ЗРАЗОК
екзаменаційного білета з кредитного модуля
«Вища математика – 2. Інтегральне числення»
та відповіді на нього

Екзаменаційний білет № 0

1. Скалярне поле. Похідна скалярного поля за напрямом. Градієнт скалярного поля та його властивості.

2. Знайти масу всієї кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi), a>0$, якщо лінійна густина маси $\delta(\rho,\varphi)=\rho^{-\frac{1}{2}}$.

3. Знайти потік векторного поля $\overline{F}=\left(z;0;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$ через зовнішню сторону частини поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, яка розташована у І октанті.

4. Знайти екстремуми функції $z=x+y$ за умови $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$.

5. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною і радіус-вектором точки дотику, стала і дорівнює a^2.

Відповідь на теоретичне питання

1. Нехай в кожній точці деякої області $\Omega \in \mathbb{R}^n$ з неперервною кусково-гладкою границею визначено скалярну функцію $u=f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ або $u=f(P)$, де P – довільна точка області Ω. Тоді кажуть, що в Ω задане скалярне поле $u=f(x)$. Вважаємо, що $u(P)$ не залежить від часу. Таке поле називають скалярним стаціонарним полем. Наприклад, поле температур нерівномірно нагрітого тіла.

Якщо скалярне поле розглядається в декартовій системі координат $Oxyz$, то точку P задають її координатами (x,y,z), а функція задається у вигляді $u(P)=u(x,y,z)$.

Поверхнею рівня скалярного поля називається ГМТ, у яких функція приймає стале значення, тобто $u(x,y,z)=const$.

Рівняння поверхні рівня, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ записується у вигляді $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$. Якщо скалярне поле плоске, то u залежить від змінних x,y і лініями рівня цього скалярного поля будуть лінії $u(x,y)=const$.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямку.

Нехай дано скалярне поле $u(x,y,z)$ в області $D\subset\mathbb{R}^3$. Візьмемо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і деякий одиничний вектор $\vec{l}(l_1,l_2,l_3), \left|\vec{l}\right|=1$, що виходить з цієї точки. Параметричне рівняння прямої, що проходить через точки M_0 і M в напрямі вектора $\vec{l}$ матиме вигляд $\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{l_2}=\frac{z-z_0}{l_3}$ або $x=x_0+l_1t$, $y=y_0+l_2t$, $z=z_0+l_3t$, $0\le t<\infty$.

Розглянемо приріст функції $u(x,y,z)$ при переході з точки M_0 в точку M: $u(M)-u(M_0)=u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)=u(x_0+l_1t,y_0+l_2t,z_0+l_3t)-u(x_0,y_0,z_0)$ і складемо відношення $\frac{\Delta u(M_0)}{\rho}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\rho}$, де ρ – відстань M_0M. Перейдемо до границі за умови,що $\rho\to 0$, тобто при $M\to M_0$ вздовж прямої.

Означення. Похідною функції $u(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ називається границя відношення приросту функції в точці M_0 до відстані ρ при $\rho\to 0$.

Позначення $\frac{\partial u(M_0)}{\partial\vec{l}}\overset{def}{=}\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{u(x_0+l_1t,y_0+l_2t,z_0+l_3t)-u(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$.

Очевидно, $u(x_0+l_1t,y_0+l_2t,z_0+l_3t)$ при фіксованих M_0 і $\vec{l}$ є функцією аргумента *t*, позначимо її $\varphi(t)$. Тоді $u(x_0,y_0,z_0)=\varphi(0)$, отже $\frac{\partial u(M_0)}{\partial\vec{l}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0)$.

Отже, формулу для обчислення $\frac{\partial u(M_0)}{\partial\vec{l}}$ одержимо, якщо знайдемо $\varphi'(0)$. Шукаємо похідну від $\varphi(t)$в точці $t=0$, як похідну по t в точці $t=0$ від функції $u(x_0+l_1t,y_0+l_2t,z_0+l_3t)$ як складеної функції. Одержимо $\frac{\partial u}{\partial\vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$. Або остаточно $\frac{\partial u(M_0)}{\partial\vec{l}}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}l_1+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}l_2+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}l_3$.

Означення. Градієнтом неперервно диференційовного скалярного поля $u(x,y,z)$ в кожній його точці називається вектор, координати якого дорівнюють частинним похідним $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точках скалярного поля.

Позначення: $\operatorname{grad}u(M)=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ або за допомогою векторно-диференціального оператора $\vec{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}$ градієнт $\operatorname{grad}u$ запишемо у вигляді $\vec{\nabla}u=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}u$.

Із формули похідної скалярного поля $u(x,y,z)$ в напрямі одиничного вектора $\vec{l}(l_1,l_2,l_3)$, $|\vec{l}|=1$ маємо

$$\frac{\partial u(M)}{\partial\vec{l}}=\frac{\partial u(M)}{\partial x}l_1+\frac{\partial u(M)}{\partial y}l_2+\frac{\partial u(M)}{\partial z}l_3=\left(\operatorname{grad}u(M)\cdot\vec{l}\right)=\left|\operatorname{grad}u(M)\right|\left|\vec{l}\right|\cos\varphi,$$

де φ – кут між вектором $\operatorname{grad}u(M)$ та одиничним вектором $\vec{l}$.

Далі $\frac{\partial u(M)}{\partial\vec{l}}=\left|\operatorname{grad}u(M)\right|\cos\varphi$, так як $|\vec{l}|=1$.

З одержаної рівності випливає, що вектор градієнт в точці M вказує напрям найбільшої швидкості зміни скалярного поля в цій точці, і ця найбільша швидкість дорівнює модулю градієнта скалярного поля в т. M $\max\frac{\partial u(M)}{\partial\vec{l}}=\left|\operatorname{grad}u(M)\right|$.

Властивості градієнта пов’язані з властивостями диференційованих функцій, а саме:

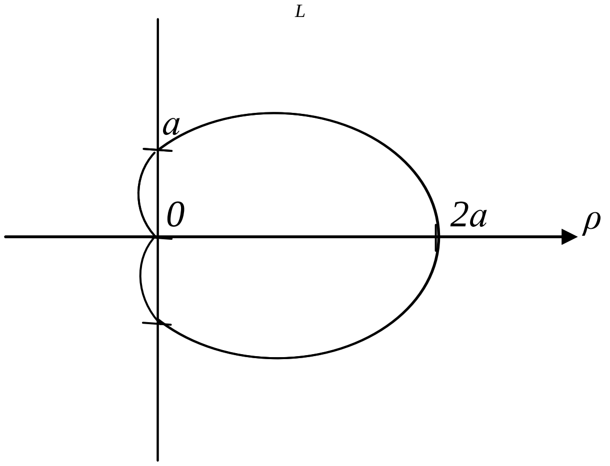
1) $\vec{\nabla}(cu) = c\vec{\nabla}(u),\ c = const$;

2) $\vec{\nabla}(u+v) = \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}v$;

3) $\vec{\nabla}(uv) = \vec{\nabla}u \cdot v + u \cdot \vec{\nabla}v$;

4) $\vec{\nabla}\big(f(u)\big) = f'(u)\vec{\nabla}u$.

2. Оскільки функція $\rho = a(1+\cos\varphi), a > 0$ є парною відносно $\cos\varphi$, а лінійна густина маси $\delta(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$, то шукана маса визначатиметься як визначений інтеграл по довжині дуги виду $M = \int\limits_L \delta(\rho,\varphi)dl$, де $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$.



Обчислимо диференціал довжини дуги:

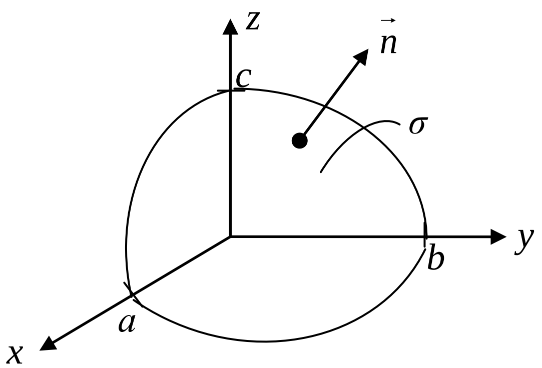
$\rho'(\varphi) = -a\sin\varphi$,

$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(2+2\cos\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi)$.

$$M = \int\limits_L \frac{1}{\sqrt{\rho}}dl = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\varphi}}{\sqrt{a(1+\cos\varphi)}}d\varphi = 2\sqrt{2a}\int\limits_0^{\pi} d\varphi = 2\pi\sqrt{2a}.$$

Відповідь: маса кардіоїди $M = 2\pi\sqrt{2a}$.

3. За означенням, потік векторного поля через зовнішню сторону поверхні обчислюється за формулою $\Pi = \iint\limits_\sigma (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iint\limits_\sigma zdydz + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdy$.



Зведемо обчислення цього інтеграла по заданій правильній відносно всіх координатних осей поверхні до подвійного інтеграла по проекції σ на відповідну координатну площину.

1. $\iint\limits_{\sigma} zdydz = \iint\limits_{D_{yz}} zdydz = \int\limits_0^b dy \int\limits_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} zdz = \int\limits_0^b z^2\Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^b c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy =$

$= \frac{c^2}{2}\left(b - \frac{1}{b^2}\frac{y^3}{3}\Big|_0^b\right) = \frac{c^2}{2}\left(b-\frac{b}{3}\right) = \frac{bc^2}{3}.$

2. $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy =$

$$\left[\begin{array}{l} \textit{Узагальнені полярні координати}: \\ x = a\rho\cos\varphi; \\ y = b\rho\sin\varphi; \\ J = ab\rho. \end{array}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 ab\rho d\rho = ab\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Отже, $\Pi = \iint\limits_{\sigma}\left(\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma = \frac{bc^2}{3}+\frac{\pi ab}{4} = \frac{b}{12}\left(4c^2+3a\pi\right).$

Відповідь: $\Pi = \frac{b}{12}\left(4c^2+3a\pi\right)$

4. За методом Лагранжа складаємо функцію Лагранжа $L\left(x,y,\lambda\right) = x + y + \lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}\right).$

1) Необхідні умови існування умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \frac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \frac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2\lambda}{x^3} = 1 \\ \frac{2\lambda}{y^3} = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \frac{y^3}{x^3} = 1 \\ y^3 - x^3 = 0 \\ (y-x)(y^2+xy+y^2) = 0 \end{array}$$

Отже, $y = x$. З останнього рівняння системи одержимо

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad x^2 = 4, \qquad \begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 2 \\ y_{1,2} = \pm 2 \\ \lambda_{1,2} = \pm 4 \end{array}$$

Точки можливого умовного екстремуму:

$M_1(2,2), \lambda_1 = 4;\ M_2(-2,-2), \lambda_2 = -4.$

2) Перевіримо достатні умови існування екстремуму в точках M_1 та M_2.

При знайдених значеннях λ запишемо d^2L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{6\lambda}{x^4}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{6\lambda}{y^4}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$d^2L = \frac{6\lambda}{x^4}dx^2 + \frac{6\lambda}{y^4}dy^2.$$

Перевіряємо знаковизначеність d^2L в кожній з підозрілих точок:

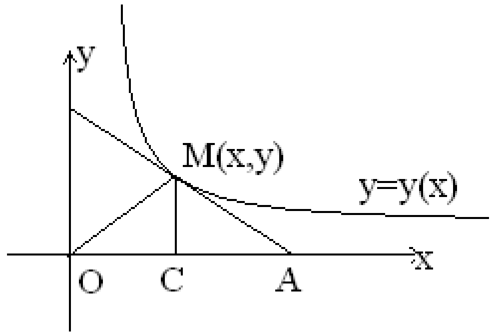
а) $d^2L(M_1)=\frac{3}{2}dx^2+\frac{3}{2}dy^2>0$ для довільних dx,dy таких, що $dx^2+dy^2\neq 0$.

Оскільки $d^2z(M_1)$ – додатньовизначена квадратична форма відносно dx і dy, то т. $M_1(2,2)$ є точкою умовного мінімуму.

б) $d^2L(M_2)=-\frac{3}{2}dx^2-\frac{3}{2}dy^2<0$, отже, т. $M_2(-2,-2)$ – точка умовного максимуму.

Відповідь: $z_{\text{ум.min}}=4$ в т. $(2,2)$; $z_{\text{ум.max}}=-4$ в т. $(-2,-2)$.

5. Нехай рівняння шуканої кривої $y=y(x)$, де $y(x)$ диференційовна функція.



Позначимо через $M(x,y)$ довільну точку кривої $y=y(x)$, OM – її радіус-вектор. Рівняння дотичної, проведеної до шуканої кривої в точці $M(x,y)$ має вигляд $Y-y=y'(x)(X-x)$, де X,Y – координати довільної точки дотичної. Площа трикутника MCA

$$S_{\vartriangle MCA}=\frac{1}{2}MC\cdot OA, \text{ де } MC\perp OX, MC=y_M.$$

OA знайдемо з рівняння дотичної, покладаючи $Y=0$. Одержимо $OA=X=-\frac{y}{y'}+x$.

Тобто $S_{\vartriangle MCA}=\frac{1}{2}\left|y\cdot(-\frac{y}{y'}+x)\right|$.

За умовою, $\frac{1}{2}\left|yx-\frac{y^2}{y'}\right|=a^2$. Одержали диференціальне рівняння I-го порядку.

1 випадок: $\frac{1}{2}(yx-\frac{y^2}{y'})=a^2$, звідки $\frac{y^2}{y'}=yx-2a^2$, або $\frac{dx}{dy}y^2=xy-2a^2$, $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-\frac{2a^2}{y^2}$. Одержали лінійне рівняння відносно $x=x(y)$. Розв'язуємо його за методом Бернуллі: $x=u(y)v(y)$, $x'(y)=u'v+v'u$,

$$u'v+v'u-\frac{uv}{y}=-\frac{2a^2}{y^2} \qquad \begin{cases}\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}\\ u'v=-\frac{2a^2}{y^2}\end{cases} \qquad v=y$$

$$u'v+u(v'-\frac{v}{y})=-\frac{2a^2}{y^2} \qquad u'=-\frac{2a^2}{y^3}$$

$$u=\frac{a^2}{y^2}+C$$

Рівняння прямої має вигляд $x(y)=(\frac{a^2}{y^2}+C)y$. $x(y)=Cy+\frac{a^2}{y}$.

2 випадок: $\frac{1}{2}(yx-\frac{y^2}{y'})=-a^2$

$\frac{y^2}{y'}=2a^2+yx$, або $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=\frac{2a^2}{y^2}$.

Аналогічно, $x=uv, x'=u'v+v'u$

$$u'v+v'u-\frac{uv}{y}=\frac{2a^2}{y^2} \qquad u'v+u(v'-\frac{v}{y})=\frac{2a^2}{y^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{v}=\dfrac{dy}{y} \\ u'v=\dfrac{2a^2}{y^2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} v=y \\ u'=\dfrac{2a^2}{y^3} \end{matrix} \qquad u=-\frac{a^2}{y^2}+C.$$

$$x(y)=y(-\frac{a^2}{y^2}+C) \qquad x(y)=Cy-\frac{a^2}{y}.$$

Відповідь: $x(y)=Cy\pm\dfrac{a^2}{y}.$