\alpha+\beta j)t}\right| = \left|e^{-\alpha t}\right| \cdot \left|e^{-\beta j t}\right| = e^{-\alpha t}$, то $\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{\alpha_0 t}e^{-\alpha t} = Me^{-(\alpha-\alpha_0)t}$. Отже, при $\alpha > \alpha_0$

$$\int_0^{\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt \le \int_0^{\infty}\left|Me^{-(\alpha-\alpha_0)t}\right|dt = M\left.\frac{e^{-(\alpha-\alpha_0)t}}{-(\alpha-\alpha_0)}\right|_0^{+\infty} = \frac{M}{\alpha-\alpha_0}\,,$$

тобто інтеграл збігається абсолютно.

Функція $f(t)$, яка задовольняє умови 1)-3) називається **оригіналом**, а функція $F(p)$, що визначається формулою (1), – **зображенням** (по Лапласу).

Відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ записують у вигляді:

$$f(t) \longleftrightarrow F(p)\,.$$

Найпростішим оригіналом є функція так звана одинична функція Хевісайда:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Графік цієї функції має вигляд:

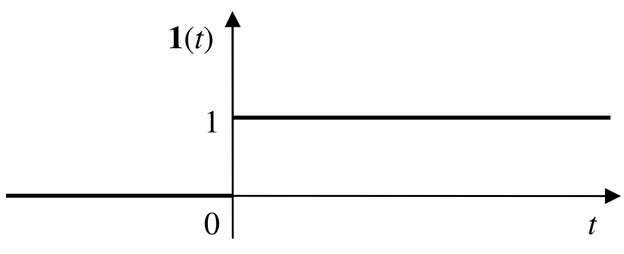


Рис.1

(Хевісайд Олівер (1850-1925) – англійський інженер і фізик, член Лондонського королівського товариства. Першим застосував операційне числення як один з методів прикладного аналізу, який дає можливість дуже просто розв’язувати складні задачі механіки, електротехніки тощо.)

Знайдемо для неї зображення:

$$F(p)=\int_0^\infty 1(t)e^{-pt}dt=\frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p},$$

причому $e^{-pt}=e^{-(\alpha+\beta j)t}\to 0$ при $t\to\infty$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha=\operatorname{Re}p>0$. Отже,

$$\mathbf{1}(t)\longleftrightarrow\frac{1}{p}.$$

<u>Приклад 1</u>. Користуючись означенням, знайдіть зображення функції $f(t)=e^{at}$. (В цьому прикладі і подалі, якщо мова йде про якусь функцію, то ми будемо вважати, що вона дорівнює нулю для $t<0$.)

Розв'язування.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{at}e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt=\frac{e^{-pt}}{-(p-a)}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-a}\qquad(\text{якщо }\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a).$$

Отже,

$$e^{at}\longleftrightarrow\frac{1}{p-a}. \tag{2}$$

Теорема єдиності. Перетворення Лапласа єдино в тому сенсі, що дві функції, які мають однакові зображення, співпадають в усіх точках неперервності для всіх $t>0$.

§ 2. Властивості перетворення Лапласа

1. Теорема лінійності. Якщо $f(t)\longleftrightarrow F(p)$ та $g(t)\longleftrightarrow G(p)$, то для всіх комплексних чисел A і B

$$Af(t)+Bg(t)\longleftrightarrow AF(p)+BG(t). \tag{3}$$

Доведення. Користуючись властивістю лінійності інтеграла маємо:

$$Af(t)+Bg(t)\longleftrightarrow\int_0^\infty\big(Af(t)+Bg(t)\big)e^{-pt}dt=A\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt+B\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt=AF(p)+BG(t).$$

<u>Приклад 2.</u> Знайдіть зображення функцій $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\operatorname{sh}\omega t$, $\operatorname{ch}\omega t$.

Розв'язування. За формулами Ейлера

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j},\qquad \cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}.$$

Поклавши в формулі (2) $a=\pm j\omega$, отримуємо $e^{j\omega t}\longleftrightarrow\frac{1}{p-j\omega}$ та $e^{-j\omega t}\longleftrightarrow\frac{1}{p+j\omega}$.

Застосовуючи теорему лінійності, маємо:

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\longleftrightarrow\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega}-\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{p+j\omega-p+j\omega}{2j\left(p^2+\omega^2\right)}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\longleftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega}+\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{p+j\omega+p-j\omega}{2\left(p^2+\omega^2\right)}=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Аналогічно, виходячи з означення гіперболічних функцій

$$sh\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2},\qquad \cos\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2},$$

знаходимо $$sh\omega t\longleftrightarrow\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\qquad ch\omega t\longleftrightarrow\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

2. Теорема подібності. Якщо $f(t)\longleftrightarrow F(p)$, то для довільного сталого числа $\lambda>0$

$$f(\lambda t)\longleftrightarrow\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \tag{4}$$

тобто множення аргументу оригінала на додатне число λ приводить до ділення аргументу зображення і самого зображення $F(p)$ на те саме число λ.

Доведення. За означенням перетворення Лапласа:

$$f(\lambda t)\longleftrightarrow\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=\begin{vmatrix}\lambda t=u\\ dt=\dfrac{1}{\lambda}du\end{vmatrix}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{pu}{\lambda}}du=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

3. Теорема зсуву (згасання). Якщо $f(t)\longleftrightarrow F(p)$, то для довільного комплексного числа a

$$e^{at}f(t)\longleftrightarrow F(p-a)\,. \tag{5}$$

Доведення. За означенням перетворення Лапласа:

$$e^{at}f(t)\longleftrightarrow\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}du=F(p-a),$$

тобто множення оригінала на функцію e^{at} спричиняє зсув незалежної змінної p.

За допомогою теореми зсуву можна знайти зображення наступних функцій:

$$e^{at}\sin\omega t\longleftrightarrow\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2};\qquad e^{at}\cos\omega t\longleftrightarrow\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2};$$

$$e^{at}sh\omega t\longleftrightarrow\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2};\qquad e^{at}ch\omega t\longleftrightarrow\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

Для знаходження зображень добутків оригінала $f(t)$ на $\sin\omega t$ або $\cos\omega t$ застосовуємо теореми зсуву та лінійності:

$$f(t)\sin\omega t=f(t)\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}=\frac{1}{2j}\left(f(t)e^{j\omega t}-f(t)e^{-j\omega t}\right)\longleftrightarrow\frac{1}{2j}\left(F(p-j\omega)-F(p+j\omega)\right);$$

$$f(t)\cos\omega t=f(t)\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}=\frac{1}{2}\left(f(t)e^{j\omega t}+f(t)e^{-j\omega t}\right)\longleftrightarrow\frac{1}{2}\left(F(p-j\omega)+F(p+j\omega)\right).$$

4. Теорема запізнення. Якщо $f(t)\longleftrightarrow F(p)$, то для довільного сталого числа $\tau>0$

$$f(t-\tau)\longleftrightarrow e^{-p\tau}F(p) \tag{6}$$

Доведення. Нехай функція $f(t)$ зображена на рис.2. Тоді графік функції $f(t-\tau)$ буде зсунутий відносно графіка $f(t)$ на τ, причому на інтервалі $(0;\tau)$ графік співпадає з віссю $0t$, оскільки на цьому проміжку $t-\tau<0$, а значить функція $f(t-\tau)$ дорівнює нулю. Графік функції $f(t-\tau)$ зображений на рис.3

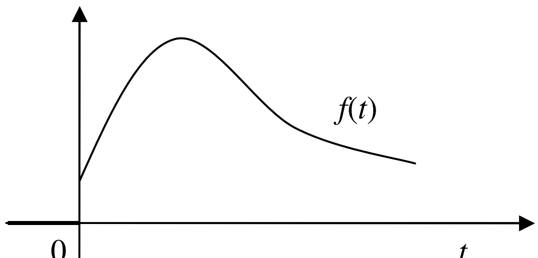


Рис.2

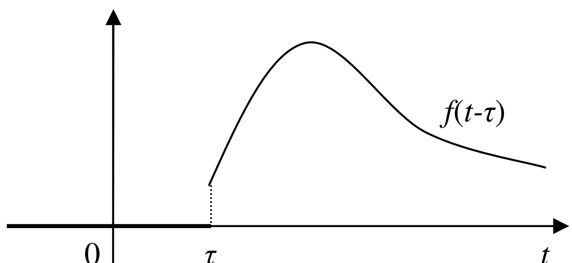


Рис.3

$$f(t-\tau)\longleftrightarrow\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\begin{vmatrix}t-\tau=u\\ t=u+\tau\\ dt=du\end{vmatrix}=\int_0^\infty f(u)e^{-pu}e^{-p\tau}du=e^{-p\tau}F(p).$$

<u>Приклад 3.</u> Знайдіть зображення функції $\mathbf{1}(t-\tau)=\begin{cases}1, & t\ge\tau\\ 0, & t<\tau\end{cases}$.

Розв'язання. Графік цієї функції зображено на рис.4.

Згідно теореми запізнення зображення функції $\mathbf{1}(t-\tau)=\begin{cases}1, & t>\tau\\ 0, & t<\tau\end{cases}$ дорівнює $\frac{1}{p}e^{-p\tau}$.

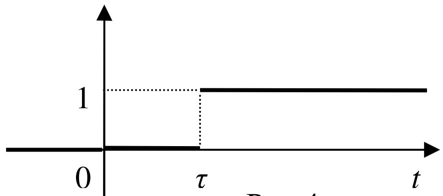


Рис.4

<u>Зауваження.</u> За допомогою функцій $\mathbf{1}(t)$ та $\mathbf{1}(t-\tau)$ зручно записувати у вигляді одного аналітичного виразу такі оригінали, які задаються різними аналітичними виразами на різних проміжках числової осі.

Наприклад, якщо

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ f_1(t), & 0<t<a,\\ f_2(t), & a<t<b,\\ f_3(t), & t>b,\end{cases},$$

то $f(t)=f_1(t)\,[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-a)]+\,f_2(t)\,[\mathbf{1}(t-a)-\mathbf{1}(t-b)]+\,f_3(t)\,\mathbf{1}(t-b)$.

Якщо

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ f_1(t), & a<t<b,\\ f_2(t), & b<t<c, \quad (a>0),\\ f_3(t), & c<t<d,\\ 0, & t>d\end{cases}$$

то $f(t)=f_1(t)\,[\mathbf{1}(t-a)-\mathbf{1}(t-b)]+\,f_2(t)\,[\mathbf{1}(t-b)-\mathbf{1}(t-c)]+\,f_3(t)\,[\mathbf{1}(t-c)-\mathbf{1}(t-d)]$.

Застосуємо це зауваження для побудови зображення одиничного імпульсу $\varphi(t)$, що діє на проміжку часу $(0;\tau)$:

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0<t<\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}.$$

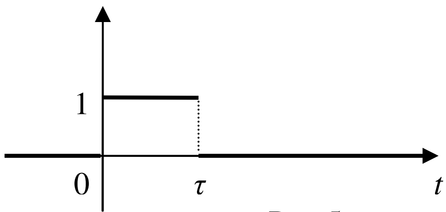


Рис.5.

Графік цієї функції зображено на рис.5. Очевидно, що цей одиничний імпульс можна розглядати як різницю двох оригіналів: одиничної функції та одиничної функції, зсунутої на τ: $\varphi(t)=\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\tau)$. Отже,

$$\varphi(t)\longleftrightarrow\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p\tau}=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right).$$

Нехай тепер одиничний імпульс починається не в момент $t=0$, а в деякий момент $t=T$ і діє на протязі часу τ (рис.6). Для знаходження зображення цієї функції знову застосуємо теорему запізнення:

$$\varphi(t-T)\longleftrightarrow\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)e^{-pT}.$$

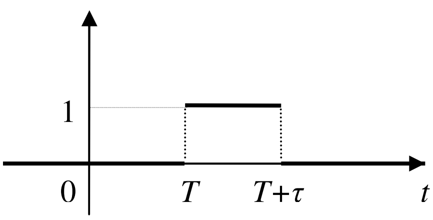


Рис.6.

Маємо тепер періодичну систему імпульсів, зображену на рис.7. Цю систему можна розглядати як суму одиничних імпульсів, які починаються в моменти часу nT ($n=0,1,2,\ldots$) і тривають час τ ($\tau<T$).

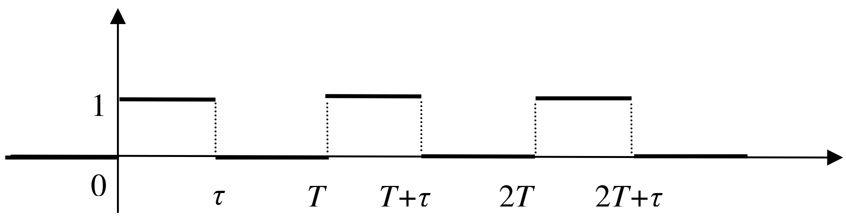


Рис.7.

Застосовуючи теореми запізнення та лінійності, отримуємо

$$f(t)=\varphi(t)+\varphi(t-T)+\varphi(t-2T)+\ldots\longleftrightarrow\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)+\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)e^{-pT}+\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)e^{-2pT}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right)\left(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+\ldots\right)=\frac{1-e^{-p\tau}}{p\left(1-e^{-pT}\right)}.$$

Геометрична прогресія збігається, бо $\left|e^{-pT}\right|<e^{-\alpha T}<1$, якщо тільки $\operatorname{Re}p>\alpha>0$. Зокрема, коли $T=2\tau$, формула спрощується:

$$f(t)\longleftrightarrow\frac{1}{p\left(1+e^{-p\tau}\right)}.$$

5. Теорема диференціювання зображення. Якщо $f(t)\longleftrightarrow F(p)$, то:

$$-tf(t)\longleftrightarrow F'(p), \qquad (7)$$

тобто диференціювання зображення зводиться до множення оригінала на (–t).

Доведення. Нехай $f(t)\longleftrightarrow F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. Знайдемо похідну зображення:

$$F'(p)=\left(\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right)'=\int\limits_0^\infty\left(f(t)e^{-pt}\right)'dt=\int\limits_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}dt.$$

А це є зображення для функції $-tf(t)$.

Наслідок. Застосовуючи цю теорему декілька раз, отримуємо:

$$t^2f(t)\longleftrightarrow F''(p);$$

$$-t^3f(t)\longleftrightarrow F'''(p);$$

$$\ldots$$

$$(-1)^n t^n f(t)\longleftrightarrow F^{(n)}(p). \qquad (8)$$

Приклад 4. Знайдіть зображення функцій t^n, $t\sin\omega t$, $t\cos\omega t$, $t^n e^{\omega t}$.

Розв’язування. Використовуючи теорему про диференціювання зображення, маємо:

1) $$\mathbf{1}(t)\longleftrightarrow\frac{1}{p};$$

$$-t\longleftrightarrow-\frac{1}{p^2}\quad\Rightarrow\quad t\longleftrightarrow\frac{1!}{p^2};$$

$$t^2\longleftrightarrow\frac{1\cdot2}{p^3}\quad\Rightarrow\quad t^2\longleftrightarrow\frac{2!}{p^3};$$

$$-t^3\longleftrightarrow-\frac{1\cdot2\cdot3}{p^4}\quad\Rightarrow\quad t^3\longleftrightarrow\frac{3!}{p^4};$$

…

$$t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \qquad (9)$$

2) $\sin\omega t \longleftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$; $\cos\omega t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$;

$-t\sin\omega t \longleftrightarrow \frac{-2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$; $-t\cos\omega t \longleftrightarrow \frac{p^2+\omega^2-2p^2}{p^2+\omega^2}$;

$t\sin\omega t \longleftrightarrow \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$; $t\cos\omega t \longleftrightarrow \frac{p^2-\omega^2}{p^2+\omega^2}$.

Для знаходження зображення функції $t^n e^{\omega t}$ скористаємось формулою (9) та теоремою зсуву. Маємо

$$t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$t^n e^{at} \longleftrightarrow \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}. \qquad (10)$$

6. Теорема диференціювання оригінала. Якщо $f(t) \longleftrightarrow F(p)$, то

$$f'(t) \longleftrightarrow pF(p) - f(0), \qquad (11)$$

тобто диференціювання оригінала зводиться до множення на p його зображення і віднімання $f(0)$. Зокрема, якщо $f(0)=0$, то $f'(t) \longleftrightarrow pF(p)$.

Доведення. Запишемо перетворення Лапласа для похідної $f'(t)$ і застосуємо інтегрування частинами. Маємо:

$$f'(t) \longleftrightarrow \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \begin{vmatrix} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt}dt \\ dv = f'(t)dt & v = f(t) \end{vmatrix} = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Оскільки за умовою росту оригінала, $|f(t)| \le Me^{\alpha_0 t}$, то, якщо $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, $\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{(\alpha_0 - \operatorname{Re} p)t} \to 0$ при $t \to \infty$. Таким чином, від першого доданка залишається $-f(0)$. Отже, $f'(t) \longleftrightarrow pF(p) - f(0)$.

Наслідок. Застосовуючи цю теорему повторно, отримаємо

$$f''(t) \longleftrightarrow p\big(pF(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) \longleftrightarrow p\big(p^2F(p) - pf(0) - f'(0)\big) - f'(0) = p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0);$$

і, взагалі,

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \qquad (12)$$

В найпростішому випадку, коли $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, маємо

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow p^n F(p), \qquad (13)$$

тобто при нульових початкових значеннях оригінала та його похідних n–кратне диференціювання оригінала зводиться до множення на p^n його зображення.

Зауваження. Як ми вже бачили, може статись, що точка $t=0$ є точкою розриву оригінала. Тому, коли ми кажемо про значення $f(0)$, то домовимось під цим розуміти границю функції $f(t)$ при $t \to 0$ справа, тобто $f(0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t)$. Аналогічно і для похідних, $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(n)}(t)$.

7. Теорема інтегрування зображення. Якщо $f(t) \longleftrightarrow F(p)$ і $\int_p^\infty F(z)dz$ збігається, то

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_p^\infty F(z)dz, \tag{14}$$

тобто інтегрування зображення в межах від p до ∞ відповідає ділення оригінала на t.

Приклад 5.

1) Оскільки $\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$, то $\frac{\sin t}{t} \longleftrightarrow \int_p^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$;

2) Оскільки $1 - e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p-a}$, то

$$\frac{1-e^{at}}{t} \longleftrightarrow \int_p^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-a}\right)dz = \left(\ln z - \ln(z-a)\right)\Big|_p^\infty = \ln\frac{z}{z-a}\Big|_p^\infty = \ln 1 - \ln\frac{p}{p-a} = \ln\frac{p-a}{p}.$$

Наслідок (використання теореми для обчислення невласних інтегралів). Нехай $f(t) \longleftrightarrow F(p)$, тоді за теоремою інтегрування зображення $\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_p^\infty F(z)dz$.

Позначимо $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$. Нехай ця функція має зображення $\Phi(p) = \int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt$. Якщо припустити, що $\int_0^\infty \varphi(t)dt$ збігається, то $\Phi(0) = \int_0^\infty \varphi(t)dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$. З іншого боку, $\Phi(p) = \int_p^\infty F(z)dz$, а значить $\Phi(0) = \int_0^\infty F(z)dz$. Отже,

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(z)dz. \tag{15}$$

Приклад 6. Обчислимо за допомоги формули (15) деякі невласні інтеграли:

1) Оскільки $\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$, то $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = arctgz\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$;

2) Оскільки $e^{-bt} - e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{p+b} - \frac{1}{p+a}$, то

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z+b} - \frac{1}{z+a}\right)dz = \left(\ln(z+b) - \ln(z+a)\right)\Big|_0^\infty = \ln\frac{z+b}{z+a}\Big|_p^\infty = \ln 1 - \ln\frac{b}{a} = \ln\frac{a}{b}.$$

8. Теорема інтегрування оригінала. Якщо $f(t) \longleftrightarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{F(p)}{p}. \tag{16}$$

Доведення. Позначимо через $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Відзначимо, що $g'(t) = f(t)$ і $g(0) = 0$. Тому, якщо $g(t) \longleftrightarrow G(p)$, то застосовуючи теорему про диференціювання оригінала, отримуємо

$$f(t) = g'(t) \longleftrightarrow pG(p) - g(0) = pG(p).$$

З іншого боку $f(t) \longleftrightarrow F(p)$, отже $pG(p)=F(p)$, $G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$. Теорема доведена.

9. Теорема множення зображень.

Для того, щоб знайти оригінал, що відповідає добутку зображень, спочатку ознайомимось з поняттям згортки.

Згорткою двох функцій $f(t)$ і $g(t)$ називається інтеграл

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau . \tag{17}$$

Цей інтеграл є функцією змінної , яка входить в підінтегральний вираз і є також змінною верхньою межею інтеграла.

Покажемо, що вираз для згортки не залежить від порядку в якому беруться функції $f(t)$ і $g(t)$. Дійсно

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\begin{vmatrix} u=t-\tau \\ \tau=t-u \\ d\tau=-du \end{vmatrix}=\int_t^0 f(t-u)g(u)(-du)=\int_0^t g(u)f(t-u)du=g*f .$$

<u>Приклад 7.</u> Знайдіть згортку функцій $f(t)=e^t$ і $g(t)=t$.

Розв'язування. Шукаємо згортку функцій за означенням:

$$f*g=\int_0^t e^\tau(t-\tau)d\tau=\begin{vmatrix} u=t-\tau & du=-d\tau \\ dv=e^\tau d\tau & v=e^\tau \end{vmatrix}=(t-\tau)e^\tau\Big|_0^t-\int_0^t e^\tau(-d\tau)=-t+e^\tau\Big|_0^t=e^\tau-t-1 .$$

Можна показати, що якщо функції $f(t)$ і $g(t)$ оригінали, то їх згортка також є оригіналом.

Теорема. Якщо $f(t) \longleftrightarrow F(p)$ і $g(t) \longleftrightarrow G(p)$, то згортці функцій $f*g$ відповідає добуток зображень:

$$f*g \longleftrightarrow F(p)G(p). \tag{18}$$

§ 3. Таблиця основних оригіналів та їх зображень

Для зручності (щоб кожного разу не обчислювати зображення) зображення основних функцій, що найчастіше зустрічаються зібрані у таблицю. Існують таблиці, що містять величезну кількість рядків, ми ж обмежимося таблицею тих функцій, зображення яких будемо застосовувати.

	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
1.	**1**(t)	$\dfrac{1}{p}$
2.	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
4.	$t^n e^{\lambda t}$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$

5.	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6.	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
7.	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8.	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
9.	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
10.	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
11.	$e^{\lambda t}\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
12.	$e^{\lambda t}\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
13.	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
14.	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
15.	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
16.	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
17.	$\int\limits_0^t \dfrac{\sin x}{x}dx$	$\dfrac{\mathrm{arcctg}\, p}{p}$
18.	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$

§ 4. Знаходження оригіналу за зображенням

Теорема обернення. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображенням, то в кожній точці , де оригінал $f(t)$ неперервний, має місце формула

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp,$$

де σ – довільне число, що задовольняє нерівності $\sigma>\alpha_0$.

Припустимо, що $F(p)$– функція, аналітична в комплексній площині, за винятком скінченого числа особливих точок и задовольняє умові $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$. Тоді інтеграл

$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$ в формулі обертання може бути замінено на інтеграл $\int\limits_{\gamma} F(p)e^{pt}dp$, де γ – коло з центром на початку координат, яке містить в собі всі особливі точки $F(p)$. Застосовуючи основну теорему про лишки, маємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\sum_i \underset{a_i}{res}\left(F(p)e^{pt}\right) = \sum_i \underset{a_i}{res}\left(F(p)e^{pt}\right),$$

де a_i – особливі точки функції $F(p)$.

Приклад 7. Знайдіть оригінал по зображенню $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$.

Розв'язування. Дана функція має два простих полюса в точках $p = i$ та $p = -i$. Отже,

$$f(t) = \underset{i}{res}\left(\frac{e^{pt}}{p^2+1}\right) + \underset{-i}{res}\left(\frac{e^{pt}}{p^2+1}\right) = \lim_{p\to i}\frac{e^{pt}(p-i)}{p^2+1} + \lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}(p+i)}{p^2+1} = \lim_{p\to i}\frac{e^{pt}}{(p+i)} + \lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}}{(p-i)} =$$

$$= \frac{e^{it}}{2i} + \frac{e^{-it}}{-2i} = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t.$$

Якщо $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ є правильний раціональний дріб, то для знаходження оригіналу можна застосувати наступну процедуру: розкласти дріб на суму простих дробів та знайти оригінали для кожного дробу, використовуючи таблицю та властивості зображення Лапласа.

Приклад 8. Знайдіть оригінал по зображенню $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3-5p^2+6p}$.

Розв'язування. Розкладемо знаменник дробу на незвідні множники:

$$p^3-5p^2+6p = p\left(p^2-5p+6\right) = p(p-2)(p-3).$$

Розкладемо даний дріб на прості дроби:

$$\frac{p+1}{p^3-5p^2+6p} = \frac{p+1}{p(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}.$$

Для визначення коефіцієнтів маємо тотожність:

$$p+1 \equiv A(p-2)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p-2).$$

Покладемо в цій тотожності $p = 0$; маємо $1 = 6A$, звідки, $A = 1/6$. Покладемо $p = 2$; маємо $3 = -2B$, звідки $B = -3/2$. Покладемо $p = 3$, маємо $4 = 3C$, звідки $C = 4/3$.

Отже,

$$\frac{p+1}{p(p-2)(p-3)} = \frac{1/6}{p} + \frac{-3/2}{p-2} + \frac{4/3}{p-3}.$$

Таким чином,

$$F(p) = \frac{1/6}{p} + \frac{-3/2}{p-2} + \frac{4/3}{p-3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p-3}.$$

Використовуючи таблицю основних оригіналів та їх зображень, а також властивості зображення Лапласа, маємо,

$$f(t) = \frac{1}{6} - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{3t}.$$

Приклад 9. Знайдіть оригінал по зображенню $F(p) = \dfrac{12}{p^3-8}$.

Розв'язування. Розкладемо даний дріб на прості дроби:

$$\frac{12}{p^3-8}=\frac{12}{(p-2)(p^2+2p+4)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Для визначення коефіцієнтів маємо тотожність:

$$12\equiv A(p^2+2p+4)+(Bp+C)(p-2).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях p, маємо систему:

$$\begin{array}{c|c} p^2 & A+B=0 \\ p^1 & 2A-2B+C=0. \\ p^0 & 4A-2C=12 \end{array}$$

Розв’язуючи цю систему, одержимо $A=1$, $B=-1$, $C=-4$. Отже,

$$\frac{12}{p^3-8}=\frac{1}{p-2}+\frac{-p-4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{p-2}-\frac{p+4}{(p+1)^2+3}=\frac{1}{p-2}-\frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

Таким чином,

$$F(p)=\frac{1}{p-2}-\frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

Використовуючи таблицю основних оригіналів та їх зображень, а також властивості зображення Лапласа, маємо,

$$f(t)=e^{2t}-e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t.$$

Приклад 10. Знайдіть оригінал по зображенню $F(p)=\dfrac{e^{-5p}}{p+3}$.

Розв’язування. Наявність множника e^{-5p} вказує на необхідність застосовувати теорему запізнення, причому $\tau=5$. Оскільки за таблицею $\dfrac{1}{p+3}\longleftrightarrow e^{-3t}$, то

$$F(p)=\frac{e^{-5p}}{p+3}\longleftrightarrow e^{-3(t-5)}1(t-5).$$

§ 5. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь і систем рівнянь з сталими коефіцієнтами

Одним з найважливіших застосувань операційного числення є розв’язання лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами.

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$x''+a_1x'+a_2x=f(t), \tag{19}$$

де $a_1, a_2=const$.

Знайдемо розв’язок рівняння (19), що задовольняє початковій умові

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1. \tag{20}$$

Операційний метод розв’язання такої задачі полягає в тому, що ми вважаємо як невідому функцію $x(t)$, так і праву частину $f(t)$ оригіналами і переходимо від рівняння (19), що пов’язує оригінали до рівняння, що пов’язує їх зображення.

Нехай $f(t)\longleftrightarrow F(p)$, $x(t)\longleftrightarrow X(p)$. За теоремою диференціювання оригінала маємо:

$$x'(t)\longleftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p)-x_0,$$

$$x''(t)\longleftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-px_0-x_1.$$

Застосовуючи теорему лінійності переходимо в рівнянні (19) від оригіналів до зображень:

$$p^2 X(p) - px_0 - x_1 + a_1\big(pX(p) - x_0\big) + a_2 X\big(p\big) = F\big(p\big).$$

В результаті ми отримали не диференціальне, а алгебраїчне рівняння відносно невідомого зображення $X(p)$, яке називається **операторним**. Розв’язуючи його, знаходимо

$$X\big(p\big)\big(p^2 + a_1 p + a_2\big) = F\big(p\big) + px_0 + x_1 + a_1 x_0 ,$$

Звідки

$$X\big(p\big) = \frac{F\big(p\big) + px_0 + x_1 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} .$$

Таким чином, зображення шуканого розв’язку знайдено. Воно називається **операторним розв’язком**. Залишилось по відомому зображенню $X(p)$ знайти відповідний йому оригінал $x(t)$, він і буде розв’язком задачі Коші (19)-(20).

Даний метод можна застосовувати для розв’язування диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами будь-якого порядку.

Нехай задане рівняння *n*-го порядку:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$$

з початковими умовами $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, …, $x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$.

Нехай $f(t) \longleftrightarrow F(p)$, $x(t) \longleftrightarrow X(p)$. За теоремою диференціювання оригінала маємо:

$$x'(t) \longleftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0 ,$$

$$x''(t) \longleftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - px_0 - x_1 ,$$

$$\ldots$$

$$x^{(n)}(t) \longleftrightarrow p^n X(p) - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \ldots - px^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0) =$$

$$= p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_1 - \ldots - px_{n-2} - x_{n-1} .$$

Отримуємо операторне рівняння

$$\big(p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_1 - \ldots - px_{n-2} - x_{n-1}\big) + a_1\big(p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - p^{n-3} x_1 - \ldots - x_{n-2}\big) + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}\big(pX(p) - x_0\big) + a_n X(p) = F(p) .$$

Розв’язуючи його, маємо

$$X(P) = \frac{F(p) + \hat{O}(p)}{L(p)} ,$$

де $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$, а $\Phi(p)$ – многочлен степені не вище ніж (n – 1), з коефіцієнтами, що залежать від початкових значень x_0, x_1, …, x_{n-1}. Зокрема, якщо всі початкові значення дорівнюють нулю: $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, …, $x_{n-1} = 0$, то $\Phi(p) = 0$ і

$$X(P) = \frac{F(p)}{L(p)} .$$

Переходячи від зображення $X(p)$ до оригіналу $x(t)$, отримуємо шуканий розв’язок.

<u>Приклад 11.</u> Розв’яжіть задачу Коші $2x' + 6x = te^{3t}$, $x(0) = \frac{1}{2}$.

Розв’язування. Нехай $x(t) \longleftrightarrow X(p)$, тоді $x'(t) \longleftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - \frac{1}{2}$.

Знаходимо зображення правої частини диференціального рівняння $f(t) = te^{-3t} \longleftrightarrow \frac{1}{(p+3)^2}$.

Після заміни в диференціальному рівнянні оригінали на зображення, отримуємо операторне рівняння:

$$2\left(pX(p)-\frac{1}{2}\right)+6X(p)=\frac{1}{(p+3)^2}.$$

Розв'язуємо отримане алгебраїчне рівняння:

$$2pX(p)-1+6X(p)=\frac{1}{(p+3)^2},$$

$$2(p+3)X(p)=\frac{1}{(p+3)^2}+1,$$

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2!}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Оскільки, $\frac{1}{p+3}\longleftrightarrow e^{-3t}$, $\frac{2!}{(p+3)^3}\longleftrightarrow t^2e^{-3t}$, то отриманий операторний розв'язок $X(p)$ диференціального рівняння має оригінал $x(t)=\frac{1}{4}t^2e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$x(t)=\frac{1}{4}\left(t^2+2\right)e^{-3t}.$$

<u>Приклад 12.</u> Розв'яжіть задачу Коші $x''+4x=2\cos^2 t$, $x(0)=x'(0)=0$.

Розв'язування. Нехай $x(t)\longleftrightarrow X(p)$, тоді $x''(t)\longleftrightarrow p^2X(p)$. Знаходимо зображення правої частини диференціального рівняння

$$f(t)=2\cos^2 t=1+\cos 2t\longleftrightarrow\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}.$$

Операторне рівняння приймає вигляд:

$$p^2X(p)+4X(p)=\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}\qquad\Rightarrow\qquad\left(p^2+4\right)X(p)=\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4},$$

$$X(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}+\frac{p}{\left(p^2+4\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(p^2+4\right)-p^2}{p\left(p^2+4\right)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

Оскільки, $\frac{1}{p}\longleftrightarrow 1$, $\frac{p}{p^2+4}\longleftrightarrow\cos 2t$, $\frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}\longleftrightarrow t\sin 2t$, то розв'язком задачі Коші є функція: $x(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}t\sin 2t$.

Якщо початкові умови задаються в точці $t_0\neq 0$, то заміною $t-t_0=\tau$ задача зводиться до задачі Коші з початковими умовами в точці $\tau=0$.

<u>Приклад 13.</u> Знайдіть розв'язок диференціального рівняння $x''-x'=-2t$, що задовольняє початковим умовам $x(2)=8, x'(2)=6$.

Розв'язування. Робимо заміну $t-2=\tau$, тоді $t=\tau+2$. Позначимо $x(t)=x(\tau+2)=\tilde{x}(\tau)$. В нових позначеннях рівняння і початкові умови приймуть вигляд:

$$\tilde{x}''(\tau)-\tilde{x}'(\tau)=-2(\tau+2),\ \ \tilde{x}(0)=8,\ \tilde{x}'(0)=6.$$

Складаємо операторне рівняння. Нехай $\tilde{x}(\tau)\longleftrightarrow X(p)$, тоді $\tilde{x}'(\tau)\longleftrightarrow pX(p)-8$, $\tilde{x}''(\tau)\longleftrightarrow p^2X(p)-8p-6$. Знаходимо зображення правої частини диференціального рівняння

$$f(t)=-2(\tau+2)=-2\tau-4\longleftrightarrow-2\cdot\frac{1}{p^2}-4\cdot\frac{1}{p}.$$

Операторне рівняння набуває вигляду:

$$\left(p^2X(p)-8p-6\right)-\left(pX(p)-8\right)=-2\cdot\frac{1}{p^2}-4\cdot\frac{1}{p},$$

$$\left(p^2-p\right)X(p)=8p+2-\frac{2}{p^2}-\frac{4}{p}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $X(p)$, маємо:

$$X(p)=\frac{8p^3-2p^2-4p-2}{p^3(p-1)}.$$

Розкладаємо отриманий дріб на прості дроби:

$$X(p)=\frac{2}{p^3}+\frac{6}{p^2}+\frac{8}{p}.$$

Переходячи до оригіналів, отримаємо:

$$\tilde{x}(\tau)=\tau^2+6\tau+8.$$

Після заміни τ на $t-2$, будемо мати шуканий розв'язок задачі Коші:

$$x(t)=(t-2)^2+6(t-2)+8,$$

$$x(t)=t^2+2t.$$

Аналогічно розв'язуються і системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Різниця буде тільки в тому, що замість одного операторного рівняння ми одержимо систему таких рівнянь.

Приклад 14. Розв'яжіть задачу Коші: $\begin{cases}x'+2y=3t\\ y'-2x=4\end{cases}$, $x(0)=2$, $y(0)=3$.

Розв'язування. Нехай $x(t)\longleftrightarrow X(p)$, $y(t)\longleftrightarrow Y(p)$, тоді $x'(t)\longleftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p)-2$, $yx(t)\longleftrightarrow pY(p)-y(0)=pY(p)-3$. Праві частини системи мають зображення: $3t\longleftrightarrow\frac{3}{p^2}$, $4\longleftrightarrow\frac{4}{p}$.

Якщо в системі диференціальних рівнянь замінити оригінали на їх зображення, то отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}pX(p)-2+2Y(p)=\dfrac{3}{p^2}\\ pY(p)-3-2X(p)=\dfrac{4}{p}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pX(p)+2Y(p)=2+\dfrac{3}{p^2}\\ -2X(p)+pY(p)=3+\dfrac{4}{p}\end{cases}.$$

Для того, щоб виключити невідоме $X(p)$, помножимо перше рівняння на 2, друге на p и додамо отримані результати. Маємо:

$$\begin{cases}2pX(p)+4Y(p)=4+\dfrac{6}{p^2}\\ -2pX(p)+p^2Y(p)=3p+4\end{cases}\Rightarrow\quad\left(4+p^2\right)Y(p)=\frac{6}{p^2}+3p+8.$$

Отже,

$$Y(p)=\frac{6}{p^2\left(p^2+4\right)}+\frac{3p+8}{p^2+4}=\frac{6}{4}\cdot\frac{\left(p^2+4\right)-p^2}{p^2\left(p^2+4\right)}+\frac{3p+8}{p^2+4}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{p^2+4}+3\cdot\frac{p}{p^2+4}+4\cdot\frac{2}{p^2+4}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+3\cdot\frac{p}{p^2+4}+\frac{13}{4}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Підставляючи в друге рівняння системи знаходимо:

$$X(p)=\frac{1}{2}pY(p)-\frac{3}{2}-\frac{2}{p}=\frac{1}{2}p\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+3\cdot\frac{p}{p^2+4}+\frac{13}{4}\cdot\frac{2}{p^2+4}\right)-\frac{3}{2}-\frac{2}{p}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(p^2+4\right)-4}{p^2+4}+\frac{13}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{3}{2}-\frac{2}{p}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p}-3\cdot\frac{2}{p^2+4}+\frac{13}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4}.$$

Знаючи, операторні розв'язки рівняння, знаходимо розв'язок задачі Коші:

$$x(t)=-\frac{5}{4}-3\sin 2t+\frac{13}{4}\cos 2t,\quad y(t)=\frac{3}{2}t+3\cos 2t+\frac{13}{4}\sin 2t.$$

§ 6. Розв'язування задач електротехніки

Методи операційного числення дозволяють успішно розраховувати будь-які процеси в складних електричних колах при довільній зовнішній напрузі. Ці методи були введені в електротехніку англійським інженером-електриком О.Хевісайдом. Вони виявились настільки зручними для застосування, що в більшості курсів електротехніки і теорії автоматичного регулювання займають одне з провідних місць при розрахунку електричних ланцюгів.

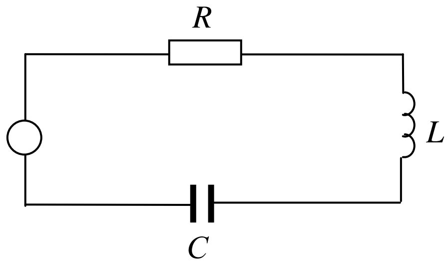


Рис. 8

Нехай до електричного кола, в яке послідовно включені самоіндукція *L*, опір *R* і ємність *C*, прикладена електрорушійна сила *v*(*t*) (рис. 8). Диференціальне рівняння такого кола має вигляд:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=v(t) \qquad (21)$$

Будемо вважати, що в початковий момент струм дорівнює нулю $i(0)=0$. Ця початкова умова відповідає задачам включення. Ведемо операторний струм $i(t)\longleftrightarrow I(p)$ та операторну напругу $v(t)\longleftrightarrow V(p)$. За теоремами диференціювання та інтегрування оригінала маємо: $\frac{di(t)}{dt}\longleftrightarrow pI(p)-i(0)=pI(p)$, $\int_0^t i(\tau)d\tau\longleftrightarrow\frac{I(p)}{p}$.

Рівняння коливального контуру в операторному вигляді буде:

$$LpI(p)+RI(p)+\frac{1}{Cp}I(p)=V(p),$$

звідки

$$I(p)=\frac{V(p)}{R+Lp+\frac{1}{Cp}}=\frac{V(p)}{Z(p)}, \qquad (22)$$

де $Z(p)=R+Lp+\frac{1}{Cp}$ – операторний струм контуру. Рівняння (22) називають операторною формою закону Ома. По заданому операторному струму *I*(*p*) можна знайти струм *i*(*t*).

Нехай в коливальний контур включається постійний струм: $v(t)=E$. Тоді $V(p)=\frac{E}{p}$ і формула (22) набуває вигляд:

$$I(p)=\frac{E}{Rp+Lp^2+\frac{1}{C}}=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

Позначимо через $\Delta=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$. В залежності від знаку Δ маємо різні випадки:

1. Якщо $\Delta=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0$, то $i(t)=\frac{E}{L\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\sqrt{\Delta}t$;
2. Якщо $\Delta=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=0$, то $i(t)=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{2L}t}$;
3. Якщо $\Delta=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}<0$, то $i(t)=\frac{E}{L\sqrt{-\Delta}}e^{-\frac{R}{2L}t}sh\sqrt{-\Delta}t$.

Задачі

Знайдіть зображення функцій:

1. а) $f(t)=\sin mt\cos nt$; б) $f(t)=\sin mt\sin nt$.

2. а) $f(t)=\sin^2 t$; б) $f(t)=\cos^4 t$.

3. а) $f(t)=t^2\sin t$; б) $f(t)=t\left(e^t+\mathrm{ch}t\right)$.

4. а) $f(t)=(t+1)\sin 2t$; б) $f(t)=(t+2)\cos t$.

5. а) $f(t)=t\sin t+\cos t$; б) $f(t)=t\,\mathrm{sh}3t$.

6. а) $f(t)=te^{-3t}\cos t$; б) $f(t)=e^{-t}\sin^2 t$.

7. а) $f(t)=\cos^3 t$; б) $f(t)=\mathrm{sh}^3 t$.

8. а) $f(t)=\int\limits_0^t e^\tau d\tau$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2 3\tau d\tau$.

9. а) $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{ch}\,2\tau d\tau$; б) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

10. а) $f(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$; б) $f(t)=\dfrac{e^t-1-t}{t}$.

11. а) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$; б) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

Обчисліть інтеграли:

12. а) $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-2t}\sin 3t}{t}dt$; б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-2t}-e^{-6t}}{t}\sin 5t dt$.

13. а) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos 5t-\cos 3t}{t}dt$; б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin 6t\sin 2t}{t}dt$.

Знайдіть зображення функцій:

14. а) $f(t)=\cos^2(t-1)\cdot\mathbf{1}(t-1)$; б) $f(t)=e^{t-3}\cdot\mathbf{1}(t-3)$.

15. а) $f(t)=\sin t\cdot\mathbf{1}(t-3)$; б) $f(t)=t^3\cdot\mathbf{1}(t-4)$.

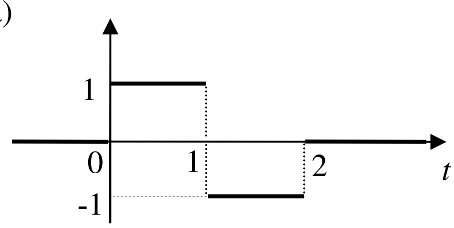
16. а) $f(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ t^2, & 1<t<2\\ 0, & t>2\end{cases}$; б) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t^3, & 0<t<1\\ 0, & t>1\end{cases}$.

17. а) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 2, & 0<t<a\\ -3, & a<t<2a\\ 0, & t>2a\end{cases}$; б) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sin t, & 0<t<\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos t, & \dfrac{\pi}{2}<t<\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$.

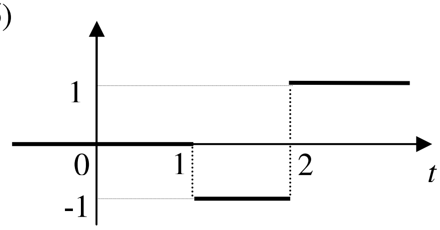
18. а) $f(t)=\begin{cases}0, & t<2\\ e^{3t}, & t>2\end{cases}$; б) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ h, & 0<t<1\\ he^{1-t}, & t>1\end{cases}$.

Знайдіть зображення функцій, заданих графічно:

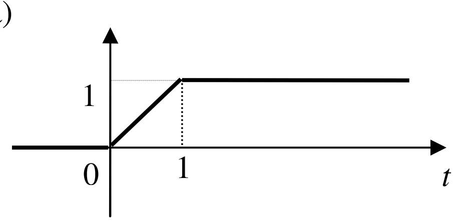
19. а)



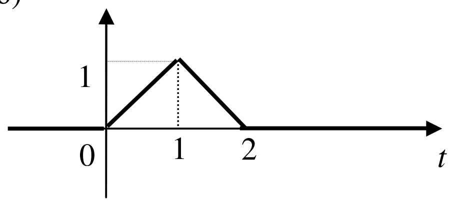
б)



20. а)

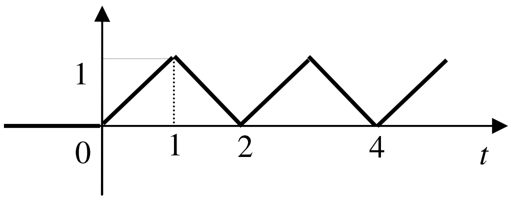


б)

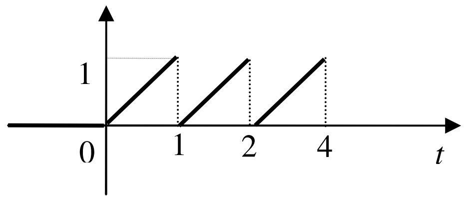


Знайдіть зображення періодичних функцій, заданих графічно:

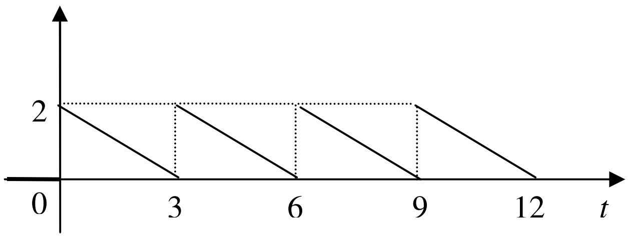
21. а)



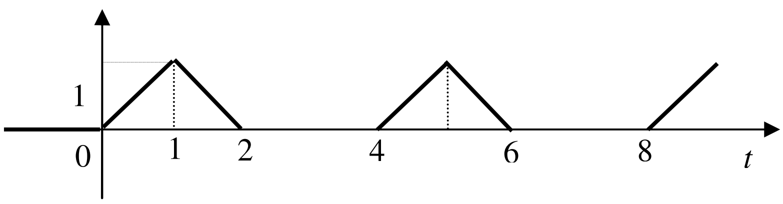
б)



22. а)



б)



Знайдіть оригінали по заданому зображенню:

23. а) $F(p)=\dfrac{5e^{-3p}}{p^3}$; б) $F(p)=\dfrac{2e^{4p}}{p^5}$.

24. а) $F(p)=\dfrac{e^{2p}}{p+7}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{6p}}{p-3}$.

25. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+5p+6}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2-8p+15}$.

26. а) $F(p)=\dfrac{3p-8}{p^2-4p+29}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+5}{p^2-7p+20}$.

27. а) $F(p)=\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{e^{-p}}{p}-\dfrac{3e^{-4p}}{p^2+9}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{2pe^{-p}}{p^2-4}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2-16}$.

28. а) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

29. а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+16)(p^2+25)}$.

30. а) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

31. а) $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

32. а) $F(p)=\dfrac{3p^2+3p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$; б) $F(p)=\dfrac{2-3p}{(p-1)(p^2+6p+13)}$.

33. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$; б) $F(p)=\dfrac{5p-1}{p^3-1}$.

34. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2-9)}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$.

35. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

36. а) $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p^4+p^2+1}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{p^4+4}$.

Розв’яжіть диференціальне рівняння при заданих початкових умовах:

37. а) $x'-x=\cos t-\sin t$, $x(0)=0$; б) $x'+3x=e^{-2t}$, $x(0)=0$.

38. а) $x'-3x=3t^3+3t^2+2t+1$, $x(0)=-1$; б) $x'+x=e^t$, $x(0)=0$.

39. а) $x''+x=t\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$; б) $x''+4x=\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

40. а) $x''+10x'+25x=11e^{2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$;
б) $x''-2x'+x=t-\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

41. а) $x''-x'-6x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$; б) $2x''-2x'=(t+1)e^t$, $x(0)=x'(0)=\dfrac{1}{2}$.

42. а) $x''-7x'=\cos t$, $x(0)=3$, $x'(0)=0$; б) $x''-16x=t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

43. а) $x''+4x=8\sin 2t$, $x(0)=3$, $x'(0)=-1$; б) $x''+16x=e^{-2t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

44. а) $x''-2x'=(t+1)e^t$, $x(0)=x'(0)=\dfrac{1}{2}$; б) $4x''-4x'+x=e^{\frac{t}{2}}$, $x(0)=-2$, $x'(0)=0$.

45. а) $x''+2x'+2x=2e^{-t}\sin t$, $x(0)=x'(0)=1$; б) $x''+x=t\cos 2t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

46. а) $x'''+x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=2$;
б) $x'''-x''=e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=0$.

47. а) $x^{IV}-x=sh t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x'''(0)=1$;
б) $x^{IV}-x''=\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=x'''(0)=0$.

Розв’яжіть диференціальне рівняння при нульових початкових умовах:

48. а) $x'+x=f(t)$, де $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<2,\\ 0, & t>2\end{cases}$;

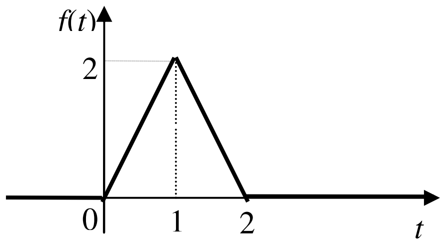
б) $x'+x=f(t)$, де $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0<t<\pi,\\ 0, & t>\pi\end{cases}$.

49. а) $x' - x = f(t)$, де $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases}$;

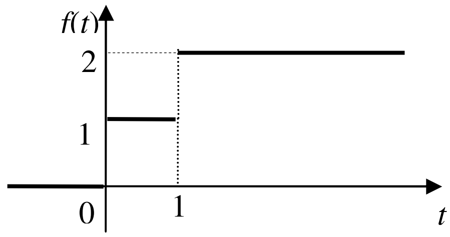
б) $x' + x = f(t)$, де $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2 \end{cases}$.

Розв'яжіть задачі Коші:

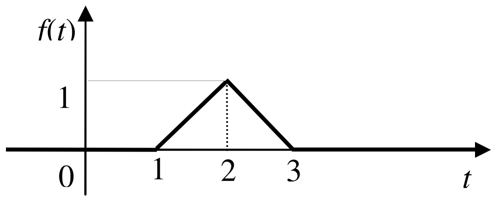
50. а) $x' + 4x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$;



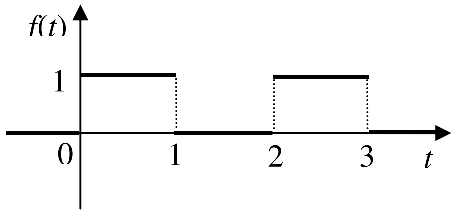
б) $x' + x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.



51. а) $x' + 9x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;



б) $x'' - 2x' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$.



Розв'яжіть диференціальне рівняння при заданих початкових умовах:

52. а) $x'' + x = 0$, $x(\pi) = 1$, $x'(\pi) = 0$; б) $x'' + x' = 2t$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$.

53. а) $x'' + 2x' + x = 2e^{1-t}$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$; б) $x'' + x = -2\sin t$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

54. До ланцюга, що складається з ємності C та індуктивності L, з'єднаних послідовно, в момент часу $t = 0$ прикладена е.р.с. $E\cos(\omega t + \alpha)$. Початковий струм і заряд дорівнюють нулю. Покажіть, що струм в момент часу t дорівнює $E(\omega\sin(\omega t + \alpha) - n\cos\alpha\sin nt - \omega\sin\alpha\cos nt)\dfrac{1}{L(\omega^2 - n^2)}$, де $n^2 = \dfrac{1}{LC}$, в припущенні, що $n^2 \neq \omega^2$.

55. В умові попереднього приклада, з нульовим струмом та зарядом в момент часу $t = 0$, прикладена е.р.с. $E\sin\omega t$ з резонансною частотою. Покажіть, що струм в момент часу t дорівнює $\dfrac{E}{2L} t\sin nt$, де $n^2 = \dfrac{1}{LC}$.

Розв'яжіть систему диференціальних рівнянь:

56. а) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2(x + y) \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 2$.

57. а) $\begin{cases} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' - 2x + y = 0 \\ y' + x - 2y = -5e^t \sin t \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.

58. а) $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x'' + y' = e^t - x \\ y'' + x' = 1 \end{cases}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

59. а) $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$, $x(0) = 3$, $y(0) = -2$, $z(0) = -3$;

б) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

60. а) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - z \end{cases}$, $x(0) = 3$, $y(0) = -1$, $z(0) = -1$;

б) $\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = x + z \\ z' = -3x + y - 2z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.

Знайдіть зображення функцій:

1. а) $f(t)=t\sin 2t-2e^{-t}$, б) $f(t)=\dfrac{\cos 3t-2t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^3 ch3\tau d\tau$.

2. а) $f(t)=t^2\cos 5t+t^5$, б) $f(t)=\dfrac{\sin t-\sin 2t}{2t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t e^{t-\tau}\cos 2\tau d\tau$.

3. а) $f(t)=t(sh3t+\sin 2t)$, б) $f(t)=\dfrac{\cos^2 3t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t e^{5(t-\tau)}\sin 7\tau d\tau$.

4. а) $f(t)=(t^2+t)\sin 2t$, б) $f(t)=\dfrac{e^t-1-t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^2\cos 3\tau d\tau$.

5. а) $f(t)=\sin 4t-t^6e^{2t}$, б) $f(t)=\dfrac{\sin 9t\sin 6t}{2t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t sh(t-\tau)\tau^4 d\tau$.

6. а) $f(t)=e^{-3t}\sin 5t+4e^{-t}$, б) $f(t)=\dfrac{\cos t\cos 7t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t ch(t-\tau)e^{5\tau} d\tau$.

7. а) $f(t)=tch\dfrac{t}{2}-t^3e^{-2t}$, б) $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos 5t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t \sin(t-\tau)e^{5\tau} d\tau$.

8. а) $f(t)=t(ch5t+\cos 7t)$, б) $f(t)=\dfrac{e^{2t}+\sin t-1}{2t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\tau^2 d\tau$.

9. а) $f(t)=(t^3-t)e^{3t}$, б) $f(t)=\dfrac{e^{2t}-\cos t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\sin 5\tau d\tau$.

10. а) $f(t)=t^2\sin 5t+te^{2t}$, б) $f(t)=\dfrac{\sin^2 5t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t ch(t-\tau)e^{3\tau} d\tau$.

11. а) $f(t)=t\sin 2t-2\cos 3t$, б) $f(t)=\dfrac{1-ch4t}{t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^5 e^{2\tau} d\tau$.

12. а) $f(t)=te^t cht$, б) $f(t)=\dfrac{\sin 3t\cos 5t}{2t}$, в) $f(t)=\int\limits_0^t sh7(t-\tau)\cos\tau d\tau$.

13. а) $f(t)=t\sin^2 2t+5t^3$, б) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^3e^{2\tau} d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<1 \\ 3-t, & 1<t<4 \\ 0, & t<0 \text{ àáî } t>4 \end{cases}$.

14. а) $f(t)=e^{5t}(\sin t+t)$, б) $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\cos 3\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t^3, & 0<t<4 \\ 2t+1, & t>4 \end{cases}$.

15. а) $f(t)=tch^2t+t^2e^{2t}$, б) $f(t)=\int\limits_0^t \sin^2 2\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t^3, & 0<t<2 \\ 2+3t, & t>2 \end{cases}$.

16. а) $f(t)=t\left(5e^{t}-\mathrm{ch}t\right)$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\left(\tau^3+\sin 2\tau\right)d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{2t}, & 0<t<2\\ t+1, & t>2\end{cases}$.

17. а) $f(t)=\left(t^2+5t\right)\sin 7t$, б) $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{2\tau}\cos\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1\\ -2, & 1<t<3\\ 0, & t<0 \text{ àáî } t>3\end{cases}$.

18. а) $f(t)=e^{3t}\left(\sin 2t-\cos 3t\right)$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\cos^2\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ e^{-t}, & 1<t<2\\ t^2, & t>2\end{cases}$.

19. а) $f(t)=e^{-t}\left(\cos t+5t\right)$, б) $f(t)=\int\limits_0^t ch^2\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sin t, & 0<t<\pi\\ 1, & t>\pi\end{cases}$.

20. а) $f(t)=t\left(e^{-2t}+\mathrm{ch}3t\right)$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\sin 2\tau e^{2\tau}d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \cos t, & 0<t<\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$.

21. а) $f(t)=\cos 3t\left(\sin t+5t\right)$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\left(\tau^3+\tau+5\right)d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ e^{t}, & 1<t<3\\ t^3, & t>3\end{cases}$.

22. а) $f(t)=\left(t+e^{2t}\right)sh^2t$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\tau^4e^{5\tau}d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<1\\ 2-t, & 1<t<2\\ 0, & t<0 \text{ àáî } t>2\end{cases}$.

23. а) $f(t)=t\cos^2t-4t^5$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\left(\tau^3+e^{2\tau}\right)d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ -1, & 1<t<2\\ 0, & t<0 \text{ àáî } t>2\end{cases}$.

24. а) $f(t)=t\sin 3t-t^2\cos t$, б) $f(t)=\int\limits_0^t e^{5\tau}sh\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ e^{-t}, & 1<t<3\\ 1-t, & t>3\end{cases}$.

25. а) $f(t)=te^{t}\cos 5t$, б) $f(t)=\int\limits_0^t\sin 2\tau ch3\tau d\tau$, в) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t^2, & 0<t<2\\ t-1, & t>2\end{cases}$.

Завдання 2.

Знайдіть оригінали функцій за їх зображеннями:

1. а) $F(p)=\dfrac{p^2-1}{4p^3-p}$; б) $F(p)=\dfrac{\left(p^3+10p\right)e^{3p}}{p^4+20p+64}$.

2. а) $F(p)=\dfrac{p^2-3p+2}{p^3+2p^2+p}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{p}{p^2+9}$.

3. а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^4-p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(3p+19)e^{-2p}}{2p^2+8p+19}$.

4. а) $F(p)=\dfrac{7p^2-9}{p^4-5p^3+6p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(3p-8)e^{-5p}}{p^2-4p+29}$.

5. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^5-5p^3+4p}$; б) $F(p)=\dfrac{3p^2-2p^3-2p+12}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

6. а) $F(p)=\dfrac{1}{6p^3-7p^2-3p}$; б) $F(p)=\dfrac{pe^{-4p}}{p^3+1}$.

7. а) $F(p)=\dfrac{4p^2-16p+8}{p^3-4p}$; б) $F(p)=\dfrac{pe^{p}}{(p^2+16)(p^2+25)}$.

8. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$; б) $F(p)=\dfrac{(2p+5)e^{2p}}{p^2-6p+25}$.

9. а) $F(p)=\dfrac{10p+2}{p^3-2p^2-3p}$; б) $F(p)=\dfrac{(5p-1)e^{-p}}{p^3-1}$.

10. а) $F(p)=\dfrac{5}{p^4+p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{2p^2-24}{p^4+40p^2+144}$.

11. а) $F(p)=\dfrac{2p^2-5}{p^4-5p^2+6}$; б) $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)^3}$.

12. а) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$; б) $F(p)=\dfrac{(2p+5)e^{-4p}}{p^2+4p+5}$.

13. а) $F(p)=\dfrac{3p-1}{p^3+5p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(p+3)e^{5p}}{p^4+5p^2+4}$.

14. а) $F(p)=\dfrac{p^2-3p+8}{p^3+2p^2-3p}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{3t}}{(p^2+1)^2}$.

15. а) $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{p^4-5p^2+4}$; б) $F(p)=\dfrac{p-9}{(p^2-p)(p^2+9)}$.

16. а) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(12p-5)e^{4p}}{p^2+2p+10}$.

17. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p-2)^2(p+3)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(3p+7)e^{-p}}{p^2+4p+8}$.

18. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3}$; б) $F(p)=\dfrac{pe^{p}}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

19. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-2p^2+p}$; б) $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$.

20. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-3p^2+2}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$.

21. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^4-9p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(p+2)e^{2p}}{p^4+3p^2+2}$.

22. а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^4+5p^3+4p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(p^2-p+2)e^{-6p}}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

23. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$; б) $F(p)=\dfrac{(7-2p)e^{-2p}}{p^2+4p+13}$.

24. а) $F(p)=\dfrac{5p^2-4p-1}{p^3-2p^2-3p}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p^4+p^2+1}$.

25. а) $F(p)=\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$; б) $F(p)=\dfrac{(p+2)e^{-p}}{(p^2-4)(p^2+1)}$.

Завдання 3.

Методом операційного числення знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє нульові початкові умови:

1. $x''+x'+x=2\cos^2 t$.
2. $x''+x=t^3+6t$.
3. $x'-x=\cos t-\sin t$.
4. $x''+5x'+6x=e^{-5t}$.
5. $x''+4x=2\cos t\cos 3t$.
6. $x''-3x'+2x=e^t$.
7. $x''+x=te^t+4\sin t$.
8. $x''+4x'+21x=t$.
9. $x''+x=\cos t+\sin 2t$.
10. $x''+10x'+25x=11e^{2t}$.
11. $x''+x=t\cos t$.
12. $x''+6x'=12t+2$.
13. $x''+2x'=t\sin t$.
14. $x''-4x=4e^{2t}$.
15. $x''+4x=\sin t$.
16. $x''-2x'+x=t-\sin t$.
17. $x''+x=t\cos 2t$.
18. $x''+2x'+26x=\dfrac{1}{3}e^{-t}$.
19. $x'''+x'=e^{2t}$.
20. $x''-2x'+5x=1-t$.
21. $x''-8x'+16x=3e^{-2t}$.
22. $x''+x'+x=te^t$.
23. $x''+2x'+2x=1$.
24. $x''+3x'-28x=5\sin 4t+3\cos 4t$.
25. $x'''+x'=1$.

Завдання 4.

Методом операційного числення знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння:

1. $x''-x'+x=e^{-t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
2. $x''+x=2\sin t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.
3. $x''-x'=te^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.
4. $x''+x'=4\sin^2 t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.
5. $x''-2x'+10x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
6. $x''-4x=\sin\dfrac{3}{2}t-\cos\dfrac{1}{2}t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.
7. $x''-2x'+2x=2$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

8. $4x'' - 4x' + x = e^{\frac{1}{2}t}$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$.
9. $x'' - 9x = sht$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$.
10. $x'' + 4x = \sin 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.
11. $x'' - 2x' = e^t\left(t^2 + t - 3\right)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$.
12. $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}\left(\cos t + 2\sin t\right)$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
13. $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 6$.
14. $x'' + x = \sin 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
15. $x'' - 4x = 4t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
16. $x'' + 3x' = e^{-3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
17. $x'' + 2x' + x = e^{-t}t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
18. $x'' + x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
19. $x'' - x' - 6x = 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
20. $x'' - 2x' = 2e^x$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
21. $x'' + 4x = t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
22. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.
23. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
24. $x'' + x' = t^2 + 2t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = -2$.
25. $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t}\sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

Завдання 5.

Методом операційного числення знайдіть частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

1. а) $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x - y'' = 2\sin t \end{cases}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = y(0) = y'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = 3x + z \\ z' = 3x + y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

2. а) $\begin{cases} x' + x - 3y = 0 \\ y' - y - x = e^{5t} \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

3. а) $\begin{cases} x' - x - 2y = t \\ y' - y - 2x = t \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 4$;

б) $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -2x + z \\ z' = 2x - y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

4. а) $\begin{cases} x' + 2x - y' + y = e^{-t} \\ x'' + x' + y'' - y = e^t \end{cases}$, $x'(0) = 1$, $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

5. а) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t \\ x' + y = \cos t \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = -1$;

б) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - z \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

6. а) $\begin{cases} x' - 3y + x = 0 \\ y' - y - x = e^{2t} \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

7. а) $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x' - y'' = 2\cos t \end{cases}$, $x(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = y(0) = 2$;

б) $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$.

8. а) $\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^{t} \\ y' - x + 6y = e^{-2t} \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = -x - z \\ z' = -x - y \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

9. а) $\begin{cases} x' - x - 2y = t \\ y' - y - 2x = t \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 4$;

б) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

10. а) $\begin{cases} x' + x - 3y = 0 \\ y' - y - x = e^{t} \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + z \\ z' = -3x + y - 2z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

11. а) $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x - y'' = 2\cos t \end{cases}$, $x(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = y(0) = 2$;

б) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

12. а) $\begin{cases} x' + x - y = -4e^{-4t} \\ y' + y - x = -4e^{-4t} \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

13. а) $\begin{cases} x'' + x + y' = e^{t} \\ y'' + x' = 1 \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $y'(0) = -1$;

б) $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 3z \\ y' = 4x + y - 4z \\ z' = 6x + 4y - 4z \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

14. а) $\begin{cases} x'' - y' = e^{t} \\ x' + y'' - y = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $x'(0) = y'(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = 6x - 12y - z \\ y' = x - 3y - z \\ z' = -4x + 12y + 3z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

15. а) $\begin{cases} 2x'' - y' + x = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$, $y(0) = -1$;

б) $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x \\ z' = x - y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

16. а) $\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^{t} \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

17. а) $\begin{cases} x' + 4y + 3x = 2t \\ y' - y - x = t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

18. а) $\begin{cases} x' - y - 4x = -36t \\ y' - y + 2x = -2e^{t} \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + z \\ z' = -3x + y - 2z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

19. а) $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t \\ y' - 4x - 2y = \cos t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y, \\ z' = x + z \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

20. а) $\begin{cases} x' - 3y + x = 0 \\ y' - y - x = e^{-2t} \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

б) $\begin{cases} x' = 4y + z \\ y' = z \\ z' = 4y \end{cases}$, $x(0) = 5$, $y(0) = 0$, $z(0) = 4$.

21. а) $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z, \\ z' = x + y \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

22. а) $\begin{cases} x' - 2y + 5x = e^{t} \\ y' + 6y - x = e^{2t} \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

б) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$.

23. а) $\begin{cases} x' - y' = -\sin t \\ x' + y' = \cos t \end{cases}$, $x(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = -\frac{1}{2}$;

б) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

24. а) $\begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ y' - y + 2x = 1 \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 5$;

б) $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z, \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

25. а) $\begin{cases} x' + y' - y = e^{t} \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - y + 2z, \\ z' = 2y + z \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$

Відповіді

1. а) $F(p)=\dfrac{m\left(p^2+m^2-n^2\right)}{\left(p^2+m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2mnp}{\left(p^2+m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2}$.

2. а) $F(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{4p}{p^2+1}+\dfrac{p}{p^2+16}\right)$.

3. а) $F(p)=\dfrac{6p^2-2}{\left(p^2+1\right)^3}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2\left(p^2+p+1\right)}{\left(p^2-1\right)^2}$.

4. а) $F(p)=\dfrac{2p^2+4p+8}{\left(p^2+4\right)^3}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p-1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

5. а) $F(p)=\dfrac{p\left(p^2+3\right)}{\left(p^2+1\right)^2}$; **б)** $F(p)=\dfrac{6p}{\left(p^2-9\right)^2}$.

6. а) $F(p)=\dfrac{p^2+6p+5}{\left(p^2+6p+13\right)^2}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2}{(p+1)\left(p^2+2p+5\right)}$.

7. а) $F(p)=\dfrac{p\left(p^2+7\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{6}{\left(p^2-1\right)\left(p^2-9\right)}$.

8. а) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

9. а) $F(p)=\dfrac{4}{\left(p^2-4\right)^2}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

10. а) $F(p)=\ln\dfrac{p+1}{p-1}$; **б)** $F(p)=\ln\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p}$.

11. а) $F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$; **б)** $F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

12. а) $arctg\dfrac{3}{2}$; **б)** $arctg\dfrac{6}{5}-arctg\dfrac{2}{5}$. **13. а)** $\ln\dfrac{3}{5}$; **б)** $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

14. а) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{2p}+\dfrac{pe^{-p}}{2\left(p^2+4\right)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p-1}$.

15. а) $F(p)=\dfrac{\cos 3+p\sin 3}{p^2+1}e^{-3p}$; **б)** $F(p)=\dfrac{2\left(1+4p+8p^2\right)}{p^3}e^{-4p}$.

16. а) $F(p)=\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{4}{p^2}+\dfrac{4}{p}\right)e^{-2p}$; **б)** $F(p)=\dfrac{6}{p^4}-\left(\dfrac{6}{p^4}+\dfrac{6}{p^3}+\dfrac{3}{p^2}+\dfrac{1}{p}\right)e^{-p}$.

17. а) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(2-5e^{-ap}+3e^{-2ap}\right)$; **б)** $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\left(1+e^{\frac{-\pi p}{2}}\right)\left(1-pe^{\frac{-\pi p}{2}}\right)$.

18. а) $F(p)=\dfrac{e^{6-2p}}{p-3}$; **б)** $F(p)=\dfrac{h}{p}\left(1-\dfrac{e^{-p}}{p+1}\right)$.

19. а) $F(p)=\dfrac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p}$; **б)** $F(p)=\dfrac{e^{-p}\left(2e^{-p}-1\right)}{p}$.

20. а) $F(p)=\dfrac{1-e^{-p}}{p^2}$; **б)** $F(p)=\dfrac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2}$. **21. а)** $F(p)=\dfrac{1-e^{-p}}{p^2\left(1+e^{-p}\right)}$; **б)** $F(p)=\dfrac{1+p-e^{-p}}{p^2\left(e^{p}-1\right)}$.

22. а) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}\left(1-e^{-2p}\right)}{2p^2}$; **б)** $F(p)=\dfrac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2\left(1-e^{-4p}\right)}$.

23. а) $f(t)=\dfrac{5}{2}(t-3)\,\mathbf{1}(t-3)$; **б)** $f(t)=\dfrac{1}{12}(t+4)^4\,\mathbf{1}(t+4)$.

24. а) $f(t)=e^{-7(t+2)}\,\mathbf{1}(t+2)$; **б)** $f(t)=e^{3(t+6)}\,\mathbf{1}(t+6)$.

25. а) $f(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$; **б)** $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{5t}-e^{3t}\right)$.

26. а) $f(t)=e^{2t}\left(3\cos 5t-\dfrac{2}{5}\sin 5t\right)$; **б)** $f(t)=2e^{3,5t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{31}}{2}t-\dfrac{12}{\sqrt{31}}\sin\dfrac{\sqrt{31}}{2}t\right)$.

27. а) $f(t)=e^{2t}\,\mathbf{1}(t)+\mathbf{1}(t-1)+\sin 3(t-4)\mathbf{1}(t-2)$;

б) $f(t)=\cos(2t)\,\mathbf{1}(t)-2\mathrm{ch}2(t-1)\mathbf{1}(t-1)+\dfrac{1}{4}\mathrm{sh}4(t-3)\,\mathbf{1}(t-3)$.

28. а) $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(t^2-4t+6\right)e^{2t}-(t+3)e^{t}$; **б)** $f(t)=e^{-t}-(t+1)e^{-2t}$.

29. а) $f(t)=\dfrac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$; **б)** $f(t)=\dfrac{1}{9}(\cos 4t-\cos 5t)$.

30. а) $f(t)=e^{-t}\left(1-t^2\right)$; **б)** $f(t)=2e^{t}+e^{t/2}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

31. а) $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$; **б)** $f(t)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$.

32. а) $f(t)=e^{2t}+e^{-2t}\left(2\cos 2t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$; **б)** $f(t)=\dfrac{e^{-3t}}{20}(\cos 2t-28\sin 2t)-\dfrac{e^{t}}{20}$.

33. а) $f(t)=\dfrac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\dfrac{1}{3}e^{-t}$; **б)** $f(t)=\dfrac{4}{3}e^{t}+e^{-\frac{t}{2}}\left(2\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

34. а) $f(t)=\dfrac{1}{27}(sh3t-3t)$; **б)** $f(t)=t-3+\dfrac{1}{2}e^{-t}\left(t^2+4t+6\right)$.

35. а) $f(t)=t-\sin t$; **б)** $f(t)=\dfrac{1}{50}(5t\cos t-7\sin t+sh2t)$.

36. а) $f(t)=\sqrt{3}ch\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-sh\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$; **б)** $f(t)=\dfrac{1}{4}(cht\sin t-sht\cos t)$.

37. а) $f(t)=e^{2t}\,\mathbf{1}(t)+\mathbf{1}(t-1)+\sin 3(t-4)\mathbf{1}(t-2)$; **б)** $f(t)=\dfrac{1}{4}(cht\sin t-sht\cos t)$.

38. а) $x(t)=\sin t$; **б)** $x(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$. **39. а)** $x(t)=-1-2t-2t^2-t^3$; **б)** $x(t)=sht$.

40. а) $x(t)=\dfrac{11}{49}\left(e^{2t}-e^{-3t}-7te^{-5t}\right)$; **б)** $x(t)=2+t-\dfrac{3}{2}e^{t}+\dfrac{1}{2}te^{t}-\dfrac{1}{2}\cos t$.

41. а) $x(t)=\dfrac{2}{5}e^{3t}+\dfrac{3}{5}e^{-2t}$; **б)** $x(t)=\dfrac{1}{2}e^{t}+\dfrac{1}{4}t^2e^{t}$.

42. а) $x(t)=3+\dfrac{1}{50}e^{7t}-\dfrac{1}{50}\cos t-\dfrac{7}{50}\sin t$; **б)** $x(t)=ch4t+\dfrac{1}{64}sh4t+\dfrac{1}{16}t$.

43. а) $x(t)=3\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t-2t\cos 2t$; **б)** $x(t)=\dfrac{1}{40}\left(2e^{-2t}-38\cos 4t+\sin 4t\right)$.

44. а) $x(t)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}e^{2t}-e^{t}-te^{t}$; **б)** $x(t)=\dfrac{1}{8}\left(t^2+8t-16\right)e^{\frac{t}{2}}$.

45. а) $x(t)=\frac{3}{4}-\frac{5}{4}e^{2t}-e^{t}-te^{t}$; **б)** $x(t)=(3\sin t+(1-t)\cos t)e^{-t}$.

46. а) $x(t)=\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)e^{-t}$; **б)** $x(t)=3+t+(t-2)e^{t}$.

47. а) $x(t)=\frac{t}{4}cht-\frac{1}{4}\sin t$; **б)** $x(t)=-1-t+\frac{1}{2}cht+\frac{1}{2}\cos t$.

48. а) $x(t)=\left(1-e^{-t}\right)\mathbf{1}(t)-\left(1-e^{-(t-2)}\right)\mathbf{1}(t-2)$; **б)** $x(t)=\frac{t}{2}\sin t\,\mathbf{1}(t)+\frac{1}{2}(t-\pi)\sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

49. а) $x(t)=(cht-1)\mathbf{1}(t)-\frac{1}{e}\,(ch(t-1)-1)\,\mathbf{1}(t-1)$;

б) $x(t)=2\left(\sin^2\frac{t}{2}\mathbf{1}(t)-2\cdot\mathbf{1}(t-1)\sin^2\frac{t-1}{2}+\mathbf{1}(t-2)\sin^2\frac{t-2}{2}\right)$.

50. а) $x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathbf{1}(t)-\left((t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right)\mathbf{1}(t-1)+\frac{1}{2}\left((t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\times$
$\times\mathbf{1}(t-2)$; **б)** $x(t)=\mathbf{1}(t)+(1-\cos(t-1))\,\mathbf{1}(t-1)$.

51. а) $x(t)=\frac{1}{3}\sin 3t\,\mathbf{1}(t)+\frac{1}{9}\left((t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right)\mathbf{1}(t-1)-\frac{2}{9}\left((t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right)\mathbf{1}(t-2)+$
$+\frac{1}{9}\left((t-3)-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right)\mathbf{1}(t-3)$; **б)** $x(t)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\left(1-e^{t-k}+e^{t-k}(t-k)\right)\mathbf{1}(t-k)$.

52. а) $x(t)=-\cos t$; **б)** $x(t)=(t-1)^2+e^{1-t}$.

53. а) $x(t)=\left(t^2-2t+2\right)e^{1-t}$; **б)** $x(t)=\left(t-1-\frac{\pi}{2}\right)\cos t$.

56. а) $x(t)=e^{t}(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^{t}(\cos t+3\sin t)$; **б)** $x(t)=e^{t}+e^{5t}$, $y(t)=-e^{t}+3e^{5t}$.

57. а) $x(t)=e^{t}$, $y(t)=e^{t}$; **б)** $x(t)=e^{t}(2\cos t-\sin t)$, $y(t)=e^{t}(3\cos t+\sin t)$.

58. а) $x(t)=t\cos t$, $y(t)=-t\sin t$; **б)** $x(t)=t-\frac{1}{6}t^3+e^{t}$, $y(t)=1+\frac{1}{24}t^4-e^{t}$.

59. а) $x(t)=e^{t}+e^{-t}+e^{2t}$, $y(t)=e^{t}-3e^{-t}$, $z(t)=e^{t}-5e^{-t}+e^{2t}$;

б) $x(t)=6e^{t}-e^{2t}-4e^{3t}$, $y(t)=3e^{t}-2e^{3t}$, $z(t)=-6e^{t}+e^{2t}+6e^{3t}$.

60. а) $x(t)=3e^{2t}$, $y(t)=e^{-t}-2e^{2t}$, $z(t)=-2e^{-t}+e^{2t}$;

б) $x(t)=2-e^{-t}$, $y(t)=2-e^{-t}$, $z(t)=-2+2e^{-t}$.

Список використаної літератури

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.
2. Араманович И.П., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.
3. Деч. Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965.
4. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1981.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
6. Мартиненко В.С. Операционное исчисление. – К.: Вища школа, 1973.
7. Мартиненко М.А., Юрик І.І. Теорія функції комплексної змінної. – К.: Слово, 2008.
8. Пчелкин Б.К. Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1973
9. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980.

Зміст